

**PRISCILA CAVAGNOLLI BELTRAME**

**Um estudo sobre a implementação computacional das derivadas parciais do  
modelo de *Black and Scholes* via modelo Binomial e simulação de Monte Carlo**

Monografia apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de São Paulo  
para conclusão do MBA em Engenharia  
Financeira.

Área de Concentração: Engenharia  
Financeira

Orientador: Prof. Dr. Danilo Zucolli  
Figueiredo

São Paulo  
2017

## **AGRADECIMENTOS**

À minha família, em especial minha mãe, meu irmão e minha tia-avó (*in memoriam*), que não mediram esforços para que hoje eu pudesse realizar esse sonho.

Ao meu namorado Luis Baccan que ouviu os meus desabafos e soube me apoiar nos momentos de angústia.

Ao Professor Doutor Danilo Zucolli Figueiredo pela sua paciência e seu olhar crítico que me ajudou a superar os desafios desse trabalho.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação.

## RESUMO

Com o crescente mercado de derivativos, em especial o de opções financeiras, este trabalho se propôs a comparar computacionalmente o retorno do “preço justo” e das derivadas parciais, conhecidas como letras gregas, obtidos pelo modelo Binomial e pela simulação de Monte Carlo em relação aos obtidos pelo modelo de *Black and Scholes*, bem como o custo computacional de cada simulação. Para tanto, foram selecionadas e simuladas computacionalmente em linguagem *Visual Basic for Applications (VBA)* opções financeiras de compra e venda do tipo europeia de empresas com grande liquidez na Bolsa de Valores de São Paulo ( $B^3$ -Brasil, Bolsa, Balcão). Os resultados obtidos sugerem que o modelo Binomial pode ser utilizado como alternativa ao modelo de *Black and Scholes* tanto para o cálculo do “preço justo” quanto para o cálculo das letras gregas, pois apresenta convergência satisfatória e baixo custo computacional em relação à simulação de Monte Carlo.

**Palavras-Chave:** Opções financeiras. Modelo de *Black-Scholes*. Método de Monte Carlo.

## ABSTRACT

With the growing market for derivatives, especially the financial options option, this work aimed to compare the return of the "fair price" and the partial derivatives, known as Greek letters, obtained by the Binomial model and the Monte Carlo simulation in relation to those obtained by the Black and Scholes model, as well as the computational cost of each simulation. In order to do so, we selected and simulated computationally in Visual Basic for Applications (VBA) financial options to buy and sell the European type of companies with great liquidity in the São Paulo Stock Exchange (*B<sup>3</sup>-Brazil, Bolsa, Balcão*). The results suggest that the Binomial model can be used as an alternative to the Black and Scholes model both for the calculation of the "fair price" and for the calculation of the Greek letters, since it presents satisfactory convergence and low computational cost in relation to the Monte simulation Carlo.

**Keywords:** Financial options. Black-Scholes model. Monte Carlo method.

## SUMÁRIO

|         |  |    |
|---------|--|----|
| 1       | INTRODUÇÃO . . . . .   | 9  |
| 1.1     | Introdução ao tema . . . . .   | 9  |
| 1.2     | Justificativa do tema . . . . .  | 10 |
| 1.3     | Estrutura do trabalho . . . . .  | 10 |
| 2.      | CONCEITOS BÁSICOS SOBRE OPÇÕES . . . . .                               | 11 |
| 2.1     | Opções financeiras . . . . .   | 11 |
| 2.2     | Mercado de opções . . . . .  | 11 |
| 2.3     | Classificação das opções. . . . .                                      | 12 |
| 2.4     | Opções de compra ( <i>Call</i> ). . . . .                              | 12 |
| 2.5     | Opções de venda ( <i>Put</i> ). . . . .                                | 14 |
| 2.6     | Probabilidade de exercício ( <i>Moneyness</i> ). . . . .               | 15 |
| 2.7     | Fatores que influenciam o preço de uma opção. . . . .                  | 16 |
| 2.7.1   | Preço à vista do ativo-objeto e preço de exercício. . . . .            | 16 |
| 2.7.2   | Prazo até o vencimento. . . . .  | 17 |
| 2.7.3   | Volatilidade do ativo-objeto. . . . .                                  | 17 |
| 2.7.4   | Taxa de juros livre de risco. . . . .                                  | 17 |
| 2.7.5   | Pagamento de dividendos. . . . .                                       | 18 |
| 2.7.6   | Efeito da variação de um dos parâmetros no preço de uma opção. . . . . | 18 |
| 2.8     | Limites superiores e limites inferiores de opções. . . . .             | 19 |
| 2.8.1   | Limites superiores. . . . .  | 19 |
| 2.8.2   | Limites inferiores. . . . .  | 19 |
| 2.9     | Paridade <i>Put-Call</i> . . . . .                                     | 20 |
| 3.      | MODELOS DE PRECIFICAÇÃO. . . . .                                       | 22 |
| 3.1     | Modelo de <i>Black and Scholes</i> . . . . .                           | 22 |
| 3.1.1   | Medidas de sensibilidade . . . . .                                     | 23 |
| 3.1.1.1 | Delta . . . . .  | 24 |
| 3.1.1.2 | Gamma . . . . .  | 24 |
| 3.1.1.3 | Rho . . . . .  | 24 |
| 3.1.1.4 | Theta. . . . .   | 25 |
| 3.1.1.5 | Vega . . . . .   | 25 |

|     |                                   |    |
|-----|-----------------------------------|----|
| 3.2 | Modelo Binomial . . . . .         | 26 |
| 3.3 | Simulação de Monte Carlo. . . . . | 27 |
| 4.  | METODOLOGIA. . . . .              | 29 |
| 5.  | RESULTADOS. . . . .               | 33 |
| 5.1 | Opções do Banco Bradesco. . . . . | 33 |
| 5.2 | Opções do Banco Itaú . . . . .    | 37 |
| 5.3 | Opções da Petrobrás . . . . .     | 41 |
| 6.  | CONCLUSÕES . . . . .              | 45 |

## 1. INTRODUÇÃO

O objetivo desse capítulo é apresentar o tema, a justificativa e a estrutura desse trabalho.

### 1.1 INTRODUÇÃO AO TEMA

A dinâmica dos mercados exige que os investidores possam escolher de forma adequada o risco para suas operações financeiras. Dessa forma, o mercado de derivativos, principalmente o de opções, tem se tornado cada vez mais popular, como forma de proteção contra os riscos provenientes das variações de taxas, moedas ou preços. Porém, o problema central da comercialização desses instrumentos financeiros é estabelecer o “preço justo”, ou seja, o prêmio da opção.

O prêmio é o preço que o titular paga ao lançador de uma opção para obtê-la, ou seja, é o preço da opção, que é estabelecido em negociações realizadas nos pregões das bolsas ou no mercado de balcão. Dessa forma, torna-se extremamente importante conhecer os principais modelos de apreçamento de opções e os fatores que os influenciam. Dentre eles destacam-se o Modelo de *Black and Scholes* (B&S), o Modelo Binomial e a Simulação de Monte Carlo. Sendo o de B&S, um dos mais difundidos, devido à sua relativa simplicidade e boa aproximação em relação aos valores observados no mercado.

O modelo *Black and Scholes* consiste em equações que visam obter o prêmio das opções do tipo europeia por meio de fórmulas fechadas, as quais demonstram que é possível criar uma posição protegida dos investimentos. Além de proporcionar análises mais sensíveis das variáveis que compõem os fatores de risco associados às opções, que podem ser obtidas por meio do retorno das derivadas parciais do modelo, conhecidas como letras gregas. Entretanto, o modelo de B&S apresenta um conjunto de premissas que o torna inviável em situações cujas opções apresentem estruturas mais complexas.

Nesse contexto, devido à amplitude e importância desse assunto, o presente trabalho tem por objetivo, apresentar os principais conceitos e modelos de precificação de opções (supracitados), bem como implementar computacionalmente, o modelo Binomial e a simulação de Monte Carlo à opções de compra ou venda do

tipo europeia sobre ações (de um ativo não pagador de dividendo) negociadas em bolsa, com a finalidade de comparar a convergência do resultado do prêmio com o oferecido pelo mercado e das letras gregas obtidas por estes com o resultado obtido pelo modelo de B&S, bem como o custo computacional de cada um dos modelos.

Estudos semelhantes já foram desenvolvidos a respeito deste assunto, tal como a monografia de Fernandes (2016), que dentre os objetivos propostos, comparou o “preço justo” e as derivadas parciais obtidas pelo modelo Binomial aos resultados obtidos pelo modelo de *Black and Scholes* tendo em vista ativos negociados no Brasil. O autor concluiu que o Modelo Binomial é uma alternativa bastante eficiente ao modelo de B&S.

## **1.2 JUSTIFICATIVA DO TEMA**

Os resultados desse trabalho proporcionarão aos investidores subsídios para calcular computacionalmente o prêmio e as letras gregas de opções de compra ou venda do tipo europeia, pelos principais métodos de precificação, avaliando o custo computacional e precisão de cada modelo, de modo que, usando os valores obtidos, possam optar pelos melhores investimentos frente ao risco administrado.

## **1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO**

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos, além dessa introdução. No segundo capítulo é apresentado o referencial teórico com os conceitos fundamentais sobre opções. O terceiro capítulo descreve os principais modelos de apreciamento de opções. O quarto capítulo apresenta a metodologia utilizada. O quinto capítulo os resultados obtidos e o sexto e último capítulo, as considerações finais.

## 2. CONCEITOS BÁSICOS SOBRE OPÇÕES

O objetivo desse capítulo é apresentar uma breve revisão teórica sobre opções, com a finalidade de subsidiar a formulação das hipóteses e dos resultados desse trabalho.

### 2.1 OPÇÕES FINANCEIRAS

Opções são instrumentos financeiros que conferem ao titular (comprador) um direito e ao lançador (vendedor) uma obrigação, mediante ao pagamento de um prêmio em dinheiro cotado em valores unitários. Ao titular cabe o direito de compra (opção de compra) ou venda (opção de venda) de um ativo financeiro ou mercadoria (ativo-objeto), numa dada quantidade (unidade de transação), em uma (ou até) determinada data futura (data de maturidade) a um preço fixo (preço de exercício). Ao lançador cabe a obrigação de comprar (em opções de venda) ou vender (em opções de compra) o ativo-objeto negociado, no caso do titular exercer seu direito.

### 2.2 MERCADO DE OPÇÕES

No mercado brasileiro, as opções sobre ações, as quais serão alvo do nosso estudo, são negociadas em bolsas de valores com vencimento sempre na terceira segunda-feira de cada mês e podem ser identificadas no pregão por cinco letras mais um número. As quatro primeiras letras compõem o código da empresa emissora, a quinta letra designa o tipo e o mês de vencimento da opção, seguido pelo número que representa o preço de exercício.

**Quadro 1:** Códigos do tipo de opção com o mês de referência

| Opção  |       | Vencimento |
|--------|-------|------------|
| Compra | Venda | Mês        |
| A      | M     | Janeiro    |
| B      | N     | Fevereiro  |
| C      | O     | Março      |

|   |   |          |
|---|---|----------|
| D | P | Abril    |
| E | Q | Maio     |
| F | R | Junho    |
| G | S | Julho    |
| H | T | Agosto   |
| I | U | Setembro |
| J | V | Outubro  |
| K | W | Novembro |
| L | X | Dezembro |

Fonte: A autora

## 2.3 CLASSIFICAÇÕES DAS OPÇÕES

As opções têm vencimento e dependendo da modalidade do exercício, podem ser classificadas em americanas ou europeias, as quais conferem aos titulares direitos sutilmente diferentes. As opções europeias podem ser exercidas apenas na data de maturidade, enquanto as opções americanas podem ser exercidas em qualquer data até a data de maturidade. Dessa forma, os preços referentes às opções americanas são maiores do que as europeias, já que possibilitam ao titular uma maior probabilidade de realizar ganhos nas operações (HULL, 2005).

## 2.4 OPÇÃO DE COMPRA (CALL)

As opções de compra, chamadas de *call*, conferem ao titular o direito de comprar o ativo-objeto pelo preço de exercício antes (opção americana) ou na data de maturidade (opção europeia). Segundo Hull (2005, p.185), o valor intrínseco de uma opção de compra ( $C$ ) em uma data  $t$ , pode ser expresso da seguinte forma:

$$C_t = \max\{(S_t - K), 0\}$$

onde  $S_t$  é o valor à vista do ativo-objeto na data  $t$  e  $K$  é o preço de exercício. Portanto, o melhor resultado proporcionado por uma opção de compra ao seu titular, nas datas de possível exercício, ocorrerá se o valor à vista do ativo-objeto for

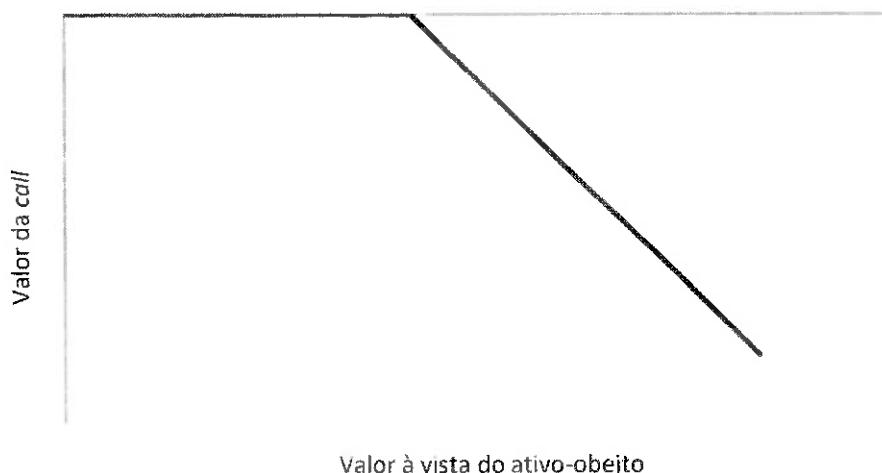
superior ao preço do exercício. O pior resultado será zero, caso a opção não seja exercida e tem-se prejuízo do prêmio pago inicialmente. Os gráficos abaixo ilustram os *payoffs* de uma *call* do tipo europeia.

**Gráfico 1 – Payoffs do titular de uma opção de compra europeia**



Fonte: A autora

**Gráfico 2 – Payoffs do lançador de uma opção de compra europeia**



Fonte: A autora

Os gráficos 1 e 2 representam apenas os ganhos absolutos da operação no momento que a opção é exercida ou quando o seu prazo expira, ignorando o prêmio pago pelo titular e recebido pelo lançador da opção.

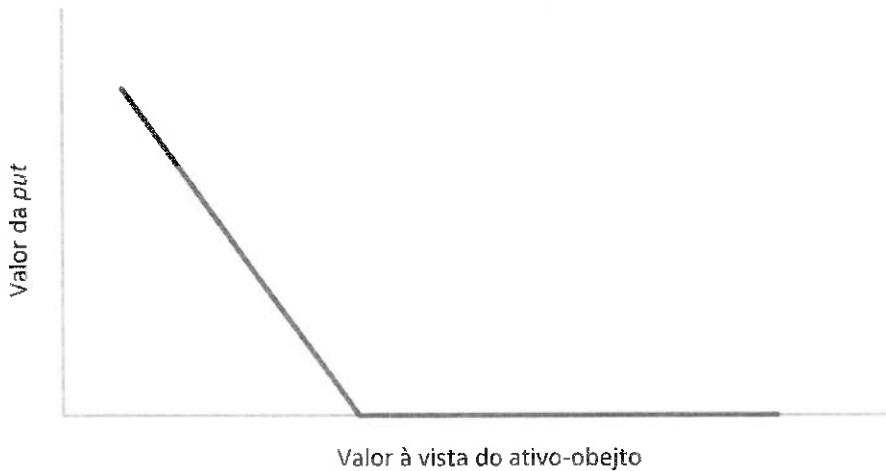
## 2.5 OPÇÃO DE VENDA (PUT)

As opções de venda, chamadas de *put*, conferem ao titular o direito de vender o ativo-objeto pelo preço de exercício antes (opção americana) ou na data de maturidade (opção europeia). Segundo Hull (2005, p.185), o valor intrinseco de uma opção de venda ( $P$ ) em uma data  $t$ , pode ser expresso da seguinte forma:

$$P_t = \max\{0, (K - S_t)\},$$

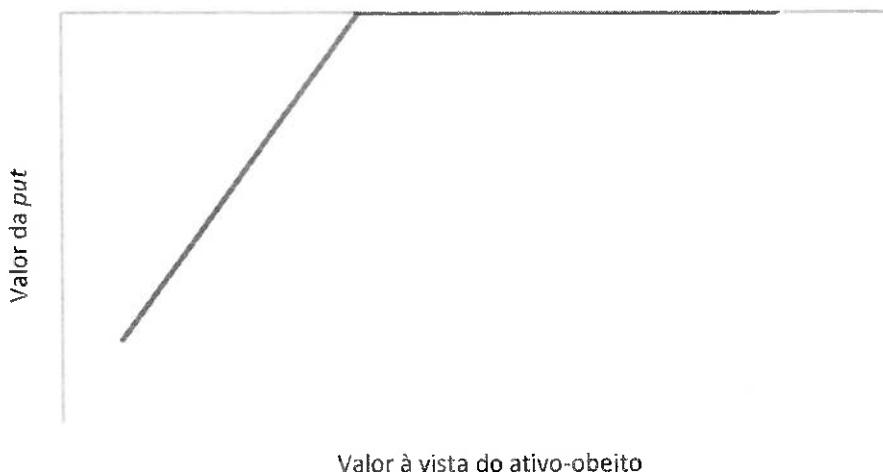
onde  $S_t$  é a cotação à vista do ativo-objeto na data  $t$  e  $K$  é o preço de exercício. Portanto, o melhor resultado proporcionado por uma opção de venda ao seu titular, nas datas de possível exercício, ocorrerá se a cotação à vista do ativo-objeto for inferior ao preço do exercício. O pior resultado será zero, caso a opção não seja exercida e tem-se prejuízo do prêmio pago inicialmente. Os gráficos abaixo ilustram os *payoffs* de uma *put* do tipo europeia.

Gráfico 3 – Payoffs do titular de uma opção de venda europeia



Fonte: A autora

**Gráfico 4 – Payoffs do lançador de uma opção de venda europeia**



Fonte: A autora

Os gráficos 3 e 4 representam apenas os ganhos absolutos da operação no momento que a opção é exercida ou quando o seu prazo expira, ignorando o prêmio pago pelo titular e recebido pelo lançador da opção.

## 2.6 PROBABILIDADE DE EXERCÍCIO (*Moneyness*)

“O termo *moneyness* é definido como uma medida do grau no qual é provável que um ativo tenha valor monetário positivo na data do vencimento ou exercício” (SILVA NETO, 2008, p.74). Ou seja, *moneyness* é a probabilidade da opção ser exercida e pode ser classificada de três formas:

- *In the money* – São opções com valor intrínseco. É uma opção de compra cujo ativo-objeto está sendo negociado no mercado à vista com um preço superior ao preço de exercício; ou uma opção de venda cujo ativo-objeto está sendo negociado no mercado à vista com um preço inferior ao preço de exercício;
- *Out of the money* – São opções sem valor intrínseco. É uma opção de compra cujo ativo-objeto está sendo negociado no mercado à vista com um preço inferior ao preço de exercício; ou uma opção de venda cujo ativo-objeto está sendo negociado no mercado à vista com um preço superior ao preço de exercício;

- *At the money* – São opções sem valor intrínseco em que o preço do ativo-objeto é igual ao preço de exercício, tanto em opções de compra quanto de venda.

**Quadro 2: Moneyness segundo a classe da opção**

| <i>Probabilidade de Exercício (Moneyness)</i> | <i>Opção de Compra (Call)</i> | <i>Opção de Venda (Put)</i> |
|---|-------------------------------|-----------------------------|
| <i>In the money</i>                           | $S > K$                       | $S < K$                     |
| <i>At the money</i>                           | $S = K$                       | $S = K$                     |
| <i>Out the money</i>                          | $S < K$                       | $S > K$                     |

Fonte: A autora

Essa classificação é dinâmica, ou seja, uma mesma opção pode ser, por exemplo, *in the money* em dado instante do tempo e *out of the money* em outro, de acordo com a variação do preço do ativo-objeto, ver Bessada (2000).

## 2.7 FATORES QUE INFLUECIAM O PREÇO DE UMA OPÇÃO

Há alguns parâmetros que influenciam o preço de uma opção. São eles: preço de exercício da opção ( $K$ ), preço no mercado à vista do ativo-objeto ( $S$ ), taxa de juros sem risco ( $r$ ), volatilidade do ativo-objeto ( $\sigma$ ), prazo de vencimento da opção ( $T$ ) e por vezes os dividendos, caso o ativo-objeto seja uma ação.

### 2.7.1 PREÇO À VISTA DO ATIVO-OBJETO E PREÇO DE EXERCÍCIO

O preço de exercício e o valor do ativo-objeto no mercado à vista, denotado por ( $K$ ) e ( $S$ ), respectivamente, definem se a opção está *at the money*, *in the money* ou *out the money*. Considerando-se todos os outros fatores que influenciam o preço da opção constantes, para opções de compra, quando o preço do ativo-objeto sobe, o prêmio da opção também sobe, pois maior será  $\max[(S_t - K), 0]$ , e portanto, a probabilidade da opção de compra estar *in the money* também será maior (HULL, 2005). De maneira análoga, para opções de venda, o prêmio da opção cai à medida

que o preço da ação sobe, pois a opção tende a ficar cada vez mais *out the money*, o que diminui a probabilidade de exercício (HULL, 2005). Em ambos os casos, o inverso também é verdadeiro.

### 2.7.2 PRAZO ATÉ O VENCIMENTO

O prazo até o vencimento, denotado por ( $T$ ), afeta a volatilidade do ativo-objeto, pois quanto maior for o prazo até o vencimento, maior poderá ser a dispersão dos preços do ativo-objeto na data de vencimento. Dessa forma, opções tanto de compra quanto de venda, com prazos mais longos valem mais (HULL, 2005).

### 2.7.3 VOLATILIDADE DO ATIVO-OBJETO

A volatilidade, denotado por ( $\sigma$ ), é a medida da incerteza acerca dos movimentos de preços futuros da ação (Hull, 2005). Quanto maior a volatilidade, maior a chance do preço do ativo subir (opções de compra) ou cair (opções de venda) em relação ao preço de exercício, e portanto, maior a probabilidade de que a opção termine *in the money*. Dessa forma, os ativos de maior volatilidade implicam em preços maiores, tanto para opções de compra quanto para opções de venda. Entretanto ao contrário dos outros parâmetros que apresentam valor numérico exato, a volatilidade é um parâmetro subjetivo que pode ser obtido por métodos matemáticos.

Segundo Silva (1996), os métodos mais comuns para obter a volatilidade são a volatilidade histórica e a implícita. Neste trabalho usaremos a volatilidade implícita, que pode ser interpretada como a estimativa de mercado para a volatilidade do preço do ativo-objeto, obtida pelo modelo de *Black and Scholes*.

### 2.7.4 TAXA DE JUROS LIVRE DE RISCO

A taxa de juros livre de risco, denotada por ( $r$ ), influencia a determinação do valor presente do preço de exercício, de uma maneira não tão óbvia. Quando a taxa

de juros aumenta, o retorno esperado do preço do ativo-objeto pelos investidores tende a aumentar também. Por outro lado, o valor presente de qualquer fluxo de caixa futuro recebido pelo titular de uma opção diminui. O impacto combinado desses dois efeitos é o aumento do valor da opção de compra e a diminuição do valor da opção de venda (HULL, 2005).

## 2.7.5 PAGAMENTO DE DIVIDENDOS

No caso de opções sobre ações, o pagamento de dividendos, reduz o preço da ação na data ex-dividendos, pois o preço das ações é ajustado e cai de um montante igual ao valor dos dividendos. As opções de compra perdem valor e as opções de venda, contrariamente ganham valor. Entretanto vale ressaltar que no Brasil, o qual é o mercado alvo deste estudo, as opções negociadas em bolsa são ajustadas para dividendos, ou seja, o preço de exercício é reduzido do mesmo montante dos dividendos pagos fazendo com que o efeito do pagamento de dividendos seja nulo.

## 2.7.6 EFEITO DA VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS NO PREÇO DE UMA OPÇÃO

**Quadro 3:** Efeito no preço de uma opção quando um parâmetro é alterado e os demais permanecem fixos

| Fatores determinantes           | Efeito em opções de |       |
|---------------------------------|---------------------|-------|
|                                 | compra              | Venda |
| Preço à vista do ativo-objeto   | +                   | -     |
| Preço de exercício da opção     | -                   | +     |
| Taxa de juros sem risco         | +                   | -     |
| Volatilidade do ativo-objeto    | +                   | +     |
| Prazo até o vencimento da opção | +                   | +     |
| Dividendos e bonificações       | -                   | +     |

+ indica que um aumento na variável causa um aumento no preço da opção

- indica que um aumento na variável causa uma queda no preço da opção

Fonte: A autora

## 2.8 LIMITES SUPERIORES E INFERIORES PARA PREÇOS DE OPÇÕES

Se um preço de opção está acima de certo limite superior ou abaixo de certo limite inferior, significa que há oportunidades lucrativas para arbitradores.

### 2.8.1 LIMITES SUPERIORES

Uma opção de compra não pode valer mais do que o ativo-objeto. Dessa forma, o preço do ativo-objeto é um limitador superior para o preço da opção:

$$C \leq S_0$$

Se essa relação não fosse respeitada, um arbitrador poderia facilmente obter um lucro sem risco comprando a ação e vendendo a opção de compra.

De maneira análoga, uma opção de venda não pode valer mais do que seu preço de exercício. Portanto, o preço de exercício é um limitador superior para o preço da opção:

$$P \leq Ke^{-rT}$$

“Se essa relação não fosse respeitada, um arbitrador poderia obter um lucro sem risco lançando a opção e investindo o resultado da venda à taxa livre de risco” (HULL, 2005, p.210).

### 2.8.2 LIMITES INFERIORES

Para exemplificar o conceito de limites inferiores para opções de compra considere os portfólios a seguir (Hull, 2005):

- Portfólio A: uma opção de compra europeia mais uma quantidade de dinheiro igual a  $Ke^{-rT}$  (valor presente de  $K$ ).
- Portfólio B: uma unidade do ativo-objeto.

No portfólio A, o caixa investido à taxa de juros livre de risco, valerá  $K$  no instante  $T$ . Se,  $S_T \geq K$ , a opção de compra será exercida no vencimento e o valor do portfólio A será  $S_T$ . Se,  $S_T < K$ , a opção de compra não será exercida e o portfólio valerá  $K$ . Portanto, no instante  $T$ , o portfólio A vale

$$\max\{S_T, K\}.$$

O portfólio B vale  $S_T$  no instante  $T$ . Logo, o valor do Portfólio A é sempre maior ou igual ao do Portfólio B:

$$C + Ke^{-rT} \geq S_0 \rightarrow C \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

Note que o pior que pode acontecer com uma opção de compra é ela não ser exercida, pois seu valor não pode ser negativo. Isso significa que:

$$C \geq \max\{S_0 - Ke^{-rT}, 0\}.$$

De forma análoga, para exemplificar o conceito de limites inferiores para opções de venda considere os portfólios a seguir (Hull, 2005):

- Portfólio C: uma opção de venda europeia mais uma unidade do ativo objeto.
- Portfólio D: uma quantidade em caixa equivalente a  $Ke^{-rT}$ .

Se  $S_T < K$ , então a opção no portfólio C é exercida no vencimento e o valor do portfólio C é igual a K. Se  $S_T > K$ , a opção não é exercida e o valor do portfólio é  $S_T$ . Portanto, o portfólio C, no instante  $T$  vale:

$$\max\{S_T, K\}.$$

Assumindo a premissa que o caixa no portfólio D seja investido à taxa de juros livre de risco, ele vale  $K$  no instante  $T$ . Logo, o valor do portfólio C é pelo menos igual ao valor do portfólio D no instante  $T$ . Segue que quando não há possibilidade de arbitragem, o portfólio C deve valer pelo menos o que vale o portfólio D. Portanto,

$$P + S_0 \geq Ke^{-rT} \rightarrow P \geq Ke^{-rT} - S_0$$

Como o pior que pode acontecer é a opção de venda não ser exercida e valer zero, seu valor não pode ser negativo. Portanto,

$$P \geq \max\{Ke^{-rT} - S_0, 0\}.$$

## 2.9 PARIDADE PUT-CALL

Considere os portfólios A e C utilizados anteriormente. Ambos valem no vencimento:

$$\max\{S_T, K\}.$$

Como as opções são europeias, ou seja, só podem ser exercidas na data de maturidade, ambos os portfólios possuem o mesmo valor no instante atual. Isso implica que:

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0.$$

Essa relação entre as opções de compra ( $C$ ) e de venda ( $P$ ) é conhecida como paridade *put-call*. Sua importância é demonstrar que o valor de uma opção de compra europeia de preço  $K$  pode ser deduzido de uma opção de venda europeia de mesmo vencimento e preço de exercício e vice-versa.

### 3. MODELOS DE PRECIFICAÇÃO

O objetivo desse capítulo é apresentar os principais modelos de precificação de opções e suas variações. Para tal, por simplicidade, serão analisadas apenas opções europeias sobre ações não pagadoras de dividendos.

#### 3.1 MODELO DE *BLACK AND SCHOLES*

Desenvolvido em meados de 1970, por Fisher Black e Miron Scholes, o modelo conhecido como *Black and Scholes* (B&S), largamente utilizado até os dias de hoje para precificar opções, consiste em um conjunto de equações que visam o cálculo do “prêmio justo” das opções em função de cinco variáveis: o preço do ativo-objeto à vista ( $S$ ), o preço de exercício ( $K$ ), a taxa de juros livre de risco ( $r$ ), o prazo até a data de maturidade ( $T$ ) e a volatilidade do ativo-objeto ( $\sigma$ ). Onde todos os termos são conhecidos, exceto a volatilidade que é um fator subjetivo.

Segundo Jackson e Staunton (2001), o modelo pressupõe que o preço do ativo-objeto segue um processo estocástico com uma sequência multiplicativa de movimentos, o que é conhecido como movimento Browniano geométrico. Matematicamente falando, isso significa que a variável aleatória  $S_T$  pode ser escrita como uma equação estocástica da forma:

$$S_T = S e^{Y_T} = S e^{\mu_T + \epsilon \sigma_T}$$

onde a variável aleatória  $Y_T$ , é normalmente distribuída e a variável  $\epsilon$  segue uma distribuição normal padrão, com média 0 e desvio padrão igual a 1.  $Y_T$  tem média  $\mu_T$  e desvio padrão  $\sigma_T$ , onde:

$$\mu_T = (\mu - 0.5\sigma^2)T$$

$$\sigma_T = \sigma\sqrt{T}$$

com  $\mu$  a média da taxa de retorno e  $\sigma$  a volatilidade anualizada do ativo-objeto. Como  $Y_T$  é igual a  $\ln\left(\frac{S_T}{S}\right)$  a variável é também normalmente distribuída. Dessa forma, a fórmula de *Black and Scholes* para uma opção de compra europeia, que tem como ativo-objeto uma ação que não paga dividendos é dada por:

$$C = S N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

Analogamente, tem-se a fórmula para a opção de compra

$$P = Ke^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

Nas equações acima  $N(d_1)$  e  $N(d_2)$  representam a distribuição normal acumulada até “ $d_1$ ” e até “ $d_2$ ” que são dados por:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (1)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (2)$$

Cabe notar que para desenvolver o modelo, os autores adotaram algumas premissas. São elas:

- a) O comportamento do preço do ativo-objeto segue um passeio aleatório, com distribuição lognormal, com  $\sigma$  constantes;
- b) Não há custos operacionais ou taxas. É possível negociar qualquer quantidade do ativo-objeto;
- c) O ativo-objeto não paga dividendos ou qualquer outro rendimento;
- d) Não há oportunidade de arbitragem sem risco;
- e) É possível negociar o ativo-objeto a qualquer instante;
- f) A taxa de juros livre de risco é constante ao longo do tempo;
- g) Investidores podem alugar ou emprestar o ativo-objeto pela mesma taxa de juros livre de risco.

Contudo, vale ressaltar que algumas dessas premissas foram flexibilizadas ao longo do tempo por alguns pesquisadores. Por exemplo, variações da fórmula de *Black and Scholes* podem ser utilizadas quando  $r$  e  $\sigma$  são funções do tempo e a fórmula pode ser ajustada para considerar dividendos.

### 3.1.1 MEDIDAS DE SENSIBILIDADE

Além do preço justo da opção, o modelo também nos informa como este se comporta quando uma das variáveis que o influenciam é alterada enquanto as outras são mantidas constantes. Essas informações são obtidas por meio das cinco derivadas parciais da função de precificação em relação a cada uma de suas variáveis. Também conhecidas como “letras gregas”, *delta*, *gamma*, *rho*, *theta* e *vega*, decompõem os fatores de risco associados à posição em opções e auxiliam na formação de estratégias.

### 3.1.1.1 DELTA

O *delta*, denotado por  $\Delta$ , é a primeira derivada da função do preço da opção em relação ao preço do ativo-objeto e pode ser compreendida como um indicativo da exposição da opção às oscilações do preço do ativo-objeto no mercado à vista. Quanto menor for suas variações, mais assertivo será este indicativo. *Delta* tende a 1 para opções *in-the-money*, pois cada variação no preço do ativo-objeto está associada a um mesmo ganho com o provável exercício da opção. Portanto, quanto maior a probabilidade de exercício de uma opção maior será o seu delta.

Para opções de compra europeias que não pagam dividendos, *delta* é dado por (HULL, 2005):

$$\Delta = N(d_1)$$

Analogamente, para opções de venda europeias que não pagam dividendos, temos,

$$\Delta = N(d_1) - 1$$

Onde  $d_1$  é definido na equação (1).

### 3.1.1.2 GAMMA

O *gamma*, denotado por  $\Gamma$ , é a segunda derivada da função do preço em relação ao preço do ativo-objeto. Essa medida nos diz quão rápido o delta da opção pode variar para cada ponto de mudança no preço do ativo-objeto.

Para uma opção de compra ou venda europeia que não paga dividendos, o *gamma* é dado por (HULL, 2005):

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}$$

### 3.1.1.3 RHO

O *rho*, denotado por  $\rho$ , é obtido pela derivada do preço da opção em relação à taxa de juros livre de risco. Quanto maior for o tempo até a data de maturidade de

uma opção mais relevante é a variação da taxa de juros, pois, o fator tempo potencializa a alteração do custo de oportunidade de se manter um determinado valor imobilizado de uma opção. Para opções de compra do tipo europeu que não pagam dividendos (HULL, 2005),

$$\rho = KTe^{-rT}N(d_2)$$

Onde  $d_2$  é definido na equação (2). Para opções de venda,

$$\rho = -KTe^{-rT}N(-d_2)$$

### 3.1.1.4 THETA

O *theta*, denotado por  $\theta$ , é obtido pela derivada do preço de uma opção em relação ao tempo, com todas as outras variáveis constantes. Quase sempre é um valor negativo, portanto, a passagem do tempo atua de forma negativa no preço de uma opção. Isso é devido ao fato de que a opção tende a sofrer menos variações quanto menor for o tempo até a data de maturidade. Quando o preço da opção é muito baixo, *theta* tende a zero. Para opções in-the-money, *theta* é relativamente grande e negativo.

Para opções europeias que não pagam dividendos (HULL, 2005),

$$\theta = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2)$$

onde  $d_1$  e  $d_2$  são definidos nas equações (1) e (2) e

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Para uma opção europeia de venda temos que,

$$\theta = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2)$$

### 3.1.1.5 VEGA

O *vega*, denotado por  $V$ , é obtido pela derivada do valor da opção em relação à volatilidade do ativo-objeto. Se o *vega* é grande, em termos absolutos, o valor da opção é bastante sensível a pequenas variações na volatilidade. Por outro

lado, se o vega é pequeno, em termos absolutos, variações na volatilidade possuem impacto pequeno no valor da opção. Para uma opção de compra ou de venda europeia que não paga dividendos, vega é dado por (HULL, 2005):

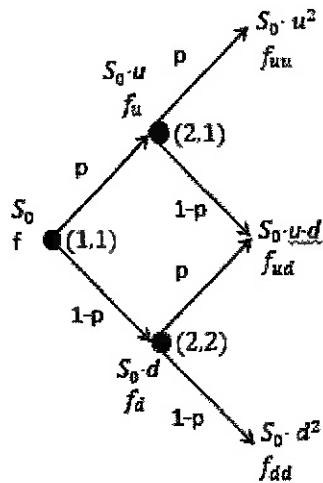
$$V = S\sqrt{T}N'(d_1)$$

Onde  $d_1$  está definido na equação (1) e  $N'(x)$  está definido na equação (3).

### 3.2 MODELO BINOMIAL

Desenvolvido em 1979, por Cox, Ross & Rubinstein, o modelo binomial assume que o preço do ativo-objeto, a cada passo temporal, só possa ter dois cenários possíveis: um de subida e um de descida. Além disso, adota-se que os valores de subida e descida são sempre os mesmos ao longo de todo o período de vida da opção. O modelo pode ser graficamente representado da seguinte forma:

**Figura 1:** Árvore Binomial



Fonte: A autora

Considerando-se a seguinte notação:

$S_0$ : preço do ativo

$u$ : fator de subida do preço do ativo (sendo  $u > 1$ )

$d$ : fator de descida do preço do ativo (sendo  $d > 1$ )

$p$ : probabilidade de subir o preço do ativo

$1 - p$ : probabilidade de descer o preço do ativo

$S_0u$ : preço do ativo depois de uma subida

$S_0d$ : preço do ativo depois de uma descida

$f_u$ : payoff da opção referente a uma subida do ativo

$f_d$ : payoff da opção referente a uma descida do ativo

$f$ : preço atual da opção

Temos:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta T}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta T}}$$

$$p = \frac{e^{-r\Delta T} - d}{u - d}$$

$$f = e^{-r\Delta T} [p \cdot f_u + (1 - p) \cdot f_d]$$

Em que cada nó da árvore o preço do ativo-objeto terá um fator de subida  $u$  com probabilidade  $p$  e um fator de descida  $d$  com probabilidade  $1 - p$ . Onde  $F$  é o preço à vista do ativo-objeto.

O modelo baseia-se no procedimento *backward induction*, em que calculado o valor esperado do ativo em cada nó, pode-se calcular o preço da opção, indo-se de trás para frente na árvore. Na data de maturidade, o preço da opção pode ser determinado simplesmente em função do seu payoff.

### 3.3 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

A simulação de Monte Carlo é um método numérico bastante útil em situações em que a solução fechada de *Black and Scholes* não é viável. Este método foi introduzido por Boyle (1977), e pode ser utilizado para simular uma ampla gama de processos estocásticos. Para ilustrar a simulação de Monte Carlo, considere os processos onde o logaritmo natural do ativo-objeto segue um movimento Browniano geométrico. O processo do ativo-objeto é dado por (JACKSON, STAUNTON, 2001)

$$S + dS = S \cdot e^{[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dz]}$$

Onde  $dz$  é um processo de Wiener com desvio-padrão igual a 1 e média igual a 0. Para simular o processo, vamos considerar que os intervalos são dados em intervalos discretos de tempo,  $\Delta t$  separados:

$$S + \Delta S = S \cdot e^{[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma \epsilon_t \sqrt{\Delta t}]}$$

Onde  $\Delta S$  é a variação de  $S$  no intervalo  $\Delta t$ , e  $\epsilon_t$  é dado por uma distribuição normal padrão.

A única desvantagem desse método numérico é o custo computacional. Normalmente são necessárias no mínimo 10.000 simulações para obter um preço de uma opção com uma precisão satisfatória. O erro no valor estimado é relacionado à raiz quadrada do número de simulações. Mais precisamente, se  $s$  é o desvio-padrão dos *payoffs* das  $n$  simulações, então o erro é dado por  $\frac{s}{\sqrt{n}}$ . Portanto, para duplicar a precisão, precisamos quadruplicar o número de simulações. Então, se quisermos dobrar a precisão de 10.000 simulações, precisamos de 40 mil simulações, e assim por diante.

Os passos na simulação de Monte Carlo são simplesmente simular  $n$  números de caminhos do preço do ativo-objeto. No caso de opções europeias, estamos apenas interessados no valor final do ativo-objeto. Para opções de compra temos que

$$C = \frac{e^{-rT}}{n} \sum_{i=1}^n \max \left[ S \cdot e^{(\frac{b-\sigma^2}{2})T + \sigma \epsilon_i \sqrt{T}} - X, 0 \right]$$

Onde  $\epsilon_i$  é uma variável aleatória com distribuição normal. Analogamente temos para opções de compra que

$$P = \frac{e^{-rT}}{n} \sum_{i=1}^n \max \left[ X - S \cdot e^{(\frac{b-\sigma^2}{2})T + \sigma \epsilon_i \sqrt{T}}, 0 \right]$$

#### 4. METODOLOGIA

Com o intuito de implementar computacionalmente tanto o “preço justo” quanto as derivadas parciais, letras gregas, do modelo de *Black and Scholes*, via modelo Binomial e Simulação de Monte Carlo, optamos por utilizar dados de algumas das maiores empresas com capital aberto e maior liquidez no mercado brasileiro de opções, o Banco Bradesco, o Banco Itaú e a Petrobrás. Para tal, coletamos da página oficial da Bolsa de Valores de São Paulo (*B<sup>3</sup>-Brasil*, Bolsa, Balcão) informações referentes à opções de compra e venda de cada uma dessas empresas, negociadas no pregão do dia 11 de setembro de 2017.

Para o Banco Bradesco foi escolhida a opção de compra BBDCI42 com preço de exercício de R\$ 34,44, com um total de 111 negócios e 180.700 quantidades negociadas, com vencimento em 18 de setembro de 2017, referenciada ao ativo-objeto BBDC4 negociado a R\$ 35,31. E a opção de venda BBDCU42 com preço de exercício de R\$ 34,44, com um total de 103 negócios e 385.400 quantidades negociadas, com vencimento em 18 de setembro de 2017, referenciada ao ativo-objeto BBDC4 negociado a R\$ 35,31.

Para o Banco Itaú foi escolhida a opção de compra ITUBJ12 com preço de exercício R\$ 42,49, com um total de 19 negócios e 41.300 quantidades negociadas, com vencimento em 16 de outubro de 2017, referenciada ao ativo-objeto ITUB4 negociado a R\$ 42,75. E a opção de venda ITUBV27 com preço de exercício R\$ 42,99, com um total de 10 negócios e 7.600 quantidades negociadas, com vencimento em 16 de outubro de 2017, referenciada ao ativo-objeto ITUB4 negociada a R\$ 42,75.

Para a Petrobrás foi escolhida a opção de compra PETRI14 com preço de exercício R\$ 14,00, com um total de 3.011 negócios e 12.800.800 quantidades negociadas, com vencimento 18 de setembro de 2017, referenciada ao ativo-objeto PETR4 negociado a R\$ 14,99. E a opção de venda PETRU16 com preço de exercício R\$ 16,00, com um total de 28 negócios e 54.300 quantidades negociadas, com vencimento em 18 de setembro de 2017, referenciada ao ativo-objeto PETR4 negociada a R\$ 14,99.

De posse dos dados, calculamos o prazo de vencimento de cada opção pela diferença entre a data de maturidade e a data do pregão, expresso em anos na base 365.

A taxa de juros livre de risco para cada opção foi coletada da Curva de Juros do Mercado Futuro de Depósitos Interfinanceiros (DI Futuro) também disponível na página oficial da Bolsa de Valores de São Paulo Paulo (*B<sup>3</sup>-Brasil, Bolsa, Balcão*) em relação ao prazo até o vencimento.

O “preço justo” de cada uma das opções, bem como as letras gregas calculados pela fórmula fechada do modelo de *Black and Scholes*, foram obtidos pelo código composto por macros de função em linguagem *Visual Basic for Applications* (VBA), apresentado no Apêndice I.

Após calcular o preço justo das opções pelo modelo de B&S, obtemos a volatilidade implícita das opções pela função “Atingir Meta” da aba “Dados” da planilha Excel. No campo “Definir célula” da função, atribuímos o preço da opção que queríamos igualar àquele obtido pelo mercado, o qual será referenciado no campo “Para valor”. Por fim, no campo “Alternando Célula” atribuímos a referência da célula onde foi devolvida a volatilidade implícita na opção.

As letras gregas, calculadas pelo modelo Binomial foram calculadas pelo código composto por macros de função em linguagem *Visual Basic for Applications* (VBA), apresentado no Apêndice II. Para implementação do modelo utilizamos a abordagem sugerida por Rouah e Vainberg (2007).

Primeiramente o autor sugere examinar a variação do preço da opção nos nós iniciais da árvore. Como o *delta* mede a sensibilidade do preço da opção em relação ao preço do ativo-objeto, uma aproximação natural para o *delta* é a variação do preço da opção dividida pela variação no preço do ativo-objeto, ambos obtidos no primeiro passo temporal. Se  $f_{i,j}$  e  $S_{i,j}$  são o preço da opção e do ativo-objeto, respectivamente o nó  $(i,j)$ , então uma aproximação de *delta* pode ser dada por

$$\Delta \approx \frac{f_{1,2} - f_{2,2}}{S_{1,2} - S_{2,2}}$$

Como o *gamma* mede a sensibilidade do *delta* em relação ao preço do ativo-objeto, os preços da opção e os preços do ativo no segundo passo temporal puderam ser utilizados para aproximar dois valores do *delta*, um utilizando os nós  $(1,3)$  e  $(2,3)$  e outro utilizando os nós  $(2,3)$  e  $(3,3)$ . O *gamma* é dado pela variação desses dois *delta*s a partir do nó  $(1,2)$  até  $(2,2)$  com respeito à variação do ativo-objeto nesse passo.

O primeiro *delta* pôde ser aproximado por  $\left(\frac{f_{1,3} - f_{2,3}}{S_{1,3} - S_{2,3}}\right)$  e o segundo *delta* por  $\left(\frac{f_{2,3} - f_{3,3}}{S_{2,3} - S_{3,3}}\right)$ . A variação do *delta* é obtida quando o preço do ativo-objeto se move do nó (1,2) para (2,2). Esta variação no preço é  $(S_{1,2} - S_{2,2})$ , portanto a aproximação para o *gamma* pôde ser dada por:

$$\Gamma \approx \frac{\left(\frac{f_{1,3} - f_{2,3}}{S_{1,3} - S_{2,3}}\right) - \left(\frac{f_{2,3} - f_{3,3}}{S_{2,3} - S_{3,3}}\right)}{(S_{1,2} - S_{2,2})}$$

*Theta* é a sensibilidade da opção em relação ao tempo, portanto uma aproximação natural do *theta* é a variação no preço da opção através dos passos temporais, dividido pelo tamanho do passo temporal. Como o preço do ativo-objeto deve ser constante, utilizamos o preço da opção nos nós (1,1) e (2,3), o que nos forneceu a fórmula

$$\Theta \approx \frac{f_{2,3} - f_{1,1}}{2dt}$$

*Vega* é obtido por diferenças finitas, onde primeiramente obtemos o preço da opção  $f(\sigma)$  usando a volatilidade desejada  $\sigma$ , então introduzimos uma pequena perturbação  $d\sigma$  na volatilidade e obtemos um novo preço  $f(\sigma + d\sigma)$ . Uma aproximação do *vega* pôde ser dado por

$$V \approx \frac{f(\sigma + d\sigma) - f(\sigma)}{d\sigma}$$

De maneira análoga, pudemos calcular o *rho* introduzindo uma pequena perturbação na taxa de juros  $dr$  para obter um novo preço  $f(r + dr)$ . Então a aproximação para o *rho* é dada por

$$\rho \approx \frac{f(r + dr) - f(r)}{dr}$$

As letras gregas, obtidas pela simulação de Monte Carlo foram calculadas pelo código composto por macros de função em linguagem *Visual Basic for Applications* (VBA), apresentado no Apêndice III.

Tradicionalmente o cálculo das gregas utiliza diferenças finitas, entretanto, isso requer que a simulação de Monte Carlo seja feita duas vezes, o que acarreta um custo computacional que pode ser excessivo. Entretanto para implementação da simulação utilizamos a abordagem sugerida por Curran (1993) e Haug (2007).

Curran (1993) oferece um método mais eficiente de calcular as gregas utilizando Monte Carlo para muitos derivativos. No caso do *delta* o método começa por contar o número de vezes que a opção termina *in the money*. Para essas

realizações nós adicionamos o preço do ativo-objeto no vencimento e depois dividimos essa soma pelo número de simulações consideradas vezes o preço inicial. Isto é:

$$\Delta = e^{-rT} \frac{\sum}{S \cdot n}$$

Na expressão acima  $r$  é a taxa de juros livre de risco,  $T$  é prazo,  $S$  é preço do ativo-objeto,  $n$  é o número de simulações e  $\sum$  é a somatória dos preços do ativo-objeto em cada uma das vezes que a opção terminou *in the money*.

Para o *gamma*, segundo o autor temos que:

$$\Gamma = e^{-rT} \left( \frac{K}{S} \right)^2 \frac{\sum}{4n}$$

Na expressão acima  $K$  é o preço de exercício e  $\sum$  é o número de vezes onde  $|S_T - X| < \epsilon$  para algum  $\epsilon$  e  $n$  o número de simulações. Com *delta* e *gamma* conhecidos pudemos aplicar a equação de *Black and Scholes* para encontrar *theta*, de onde obtemos a seguinte relação:

$$\theta = rC - rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma$$

onde  $\sigma$  é a volatilidade e  $C$  é o preço da opção obtido na Simulação de Monte Carlo.

Por fim, para calcular o *vega* utilizamos a seguinte relação:

$$V = \Gamma \sigma S^2 T$$

O autor não justifica o cálculo do *vega* e não calcula o *rho* pelo método.

## 5.RESULTADOS

Esta seção apresenta os resultados obtidos pela implementação computacional do preço justo e das derivadas parciais, letras gregas, do modelo de *Black and Scholes*, via modelo Binomial e Simulação de Monte Carlo.

### 5.1 OPÇÕES DO BANCO BRADESCO

Resultados obtidos para a opção de compra BBDCI42, referenciada ao ativo-objeto BBDC4.

**Quadro 4:** Dados de mercado e volatilidade implícita obtida pelo modelo de *Black and Scholes*

|                               |            |
|-------------------------------|------------|
| Data do pregão                | 11/09/2017 |
| Preço do ativo-objeto         | R\$ 35,31  |
| Preço de exercício da opção   | R\$ 34,44  |
| Data de maturidade            | 18/09/2017 |
| Preço da opção                | R\$ 1,20   |
| Período em dias corridos /365 | 0,01918    |
| Taxa de juros                 | 9,36%      |
| Volatilidade implícita        | 32,56%     |

Fonte: A autora

**Quadro 5:** Preço justo e letras gregas

| Parâmetros              | Modelo de Black & Scholes | Modelo Binomial | Simulação Monte Carlo |
|-------------------------|---------------------------|-----------------|-----------------------|
| Preço justo             | 1,1997                    | 1,1997          | 1,1987                |
| Delta ( $\Delta$ )      | 0,7309                    | 0,7310          | 0,7307                |
| Gamma ( $\Gamma$ )      | 0,2073                    | 0,2074          | 0,1718                |
| Vega ( $\nabla$ )       | 1,6140                    | 1,6283          | 1,3372                |
| Rho ( $\rho$ )          | 0,4720                    | 0,4720          | 0,0000                |
| Theta ( $\Theta$ )      | -16,0033                  | -16,0080        | -13,6530              |
| Epsilon ( $\epsilon$ )  | -                         | -               | 2                     |
| Nº de simulações/passos | -                         | 1000            | 1000000               |

Fonte: A autora

**Quadro 6:** Erro percentual do modelo Binomial em relação ao modelo de *Black and Scholes*

| Nº de passos | Preço justo | Delta ( $\Delta$ ) | Gamma ( $\Gamma$ ) | Vega (V) | Rho ( $\rho$ ) | Theta ( $\Theta$ ) |
|--------------|-------------|--------------------|--------------------|----------|----------------|--------------------|
| 300          | 0,0090%     | 0,0067%            | 0,1227%            | 1,9074%  | 0,0066%        | 0,1057%            |
| 400          | 0,0248%     | 0,0063%            | 0,0671%            | 0,2440%  | 0,0078%        | 0,0560%            |
| 500          | 0,0024%     | 0,0046%            | 0,0811%            | 1,5320%  | 0,0051%        | 0,0699%            |
| 600          | 0,0057%     | 0,0025%            | 0,0600%            | 1,2733%  | 0,0023%        | 0,0515%            |
| 700          | 0,0100%     | 0,0015%            | 0,0453%            | 0,7262%  | 0,0026%        | 0,0383%            |
| 800          | 0,0010%     | 0,0037%            | 0,0499%            | 1,2841%  | 0,0046%        | 0,0431%            |
| 900          | 0,0071%     | 0,0007%            | 0,0363%            | 0,7181%  | 0,0003%        | 0,0308%            |
| 1000         | 0,0047%     | 0,0007%            | 0,0343%            | 0,8862%  | 0,0001%        | 0,0293%            |

Fonte: A autora

**Quadro 7:** Erro percentual da simulação de Monte Carlo em relação ao modelo de *Black and Scholes*

| Nº de simulações | Preço justo | Delta ( $\Delta$ ) | Gamma ( $\Gamma$ ) | Vega (V) | Theta ( $\Theta$ ) |
|------------------|-------------|--------------------|--------------------|----------|--------------------|
| 100              | 6,2055%     | 5,0650%            | 15,2627%           | 15,2627% | 13,7868%           |
| 500              | 5,7016%     | 2,6812%            | 20,7591%           | 20,7591% | 17,4064%           |
| 1000             | 4,5793%     | 0,3647%            | 20,5301%           | 20,5301% | 17,5521%           |
| 10000            | 0,5725%     | 0,0319%            | 17,2551%           | 17,2551% | 14,7706%           |
| 50000            | 0,0622%     | 0,0961%            | 17,3444%           | 17,3444% | 14,8338%           |
| 100000           | 0,1290%     | 0,0579%            | 17,3341%           | 17,3341% | 14,8487%           |
| 500000           | 0,0037%     | 0,0169%            | 17,1392%           | 17,1392% | 14,6697%           |
| 1000000          | 0,0365%     | 0,0856%            | 17,1808%           | 17,1808% | 14,7205%           |

Fonte: A autora

Resultados obtidos para a opção de venda BBDCI42, referenciada ao ativo-objeto BBDC4.

**Quadro 8:** Dados de mercado e volatilidade implícita obtida pelo modelo de *Black and Scholes*

|                               |            |
|-------------------------------|------------|
| Data do pregão                | 11/09/2017 |
| Preço do ativo-objeto         | R\$ 35,31  |
| Preço de exercício da opção   | R\$ 34,44  |
| Data de maturidade            | 18/09/2017 |
| Preço da opção                | R\$ 0,15   |
| Período em dias corridos /365 | 0,01918    |
| Taxa de juros                 | 9,36%      |
| Volatilidade implícita        | 24,85%     |

Fonte: A autora

**Quadro 9:** Preço justo e letras gregas

| Parâmetros              | Modelo de Black & Scholes | Modelo Binomial | Simulação Monte Carlo |
|-------------------------|---------------------------|-----------------|-----------------------|
| BBDCU42                 | 0,1500                    | 0,1501          | 0,1503                |
| Delta ( $\Delta$ )      | -0,2135                   | -0,2135         | -0,2132               |
| Gamma ( $\Gamma$ )      | 0,2395                    | 0,2395          | 0,1909                |
| Vega (V)                | 1,4231                    | 1,4209          | 1,1344                |
| Rho ( $\rho$ )          | -0,1475                   | -0,1475         | 0,0000                |
| Theta ( $\Theta$ )      | -8,5004                   | -8,5028         | -6,6310               |
| Epsilon ( $\epsilon$ )  | -                         | -               | 2                     |
| Nº de simulações/passos | -                         | 1000            | 1000000               |

Fonte: A autora

**Quadro 10:** Erro percentual do modelo Binomial em relação ao modelo de *Black and Scholes*

| Nº de passos | Preço justo | Delta ( $\Delta$ ) | Gamma ( $\Gamma$ ) | Vega (V) | Rho ( $\rho$ ) | Theta ( $\Theta$ ) |
|--------------|-------------|--------------------|--------------------|----------|----------------|--------------------|
| 300          | 0,0846%     | 0,0027%            | 0,0027%            | 1,8024%  | 0,0011%        | 0,0011%            |
| 400          | 0,0476%     | 0,0092%            | 0,0092%            | 1,7798%  | 0,0081%        | 0,0081%            |
| 500          | 0,0493%     | 0,0463%            | 0,0463%            | 2,5494%  | 0,0461%        | 0,0461%            |
| 600          | 0,0277%     | 0,0347%            | 0,0347%            | 2,2532%  | 0,0347%        | 0,0347%            |
| 700          | 0,0665%     | 0,0104%            | 0,0104%            | 0,5213%  | 0,0110%        | 0,0110%            |
| 800          | 0,0250%     | 0,0044%            | 0,0044%            | 1,2534%  | 0,0032%        | 0,0032%            |
| 900          | 0,0168%     | 0,0223%            | 0,0223%            | 1,8148%  | 0,0215%        | 0,0215%            |
| 1000         | 0,0491%     | 0,0088%            | 0,0088%            | 0,1541%  | 0,0089%        | 0,0089%            |

Fonte: A autora

**Quadro 11:** Erro percentual da simulação de Monte Carlo em relação ao modelo de *Black and Scholes*

| Nº de simulações | Preço justo | Delta ( $\Delta$ ) | Gamma ( $\Gamma$ ) | Vega (V) | Theta ( $\Theta$ ) |
|------------------|-------------|--------------------|--------------------|----------|--------------------|
| 100              | 39,3400%    | 37,3712%           | 24,6584%           | 24,6584% | 23,5787%           |
| 500              | 12,4660%    | 2,8364%            | 18,1156%           | 18,1156% | 19,4345%           |
| 1000             | 2,3686%     | 4,7544%            | 18,2147%           | 18,2147% | 20,1477%           |
| 10000            | 4,3434%     | 1,9547%            | 20,1379%           | 20,1379% | 21,6735%           |
| 50000            | 0,2848%     | 0,7861%            | 20,0685%           | 20,0685% | 21,7020%           |
| 100000           | 1,6004%     | 1,3846%            | 20,0784%           | 20,0784% | 21,6609%           |
| 500000           | 0,5467%     | 0,2857%            | 20,2606%           | 20,2606% | 21,9515%           |
| 1000000          | 0,0271%     | 0,3006%            | 20,2085%           | 20,2085% | 21,9445%           |

Fonte: A autora

Ao observarmos os resultados obtidos pelas simulações computacionais para as opções de compra e venda do Banco Bradesco, é possível verificar que tanto o “preço justo” calculado pelo modelo Binomial quanto o obtido pela simulação de Monte Carlo, convergiram para o “preço justo” obtido pelo Modelo de *Black and Scholes*, que por sua vez convergiu para o preço negociado pela opção no fechamento do pregão na data escolhida. Em relação às letras gregas, *delta* convergiu de maneira satisfatória tanto pelo modelo Binomial quanto pela simulação de Monte Carlo. Já *gamma*, *vega*, *rho* (calculado somente pelo modelo Binomial) e

theta convergiram de maneira aceitável somente pelo modelo Binomial. Além disso, ao verificarmos a tabela de erro percentual do modelo Binomial e da simulação de Monte Carlo em relação ao modelo de B&S, podemos observar que o custo computacional do modelo Binomial é inferior quando comparado à simulação de Monte Carlo.

## 5.2 OPÇÕES DO BANCO ITAÚ

Resultados obtidos para a opção de compra ITUBJ12, referenciada ao ativo-objeto ITUB4.

**Quadro 12:** Dados de mercado e volatilidade implícita obtida pelo modelo de *Black and Scholes*

|                               |            |
|-------------------------------|------------|
| Data do pregão                | 11/09/2017 |
| Preço do ativo-objeto         | R\$ 42,75  |
| Preço de exercício da opção   | R\$ 42,49  |
| Data de maturidade            | 16/10/2017 |
| Preço da opção                | R\$ 1,40   |
| Período em dias corridos /365 | 0,09589    |
| Taxa de juros                 | 7,92%      |
| Volatilidade implícita        | 20,69%     |

Fonte: A autora

**Quadro 13:** Preço justo e letras gregas

| Parâmetros              | Modelo de Black & Scholes | Modelo Binomial | Simulação Monte Carlo |
|-------------------------|---------------------------|-----------------|-----------------------|
| Preço justo             | 1,4005                    | 1,4008          | 1,3982                |
| Delta ( $\Delta$ )      | 0,5971                    | 0,5970          | 0,5966                |
| Gamma ( $\Gamma$ )      | 0,1413                    | 0,1414          | 0,1297                |
| Vega ( $V$ )            | 5,1241                    | 5,1256          | 4,7032                |
| Rho ( $\rho$ )          | 2,3133                    | 2,3131          | 0,0000                |
| Theta ( $\Theta$ )      | -7,4389                   | -7,4403         | -6,9833               |
| Epsilon ( $\epsilon$ )  | -                         | -               | 2                     |
| Nº de simulações/passos | -                         | 1000            | 1000000               |

Fonte: A autora

**Quadro 14:** Erro percentual do modelo Binomial em relação ao modelo de *Black and Scholes*

| Nº de passos | Preço justo | Delta ( $\Delta$ ) | Gamma ( $\Gamma$ ) | Vega (V) | Rho ( $\rho$ ) | Theta ( $\Theta$ ) |
|--------------|-------------|--------------------|--------------------|----------|----------------|--------------------|
| 300          | 0,0097%     | 0,0093%            | 0,1626%            | 0,3719%  | 0,0104%        | 0,1154%            |
| 400          | 0,0304%     | 0,0018%            | 0,1701%            | 0,3919%  | 0,0002%        | 0,1243%            |
| 500          | 0,0200%     | 0,0029%            | 0,1311%            | 0,3956%  | 0,0019%        | 0,0953%            |
| 600          | 0,0030%     | 0,0057%            | 0,0844%            | 0,2541%  | 0,0062%        | 0,0598%            |
| 700          | 0,0142%     | 0,0067%            | 0,0576%            | 0,1530%  | 0,0078%        | 0,0396%            |
| 800          | 0,0189%     | 0,0067%            | 0,0421%            | 0,0772%  | 0,0082%        | 0,0282%            |
| 900          | 0,0199%     | 0,0063%            | 0,0334%            | 0,0182%  | 0,0077%        | 0,0219%            |
| 1000         | 0,0187%     | 0,0057%            | 0,0290%            | 0,0290%  | 0,0072%        | 0,0189%            |

Fonte: A autora

**Quadro 15:** Erro percentual da simulação de Monte Carlo em relação ao modelo de *Black and Scholes*

| Nº de simulações | Preço justo | Delta ( $\Delta$ ) | Gamma ( $\Gamma$ ) | Vega (V) | Theta ( $\Theta$ ) |
|------------------|-------------|--------------------|--------------------|----------|--------------------|
| 100              | 13,7868%    | 6,1840%            | 13,2828%           | 13,2828% | 8,1694%            |
| 500              | 17,4064%    | 1,6292%            | 4,6111%            | 4,6111%  | 3,8801%            |
| 1000             | 17,5521%    | 1,0647%            | 9,1204%            | 9,1204%  | 7,0515%            |
| 10000            | 14,7706%    | 0,6897%            | 9,0163%            | 9,0163%  | 6,5208%            |
| 50000            | 14,8338%    | 0,3153%            | 8,1110%            | 8,1110%  | 6,0967%            |
| 100000           | 14,8487%    | 0,6375%            | 8,4197%            | 8,4197%  | 6,0944%            |
| 500000           | 14,6697%    | 0,0986%            | 8,3118%            | 8,3118%  | 6,1521%            |
| 1000000          | 14,7205%    | 0,0214%            | 8,3382%            | 8,3382%  | 6,1911%            |

Fonte: A autora

Resultados obtidos para a opção de venda ITUB27, referenciada ao ativo-objeto ITUB4.

**Quadro 16:** Dados de mercado e volatilidade implícita obtida pelo modelo de Black and Scholes

|                               |            |
|-------------------------------|------------|
| Data do pregão                | 11/09/2017 |
| Preço do ativo-objeto         | R\$ 42,75  |
| Preço de exercício da opção   | R\$ 42,99  |
| Data de maturidade            | 16/10/2017 |
| Preço da opção                | R\$ 1,08   |
| Período em dias corridos /365 | 0,09589    |
| Taxa de juros                 | 7,92%      |
| Volatilidade implícita        | 21,27%     |

Fonte: A autora

**Quadro 17:** Preço justo e letras gregas

| Parâmetros              | Modelo de Black & Scholes | Modelo Binomial | Simulação Monte Carlo |
|-------------------------|---------------------------|-----------------|-----------------------|
| Preço justo             | 1,0800                    | 1,0802          | 1,0794                |
| Delta ( $\Delta$ )      | -0,4748                   | -0,4748         | -0,4743               |
| Gamma ( $\Gamma$ )      | 0,1414                    | 0,1414          | 0,1305                |
| Vega (V)                | 5,2707                    | 5,2673          | 4,8659                |
| Rho ( $\rho$ )          | -2,0499                   | -2,0500         | 0,0000                |
| Theta ( $\Theta$ )      | -4,1531                   | -4,1548         | -3,7061               |
| Epsilon ( $\epsilon$ )  | -                         | -               | 2                     |
| Nº de simulações/passos | -                         | 1000            | 1000000               |

Fonte: A autora

**Quadro 18:** Erro percentual do modelo Binomial em relação ao modelo de *Black and Scholes*

| Nº de passos | Preço justo | Delta ( $\Delta$ ) | Gamma ( $\Gamma$ ) | Vega (V) | Rho ( $\rho$ ) | Theta ( $\Theta$ ) |
|--------------|-------------|--------------------|--------------------|----------|----------------|--------------------|
| 300          | 0,0459%     | 0,0220%            | 0,0220%            | 0,2798%  | 0,0231%        | 0,1620%            |
| 400          | 0,0002%     | 0,0163%            | 0,0163%            | 0,2999%  | 0,0154%        | 0,1693%            |
| 500          | 0,0334%     | 0,0125%            | 0,0125%            | 0,3119%  | 0,0101%        | 0,1815%            |
| 600          | 0,0306%     | 0,0098%            | 0,0098%            | 0,3464%  | 0,0077%        | 0,1552%            |
| 700          | 0,0056%     | 0,0081%            | 0,0081%            | 0,2453%  | 0,0073%        | 0,1046%            |
| 800          | 0,0087%     | 0,0070%            | 0,0070%            | 0,1695%  | 0,0070%        | 0,0728%            |
| 900          | 0,0165%     | 0,0063%            | 0,0063%            | 0,1105%  | 0,0068%        | 0,0526%            |
| 1000         | 0,0203%     | 0,0057%            | 0,0057%            | 0,0633%  | 0,0063%        | 0,0397%            |

Fonte: A autora

**Quadro 19:** Erro percentual da simulação de Monte Carlo em relação ao modelo de Black and Scholes

| Nº de simulações | Preço justo | Delta ( $\Delta$ ) | Gamma ( $\Gamma$ ) | Vega (V) | Theta ( $\Theta$ ) |
|------------------|-------------|--------------------|--------------------|----------|--------------------|
| 100              | 23,1175%    | 15,8067%           | 13,0446%           | 13,0446% | 11,7681%           |
| 500              | 5,9559%     | 4,1078%            | 8,4307%            | 8,4307%  | 10,1549%           |
| 1000             | 2,2716%     | 0,5518%            | 8,6081%            | 8,6081%  | 11,9506%           |
| 10000            | 2,2854%     | 0,6246%            | 6,8690%            | 6,8690%  | 9,3804%            |
| 50000            | 1,0997%     | 0,7718%            | 7,3304%            | 7,3304%  | 9,9974%            |
| 100000           | 0,1029%     | 0,0177%            | 7,6747%            | 7,6747%  | 10,7944%           |
| 500000           | 0,3089%     | 0,2295%            | 7,6218%            | 7,6218%  | 10,6337%           |
| 1000000          | 0,0281%     | 0,0601%            | 7,6074%            | 7,6074%  | 10,7314%           |

Fonte: A autora

Os resultados obtidos para as opções de compra e venda do Banco Itaú é semelhante aos observados para as opções do Banco Bradesco. O “preço justo” e o *delta* calculados tanto pelo modelo Binomial quanto pela simulação de Monte Carlo convergiram de maneira satisfatória. Gamma, vega, rho (calculado somente pelo modelo Binomial) e theta convergiram de maneira aceitável somente pelo modelo Binomial. O custo computacional do modelo Binomial manteve-se inferior ao custo da simulação de Monte Carlo.

### 5.3 OPÇÕES DA PETROBRAS

Resultados obtidos para a opção de compra PETR14, referenciada ao ativo-objeto PETR4.

**Quadro 20:** Dados de mercado e volatilidade implícita obtida pelo modelo de Black and Scholes

|                               |            |
|-------------------------------|------------|
| Data do pregão                | 11/09/2017 |
| Preço do ativo-objeto         | R\$ 14,99  |
| Preço de exercício da opção   | R\$ 14,00  |
| Data de maturidade            | 18/09/2017 |
| Preço da opção                | R\$ 1,02   |
| Período em dias corridos /365 | 0,01918    |
| Taxa de juros                 | 9,36%      |
| Volatilidade implícita        | 25,54%     |

Fonte: A autora

**Quadro 21:** Preço justo e letras gregas obtidos por cada modelo

| Parâmetros              | Modelo de Black & Scholes | Modelo Binomial | Simulação Monte Carlo |
|-------------------------|---------------------------|-----------------|-----------------------|
| Preço justo             | 1,0197                    | 1,0197          | 1,0203                |
| Delta ( $\Delta$ )      | 0,9773                    | 0,9773          | 0,9773                |
| Gamma ( $\Gamma$ )      | 0,1018                    | 0,1017          | 0,2100                |
| Vega ( $V$ )            | 0,1120                    | 0,1125          | 0,2311                |
| Rho ( $\rho$ )          | 0,2614                    | 0,2614          | -                     |
| Theta ( $\Theta$ )      | -2,0213                   | -2,0207         | -2,8146               |
| Epsilon ( $\epsilon$ )  | -                         | -               | 2                     |
| Nº de simulações/passos | -                         | 1000            | 1000000               |

Fonte: A autora

**Quadro 22:** Erro percentual do modelo Binomial em relação ao modelo de *Black and Scholes*

| Nº de passos | Preço justo | Delta ( $\Delta$ ) | Gamma ( $\Gamma$ ) | Vega (V) | Rho ( $\rho$ ) | Theta ( $\Theta$ ) |
|--------------|-------------|--------------------|--------------------|----------|----------------|--------------------|
| 300          | 0,1154%     | 0,0106%            | 0,3694%            | 4,9268%  | 0,0114%        | 0,1290%            |
| 400          | 0,1243%     | 0,0073%            | 0,2534%            | 3,7012%  | 0,0080%        | 0,0884%            |
| 500          | 0,0953%     | 0,0046%            | 0,1720%            | 1,5262%  | 0,0053%        | 0,0603%            |
| 600          | 0,0598%     | 0,0044%            | 0,1585%            | 2,3909%  | 0,0047%        | 0,0554%            |
| 700          | 0,0396%     | 0,0031%            | 0,1176%            | 0,6807%  | 0,0028%        | 0,0413%            |
| 800          | 0,0282%     | 0,0036%            | 0,1257%            | 2,5543%  | 0,0047%        | 0,0439%            |
| 900          | 0,0219%     | 0,0078%            | 0,2380%            | 6,1834%  | 0,0093%        | 0,0824%            |
| 1000         | 0,0189%     | 0,0022%            | 0,0818%            | 0,4534%  | 0,0017%        | 0,0287%            |

Fonte: A autora

**Quadro 23:** Erro percentual da simulação de Monte Carlo em relação ao modelo de Black and Scholes

| Nº de simulações | Preço justo | Delta ( $\Delta$ ) | Gamma ( $\Gamma$ ) | Vega (V)  | Theta ( $\Theta$ ) |
|------------------|-------------|--------------------|--------------------|-----------|--------------------|
| 100              | 3,9150%     | 0,1773%            | 109,5802%          | 109,5802% | 40,7373%           |
| 500              | 1,1526%     | 0,5844%            | 106,1584%          | 106,1584% | 38,8277%           |
| 1000             | 1,0135%     | 0,0930%            | 107,4416%          | 107,4416% | 39,7541%           |
| 10000            | 0,0602%     | 0,2890%            | 105,8377%          | 105,8377% | 38,8582%           |
| 50000            | 0,0302%     | 0,2106%            | 106,2654%          | 106,2654% | 39,0677%           |
| 100000           | 0,1516%     | 0,0235%            | 106,3744%          | 106,3744% | 39,2406%           |
| 500000           | 0,0318%     | 0,0134%            | 106,2799%          | 106,2799% | 39,2039%           |
| 1000000          | 0,0447%     | 0,0080%            | 106,3146%          | 106,3146% | 39,2240%           |

Fonte: A autora

Resultados obtidos para a opção de venda PETRU16, referenciada ao ativo-objeto PETR4.

**Quadro 24:** Dados de mercado e volatilidade implícita obtida pelo modelo de Black and Scholes

|                               |            |
|-------------------------------|------------|
| Data do pregão                | 11/09/2017 |
| Preço do ativo-objeto         | R\$ 14,99  |
| Preço de exercício da opção   | R\$ 16,00  |
| Data de maturidade            | 18/09/2017 |
| Preço da opção                | R\$ 1,03   |
| Período em dias corridos /365 | 0,01918    |
| Taxa de juros                 | 9,36%      |
| Volatilidade implícita        | 38,79%     |

Fonte: A autora

**Quadro 25:** Preço justo e letras gregas

| Parâmetros              | Modelo de Black & Scholes | Modelo Binomial | Simulação Monte Carlo |
|-------------------------|---------------------------|-----------------|-----------------------|
| Preço justo             | 1,0298                    | 1,0298          | 1,0297                |
| Delta ( $\Delta$ )      | -0,8756                   | -0,8757         | -0,8758               |
| Gamma ( $\Gamma$ )      | 0,2547                    | 0,2547          | 0,2556                |
| Vega (V)                | 0,4258                    | 0,4158          | 0,4272                |
| Rho ( $\rho$ )          | -0,2715                   | -0,2715         | 0,0000                |
| Theta ( $\Theta$ )      | -2,9817                   | -2,9814         | -2,9958               |
| Epsilon ( $\epsilon$ )  | -                         | -               | 2                     |
| Nº de simulações/passos | -                         | 1000            | 1000000               |

Fonte: A autora

**Quadro 26:** Erro percentual do modelo Binomial em relação ao modelo de *Black and Scholes*

| Nº de passos | Preço justo | Delta ( $\Delta$ ) | Gamma ( $\Gamma$ ) | Vega (V) | Rho ( $\rho$ ) | Theta ( $\Theta$ ) |
|--------------|-------------|--------------------|--------------------|----------|----------------|--------------------|
| 300          | 0,0064%     | 0,0058%            | 0,0105%            | 0,1799%  | 0,0058%        | 0,0118%            |
| 400          | 0,0060%     | 0,0231%            | 0,0153%            | 4,3592%  | 0,0210%        | 0,0320%            |
| 500          | 0,0036%     | 0,0040%            | 0,0049%            | 0,7739%  | 0,0043%        | 0,0049%            |
| 600          | 0,0038%     | 0,0154%            | 0,0137%            | 3,6525%  | 0,0139%        | 0,0263%            |
| 700          | 0,0063%     | 0,0184%            | 0,0170%            | 4,0387%  | 0,0162%        | 0,0322%            |
| 800          | 0,0022%     | 0,0102%            | 0,0061%            | 2,8578%  | 0,0099%        | 0,0131%            |
| 900          | 0,0010%     | 0,0074%            | 0,0031%            | 2,3645%  | 0,0075%        | 0,0078%            |
| 1000         | 0,0012%     | 0,0072%            | 0,0036%            | 2,3597%  | 0,0060%        | 0,0083%            |

Fonte: A autora

**Quadro 27:** Erro percentual da Simulação de Monte Carlo em relação ao modelo de *Black and Scholes*

| Nº de simulações | Preço justo | Delta ( $\Delta$ ) | Gamma ( $\Gamma$ ) | Vega (V) | Theta ( $\Theta$ ) |
|------------------|-------------|--------------------|--------------------|----------|--------------------|
| 100              | 5,6073%     | 1,2250%            | 7,3527%            | 7,3527%  | 11,3060%           |
| 500              | 2,1596%     | 2,3027%            | 0,4320%            | 0,4320%  | 0,3946%            |
| 1000             | 3,7967%     | 0,1502%            | 0,8785%            | 0,8785%  | 1,4536%            |
| 10000            | 0,5877%     | 0,1212%            | 0,1038%            | 0,1038%  | 0,1808%            |
| 50000            | 0,3145%     | 0,4398%            | 0,5011%            | 0,5011%  | 0,9152%            |
| 100000           | 0,0019%     | 0,0379%            | 0,4364%            | 0,4364%  | 0,6146%            |
| 500000           | 0,0390%     | 0,0487%            | 0,3596%            | 0,3596%  | 0,5407%            |
| 1000000          | 0,0748%     | 0,0217%            | 0,2847%            | 0,2847%  | 0,4177%            |

Fonte: A autora

Os resultados obtidos para as opções de compra e venda do Petrobrás é semelhante aos observados para as opções do Banco Bradesco e Itaú. Novamente o “preço justo” e o *delta* calculados tanto pelo modelo Binomial quanto pela simulação de Monte Carlo convergiram de maneira satisfatória. As demais letras gregas convergiram de maneira aceitável somente pelo modelo Binomial. O custo computacional do modelo Binomial manteve-se inferior ao custo da simulação de Monte Carlo.

## 6. CONCLUSÕES

Dado a relevância das negociações com opções em bolsa, como ferramenta de proteção contra os riscos provenientes das variações de taxas, moedas ou preços, este trabalho se propôs a apresentar os principais conceitos sobre opções e comparar computacionalmente o retorno do “preço justo” e das derivadas parciais, conhecidas como letras gregas, obtidos pelo modelo de *Black-Scholes*, um dos mais importantes modelos de precificação de opções, em relação aos obtidos pelo modelo Binomial e pelo método de Monte Carlo, bem como o custo computacional de cada simulação.

Para simular computacionalmente cada um dos métodos, optamos por utilizar os dados de opções financeiras negociados na Bolsa de Valores de São Paulo ( $B^3$ ) de algumas das maiores empresas com capital aberto e maior liquidez no mercado brasileiro de opções, o Banco Bradesco, o Banco Itaú e a Petrobrás.

Os resultados obtidos em todas as simulações apontaram que o “preço justo” obtido tanto pelo modelo Binomial quanto pela simulação de Monte Carlo convergem de maneira bastante eficaz para o modelo de *Black and Sholes*, que por sua vez converge para o valor negociado em mercado. *Delta* converge de maneira satisfatória tanto pelo modelo Binomial quanto pela simulação de Monte Carlo. As demais derivadas parciais, convergem de maneira aceitável somente pelo modelo Binomial.

Em relação ao custo computacional, a simulação de Monte Carlo apresenta menor desempenho em relação ao modelo Binomial, pois tanto o preço justo quanto as letras gregas convergiram apenas com 1.000 simulações neste, frente a 1.000.000 de simulações daquele.

Portanto pelas análises feitas, podemos concluir que o modelo Binomial seria a melhor escolha, tanto para o cálculo do preço justo quanto das letras gregas, na impossibilidade do uso do modelo de *Black and Scholes*, pois apresenta melhor convergência e custo computacional.

Como sugestão para trabalhos futuros, seria bastante interessante implementar computacionalmente os modelos em outras linguagens de programação, pois “esbarramos” na limitação de alocação de memória do *Visual Basic Application* (VBA).

## REFERÊNCIAS

BESSADA, O. **O Mercado de Derivativos Financeiros**. 2<sup>a</sup> Ed. São Paulo: Record, 2000.

BM&FBovespa – A nova Bolsa. **Boletim diário do mercado**. Disponível em: [http://www.bmfbovespa.com.br/pt\\_br/servicos/market-data/consultas/boletim-diario/boletim-diario-do-mercado/](http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/servicos/market-data/consultas/boletim-diario/boletim-diario-do-mercado/). Acesso em 11 set. de 2017.

FERNANADES, F. N. **Modelo de Precificação em Finanças: Uma aplicação em opções sobre ações**. Monografia (MBA em Finanças Empresariais) – Instituto de Economia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2016.

HAUG, E. G. **The Complete Guide to Option Pricing Formulas**. 2<sup>a</sup> Ed. New York: McGraw-Hill, 2007.

HULL, J. C. **Options, Futures and Other Derivatives**. 6<sup>a</sup> Ed.:Pearson, 2005.

JACKSON, M.; STAUNTON, M. **Advanced Modelling in Finance Using Excel and VBA**. 1<sup>a</sup> Ed. Londres: John Wiley & Sons, Inc., 2001.

ROUAH, F. D.; VAINBERG, G. **Option Pricing Models & Volatility**. 1<sup>a</sup> Ed. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2007.

SILVA, L.M. **Mercado de opções: conceitos e estratégias**. 3<sup>a</sup> Ed. Rio de Janeiro: Halip, 2008.

## ANEXO I – IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO DE *BLACK AND SCHOLES*

Function Gauss(X)

    Gauss = Application.NormSDist(X)

End Function

' Preço da opção de compra

Function BSCompra(preco\_ativo, preco\_exercicio, prazo, taxa\_juros, volatilidade)

    d = (Log(preco\_ativo / preco\_exercicio) + prazo \* (taxa\_juros + 0.5 \* volatilidade ^ 2)) /  
 (volatilidade \* Sqr(prazo))

    BSCompra = preco\_ativo \* Gauss(d) - Exp(-taxa\_juros \* prazo) \* preco\_exercicio \* Gauss(d -  
 volatilidade \* Sqr(prazo))

End Function

' Preço da opção de venda

Function BSVenda(preco\_ativo, preco\_exercicio, prazo, taxa\_juros, volatilidade)

    BSVenda = BSCompra(preco\_ativo, preco\_exercicio, prazo, taxa\_juros, volatilidade) - preco\_ativo +  
 preco\_exercicio \* Exp(-taxa\_juros \* prazo)

End Function

Function Fz(X)

    Fz = Exp(-X ^ 2 / 2) / Sqr(2 \* Application.Pi())

End Function

' Delta

```

Function BSDelta(preco_ativo, preco_exercicio, prazo, taxa_juros, volatilidade, CompraVenda As
String)

d = (Log(preco_ativo / preco_exercicio) + prazo * (taxa_juros + 0.5 * volatilidade ^ 2)) /
(volatilidade * Sqr(prazo))

Select Case CompraVenda

Case "Compra"

BSDelta = Gauss(d)

Case "Venda"

BSDelta = Gauss(d) - 1

End Select

End Function

```

' Gamma

```

Function BSGamma(preco_ativo, preco_exercicio, prazo, taxa_juros, volatilidade)

d = (Log(preco_ativo / preco_exercicio) + prazo * (taxa_juros + 0.5 * volatilidade ^ 2)) /
(volatilidade * Sqr(prazo))

BSGamma = Fz(d) / preco_ativo / volatilidade / Sqr(prazo)

End Function

```

'Vega

```

Function BSVega(preco_ativo, preco_exercicio, prazo, taxa_juros, volatilidade)

d = (Log(preco_ativo / preco_exercicio) + prazo * (taxa_juros + 0.5 * volatilidade ^ 2)) /
(volatilidade * Sqr(prazo))

BSVega = preco_ativo * Fz(d) * Sqr(prazo)

End Function

```

'Rho

```
Function BSRho(preco_ativo, preco_exercicio, prazo, taxa_juros, volatilidade, CompraVenda As
String)

d = (Log(preco_ativo / preco_exercicio) + prazo * (taxa_juros + 0.5 * volatilidade ^ 2)) /
(volatilidade * Sqr(prazo))

Select Case CompraVenda

Case "Compra"

    BSRho = prazo * preco_exercicio * Exp(-taxa_juros * prazo) * Gauss(d - volatilidade *
Sqr(prazo))

Case "Venda"

    BSRho = -prazo * preco_exercicio * Exp(-taxa_juros * prazo) * Gauss(volatilidade * Sqr(prazo) -
d)

End Select

End Function
```

'Theta

```
Function BSTheta(preco_ativo, preco_exercicio, prazo, taxa_juros, volatilidade, CompraVenda As
String)

d = (Log(preco_ativo / preco_exercicio) + prazo * (taxa_juros + 0.5 * volatilidade ^ 2)) /
(volatilidade * Sqr(prazo))

Select Case CompraVenda

Case "Compra"

    BSTheta = -preco_ativo * Fz(d) * volatilidade / 2 / Sqr(prazo) - taxa_juros * preco_exercicio *
Exp(-taxa_juros * prazo) * Gauss(d - volatilidade * Sqr(prazo))

Case "Venda"
```

```
BSTheta = -preco_ativo * Fz(d) * volatilidade / 2 / Sqr(prazo) + taxa_juros * preco_exercicio *  
Exp(-taxa_juros * prazo) * Gauss(volatilidade * Sqr(prazo) - d)  
End Select  
End Function
```

## ANEXO II – IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO BINOMIAL

```
Sub Binomial()
    Dim dt As Double
    Dim passos As Double
    Dim preco_opcao As Double

    preco_ativo = Range("preco_ativo").Value
    preco_exercicio = Range("preco_exercicio").Value
    taxa_juros = Range("taxa_juros").Value
    prazo = Range("prazo").Value
    volatilidade = Range("volatilidade").Value
    passos = Range("passos").Value
    CompraVenda = Range("CompraVenda").Value

    ReDim S_bin(1 To passos + 1, 1 To passos + 1)
    ReDim Op_bin(1 To passos + 1, 1 To passos + 1)

    dt = prazo / passos
    u = Exp(volatilidade * (dt ^ 0.5))
    d = 1 / u
    p = (Exp(taxa_juros * dt) - d) / (u - d)
    S_bin(1, 1) = preco_ativo
```

```

For i = 1 To passos + 1

    For j = i To passos + 1

        S_bin(i, j) = S_bin(1, 1) * u ^ (j - i) * d ^ (i - 1)

        'Range("matriz_preco_ativo").Cells(i, j) = S(i, j)

    Next j

Next i

```

```

For i = 1 To passos + 1

Select Case CompraVenda

    Case "Compra"

        Op_bin(i, passos + 1) = Application.Max(S_bin(i, passos + 1) - preco_exercicio, 0)

    Case "Venda"

        Op_bin(i, passos + 1) = Application.Max(preco_exercicio - S_bin(i, passos + 1), 0)

End Select

Next i

```

```

For j = passos To 1 Step -1

    For i = 1 To j

        Op_bin(i, j) = Exp(-taxa_juros * dt) * (p * Op_bin(i, j + 1) + (1 - p) * Op_bin(i + 1, j + 1))

        'Range("matriz_preco_opcao").Cells(i, j) = Op(i, j)

    Next i

Next j

```

```

'Preço

preco_opcao = Op_bin(1, 1)

Range("preco_opcao").Value = preco_opcao

```

'Delta

Range("delta") = (Op\_bin(1, 2) - Op\_bin(2, 2)) / (S\_bin(1, 2) - S\_bin(2, 2))

'Gamma

Range("gamma") = ((Op\_bin(1, 3) - Op\_bin(2, 3)) / (S\_bin(1, 3) - S\_bin(2, 3)) - (Op\_bin(2, 3) - Op\_bin(3, 3)) / (S\_bin(2, 3) - S\_bin(3, 3))) / (S\_bin(1, 2) - S\_bin(2, 2))

'Theta

Range("theta") = (Op\_bin(2, 3) - Op\_bin(1, 1)) / dt / 2

ReDim Op\_vega(1 To passos + 1, 1 To passos + 1)

ReDim S\_vega(1 To passos + 1, 1 To passos + 1)

aux\_vol = volatilidade + 0.000001

u = Exp(aux\_vol \* (dt ^ 0.5))

d = 1 / u

p = (Exp(taxa\_juros \* dt) - d) / (u - d)

S\_vega(1, 1) = preco\_ativo

For i = 1 To passos + 1

For j = i To passos + 1

S\_vega(i, j) = S\_vega(1, 1) \* u ^ (j - i) \* d ^ (i - 1)

Next j

Next i

For i = 1 To passos + 1

Select Case CompraVenda

Case "Compra"

Op\_vega(i, passos + 1) = Application.Max(S\_vega(i, passos + 1) - preco\_exercicio, 0)

Case "Venda"

Op\_vega(i, passos + 1) = Application.Max(preco\_exercicio - S\_vega(i, passos + 1), 0)

End Select

Next i

For j = passos To 1 Step -1

For i = 1 To j

Op\_vega(i, j) = Exp(-taxa\_juros \* dt) \* (p \* Op\_vega(i, j + 1) + (1 - p) \* Op\_vega(i + 1, j + 1))

Next i

Next j

'Vega

Range("vega") = (Op\_vega(1, 1) - Op\_bin(1, 1)) / 0.000001

ReDim op\_rho(1 To passos + 1, 1 To passos + 1)

ReDim S\_rho(1 To passos + 1, 1 To passos + 1)

aux\_taxa = taxa\_juros + 0.000001

dt = prazo / passos

u = Exp(volatilidade \* (dt ^ 0.5))

d = 1 / u

p = (Exp(aux\_taxa \* dt) - d) / (u - d)

S\_rho(1, 1) = preco\_ativo

For i = 1 To passos + 1

For j = i To passos + 1

$S_{rho}(i, j) = S_{rho}(1, 1) * u^{(j-i)} * d^{(i-1)}$

Next j

Next i

For i = 1 To passos + 1

Select Case CompraVenda

Case "Compra"

$op_{rho}(i, passos + 1) = Application.Max(S_{rho}(i, passos + 1) - preco_exercicio, 0)$

Case "Venda"

$op_{rho}(i, passos + 1) = Application.Max(preco_exercicio - S_{rho}(i, passos + 1), 0)$

End Select

Next i

For j = passos To 1 Step -1

For i = 1 To j

$op_{rho}(i, j) = Exp(-aux_taxa * dt) * (p * op_{rho}(i, j + 1) + (1 - p) * op_{rho}(i + 1, j + 1))$

Next i

Next j

'Rho

Range("rho") = (op\_rho(1, 1) - Op\_bin(1, 1)) / 0.000001

End Sub

### ANEXO III – IMPLEMENTAÇÃO DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

```
Function StandardMCWithGreeks(OutputFlag As String, CallPutFlag As String, S As Double, X As
Double, T As Double, r As Double, v As Double, nSimulations As Long) As Variant
```

```
Dim St As Double, Output() As Double
```

```
Dim sum As Double, drift As Double, vSqrtdt As Double
```

```
Dim DeltaSum As Double, GammaSum As Double
```

```
Dim i As Long, z As Integer
```

```
ReDim Output(0 To 6) As Double
```

```
drift = (r - v * v / 2) * T
```

```
vSqrtdt = v * Sqr(T)
```

```
If CallPutFlag = "c" Then
```

```
    z = 1
```

```
Elseif CallPutFlag = "p" Then
```

```
    z = -1
```

```
End If
```

```
For i = 1 To nSimulations
```

```
    St = S * Exp(drift + vSqrtdt * Application.NormInv(Rnd(), 0, 1))
```

```
    sum = sum + Application.WorksheetFunction.Max(z * (St - X), 0)
```

```
    If z = 1 And St > X Then DeltaSum = DeltaSum + St
```

```
    If z = -1 And St < X Then DeltaSum = DeltaSum + St
```

```
    If Abs(St - X) < 2 Then GammaSum = GammaSum + 1
```

Next

'preço da opção

Output(0) = Exp(-r \* T) \* sum / nSimulations

'espaço em branco

Output(1) = 0

'delta

Output(2) = z \* Exp(-r \* T) \* DeltaSum / (nSimulations \* S)

'gamma

Output(3) = Exp(-r \* T) \* (X / S) ^ 2 \* GammaSum / (4 \* nSimulations)

'vega

Output(4) = Output(3) \* v \* S \* S \* T

'espaço em branco

Output(5) = 0

'theta

Output(6) = (r \* Output(0) - r \* S \* Output(2) - 0.5 \* v \* v \* S \* S \* Output(3))

StandardMCWithGreeks = Application.Transpose(Output())

End Function