

JANIS CLÉIA LAUDILINA DE JESUS

**MODELOS DE RASTREAMENTO EM CARTEIRAS DE
INVESTIMENTO**

São Paulo
2011

JANIS CLEIA LAUDILINA DE JESUS

**MODELOS DE RASTREAMENTO EM CARTEIRAS DE
INVESTIMENTO**

Monografia apresentada ao Programa de
Educação Continuada em Engenharia da
Escola Politécnica da Universidade de São
Paulo como parte dos requisitos para
obtenção do certificado de conclusão do
MBA em Engenharia Financeira

Área de Concentração:
Engenharia Financeira

Orientador: Prof. Dr. Oswaldo L. V. Costa

São Paulo
2011

JANIS CLEIA LAUDILINA DE JESUS

**MODELOS DE RASTREAMENTO EM CARTEIRAS DE
INVESTIMENTO**

Monografia apresentada ao Programa de
Educação Continuada em Engenharia da
Escola Politécnica da Universidade de São
Paulo como parte dos requisitos para
obtenção do certificado de conclusão do
MBA em Engenharia Financeira

Área de Concentração:
Engenharia Financeira

Orientador: Prof. Dr. Oswaldo L. V. Costa

São Paulo
2011

JANIS CLEIA LAUDILINA DE JESUS

**MODELOS DE RASTREAMENTO EM CARTEIRAS DE
INVESTIMENTO**

Monografia apresentada ao Programa de
Educação Continuada em Engenharia da
Escola Politécnica da Universidade de São
Paulo como parte dos requisitos para
obtenção do certificado de conclusão do
MBA em Engenharia Financeira

Área de Concentração:
Engenharia Financeira

Orientador: Prof. Dr. Oswaldo L. V. Costa

São Paulo
2011

JANIS CLEIA LAUDILINA DE JESUS

**MODELOS DE RASTREAMENTO EM CARTEIRAS DE
INVESTIMENTO**

Monografia apresentada ao Programa de
Educação Continuada em Engenharia da
Escola Politécnica da Universidade de São
Paulo como parte dos requisitos para
obtenção do certificado de conclusão do
MBA em Engenharia Financeira

Área de Concentração:
Engenharia Financeira

Orientador: Prof. Dr. Oswaldo L. V. Costa

V.1

São Paulo
2011

FICHA CATALOGRÁFICA

Jesus, Janis Cléia Laudilina de
MBA em Engenharia Financeira /
Janis Cléia Laudilina de Jesus. -- São Paulo, 2011
1 v.

Monografia – Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo. Departamento de Engenharia

1. Engenharia 2. Engenharia Financeira 3. Ensino e
aprendizagem 4. Curso de Especialização I.
Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.
Departamento de Engenharia II.t.

DEDICATÓRIA

Dedico aos meus pais, amigos e professores que tanto me incentivaram e apoiaram.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Oswaldo L. V. Costa pela competência, paciência e dedicação.

A todos os professores do MBA por toda disseminação de conhecimento

Ao Willian Lopes por ser muito mais do que brilhante, por saber dividir sua inteligência e por estar sempre presente.

Aos meus amigos, em especial aos Rinaldo Caldeira pelo incentivo e motivação ao ingresso deste estudo.

Aos meus colegas de trabalho, Ewerton Machado, João Baptista, entre outros, pela atenção e apoio dados.

Aos colegas do Pece, pelo companheirismo e alegria durante todo o curso.

Aos meus familiares os quais me apoiaram não apenas na superação desta etapa, mas também durante todas da minha vida.

A Deus, pela minha vida.

RESUMO

Este estudo objetivou analisar as simulações práticas de 02 (dois) dos modelos de otimização na tentativa de encontrar, dentre eles, o melhor método para rastreamento de um determinado índice de referencia, denominado *benchmark*. Essas simulações foram realizadas sobre uma massa de dados que compreende fechamentos diários dos ativos que compuseram o IBOVESPA. O período da amostra é de 02/01/2009 á 29/10/2010. Para o tratamento dos dados foram utilizadas ferramentas do Excel. Verificou-se que os resultados obtidos apresentaram evidências de que há diferenças entre os modelos de Mínimo Erro Quadrático e Mínimo Risco Não sistêmico. Esses resultados sugerem, portanto, que o fato de um modelo apresentar menor EQM terá seu índice mais próximo do *benchmark* rastreado, ou seja, quão menor o EQM, melhor o desempenho do modelo.

Palavras-chave: Modelos de otimização, Modelo de mínimos quadrados, Markowitz; Ibovespa

ABSTRACT

This present study aimed to analyze the practical simulations of 02 optimization models trying to find among them the best tracking method of a specific index of reference, called "benchmark". These simulations were performed on a mass of data that includes daily closures of assets that comprised IBOVESPA.

The sample period is from Jan/02/2009 to Oct/29/2010. Excel's tools were used for data processing. It was found that the results were evidence that there are differences between the models of "Minimum Squared Error" and "Non Systemic Risk". Therefore, these results suggest the fact that a model have a smaller "EQM" will have its closest "benchmark" index tracked. In other words, the smaller is the "EQM", the better is the model's performance

Keywords: Optimization Models ; Minimum Squared Error; Markowitz. ; IBOVESPA

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Parâmetros do Solver (Modelo EQM).....	29
Figura 2 – Gráfico : Primeiro período (Modelo EQM).....	30
Figura 3 – Gráfico : Backtest (modelo EQM).....	31
Figura 4 – Parâmetros do Solver (Modelo Mínimo Risco não sistêmico).....	32
Figura 5 – Gráfico : Primeiro período (Modelo Mínimo Risco não sistêmico)....	38
Figura 6 – Gráfico : Backtest (Modelo Mínimo Risco não sistêmico).....	38
Figura 7 – Comparação do modelo 1 e 2.....	40

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Ativos para rastreamento do Ibovespa.....	27
Tabela 2 – Quantidades calculadas para rastrear o Ibovespa (EQM).....	29
Tabela 3 – Quantidades calculadas para rastrear o Ibovespa (Modelo Risco não Sistêmico).....	32
Tabela 4 – Resultado da covariância	33
Tabela 5 – Retornos dos ativos	34
Tabela 6 – Resultado da variância	35
Tabela 7 – Matriz Variância e Covariância (modelo)	35
Tabela 8 – Matriz Variância e Covariância (resultados)	35
Tabela 9 – Resumo dos resultados de todas as etapas	36
Tabela 10 – Beta da carteira x retorno	37

SUMÁRIO

1- INTRODUÇÃO:	16
1.1 Contextualização	16
2- REFERENCIAL TEÓRICO	18
2.1 Modelos de rastreamento	18
2.1.1 Modelo 1: Mínimo Erro Quadrático	19
2.1.2 Modelo 2: Mínimo Risco não sistêmico	21
2.1.3 Modelo3: Mínima Variância do erro	24
3- PROCEDIMENTOS METOLOGICOS	26
3.1 Detalhamento do modelo de Mínimo Erro Quadrático	27
3.2 Detalhamento do modelo de Mínimo Risco não sistêmico	31
3.3 Comparação dos dois modelos	39
4- LIMITAÇÕES	41
5- CONCLUSÃO	42
6- RECOMENDAÇÕES	43
7- REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	44

1. INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

Todos os agentes do mercado financeiro sejam eles, pessoas físicas ou jurídicas, enfrentam, diariamente, a questão de onde investir seus recursos financeiros devido às inúmeras opções que compõem o cardápio de ativos financeiros. Segundo Ceretta (2000), em finanças, uma das maiores preocupações desses investidores está relacionada com a incerteza dos resultados de suas aplicações no mercado financeiro.

Para Duarte Junior (1996) há três pontos importantes os quais precisam ser entendidos pelos investidores: retorno, incerteza e risco, sendo que o retorno pode ser entendido como a apreciação de capital ao final do horizonte de investimento. Infelizmente, existem incertezas associadas ao retorno que efetivamente será obtido ao final do período de investimento. A medida numérica desta incerteza pode ser chamada de risco.

Uma tentativa de administrar essa incerteza é por meio da gestão de risco que procura quantificar a possibilidade de perda, ou seja, o grau de incerteza a que o investidor está sujeito. Assunção e Costa (2006) afirmam que a necessidade de controlar esses riscos faz com que os algoritmos de otimização em administração de carteiras de investimentos fiquem cada vez mais em evidência.

Segundo Assunção e Costa (2000), a constante e dinâmica evolução dos mercados, conseqüente da globalização e do desenvolvimento tecnológico, proporcionam um enorme fluxo diário de informações, as quais precisam ser rapidamente processadas para auxílio dos gestores na tomada de decisão, o que torna relevante o uso de ferramentas estatísticas e de otimização no planejamento e na gestão de carteiras de investimento.

As medidas de risco têm um papel crucial na otimização sob a incerteza, especialmente ao lidar com as perdas que podem ser incorridas na área financeira (Rockafeller e Uryasev, 2002).

Para Assunção e Costa (2006), existem dois tipos de estratégia de escolha de ativos para a composição de uma carteira de investimento: passiva e ativa, sendo que a estratégia passiva visa obter retornos mais próximos possíveis de um dado *benchmark*, enquanto a estratégia ativa tem como finalidade ganhar, em termos de rentabilidade, de um *benchmark* específico. Os dois autores ainda definem que uma solução simples para se adotar uma estratégia passiva de investimento seria verificar como é composto o índice que serve de *benchmark* e montar uma carteira com as mesmas proporções dos ativos.

Pode-se utilizar modelos de otimização de portfólio, tanto para maximizar a relação risco retorno de uma carteira através da diversificação da carteira de investimentos, quanto para reduzir o risco associado a posições passivas. O objetivo geral deste trabalho é o estudo desses algoritmos para um caso particular na gestão de carteiras de investimentos, que é o problema de rastreamento de *benchmark*, também conhecido como estratégia passiva de investimentos, conforme definição dos autores Assunção e Costa (2006).

Conforme mencionado no início do texto, devido à preocupação do investidor com o risco e retorno dos seus fundos, torna-se inviável comprar e vender ativos toda vez que houver novas entradas ou saques no fundo, o que faz necessário um estudo para decidir, entre os ativos com liquidez aceitável, quais e em que proporções devem ser escolhidos, afinal, além do risco, o administrador também deve minimizar os custos com as transações.

Para atingir o objetivo geral deste estudo, o qual pretende rastrear um índice de referência, serão necessários alguns passos conforme descrito abaixo.

Objetivo 1: Identificar o conceito de Algoritmos de otimização através do estudo dos principais autores do tema;

Objetivo 2: Identificar os principais métodos de otimização;

Objetivo 3: Levantar os dados necessários para aplicação dos modelos de otimização;

Objetivo 4: Fazer as simulações com os dados coletados;

Objetivo 5: Análise dos resultados e conclusão.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Modelos de rastreamento

Existem modelos que visam rastrear um determinado *benchmark*. Costa e Lima, em um estudo sobre algoritmos de otimização, afirmam que ao todo são oito modelos para rastreamento, sendo eles: três não-lineares, quatro lineares e um modelo robusto que utiliza desigualdades matriciais lineares.

Neste estudo, daremos enfoque para os seguintes modelos: **de mínimos quadrados**, **de mínimo risco não sistêmico** e **de mínima variância do erro**.

Ao avaliar um portfólio de ativos financeiros, por exemplo, é importante maximizar o retorno esperado, mas ao mesmo tempo avaliar também o risco ao qual o investidor está exposto.

Para Kallrath (2005), a otimização sob incerteza tem como objetivo a exploração dos dados futuros incertos e informações incompletas, de forma a melhorar a qualidade final do desempenho global, isto é, a qualidade de decisões através do horizonte de tempo, ou aumentar a robustez do modelo.

Um modelo de otimização visa determinar valores das variáveis de decisão, que satisfazem certas restrições e otimizam (maximizam ou minimizam) uma função objetivo.

Esses modelos são classificados em:

- Modelo estático: É um modelo no qual as variáveis de decisão envolvem seqüências de decisão ao longo do tempo.
- Modelo dinâmico: Ao contrário do modelo estático, as variáveis de decisão envolvem seqüências de decisão ao longo do tempo, ou seja, em múltiplos períodos.
- Modelo inteiro: É um modelo no qual as variáveis de decisão devem assumir valores inteiros.
- Modelo determinístico: As variáveis de decisão podem ser determinadas com certeza.
- Modelo estocástico: Caso contrário do modelo determinístico.
- Modelo linear: As variáveis de decisão aparecem na função objetivo e nas restrições sempre multiplicadas por constante e somadas.
- Modelo não linear: Inverso do modelo linear

2.1.1 Modelo 01: Mínimo Erro Quadrático.

Como definição encontrada no Wikipédia, o Método dos Mínimos Quadrados, ou Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) é uma técnica de otimização matemática que procura encontrar o melhor ajustamento para um conjunto de dados tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados observados.

Consiste em um estimador que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos da regressão, de forma a maximizar o grau de ajuste do modelo aos dados observados. Um requisito para o método dos mínimos quadrados é que o fator imprevisível (erro) seja distribuído aleatoriamente, essa distribuição seja normal e independente.

Neste estudo, utilizamos a definição abordada em Costa e Assunção (2006) a qual afirma que o método consiste em encontrar a composição da carteira que minimize a diferença quadrática do erro entre os retornos da carteira e os retornos do benchmark.

Conforme enunciado em Rudolf (1999) o modelo consiste em minimizar o seguinte erro.

$$e = B - A \times q \quad (1)$$

O vetor q que dá a composição da carteira é escolhido segundo a seguinte minimização.

$$\min_e e' \times e = \min_q (B - A \times q)' \times (B - A \times q) \quad (1.1)$$

Sujeito a: $q \geq 0$

$$q'1 = 1$$

Onde:

A = matriz dos retornos

B = matriz retorno do *benchmark*

q = vetor do peso dos ativos

Quanto às restrições descritas na função 1.1, de acordo com Assunção e Costa (2000), significa dizer que trabalha apenas com posições compradas e com somatório de todos os pesos dos ativos igual a 1.

Um modelo de seleção de portfólio que utiliza o retorno mínimo como medida de risco foi apresentado por Young (1998). O portfólio ótimo encontrado neste

modelo é a solução de um problema simples de programação linear, e é definido como aquele que maximiza o retorno do pior cenário, sujeito a um nível de retorno esperado.

2.1.2: Modelo 02: Mínimo risco não sistêmico

Harry Markowitz (1952) desenvolveu o modelo que registra a variância de uma carteira como a soma das variâncias individuais de cada ação e covariâncias entre pares de ações da carteira, de acordo com o peso de cada ação que a compõem. Markowitz ainda afirma que deve haver uma carteira de ações que maximiza o retorno esperado e minimiza a variância.

Para Nabholz (2006) este modelo é baseado em hipóteses.

1. Os investidores avaliam carteiras apenas como base no valor esperado e nas variâncias das taxas de retornos dos ativos disponíveis.
2. Os investidores buscam maximizar seu retorno e quando se deparam com duas carteiras com mesmo risco, sempre optam pela de maior retorno.
3. Os investidores buscam minimizar seu risco e quando postos a escolher entre duas carteiras com mesmo retorno, escolhem a de menor risco
4. Os ativos são infinitamente divisíveis, sendo possível comprar qualquer fração do ativo.
5. Existe uma taxa livre de risco, tornando possível para o investidor tomar ou aplicar recursos.
6. O volume das operações do investidor não afeta os preços de mercado.
7. Os custos operacionais de comprar ativos são irrelevantes

Young (1998) afirma que para problemas de otimização de portfólio, em que os retornos são representados por uma distribuição normal, as medidas de risco variância do retorno (proposta por Markowitz) e mínimo retorno são similares.

Por outro lado, o autor mostra que para portfólios com distribuição de retorno assimétrica a utilização de mínimo retorno como medida de risco é mais apropriada.

Segundo Bernstein (1997) o objetivo de Markowitz foi utilizar a noção de risco para compor carteiras para investidores que consideram o retorno esperado algo desejável e a variância do retorno algo indesejável. O que parece bem lógico e sensato para a grande maioria dos investidores. O modelo mostra que enquanto o retorno de uma carteira diversificada equivale à média ponderada dos retornos de seus componentes individuais, sua volatilidade será inferior à volatilidade média de seus componentes individuais

Embora o retorno esperado de uma carteira seja a média ponderada dos retornos individuais, o mesmo não pode ser dito para a variância ou risco da carteira. De acordo com o modelo de Markowitz, a variância da carteira depende da covariância entre os pares de ativos, a qual por sua vez depende da correlação entre os ativos. Assim, quando dois ou mais ativos pouco relacionados compõem uma carteira de investimentos consegue-se um risco menor que a média.

Segundo Damodaran (1996), conceitualmente o risco pode ser dividido em dois tipos básicos: o risco diversificável, que é minimizado pela diversificação de ativos, e o risco não diversificável, que se refere a acontecimentos que afetam o mercado como um todo.

No mesmo sentido, Fleuriet (2004) afirma que o risco de um papel é composto de dois conjuntos distinguíveis de risco, o risco sistemático e não sistemático, o qual por sua vez já foi definido anteriormente.

Como sugerido em Haugen (1993), pode se obter fundos que acompanham o *benchmark* por intermédio de carteiras de mínima variância do modelo de Markowitz, com algumas restrições.

Para Costa e Lima, o beta do ativo representa a covariância entre a carteira de mercado e o ativo dividido pelo desvio padrão da taxa de retorno da Carteira de Mercado e que o beta da carteira em relação ao índice, denotado por β_C , é dado pela soma proporcional dos betas dos ativos, conforme fórmula abaixo.

$$\beta_C = \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i, \quad (2)$$

Beta é a medida do risco diversificável de uma ação. O coeficiente beta pode ser visto como um índice do grau do retorno relativo de uma ação em relação ao retorno do mercado. O beta do mercado é igual a 1 e todos os outros betas são calculados em relação a esse valor.

A variância da carteira pode ser dividida em duas partes como na seguinte equação:

$$\sigma_C^2 = Var(P) = \beta_C^2 \sigma_M^2 + Var(Z) \quad (3)$$

A primeira parcela, chamada de risco sistêmico, não pode ser reduzida por diversificação do investimento. A segunda parcela, chamada de resíduo ou risco não-sistêmico, pode ser reduzida por diversificação.

A restrição que faltava para este modelo, baseada na teoria acima, é a de fixar $\beta_C=1$ e minimizar o resíduo ou risco não-sistêmico

Entende-se por risco não sistêmico aquele que é específico a um determinado ativo. Parcela da variabilidade total do rendimento de um ativo financeiro devida a fatores específicos de uma empresa ou setor e cujo impacto pode ser eliminado ou atenuado através de uma adequada diversificação.

Matematicamente, o modelo pode ser enunciado conforme definição abaixo.

$$\min_q S_c^2 = \min_q q' \times \Omega \times q \quad . (4)$$

sujeito a: $q \geq 0$

$$q'1 = 1$$

$$\beta_c = \sum_{i=1}^n q_i \times \beta_i = 1$$

onde:

S_c^2 = variância da carteira;

Ω = matriz de covariância dos ativos;

q = vetor de pesos dos ativos;

β_c = beta da carteira.

2.1.3 Modelo 03: Mínima Variância do Erro

Já este modelo, visto em Roll (1992) visa minimizar a variância do erro de rastreamento condicionado a um ganho de desempenho da carteira diante do *benchmark*. O ganho de rentabilidade G corresponde á diferença entre os valores esperados dos retornos da carteira.

Assunção e Costa (2000) afirmam que este modelo visa minimizar a volatilidade existente entre o retorno da carteira e o *benchmark*. O intuito é o de evitar carteiras que possuem baixo erro de rastreamento a médio e longo prazo estáveis em determinados períodos de tempo

O modelo poderá ser enunciado conforme descrição abaixo.

$$\min_q (q - q_B)' \times \Omega \times (q - q_B) \quad (5)$$

para: $q_{(N \times 1)}$, $q_{B(N \times 1)}$ e $\Omega_{(N \times N)}$

sujeito a: $q \geq 0$

$$(q - q_B)' \times 1 = 0$$

$$G = (q - q_B)' \times R = 0 \quad (5.1)$$

Onde:

q = vetor de pesos dos ativos da carteira

q_b = vetor de pesos dos ativos do *benchmark*

Ω = Matriz de covariância dos ativos

R = Vetor dos retornos esperados dos ativos.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para este estudo serão testados apenas os modelos de mínimo erro quadrático e mínimo risco não sistêmico.

A população utilizada são os inúmeros ativos financeiros os quais são encontrados no mercado monetários, enquanto que a amostra é representada pelo Índice Bovespa, também chamado de IBOVESPA.

Atendendo as recomendações de Assunção e Costa (2000), os quais afirmam que o primeiro passo na administração de fundos que se propõem a rastrear um índice é a composição e credibilidade do mesmo, o que justifica o motivo da escolha desta amostra já que IBOVESPA é extremamente confiável e com uma metodologia de fácil compreensão pelo mercado. Esse Índice representa fielmente o desempenho médio das principais ações negociadas.

O IBOVESPA é o valor, em moeda corrente, de uma carteira teórica de ações e um dos mais importantes indicadores do desempenho médio das cotações do mercado de ações brasileiro. O seu valor é apurado diariamente como sendo o somatório dos pesos (quantidade teórica da ação multiplicada pelo último preço da mesma) das ações integrantes de sua carteira teórica. E para determinar quais os ativos irão compor esta carteira teórica, a Bolsa de Valores de São Paulo utiliza uma metodologia onde os aspectos mais importantes são a liquidez e o índice de negociabilidade, que é calculado com base no número de negócios e volume financeiro, das ações.

Foram coletados diariamente o valor das ações que compõem o índice pelo período de 02/01/2009 à 29/10/2010 sendo dividido em 02 grupos, o primeiro de 02/01/2009 até 30/06/2010 e o segundo de 01/07/2010 á 29/10/2010 para realização do *backtest*.

Como ferramenta de software para as simulações práticas, foram utilizadas funções do Excel.

3.1 Detalhamentos do Teste de Mínimo Erro Quadrático.

O método consiste, assim como definido no referencial teórico, em encontrar a composição da carteira que minimize a diferença ao quadrado entre seus retornos e os retornos do benchmark.

No estudo, dado que o índice é composto por p ativos, inicialmente define-se um universo de n ativos, onde p ativos, em que $p < n$, o qual será considerado na otimização.

No período analisado, o número de ativos que compuseram o Ibovespa variou em torno de 67 e para o rastreamento foram considerados 05 desses ativos, conforme Tabela abaixo.

Tabela 1: Ativos utilizados para rastrear o IBOVESPA				
Código	Ação	Tipo	Qtde. Teórica _ IBOVESPA	Part. (%)
VALE5	VALE	PNA N1	172,3211787	12,027
BVMF3	BMFBOVESPA	ON ED NM	197,7968614	3,724
OGXP3	OGX PETROLEO	ON NM	117,9064582	3,527
BBDC4	BRADESCO	PN N1	60,88983547	3,069
PETR3	PETROBRAS	ON	57,62059936	2,335

Fonte: Elaboração Própria a partir de dados do Ibovespa (2010).

O critério utilizado na seleção desses ativos foi o percentual de participação na composição do índice, ou seja, uma escolha dentre aqueles que têm um maior peso considerando todos os ativos que compõem o IBOVESPA.

O problema consiste em minimizar o seguinte o erro abaixo conforme enunciado em Rudolf (1999), a fim de chegar às quantidades ideais para compor o índice sintético.

$$e = B - A \times q \quad (6)$$

Sendo:

A = matriz dos retornos

B = matriz dos retornos do *benchmark*

q= vetor do peso dos ativos.

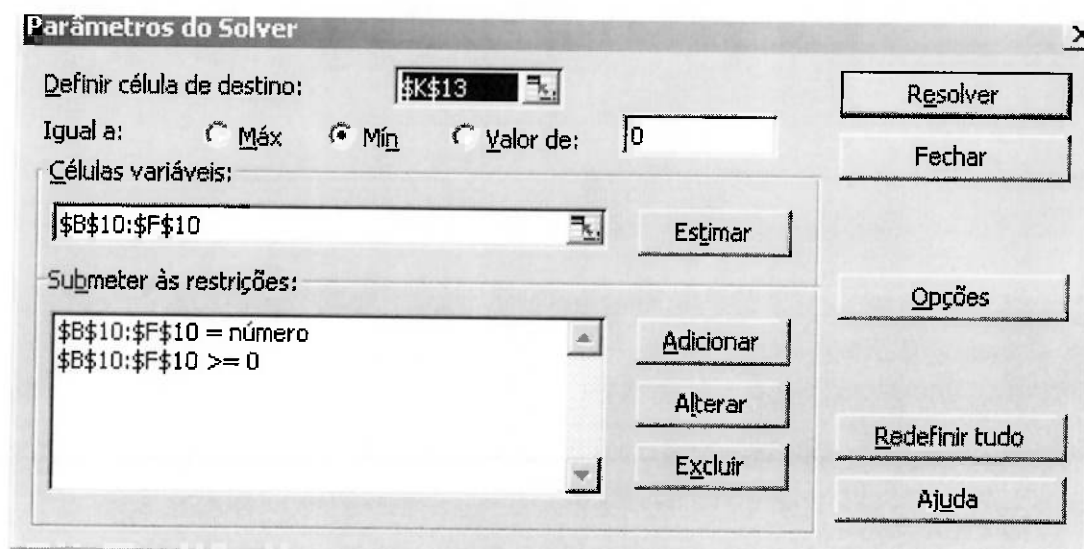
Matematicamente o vetor q que dá a composição da carteira, é escolhido segundo a seguinte minimização, lembrando que 0 (zero) corresponde ao vetor n-dimensional de zeros.

$$\min e = \min (B - A \times q) \times (B - A \times q) \quad (7)$$

sujeito a: $q \geq 0$

Para este cálculo, foi utilizado a função *solver* do Excel, conforme figura abaixo.

Figura 1: Parâmetros do Solver – modelo EQM



Fonte: Figura extraída do Excel a partir de dados modelo EQM (2010).

Esta ferramenta minimizara a **função objetivo (FO)**, a qual segundo metodologia de Wayne (1995): é uma função que define a medida de efetividade do sistema como uma função matemática de suas variáveis de decisão. Esta função poderá ser calculada através da média dos erros quadrático diários (a ser demonstrado nos próximos passos) gerando as quantidades ideais de ações para formação do índice calculado, conforme demonstrado na tabela abaixo.

Tabela 2: Quantidades calculadas de ativos para rastrear o Ibovespa				
PETR3	VALE5	BVMF3	OGXP3	BBDC4
0	852	1.388	-	359

Fonte: Elaboração Própria a partir de dados da IBOVESPA (2010).

Com as quantidades calculadas, o próximo passo será gerar calcular o EQM – Erro Quadrático Médio.

Primeiramente será necessário calcular o erro quadrático diário.

$$(Pontuação\ do\ IBOVESPA - (matriz\ da\ cotação\ diária\ dos\ ativos) \times (matriz\ quantidades\ calculadas))^2 \quad (8)$$

Para este calculo foi utilizado a função *SOMARPRODUTO* do Excel que consiste na multiplicação das matrizes formadas pelas quantidades geradas, pelas cotações diárias de cada ativo escolhido conforme demonstrado acima.

O EQM poderá ser calculado somando os erros diários, dividindo-os pela quantidade de dias úteis utilizados, ou seja, media dos erros diários.

Para o modelo do primeiro período (2/1/2009 á 30/6/2010), obteve-se como função objetivo, minimizada pelo solver, o valor de 1.573.984 .

E por fim, para obtenção do índice, foi utilizada a função *SOMARPRODUTO* do Excel, ou ainda manualmente multiplicando as cotações diárias dos 05 ativos pelas quantidades geradas pelo método EQM.

Graficamente é possível demonstrar se há ou não uma proximidade (correlação) entre os índices.

Figura 2: GRÁFICO 1: Linhas de tendências do Índice Bovespa x Índice Calculado (período de janeiro de 2009 á junho de 2010

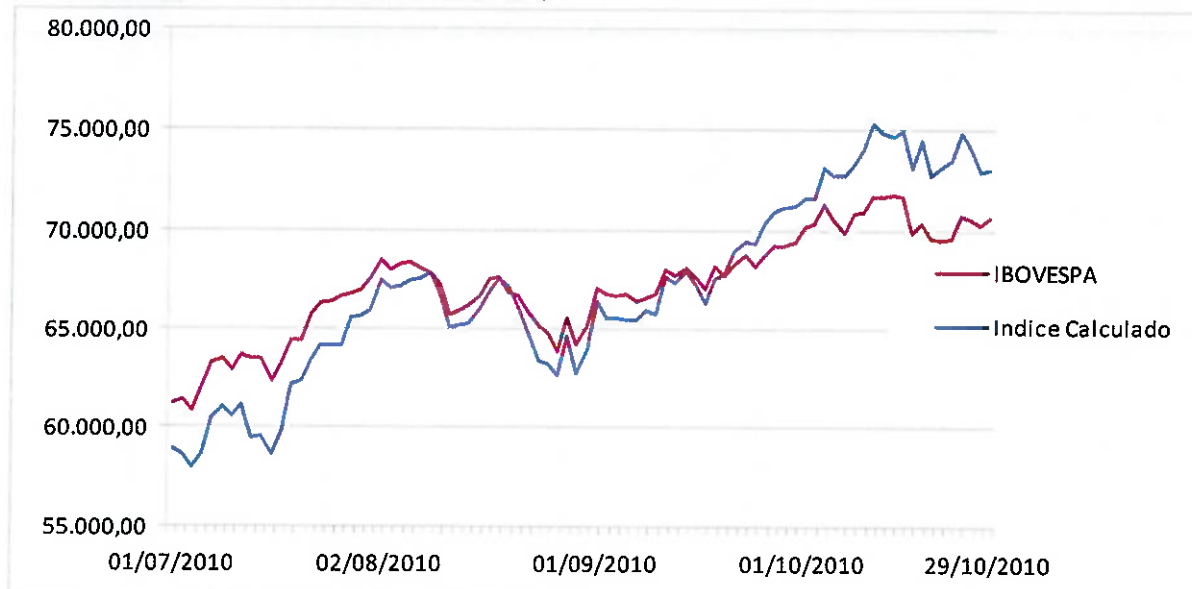


Fonte: Elaboração Própria a partir de dados do IBOVESPA (2010).

Para validação do modelo, os dados usados no *backtest* (1/7/2010 á 29/10/2010), obtiveram o valor de 4.560.515.

O gráfico abaixo demonstra a proximidade dos índices pelo período do *backtest*

Figura 3: GRÁFICO 2: Linhas de tendências do Índice Bovespa x Índice Calculado utilizando dados do backtest (julho de 2010 á outubro de 2010)



3.2 Detalhamento do teste de Mínimo Risco não sistêmico

Conforme definição utilizada no referencial teórico, este modelo desenvolvido por Harry Markowitz (1992) registra a variância de uma carteira como a soma das variâncias individuais de cada ação e covariâncias entre pares de ações da carteira, de acordo como o peso de cada ação na carteira, portanto o primeiro passo para resolução deste modelo é definir a quantidade (peso) de cada ativo escolhido para compor o índice desejado.

Assim como considerado no modelo Mínimo Erro Quadrático (EQM) a população de ativos considerados na otimização é dado por n e definido por critério

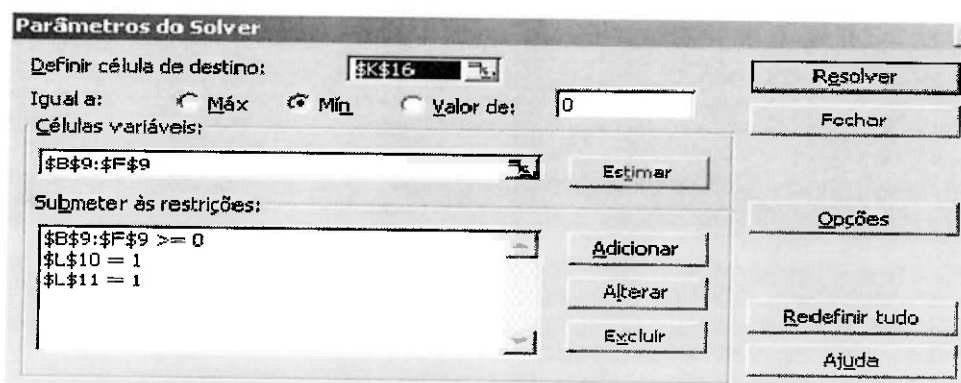
de participação no Ibovespa. Para este modelo, foi utilizado o solver do Excel para minimizar a função objetivo atendendo as restrições descritas abaixo.

- $q \geq 0$, ou seja, as quantidades de ativos deverão ser maior ou igual a 0, portanto, restringe á valores positivos.
- $q'1 = 1$. Neste caso, a somatória das quantidades calculadas das ações escolhidas deverá ser igual a 1.
- $\beta c = \sum q \times \beta = 1$, e por último, para o beta da carteira, a somatória da matriz formada pela quantidade de ações de cada ativo multiplicada pela matriz dos betas de cada ativo deverá ser igual a 1.

As limitações ou restrições: serve para considerar as limitações físicas do sistema, o modelo deve incluir restrições que limitam os valores possíveis das variáveis de decisão.

As restrições podem ser observadas conforme figura abaixo

Figura 4: Parâmetros do solver: Modelo de Mínimo Erro Não Sistemático



Fonte: Excel a partir de dados do Modelo de Mínimo Erro Não Sistemático (2010).

Como resultado, obteve os valores conforme Tabela abaixo:

Tabela 3: Quantidades (pesos) calculadas de cada ativo para rastrear o IBOVESPA

ATIVOS	PETR3	VALE5	BVMF3	OGXP3	BBDC4	IBOVESPA
Quantidade ou peso dos ativos	49%	5%	1%	0%	45%	

Fonte: Elaboração Própria a partir de dados do IBOVESPA (2010).

Após definida minimização da função e definida a quantidade ideal para compor o índice, será necessário calcular a covariância dos ativos, a qual poderá ser calculada conforme a fórmula abaixo.

Covariância:

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \mu_x)(y_j - \mu_y) \quad (9)$$

Onde x e y são as médias de amostra: MÉDIA (matriz do retorno do ativo) e MÉDIA (matriz do retorno do índice que se deseja rastrear.) e n é o tamanho da amostra. Para o cálculo da covariância, utilizou a função COVAR do Excel.

O resultado da covariância poderá ser observado abaixo.

Tabela 4: Resultado da covariância dos ativos

ATIVOS	PETR3	VALE5	BVMF3	OGXP3	BBDC4	IBOVESPA
Covariância	0,00085	0,00039	0,00039	0,00042	0,00031	0,00032

Fonte: Elaboração Própria a partir de dados do IBOVESPA (2010).

Além da covariância, o retorno dos ativos também precisa ser definido, para tanto, é preciso obter as cotações diárias dos ativos, o qual poderá ser calculado conforme fórmula abaixo:

$$\ln (\text{Cotação do dia} / \text{cotação do dia anterior}) = \text{Retorno do ativo.} \quad (10)$$

Exemplo:

No dia 02/01/2009 a cotação da PETR3 fechou em R\$ 29,86, já para o próximo dia útil, 05/01/2009, ela fechou em R\$ 30,52, portanto o retorno dela no dia 05/01/2009 foi de: $\ln(R\$ 30,52 / R\$ 29,86) = 0,021862414$.

Quanto ao retorno do Ibovespa, utiliza-se a pontuação diária como parâmetro.

Os retornos deverão ser calculados durante todo o período do teste, incluindo todos os ativos. A tabela a seguir se refere apenas a um curto período para visualização.

Tabela 5: tabela exemplificativa dos retornos calculados de cada ativo

Tabela resumida dos retornos dos ativos						
DATA	PETR3	VALE5	BVMF3	OGXP3	BBDC4	IBOVESPA
02/01/2009						
05/01/2009	0,021862	0,066445	0,078969	-0,10754	-0,00766	0,03117657
06/01/2009	0,01625	0,033366	0,019859	0,002181	0,031875	0,01893439
07/01/2009	-0,05364	-0,05175	-0,05337	-0,04912	-0,04615	-0,0358991
08/01/2009	0,051378	0,036433	0,004435	0,029314	0,001641	0,02826631

Fonte: Elaboração Própria a partir de dados do IBOVESPA (2010).

Quando tabelado todos os retornos, o primeiro dia útil utilizado no estudo ficará sem valores, já que é necessário dados do passado para obtenção do valor presente.

Para prosseguir com as simulações, foi necessário obter os resultados da variância, os quais poderão ser obtidos a partir da fórmula abaixo

$$\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{(n-1)} \quad (11)$$

Onde $\bar{x}$ é média de amostra e n é o tamanho da amostra.

Neste estudo, a Variância foi calculada usando a fórmula COVAR, sendo que a tanto a matriz 1, quanto a matriz 2 foram formadas pelo retorno do próprio ativo.

Exemplo: COVAR(retorno da PETR3;retorno da PETR3)

O resultado pode ser observado na tabela abaixo.

Tabela 6: Resultados da variância de cada ativo

ATIVOS	PETR3	VALE5	BVMF3	OGXP3	BBDC4	IBOVESPA
Variância	0,00044	0,00059	0,00085	0,05921	0,00045	0,00032

Fonte: Elaboração Própria a partir de dados do IBOVESPA (2010).

Com todos os cálculos definidos, o próximo passo é criar a matriz de Variância/Covariância, para analisar a correlação existente entre os ativos.

Abaixo tabela demonstrativa de como calcular a matriz.

Tabela 7: Modelo para cálculo da matriz de Variância –Covariância

Matriz de Variância e Covariância (modelo)					
Matriz	PETR3	VALE5	BVMF3	OGXP3	BBDC4
PETR3	COVAR(PETR3/PETR3)	COVAR(PETR3/VALE5)	COVAR(PETR3/BVMF3)	COVAR(PETR3/OGXP3)	COVAR(PETR3/BBDC4)
VALE5	COVAR(VALE5/PETR3)	COVAR(VALE5/VALE5)	COVAR(VALE5/BVMF3)	COVAR(VALE5/OGXP3)	COVAR(VALE5/BBDC4)
BVMF3	COVAR(BVMF3/PETR3)	COVAR(BVMF3/VALE5)	COVAR(BVMF3/BVMF3)	COVAR(BVMF3/OGXP3)	COVAR(BVMF3/BBDC4)
OGXP3	COVAR(OGXP3/PETR3)	COVAR(OGXP3/VALE5)	COVAR(OGXP3/BVMF3)	COVAR(OGXP3/OGXP3)	COVAR(OGXP3/BBDC4)
BBDC4	COVAR(BBDV4/PETR3)	COVAR(BBDV4/VALE5)	COVAR(BBDV4/BVMF3)	COVAR(BBDV4/OGXP3)	COVAR(BBDV4/BBDC4)

Fonte: Modificada a partir do modelo de Markowitz (2010).

Tabela 8: Matriz da variância e covariância

Matriz de Variância e Covariância (resultado)					
Matriz	PETR3	VALE5	BVMF3	OGXP3	BBDC4
PETR3	0,000439974	0,000366669	0,000354753	0,000545139	0,000303948
VALE5	0,000366669	0,000593982	0,000423163	0,000441819	0,000345281
BVMF3	0,000354753	0,000423163	0,000851275	0,000671639	0,000366366
OGXP3	0,000545139	0,000441819	0,000671639	0,059213296	0,000274246
BBDC4	0,000303948	0,000345281	0,000366366	0,000274246	0,00045371

Fonte: Fonte: Modificada a partir do modelo de Markowitz (2010).

Após a definição da matriz e com os cálculos da variância e covariância, tanto o beta do ativo, quanto o beta da carteira poderão ser definidos.

Beta, nada mais é do que uma regressão linear dos retornos dos ativos com o retorno do mercado. Ou seja, um cálculo estatístico na qual trabalha com os dados da rentabilidade de um ativo (ação), com a rentabilidade de um índice do mercado, neste estudo, o IBOVESPA

Portanto o beta do ativo poderá ser calculado dividindo a covariância do ativo sobre a variância do IBOVESPA e para o Beta da carteira, multiplica-se o beta do ativo pela participação dele mesmo no modelo.

Ressalta-se, que conforme restrição apresentada, a somatória dos BC (beta da carteira), deve ser igual a 1.

A tabela abaixo, demonstra todos os valores calculados

Tabela 9: Apresentação dos resultados obtidos em cada etapa.

ATIVOS	PETR3	VALE5	BVMF3	OGXP3	BBDC4	IBOVESPA
Quantidade ou peso dos ativos	49%	5%	1%	0%	45%	
Beta de cada ativo	0,992	1,225	1,219	1,333	0,978	1,000
Covariância	0,00032	0,00039	0,00039	0,00042	0,00031	0,00032
Variância	0,00044	0,00059	0,00085	0,05921	0,00045	0,00032
Beta da carteira	0,48309	0,06190	0,01438	-	0,44063	-

Fonte: Elaboração própria a partir dos resultados do modelo de mínimo erro não sistêmico.

Depois de calculados todos os itens, o solver irá minimizar a **função objetivo (FO)**, da variância, neste estudo foi calculada conforme descritivo abaixo, utilizando Excel e minimizada pelo solver.

Fórmula extraída do Excel

$$MATRIZ.MULT(MATRIZ.MULT(matriz\ das\ quantidades\ dos\ ativos; matriz\ da\ variância\ e\ covariância); TRANSPOR(matriz\ quantidades\ dos\ ativos)) \quad (12)$$

Como resultado, obtemos o valor de 0,000374.

Após definidos todos os cálculos (quantidades dos ativos, beta do ativo, beta da carteira, retorno, covariância, variância, matriz de variância/covariância) podemos prosseguir com o objetivo geral, obter o índice que rastreará o *benchmark*

A fórmula utilizada será:

Índice Bovespa do dia anterior x (1 + matriz beta da carteira de cada ativo x matriz do retorno de cada ativo) (13)

Exemplo para o dia 01 /07/2010:

Valor do Ibovespa para o dia 30/06/2010: 60.935,90

Dados do Beta e do retorno para o dia 01/07/2010.

Tabela 10: valores do Beta da Carteira e Retorno para auxílio dos cálculos

ATIVOS	PETR3	VALE5	BVMF3	OGXP3	BBDC4	IBOVESPA
Beta da carteira	0,48309	0,06190	0,01438	-	0,44063	-
Retorno	-0,02648	0,007097	-0,02179	0,042734	0,043848	0,004916

Fonte: Elaboração própria a partir de resultados do modelo de mínimo erro não sistêmico (2010).

Calculo: $(60.935,90 \times (1 + (0,48309 \times -0,02648) + (0,06190 \times 0,007097) + (0,01438 \times -0,02179) + (-0,042734) + (0,44063 \times 0,043848)))$

Resultado: 61.341,51

Neste estudo, o cálculo das matrizes formadas pelos betas e pelos retornos foi feito usando a fórmula SOMARPRODUTO.

Os cálculos acima deverão ser realizados para todas as datas do período necessário

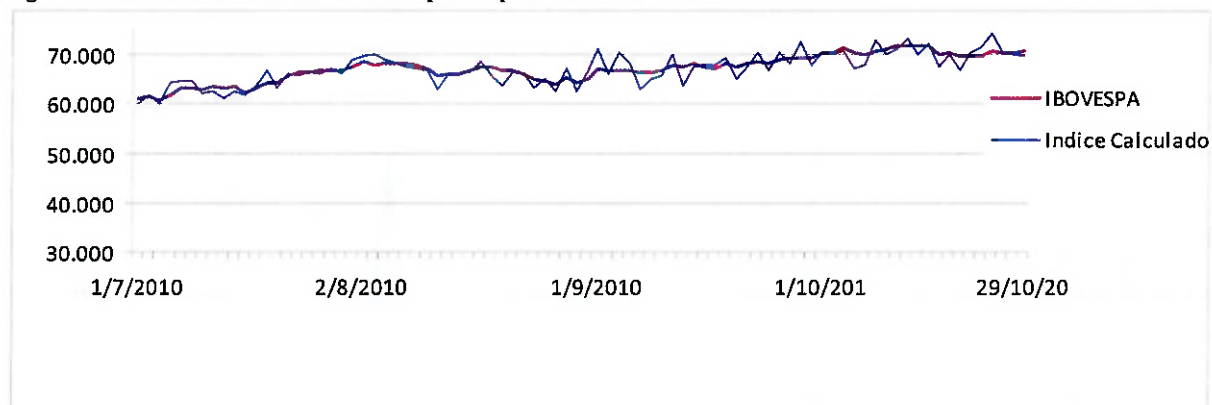
As figuras (05) e (06) sintetizam graficamente os valores do índice sintético, sendo o para o primeiro período e *backtest*, respectivamente

Figura 5: Gráfico Modelo de Markowitz para o período de 02/01/2009 à 30/06/2010



Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do modelo de Markowitz (2010).

Figura 6: Gráfico Modelo de Markowitz para o período de 01/07/2010 à 29/10/2010.



Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do modelo de Markowitz (2010).

3.3 Comparações dos dois modelos.

Para a comparação dos 02 modelos, foram utilizados apenas os gráficos do *backtest*, além do cálculo do EQM no segundo modelo (Mínimo Risco não sistêmico) para que seja possível mensurar a eficiência entre as metodologias e compará-las para avaliar qual delas possui o melhor desempenho.

O cálculo do EQM para o segundo modelo foi realizado com a mesma fórmula apresentada na descrição do primeiro modelo (Erro Quadrático Médio), ou ainda utilizado o Excel com a seguinte fórmula:

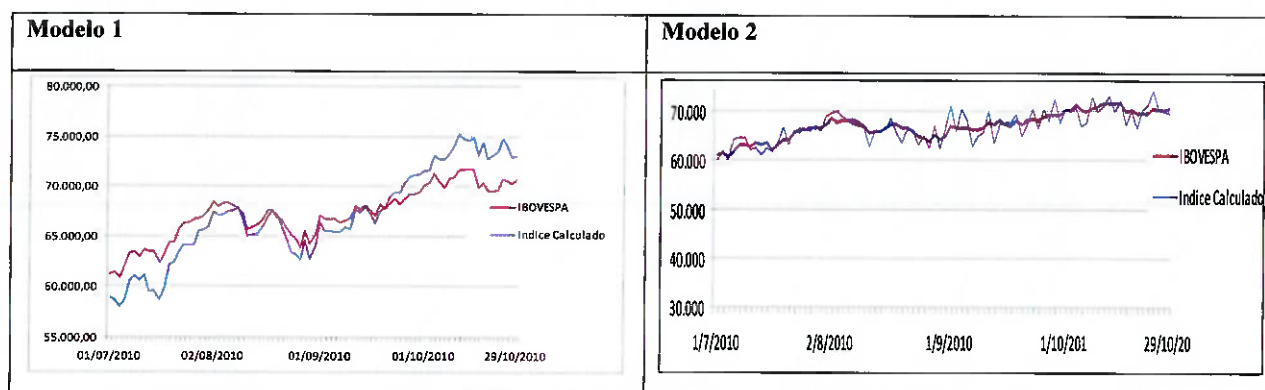
$$=SOMA(Erro\ quadrático\ diário)/CONT.VALORES(Erro\ quadrático\ diário) \quad (14)$$

Como demonstrado no primeiro método, à função objetivo para o modelo EQM, utilizando os dados do *backtest* resultou em 4.560.515, enquanto que para o método do segundo modelo foi de 2.668.470, portanto, o menor EQM é conclusivo para se definir a melhor metodologia.

Conforme já mencionado no estudo anterior elaborado por Assunção e Costa (2000), o modelo 2, mesmo não possuindo nenhuma restrição direta à rentabilidade acompanhou o Ibovespa relativamente bem, inclusive com melhor assertividade quando comparado ao modelo do Mínimo Erro Quadrático.

Esta conclusão poderá ser observada a partir dos gráficos gerados pelo período do *backtest* do modelo 1 e modelo 2, ambos reproduzidos na figura 07

Figura 7: Comparação dos modelos 1 e 2:



Fonte: Elaboração própria a partir dos modelos EQM e Mínimo Erro Não Sistemático

Um dos motivos o qual explica o melhor desempenho do modelo de mínimo risco não sistêmico é que ele não fica preso aos retornos passados mas sim a minimizar a componente do risco não sistêmico e manter o beta igual a 1, ou seja, pareado ao beta do mercado. Já o modelo de mínimo erro quadrático é baseado nos retornos passados, e se esses valores mudarem muito, pode afetar mais o desempenho do método, o que certamente ocorreu com os dados do período em questão.

4. LIMITAÇÕES DO ESTUDO

Deve-se lembrar que o mercado financeiro atual é imensamente mais complexo que o exemplo apresentado neste estudo, uma vez que ele não é composto apenas de ativos como ações, há também os denominados derivativos, como opções, além do mercado de câmbio entre outros, o que torna o rastreamento mais complexo, em alguns casos inviabilizando o uso dos métodos apresentados neste estudo. Outro ponto questionável é com relação aos custos com transações, as quais não estão expostas neste estudo, porém são de extrema importância para tomadas de decisão.

5. CONCLUSÃO

Verificamos que é possível – com a utilização de planilhas eletrônicas ou algum outro software com recursos de otimização – desenvolver modelos simples de otimização para replicar determinados *benchmarks*. Tais técnicas de otimização podem prover um auxílio importante na gestão de carteiras, além disso, podemos utilizar como critério o Erro Quadrático Médio para avaliar qual metodologia possui o melhor desempenho. Desta forma, verificamos que o modelo de Mínimo Erro Não Sistemático é superior ao modelo de mínimo erro quadrático médio. Tal constatação pode ser justificada utilizando o argumento de que o modelo Erro Quadrático Médio propõe a solução ótima para os dados no passado, enquanto o modelo de Mínimo Erro Não Sistemático minimiza a volatilidade do risco não sistemático, ou seja, aquele inerente ao ativo e não ao mercado e por isso é melhor quando pensamos em dados no futuro.

6. RECOMENDAÇÕES

Sugere-se, para futuras pesquisas, a aplicação destas metodologias comparativamente a outras, como a da Mínima Variância do Erro, destacada neste estudo, mas não testada de fato.

Outra recomendação é com relação ao período testado o qual poderá ser diferente, maior ou menor do que o apresentado, além do uso do IBOVESPA como *benchmark*, sendo que atendendo ao referencial teórico, índices como o *Dow Jones* entre outros poderão ser submetidos às metodologias para teste do desempenho dos modelos.

Custos relacionados às transações oriundas dos índices também favorecem estudos sobre o tema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSAF NETO, Alexandre. (2003) . *Mercado Financeiro*. São Paulo: Atlas.

ASSUNÇÃO H.G.V and COSTA L.V. O. (2006) *Análise de Risco e Retorno em investimento financeiro*. São Paulo: Manole .

ASSUNÇÃO H.G.V and COSTA L.V .O. (2002) . *Modelo de rastreamento em carteiras de investimentos* – resenha BM&F n.142. Disponível em : <http://www.lac.usp.br/~oswaldo/papers/resenha.pdf> : Acesso 22 abril de 2010

BERNSTEIN, PETER L. *Desafio aos Deuses: A Fascinante História do Risco*. Editora Campus, 2ª Edição, 1997.

CAMPEL,J.Y.,LO, A. W. and MACKILANLAY, A.C (1997) *The economics of financial markes* . Princeton.

CERETTA, Paulo Sergio e COSTA JR, Newton C. A. (2000) da. *Mercado de Capitais: Análise Empírica do Brasil*. Coleção Coppead de Administração. São Paulo: Atlas.

COSTA L V O, LIMA S .A R : *Algoritmos de otimização em carteiras de investimentos: Disponível em : <http://www.lti.pcs.usp.br/robotics/grva/publicacoes/outras/cba2004-cd-rom/cba2004/pdf/720.pdf> : Acesso em: 16 novembro de 2010*

DAMODARAN, A. (1996) *Investment valuation: tools and techniques for determining the value of any asset*. New York: Wiley.

DUARTE A. M Jr. (1996) “*Indexing Stock Portfolios in Brazil: Tracking the IBOVESPA and the FGV-100*”, Relatório Técnico, Departamento de Métodos Estatísticos, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro.(Aceito para publicação no The Journal of Investing.)

FLEURIET, M. (2004) *A arte e a ciência das finanças: uma introdução ao mercado financeiro*. Rio de Janeiro: Elsevier;

HAUGEN, R. A.(1993) **Modern investment theory**. 3º ed. New Jersey : Prentice Hall.

INDICE BOVESPA: Disponível em <http://www.bmfbovespa.com.br> – acesso durante todo o período de elaboração dos cálculos da monografia (setembro 2010 á dezembro de 2010)

KALLRATH, J. (2005) : **Solving Planning and Design Problems in the Process Industry Using Mixed Integer and Global Optimization**. Annals of Operations Research 140.

MARKOWITZ.H.(1952) **Portfolio Selection: efficient diversification of investments** Journal of Finance n.7: p 77-91

NABHOLZ, R.B. (2006) **Seleção ótima de ativos multi-período com restrições intermediárias utilizando o critério de média-variância.**: Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3139/tde-11122006-171121/pt-br.php> : Acesso em 17 outubro de 2010

ROLL, R. (1992) **A Mean-Variance Analysis of Tracking Error**. *The Journal of Portfolio Management*. 18:13 - 22

RUDOLF, M WOLTER H J ZIMMERMANN . (1999) **A Linear Model for Tracking Error Minimization**. *Journal of Banking & Finance*. pp 85-103

RYABCHENKO, V. and URYASEV.S (2002) **Pricing Energy Derivatives by Linear Programming: Tolling Agreement Contracts**. *Journal of Computational Finance*.

ROCKAFELLAR R. T.; URYASEV, S. e ZABARANKIN, M. (2006). **Generalized deviations in risk analysis**. *Finance and Stochastic*, 10:51–74.

YOUNG ,M. R. (1998) **A minimax portfolio solution rule with linear programming solution** :Management science.

WAYNE L.(1995) *Introduction to Mathematical Programming - Applications and Algorithms*.
Winston Duxbury Press.

WIKIPEDEDIA: <http://pt.wikipedia.org> : - **Definição de EQM** - Acesso em 29 outubro de 2010