

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS**

**MODELAGEM GEOESTATÍSTICA POR
KRIGAGEM LOGNORMAL EM DEPÓSITO DE OURO**

Monografia – Trabalho de Formatura
TF-24/15

Aluno: Felipe Louis Grimmelprez
Orientador: Prof. Dr. Marcelo Monteiro da Rocha
Coorientador: M.Sc. Lucas Bassan

São Paulo – SP, 2024

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Marcelo Monteiro da Rocha, que além de me orientar neste trabalho, foi um grande mentor para mim desde o segundo ano de faculdade. Mesmo depois de diversas matérias de Geoestatística e Recurso Mineral ainda consegue transformar uma simples conversa em diversos ensinamentos.

Agradeço também a meu coorientador, Lucas Bassan, que além de meu supervisor no estágio e guia na área de recurso mineral, me ensinou como as relações do trabalho podem ser acompanhadas de carinho, respeito e risadas.

Não posso deixar de mencionar meus colegas e amigos da geologia, em especial Zé, Xandô, Lucas, Dex e Dudu, que compartilharam comigo ao longo da graduação muitas risadas, viagens, desafios, e diversos outros momentos que guardarei com muito carinho. Espero que nos encontremos muito ainda por esse mundo, dentro e fora da Geologia.

Quero expressar minha gratidão a pessoa que mais esteve presente na minha vida nesses últimos 4 anos, minha companheira e melhor amiga, Lorena. Seu apoio e amor incondicional junto a sua compreensão e paciência foram essenciais para nossa trajetória. Sua energia contagiante e entusiasmo são traços que transformam cada momento e oportunidade com mais alegria e paixão.

Finalmente, agradeço a minha família, em especial a meus pais, Ann e Damien, que me apoiaram ao longo de todos esses anos nessa jornada. Seus exemplos de vida são minha inspiração e motivação pela constante busca da minha melhor versão, não apenas profissional, mas como pessoa também.

RESUMO

A estimativa de recursos minerais é uma parte fundamental de um projeto de pesquisa mineral, dado que os resultados desse cálculo vão definir a viabilidade econômica do depósito. Os métodos geoestatísticos são as principais técnicas utilizadas durante a estimativa dos recursos minerais, e garantem uma assertividade superior quando comparado a métodos não geoestatísticas. Dessa forma, o objetivo desse estudo é realizar a estimativa de um depósito de ouro por krigagem lognormal e comparar seus resultados com o método mais aplicado nas estimativas, a krigagem ordinária. A krigagem lognormal é um método geoestatístico não linear, que consiste na transformação de uma distribuição assimétrica positiva - onde há um predomínio de amostras de baixo teor e poucas de alto teor - a partir da aplicação do logaritmo. Esse novo arranjo tende a apresentar um comportamento simétrico, de maneira que a estimativa se correlacione melhor com os dados amostrais. Neste trabalho foram realizados todos os passos iniciais para aplicação da krigagem ordinária para um depósito de ouro, como a validação e regularização da base de dados, a modelagem geológica e análise exploratória de dados. Em seguida, essas informações foram transformadas pela aplicação do logaritmo e o comportamento geoestatístico da variável original e da variável que foi alterada foi analisado. Após a realização das estimativas, os resultados da krigagem lognormal passam por uma mudança reversa, e são feitas análises estatísticas e gráficas a fim de comparar os produtos de cada técnica. Na análise comparativa entre os resultados das estimativas por krigagem ordinária e krigagem lognormal, o primeiro apresentou uma assertividade superior, suavizando menos e preservando de melhor forma a cauda superior da distribuição. As variáveis em estudo apresentam 30% dos valores equivalentes a 0,005 ppm, fazendo com que não se classificassem tão bem como lognormais, prejudicando a metodologia pesquisada.

ABSTRACT

The estimation of mineral resources is a fundamental part of a mineral research project, as the results of this estimation will determine the economic feasibility of the deposit. Geostatistical methods are the main techniques used for mineral resource estimation and ensure higher accuracy compared to non-geostatistical methods. The objective of this study is to estimate a gold deposit using lognormal kriging and compare its results with the most commonly applied method, ordinary kriging. Lognormal kriging is a non-linear geostatistical method that involves transforming a positively skewed distribution, characterized by a predominance of low-grade samples and few high-grade samples, through the application of a logarithm. This new distribution tends to exhibit a symmetrical behavior, allowing for a better correlation with the sampling data. In this study, all preliminary steps for the application of ordinary kriging for a gold deposit were followed, such as data validation and regularization, geological modeling, and exploratory data analysis. Then, the data were transformed using the logarithm, and the geostatistical behavior of the original and transformed variables was analyzed. After performing the estimations, the results from the lognormal kriging were back-transformed, and statistical and graphical analyses were conducted to compare the outputs of each technique. In the comparative analysis between the results from ordinary kriging and lognormal kriging, the former showed higher accuracy, with less smoothing and better preservation of the upper tail of the distribution. The studied variables presented 30% of the values equivalent to 0.005 ppm, which hindered their classification as lognormal, affecting the methodology under study.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	9
2. OBJETIVOS E METAS.....	9
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	10
3.1. DISTRIBUIÇÃO NORMAL X LOGNORMAL	10
3.2. GEOESTATÍSTICA	12
4. MATERIAIS E MÉTODOS	16
5. RESULTADOS OBTIDOS E INTERPRETAÇÕES PRELIMINARES	17
5.1. ANÁLISE EXPLORATÓRIA DE DADOS.....	17
5.2. MODELAGEM GEOLÓGICA	20
5.3. MODELO DE BLOCOS	20
5.4. REGULARIZAÇÃO DAS AMOSTRAS	21
5.5. TRANSFORMAÇÃO DOS DADOS	21
5.6. CÁLCULO DO VARIOGRAMA EXPERIMENTAL E AJUSTE DE MODELO TEÓRICO	23
5.6.1. <i>Variografia da Lente Superior</i>	23
5.6.1.1. Variável de ouro original	23
5.6.1.2. Variáveis de ouro transformadas	25
5.6.2. <i>Variografia da Lente Inferior</i>	27
5.6.2.1. Variável de ouro original	27
5.6.2.2. Variáveis de ouro transformadas	28
5.7. DEFINIÇÃO DOS PARÂMETROS DE VIZINHANÇA	30
5.7.1. <i>Vizinhança na Lente Superior</i>	30
5.7.1.1. Validação Cruzada dos dados originais.....	31
5.7.1.2. Validação Cruzada dos dados transformados	31
5.7.2. <i>Vizinhança na Lente Inferior</i>	32
5.7.2.1. Validação Cruzada dos dados originais.....	33
5.7.2.2. Validação Cruzada dos dados transformados	33
5.8. ESTIMATIVA POR KRIGAGEM ORDINÁRIA E KRIGAGEM LOGNORMAL	34
5.8.1. <i>Estimativas na Lente Superior</i>	34
5.8.1.1. Krigagem Ordinária – variável de ouro original	34
5.8.1.2. Krigagem Lognormal – variáveis de ouro transformadas	35
5.8.2. <i>Estimativas na Lente Inferior</i>	37
5.8.2.1. Krigagem Ordinária – variável de ouro original	37
5.8.2.2. Krigagem Lognormal – variáveis de ouro transformadas	38
6. DISCUSSÃO E INTERPRETAÇÃO DE RESULTADOS	40
6.1. RESULTADOS NA LENTE SUPERIOR.....	40
6.2. RESULTADOS NA LENTE INFERIOR.....	43
7. CONCLUSÕES	46
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	47

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Transferência de uma distribuição assimétrica positiva para uma distribuição normal através da transformação dos valores em logaritmos. Fonte: (Koch e Link, 1970)	11
Figura 2: Variograma teórico com propriedades. Fonte: Yamamoto (2001).	13
Figura 3: Fluxograma do trabalho realizado.....	16
Figura 4: Malha de sondagem com destaque em azul para os <i>collars</i> de cada sonda e sua orientação.....	17
Figura 5: Seleção das amostras de ouro em lente superior (verde), lente inferior (vermelha) e amostras não selecionadas (azul).	18
Figura 6: A) Histograma de distribuição do ouro na lente superior; B) <i>Log Probability Plot</i> do ouro na lente superior.....	19
Figura 7: A) Histograma de distribuição do ouro na lente inferior; B) <i>Log Probability Plot</i> do ouro na lente inferior.	19
Figura 8: Sólidos das lentes superior (verde) e inferior (vermelho).	20
Figura 9: QQ-Plot dos dados de ouro transformados pelo logaritmo natural + 10 x distribuição gaussiana em que A) representa a lente superior e B) representa a lente inferior.	22
Figura 10: Histograma da variável de ouro transformada pelo logaritmo natural + 10.	23
Figura 11: Variogramas <i>downhole</i> , D1, D2 e D3 da variável de ouro original na lente superior.	25
Figura 12: Variogramas <i>downhole</i> , D1, D2 e D3 das variáveis de ouro transformadas na lente superior.	26
Figura 13: Variogramas <i>downhole</i> , D1, D2 e D3 da variável de ouro original na lente superior.	28
Figura 14: Variogramas <i>downhole</i> , D1, D2 e D3 das variáveis de ouro transformadas na lente inferior.....	29
Figura 15: Validação cruzada para variável de ouro original na lente superior, onde a bissetriz é representada pela linha pontilhada e a regressão linear pela reta vermelha.	31
Figura 16: Validação cruzada para as variáveis de ouro transformadas na lente superior, onde a bissetriz é representada pela linha pontilhada e a regressão linear pela reta vermelha.....	32
Figura 17: Validação cruzada para a variável de ouro original na lente inferior, onde a bissetriz é representada pela linha pontilhada e a regressão linear pela reta vermelha.	33
Figura 18: Validação cruzada para as variáveis de ouro transformadas na lente inferior, onde a bissetriz é representada pela linha pontilhada e a regressão linear pela reta vermelha.....	34
Figura 19: Modelo estimado por krigagem ordinária dos dados originais na lente superior.....	35
Figura 20: Modelo estimado por krigagem lognormal com transformação reversa pela aplicação do expoente.	36
Figura 21: Modelo estimado por krigagem lognormal com transformação reversa pela Equação 7 na lente superior.....	37
Figura 22: Modelo estimado por krigagem ordinária dos dados originais na lente inferior.....	38
Figura 23: Modelo estimado por krigagem lognormal dos dados transformados na lente inferior.	39
Figura 24: Modelo estimado por krigagem lognormal com transformação reversa pela Equação 7 na lente inferior.	39
Figura 25: <i>Log Probability Plot</i> dos dados amostrais e das estimativas na lente superior.	41
Figura 26: Histograma dos dados amostrais e das estimativas (até 2 ppm) na lente superior.	41

Figura 27: <i>QQ-Plot</i> dos dos dados amostrais e das estimativas (até 2 ppm) na lente superior.	42
Figura 28: <i>Swath Plot</i> A) Intervalos de 50 metros na direção Y; B) Intervalos de 20 metros na direção X dos dados amostrais e das estimativas na lente superior.	42
Figura 29: <i>Log Probability Plot</i> dos dados amostrais e das estimativas na lente inferior.	44
Figura 30: Histograma dos dados amostrais e das estimativas (até 2 ppm) na lente inferior.	44
Figura 31: <i>QQ-Plot</i> dos dos dados amostrais e das estimativas (até 2 ppm) na lente inferior.	45
Figura 32: <i>Swath Plot</i> A) Intervalos de 50 metros na direção Y; B) Intervalos de 25 metros na direção X dos dados amostrais e das estimativas na lente superior.	45

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Estatísticas descritivas da variável de ouro.....	18
Tabela 2: Definição do tamanho da célula parental e subcélulas no modelo de blocos.....	21
Tabela 3: Estatísticas descritivas das amostras de ouro originais x <i>composite</i>	21
Tabela 4: Estatísticas descritivas das variáveis transformadas.	22
Tabela 5: Parâmetros do variograma experimental da variável original na lente superior.	24
Tabela 6: Parâmetros para ajuste do modelo de variograma da variável original na lente superior.....	24
Tabela 7: Parâmetros do variograma experimental das variáveis transformadas na lente superior.	25
Tabela 8: Parâmetros para ajuste do modelo de variograma das variáveis transformadas na lente superior.....	26
Tabela 9: Parâmetros do variograma experimental da variável original na lente inferior.	27
Tabela 10: Parâmetros para ajuste do modelo de variograma da variável original na lente inferior.....	28
Tabela 11: Parâmetros do variograma experimental das variáveis transformadas na lente inferior.	29
Tabela 12: Parâmetros para ajuste do modelo de variograma das variáveis transformadas na lente inferior.....	29
Tabela 13: Parâmetros de vizinhança para estimativa na lente superior.	30
Tabela 14: Parâmetros de vizinhança para estimativa na lente inferior.	32
Tabela 15: Estatísticas descritivas da variável original estimada na lente superior.....	35
Tabela 16: Estatísticas descritivas das variáveis transformadas estimadas na lente superior, retro transformadas pela aplicação do expoente de cada logaritmo.....	36
Tabela 17: Estatísticas descritivas das variáveis transformadas estimadas na lente superior, retro transformadas pela Equação 4.	36
Tabela 18: Estatísticas descritivas da variável original estimada na lente inferior.....	37
Tabela 19: Estatísticas descritivas das variáveis transformadas estimadas na lente inferior, retro transformadas pela aplicação do expoente de cada logaritmo.....	38
Tabela 20: Estatísticas descritivas das variáveis transformadas estimadas na lente inferior, retro transformadas pela Equação 4.	39

1. INTRODUÇÃO

Todo projeto de pesquisa mineral deve fazer um processo de avaliação de recursos e reservas do depósito que exploram, realizando a quantificação de teores e volumes envolvidos nas operações do empreendimento. Atualmente, o procedimento deve seguir os princípios da transparência, da materialidade e da competência (CBRR, 2022). Dessa maneira, é possível decifrar informações relacionadas à quantidade de minério disponível no depósito, e qual o nível de confiabilidade dos dados envolvidos nessa quantificação. A partir dos recursos e reservas minerais quantificados, é possível prever a vida útil da mina, a quantidade de minério que pode ser explotado do depósito, o faturamento que se pode gerar, e atrair *stakeholders* para toda a operação, que financiam o desenvolvimento de todo o empreendimento.

Para garantir que os resultados da estimativa de teores dos minérios sejam precisos e acurados, diversos métodos geoestatísticos podem ser usados e têm sido aprimorados nos últimos anos. Dentre eles, é possível destacar a krigagem lognormal, que parte da transformação logarítmica de dados com distribuição lognormal. Esse processo pode ser realizado através do cálculo do logaritmo com qualquer base adicionando ou não uma constante.

Neste projeto, serão testados diferentes valores de logaritmos na transformação dos dados de um bem mineral que apresente distribuição lognormal, e serão comparados os resultados obtidos nesses cenários, a partir de métodos de validação da estimativa, como validação cruzada e comparação estatística dos domínios.

2. OBJETIVOS E METAS

É muito comum que a distribuição estatística de determinadas variáveis dados amostrados em depósitos minerais apresentem distribuição lognormal. Nesta divisão, a presença de valores elevados aumenta a variância dos dados, dificultando a assertividade do cálculo do variograma e da realização da krigagem ordinária, dado que os variogramas são muito sensíveis a altos anômalos, e, portanto, podem ser considerados pouco úteis em sua presença (Journel, 1983).

Para contornar essa situação, Journel (1983) propôs duas soluções. A primeira delas seria realizar o *capping* - técnica que reduz valores superiores a um dado limite - desses números elevados. Por exemplo, se o limite definido for 5%, todos os valores superiores a ele serão igualados a 5%. A segunda solução seria transformar os dados usando a função logaritmo natural. Realizando a alteração logarítmica dos dados, é obtida uma distribuição simétrica, que facilita a interpretação e modelagem da função variograma. Ela também melhora a estimativa por krigagem ordinária, uma vez que a influência dos valores anômalos é minimizada pela

transformação. Após a realização da estimativa, os dados alterados são retornados a sua escala original, ou seja, é aplicada uma função exponencial para a reversão do logaritmo.

O principal objetivo deste trabalho é aplicar a krigagem lognormal em um depósito de ouro, através de diversas transformações logarítmicas de uma variável com distribuição assimétrica positiva, para comparar as diferenças obtidas para cada transformação. Essa análise de resultados se baseará principalmente na validação da estimativa, através de métodos como a validação cruzada e análise da distribuição estatística dos resultados. Dessa maneira, acredita-se que será possível calcular, de forma estimada, o minério de ouro presente no depósito da maneira mais precisa e acurada possível com o objetivo de otimizar a avaliação de recursos minerais da jazida.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1. Distribuição Normal x Lognormal

A representação gráfica da distribuição de frequência permite a visualização dos valores de um banco de dados por meio de uma descrição matemática simples. Essas distribuições podem ser classificadas como simétricas ou assimétricas - com a cauda de distribuição para direita ou esquerda - e podem ser descritas como um único pico ou diversos picos. Dentre diferentes tipos delas, podemos dar destaque para normal e a lognormal.

A distribuição normal, também conhecida como distribuição gaussiana, é uma das mais importantes na estatística e na teoria das probabilidades. Ela está presente em alguns processos físicos e ocorrências geológicas, e tem uma forma caracterizada como simétrica de pico único. Além disso, a maioria dos valores estão concentrados próximos à média e a probabilidade de valores extremos diminui conforme os eles se afastam da média. Segundo Krishnamoorthy (2016), a distribuição normal é mais utilizada para modelar dados de uma população ou de um experimento.

Além disso, a distribuição normal é muito conveniente pois que suas propriedades são matematicamente conhecidas, dado que é definida apenas pela média (μ) e desvio padrão (σ) dos valores. A função densidade de probabilidade da distribuição normal é dada pela Equação 1 (Kreyszig, 1968):

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (1)$$

Equação 1: Função densidade de probabilidade de uma distribuição normal (Kreyszig, 1968).

A distribuição lognormal, por sua vez, descreve variáveis cujo logaritmo segue uma distribuição normal, ou seja, se uma variável Y é lognormal, então $\log(Y)$ apresenta distribuição normal. Ela ocorre em diversos fenômenos geológicos como, por exemplo, em mineralizações de metais raros como o ouro, prata e cobre. Essa distribuição é caracterizada por variáveis não negativas com assimetria positiva (Rossi e Deutsch, 2014), com a cauda da distribuição para a direita, e que representa uma grande quantidade de valores baixos e uma pequena quantidade para valores altos. A função densidade de probabilidade de uma distribuição lognormal é dada pela Equação 2 (Abgterberg, 1974):

$$y = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right]} \quad (2)$$

Equação 2: Função densidade de probabilidade de uma distribuição lognormal (Agterberg, 1974).

Além de facilitar a análise, a transformação logarítmica também possui implicações interpretativas. Ao alterar os dados, as interpretações dos parâmetros da distribuição original (como a média e a variância) mudam, mas tornam-se mais intuitivas no contexto da modelagem. Por exemplo, a média da variável transformada se relaciona com a mediana da variável original, uma vez que a distribuição lognormal não é simétrica.

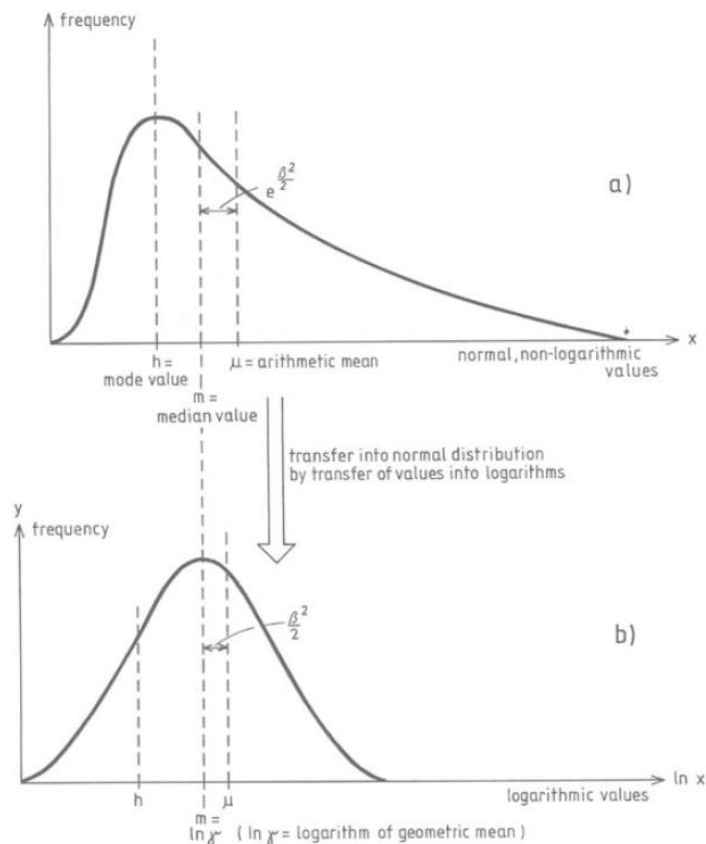


Figura 1: Transferência de uma distribuição assimétrica positiva para uma distribuição normal através da transformação dos valores em logaritmos. Fonte: (Koch e Link, 1970).

3.2. Geoestatística

No início da década de 1960, devido a inabilidade da estatística clássica em considerar o aspecto espacial de um fenômeno, Matheron (1962) definiu o termo Variável Regionalizada. Esse conceito alude a uma função no espaço cujo valor varia de um ponto a outro com alguma continuidade aparente, mas sem representação por uma lei matemática extrapolável possível. As variáveis regionalizadas são aleatórias e possuem localização definida no espaço. Elas requerem o conhecimento do campo geométrico, correspondente a área em que ocorre a variável, podendo ser o depósito ou uma parte dele, e do suporte geométrico, que se refere ao volume (tamanho, forma e orientação) no qual a variável está definida.

Matheron (1971) definiu a geoestatística como aplicação da Teoria das Variáveis Regionalizadas para a estimativa de depósitos minerais. Dessa maneira, elas passaram a representar o elemento básico da geoestatística, que começou a atuar na mineração na década de 1970. Um conceito básico dessa teoria é a chamada hipótese intrínseca, a qual implica que uma função, conhecida como semivariograma, descreve o comportamento espacial da variável regionalizada dentro do espaço, e que essa função é intrínseca a regionalização (Yamamoto, 2001). Dessa maneira, a geoestatística assume que a variância espacial entre dois pontos amostrais é a mesma para todo o domínio, dependendo apenas da distância e orientação entre eles.

A função variograma descreve o comportamento da variância espacial da variável pela distância entre pares de pontos. Segundo Caers (2011), os fenômenos espaciais tendem a apresentar orientação preferencial, e, portanto, o variograma deve refletir as características espaciais do domínio. Em casos geológicos, essa orientação preferencial está relacionada a orientação geológica regional ou local, que fornecesse as principais direções para o cálculo dos variogramas experimentais. A expressão para o cálculo da função variograma é a seguinte (Yamamoto, 2020):

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [Z(x_i + h) - Z(x_i)]^2 \quad (3)$$

Equação 3: Equação Variograma (Matheron, 1962).

Na Equação 3, $\gamma(h)$ é a função variograma e o valor da variância espacial, $Z(x_i)$ representa uma variável aleatória conforme o vetor de coordenadas (x), h é a distância de separação entre dois pontos e o n é o número de pares de pontos separados por h . Após o cálculo do variograma experimental, é necessário realizar o ajuste do modelo teórico, que descreve a

correlação espacial em uma função contínua, de maneira que há valores de variância espacial para qualquer distância no domínio.

O variograma é representado em um gráfico cartesiano, no qual a distância h é plotada no eixo das abscissas e a variância espacial $\gamma(h)$ no eixo das ordenadas, e sempre apresentam as mesmas características, independente da variável. Os valores de variância espacial ficam menores em pequenas distâncias e à medida que as distâncias aumentam, a variância também.

Considerando a Figura 2 e as propriedades do variograma (Yamamoto & Landim, 2013), o Efeito Pepita (C_0) representa uma continuidade próxima a origem, e é o valor de variância espacial para distâncias que tendem a zero; a Variância Espacial (C) é uma medida de dissimilaridade de dois pontos no espaço dada uma distância em determinada direção; o Patamar (C_0+C) corresponde ao valor máximo de variância espacial que os dados apresentam. Já na abscissa, a Amplitude (a) equivale a distância máxima onde se consegue estabelecer uma dependência espacial entre pares de pontos, e marca a saída do campo estruturado e entrada no campo aleatório; o Campo Estruturado é a região com distâncias menores que a amplitude, onde há dependência espacial entre pares de pontos, enquanto o Campo Aleatório representa distâncias maiores que a amplitude, onde não há mais dependência e a variância espacial é máxima.

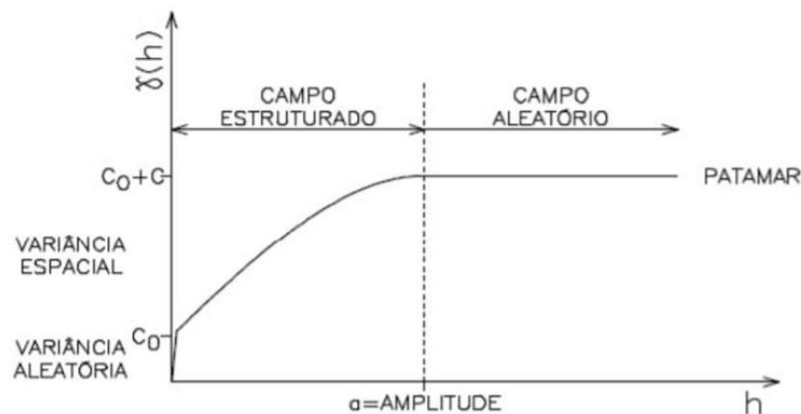


Figura 2: Variograma teórico com propriedades. Fonte: Yamamoto (2001).

A função do ajuste do modelo teórico do variograma é utilizado em técnicas de estimativa de uma variável, onde destaca-se a krigagem. Burrough e McDonnell (1998) descreveram a krigagem como um processo de interpolação de vários estágios que se baseia no cálculo e modelagem do variograma experimental, e segundo Deutsch e Journel (1997), a krigagem é BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*), ou seja, é o melhor estimador linear não enviesado no sentido que minimiza a variância da estimativa. Há diversas variantes de krigagem, a depender

de como os pesos são obtidos, e dentre as principais técnicas pode-se citar ordinária, a mais difundida e utilizada, simples, lognormal, e de variáveis indicadoras.

A krigagem ordinária consiste em um método de estimativa linear, que é baseado na ponderação de amostras no entorno do ponto a ser estimado, e os ponderadores são dependentes da variância espacial que o domínio apresenta (Yamamoto, 2001). A estimativa resulta da Equação 4, e há uma condição de restrição no qual a soma dos pesos deve ser igual a 1, conforme a Equação 5.

$$Z^*(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) \quad (4)$$

Equação 4: Cálculo da Krigagem Ordinária.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (5)$$

Equação 5: Condição de restrição no qual a soma dos pesos deve ser igual a 1.

Considerando as Equações 4 e 5, respectivamente, temos que o Z^* foi emprestado da estatística clássica para representar um estimador, de maneira que $Z^*(x_0)$ corresponde ao valor da variável estimada no ponto x_0 ; $Z(x_i)$ equivale ao valor que a variável assume na i -ésima amostra da vizinhança; e finalmente o λ_i é o ponderador que cada amostra $Z(x_i)$ recebe. Os valores de λ_i são obtidos a partir da resolução de um sistema de equações lineares conhecido por sistema de krigagem.

Entretanto, dados com variância elevada dificultam o cálculo da função variograma e a estimativa por krigagem ordinária, dado que os variogramas experimentais são muito sensíveis a valores atípicos, conhecido como *outliers*, e desse modo, podem ser pouco efetivos e assertivos (Journel, 1983). Tratando-se de dados de mineração, é muito comum a ocorrência de variáveis com distribuição lognormal, caracterizada pela presença de valores elevados em baixa frequência, como ouro, cobre, e outros metais raros, que possuem maior variância. Portanto, é necessário um tratamento desses dados, para adequar a variável a fim de realizar variografia e estimativa por krigagem.

Journel (1983) sugeriu a transformação dos dados com distribuição lognormal a partir da aplicação do logaritmo natural, resultando em uma distribuição simétrica, que apresenta valores mais baixos de variância, contribuindo para a modelagem do variograma e melhorando a estimativa por krigagem ordinária. A transformação dos dados para logaritmos é dada pela Equação 6:

$$Y(x) = \text{Log}(Z(x)) \quad (6)$$

Equação 6: Transformação logarítmica do domínio.

Por definição, se a variável $Z(x)$ apresenta uma distribuição lognormal, a variável $Y(x)$ irá ter uma distribuição normal. Após a transformação, é realizado o cálculo do variograma experimental e seu ajuste de modelo teórico, e em seguida, a estimativa por krigagem ordinária. As amostras estimadas estão no domínio logarítmico, portanto é necessário transformar de volta a escala original, a partir da Equação 7 (Journel, 1980):

$$Z_{OLK}^*(x_0) = \exp\left(Y_{OK}^*(x_0) + \frac{\sigma_{OK}^2}{2} - \mu\right) \quad (7)$$

Equação 7: Transformação reversa para domínio original (Journel, 1980).

Onde, $Z_{OLK}^*(x_0)$ refere-se aos valores estimados transformados de volta para escala original; $Y_{OK}^*(x_0)$ são os resultados da krigagem ordinária, ainda em logaritmo; σ_{OK}^2 é a variância da krigagem ordinária e μ equivale ao multiplicador de Lagrange. A expressão $\frac{\sigma_{OK}^2}{2} - \mu$ é um termo de não viés para a krigagem ordinária.

Entretanto, a Equação 7 é muito sensível a modelagem do variograma, de modo que o resultado da estimativa é enviesado quando comparado aos dados originais (Journel & Huijbregts, 1978) (Saito & Goovaerts, 2000). Isso ocorre devido ao efeito de suavização da krigagem, na qual valores mais baixos são superestimados, e valores elevados são subestimados, perdendo as caudas inferiores e superiores durante o processo de estimativa. Uma nova abordagem foi sugerida por Yamamoto (2007), na qual a transformação para o domínio original ocorre após a correção da suavização da krigagem, como visto na Equação 8:

$$Z_{OLK}^*(x_0) = \exp\left(Y_{OK}^*(x_0) + Y_{NS_0}^*(x_0)\right) * \text{Mediana} \quad (8)$$

Equação 8: Transformação reversa (Yamamoto, 2007).

Onde, $Y_{NS_0}^*(x_0)$ representa o erro de suavização, que é negativo quando os valores são superestimados, e positivo quando subestimados. Dessa maneira, o domínio estimado pode ser transformado de volta para a escala original da variável.

4. MATERIAIS E MÉTODOS

Como esse trabalho visa a aplicação de um método para modelagem geoestatística de um depósito mineral, é necessário aplicar diversas etapas de tratamento e análise exploratória de dados antes de começar a mexer com a variografia e os métodos geoestatísticos em si. Na Figura 3 é apresentado com as etapas realizadas até o momento.

Os dados foram revisados e tratados antes de começarem as análises preliminares. Após esse primeiro passo, foi realizada a análise exploratória dos dados e a modelagem geológica do depósito. Após esses estudos, foi feita a krigagem lognormal testando diversos valores de constante, e os resultados obtidos foram avaliados, como já citado, por técnicas de validação, como a validação cruzada e a avaliação visual pela elaboração de gráficos como o *swath-plot* e *QQ-plot*.

Todas as etapas até o momento foram realizadas em *softwares* de planilhas eletrônicas, como o Excel, além de softwares de modelagem geológica e geoestatística como o Isatis.neo®, Datamine Studio RM® e Supervisor®. Além disso, é importante citar que essas soluções foram disponibilizadas pela Datamine Software para fins acadêmicos ao Instituto de Geociências da Universidade de São Paulo.

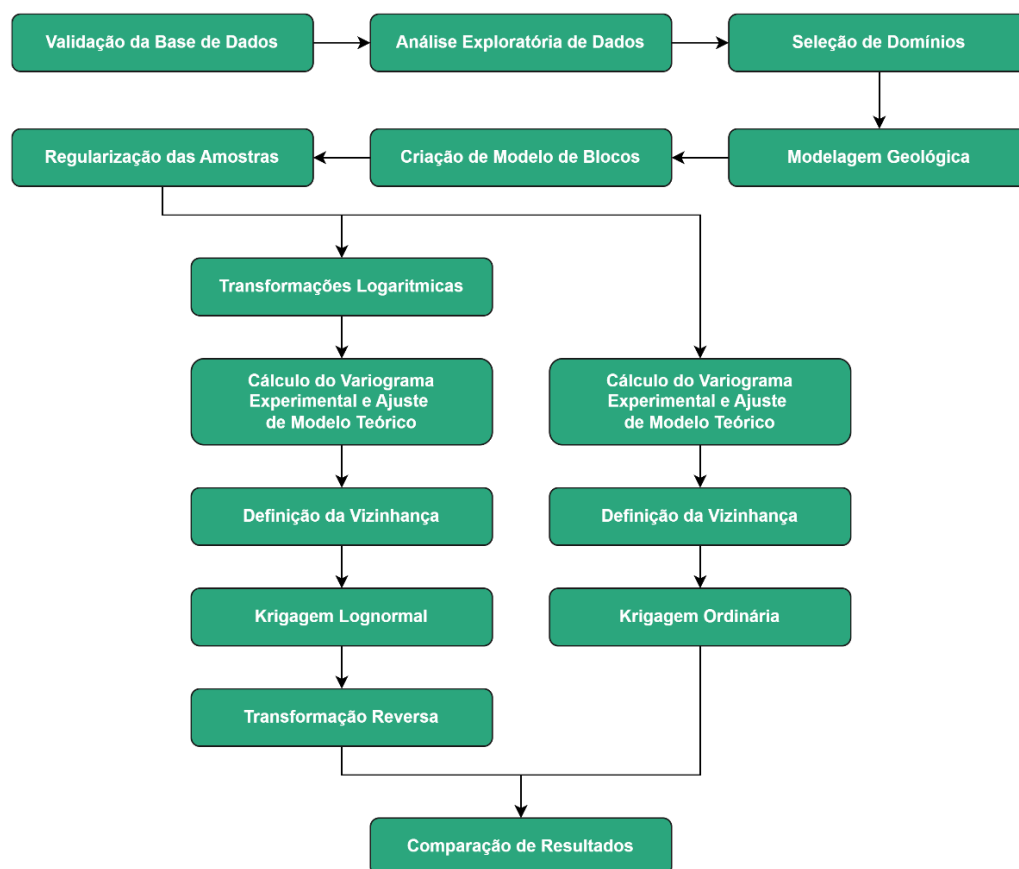


Figura 3: Fluxograma do trabalho realizado.

Em relação ao material utilizado no trabalho, foi fornecida uma base de dados de sondagens de um depósito de ouro, com coordenadas X, Y e Z alteradas, intervalos de amostragem com valores da variável de ouro, comprimento total do furo, bem como a sua orientação e mergulho. Esses dados foram disponibilizados em formato .csv, contendo 74 sondagens e 3479 amostras de ouro analisadas. A metragem total das sondagens é de 45.856,68 metros, enquanto a metragem analisada equivale a 2.697,14 metros.

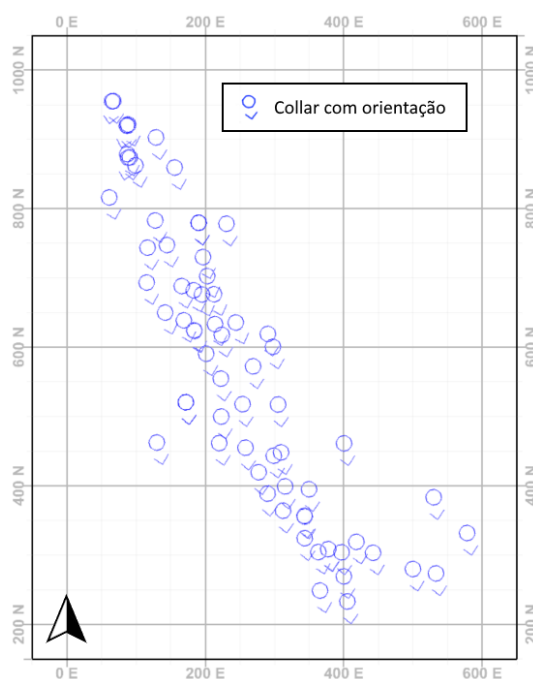


Figura 4: Malha de sondagem com destaque em azul para as coordenadas da embocadura dos furos de sondagem.

5. RESULTADOS OBTIDOS E INTERPRETAÇÕES PRELIMINARES

5.1. Análise Exploratória de Dados

Inicialmente, foi feita a análise da tabela de dados no Excel e correção de pequenas inconsistências, e logo em seguida foi realizada a análise das estatísticas descritivas da variável de ouro no depósito em estudo. A amostragem do ouro ocorre na forma de duas lentes, uma superior e outra inferior, de maneira que foi possível dividir o depósito em dois domínios principais: lente superior e lente inferior. As amostras referentes a cada uma das lentes podem ser visualizadas na Figura 5.

Diversas amostras não foram selecionadas para os domínios uma vez que não foram interpretadas como continuação da lente e/ou seu valor não contribuía para o propósito do trabalho, como teores inferiores a 0,01 ppm. Essas amostras estão destacadas pela cor azul na Figura 5.

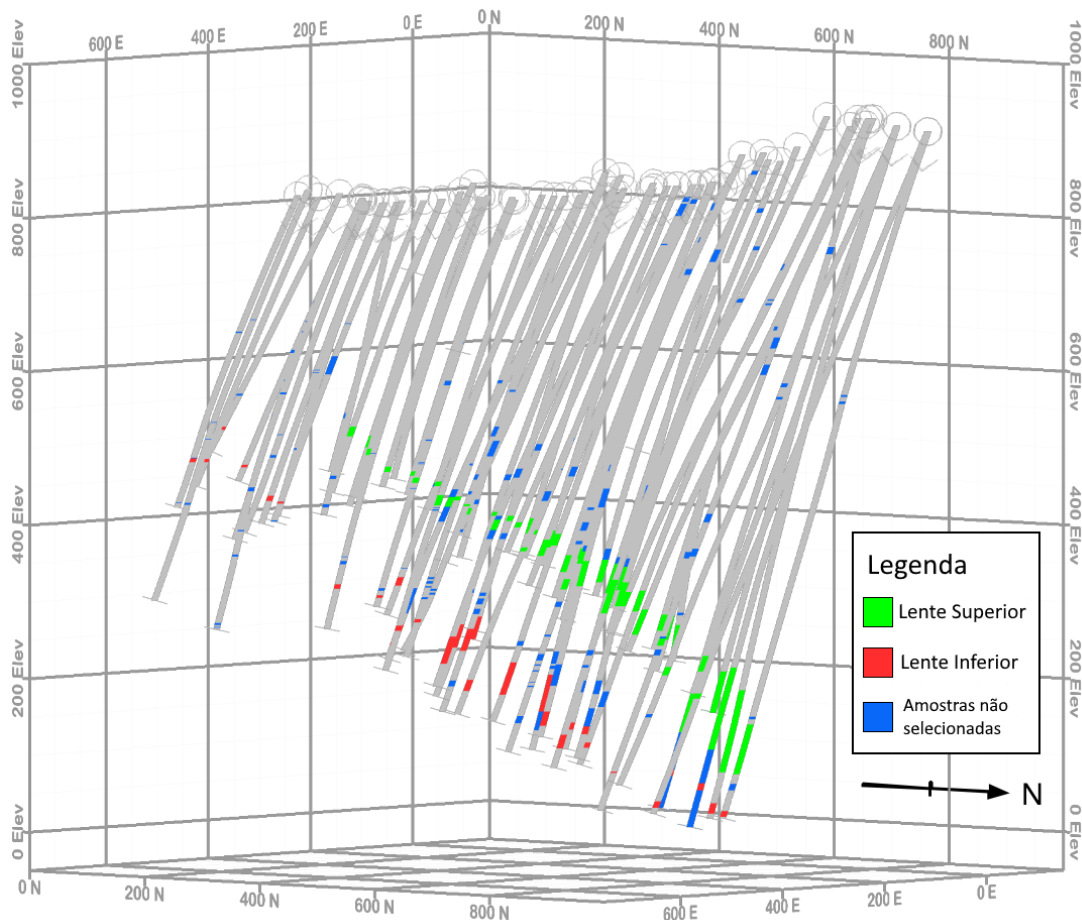


Figura 5: Seleção das amostras de ouro em lente superior (verde), lente inferior (vermelha) e amostras não selecionadas (azul).

Em geral, as duas lentes possuem distribuições e estatísticas bem semelhantes. Analisando as estatísticas descritivas de cada lente na Tabela 1, é observado que a lente superior possui três vezes mais amostras que a lente inferior, e isso ocorre devido a diversas sondagens que finalizam na porção superior. Dessa maneira, o espaçamento médio amostral nessa porção é de 25 metros enquanto na porção inferior chega a 50 metros. Outra diferença é a média igual a 0,766 ppm no corpo superior, quase três vezes mais que o corpo inferior, cuja média é 0,225 ppm. Essa diferença de média ocorre devido a presença de outliers, dado que os quartis (Q1, Q2 e Q3) são todos bem semelhantes entre as duas lentes.

Tabela 1: Estatísticas descritivas da variável de ouro.

Variável	Lente	Nº de valores	Média	Mínimo	Q1	Q2	Q3	Máximo	Desvio Padrão	C.V.
AU_PPM	Superior	1529	0,766	0,005	0,005	0,025	0,080	178,5	6,491	8,474
AU_PPM	Inferior	591	0,225	0,005	0,005	0,025	0,060	24,5	1,529	6,784

Já em relação a distribuição de frequência em cada uma das lentes, é possível observar a assimetria positiva, com cauda de distribuição para a direita, muito caracterizada pela alta presença de valores muito baixos, e poucos valores altos. As distribuições podem ser analisadas individualmente para lente superior (Figura 6) e lente inferior (Figura 7). Além disso, cada domínio apresenta um *Log Probability Plot*, a fim de evidenciar os valores mais baixos de ouro.

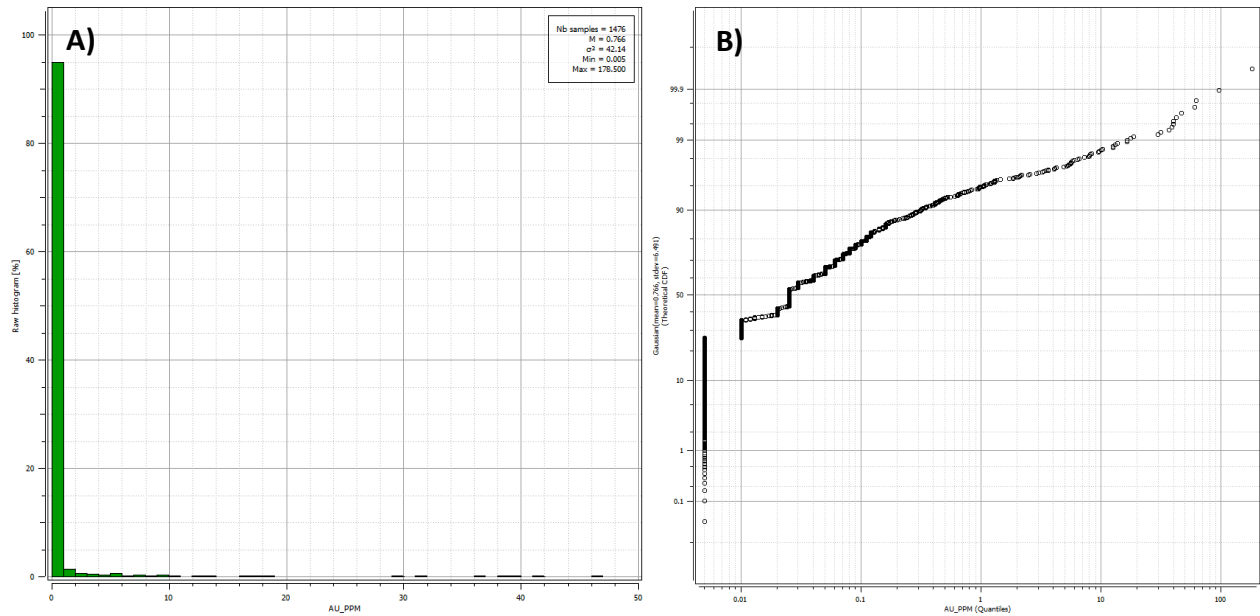


Figura 6: A) Histograma de distribuição do ouro na lente superior; B) *Log Probability Plot* do ouro na lente superior.

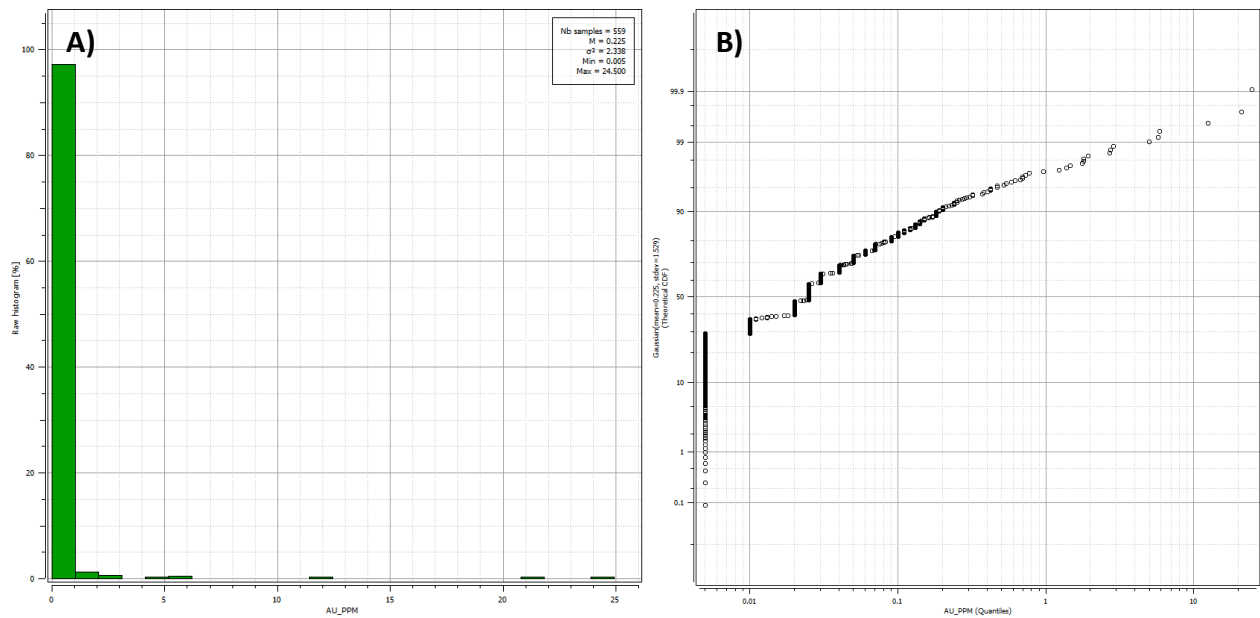


Figura 7: A) Histograma de distribuição do ouro na lente inferior; B) *Log Probability Plot* do ouro na lente inferior.

5.2. Modelagem Geológica

Com as amostras de cada lente selecionadas, foi realizada a modelagem delas por sólidos via algoritmos de modelagem implícita. Os algoritmos funcionam a partir da ideia de ligar contatos (topo e base) de cada lente, gerando um sólido fechado, comumente conhecido como *wireframe*.

O modelo geológico das lentes pode ser observado na Figura 8, e ambas as lentes possuem características geológicas bastante próximas. São caracterizadas pelo mergulho de 30° para noroeste, e possuem espessura desde 2 metros até 30-40 metros em algumas regiões.

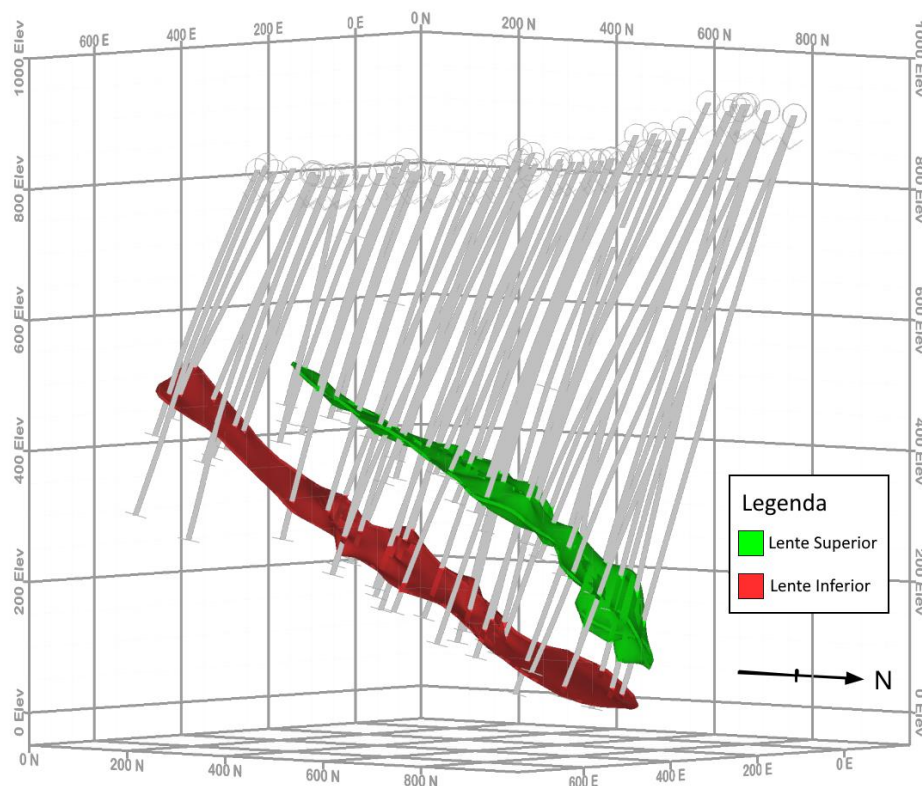


Figura 8: Sólidos das lentes superior (verde) e inferior (vermelho).

5.3. Modelo de Blocos

O modelo de blocos é uma representação 3D do depósito mineral, dividido em blocos regulares, também chamados de células parentais, com tamanhos variados nos eixos X, Y e Z. Ele é fundamental para a estimativa uma vez que cada bloco representa um volume definido do depósito e apresenta diversos atributos como tamanho, domínio, densidade e teores. Além disso, a célula parental pode ser dividida em subcélulas, que seriam divisões em cada eixo do bloco, de modo a respeitar da melhor forma possível os limites definidos pelo sólido durante a modelagem.

No caso da base de dados de estudo, a malha de sondagem da região principal, que seria a lente superior, é espaçada em aproximadamente 25 metros no plano XY. Dessa maneira, foi

estabelecido um tamanho de bloco de 10 metros nos eixos X e Y e 2 metros no eixo Z. Além disso, também foi configurado subcélulas a fim do modelo de blocos respeitar os limites dos sólidos. Nos eixos X e Y, o bloco pode ser dividido até 5 vezes, enquanto no eixo Z até 4 vezes.

Tabela 2: Definição do tamanho da célula parental e subcélulas no modelo de blocos.

Eixo	X	Y	Z
Célula Parental (m)	10	10	4
Nº de subcélulas	5	5	4

5.4. Regularização das Amostras

Em relação a regularização das amostras, foi utilizado um *composite* equivalente a um metro e os resíduos, amostras que não conseguiram entrar na composta, foram descartados. Na Tabela 3 é possível comparar os resultados pré e pós regularização, nos quais tanto a lente superior quanto a lente inferior apresentam mudanças bem parecidas.

A principal diferença foi na média, uma queda de 16,67% na lente superior e 25,58% na lente inferior, justificado pela diluição dos *outliers* da distribuição com valores muito menores. De resto, as estatísticas descritivas de ambos os domínios se mantiveram muito semelhantes, apenas com uma pequena queda no desvio padrão e coeficiente de variação.

Tabela 3: Estatísticas descritivas das amostras de ouro originais x *composite*.

Variável	Lente	Nº de valores	Média	%Dif Média	Mínimo	Q1	Q2	Q3	Máximo	Desvio Padrão	C.V.
AU_PPM (original)	Superior	1476	0,766	-16,67%	0,005	0,005	0,025	0,080	178,50	6,491	8,474
AU_PPM (composta)	Superior	1078	0,598		0,005	0,007	0,025	0,081	85,43	4,253	7,117
AU_PPM (original)	Inferior	559	0,225	-25,58%	0,005	0,005	0,025	0,060	24,50	1,529	6,784
AU_PPM (composta)	Inferior	392	0,167		0,005	0,005	0,020	0,060	11,648	0,908	5,424

5.5. Transformação dos dados

Uma vez com os dados regularizados, foi realizada a transformação logarítmica dos dados da lente superior e inferior para os logaritmos natural, base 2 e base 10. A fim de evitar valores negativos, foi adicionado um valor de constante equivalente a 10 para todos os resultados logaritmos. As estatísticas das variáveis transformadas são apresentadas na Tabela 4.

Inicialmente, foi feito um QQ-Plot a fim de comparar o resultado da transformação logarítmica (nesse caso do logaritmo natural somado a 10) com a distribuição gaussiana da

variável. A distribuição gaussiana equivale a uma distribuição normal e quanto mais a distribuição logarítmica se aproximar da gaussiana, maior a lognormalidade da variável em estudo.

Na Figura 9, pode-se analisar que a maior parte dos pontos segue aproximadamente a linha pontilhada na porção central, sugerindo que a variável se aproxima de uma distribuição para valores intermediários. Entretanto, os valores se afastam da linha pontilhada na cauda inferior, indicando que a distribuição log-transformada tem repetição de valores mais baixos do que o esperado para uma distribuição normal, dado que ~30% das amostras estão carimbadas com a metade do limite inferior de detecção da análise química (0,005 ppm). Já na cauda superior também há um desvio significativo, indicando que há valores muito maiores do que o esperado em uma distribuição lognormal perfeita.

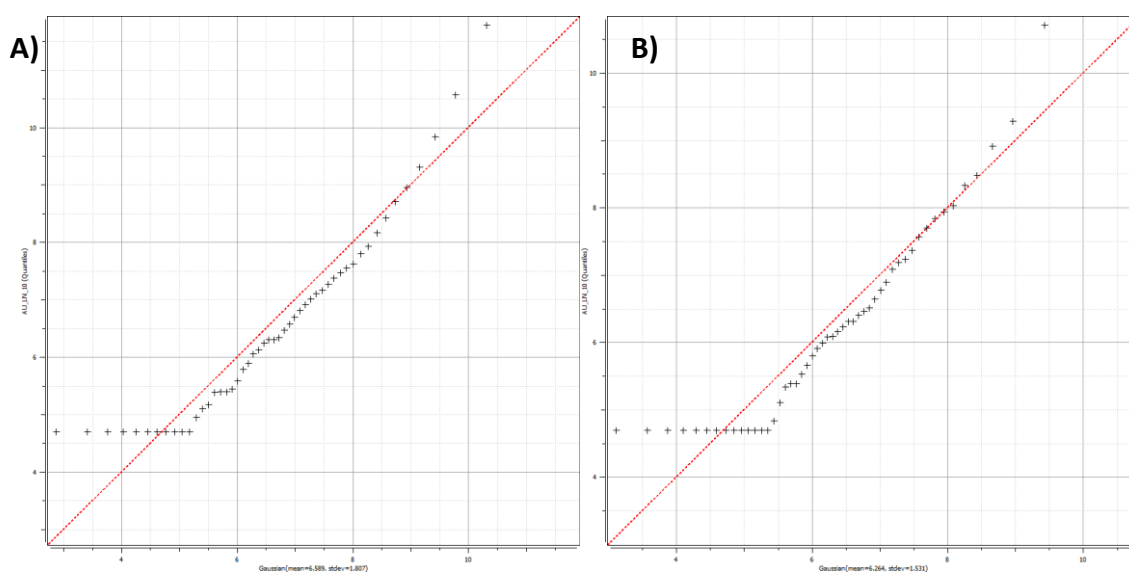


Figura 9: QQ-Plot dos dados de ouro transformados pelo logaritmo natural + 10 x distribuição gaussiana em que A) representa a lente superior e B) representa a lente inferior.

Tabela 4: Estatísticas descritivas das variáveis transformadas.

Variável	Lente	Nº de valores	Média	Mínimo	Q1	Q2	Q3	Máximo	Desvio Padrão	C.V.
AU_LN_10	Superior	1077	6,589	4,702	5,077	6,311	7,484	14,448	1,807	0,274
AU_LOG2_10	Superior	1077	5,079	2,356	2,898	4,678	6,370	16,417	2,606	0,513
AU_LOG10_10	Superior	1077	8,519	7,699	7,862	8,398	8,907	11,932	0,785	0,092
AU_LN_10	Inferior	392	6,264	4,702	4,702	6,088	7,187	12,455	1,531	0,244
AU_LOG2_10	Inferior	392	4,611	2,356	2,356	4,356	5,941	13,542	2,209	0,479
AU_LOG10_10	Inferior	392	8,387	7,699	7,699	8,301	8,778	11,066	0,665	0,079

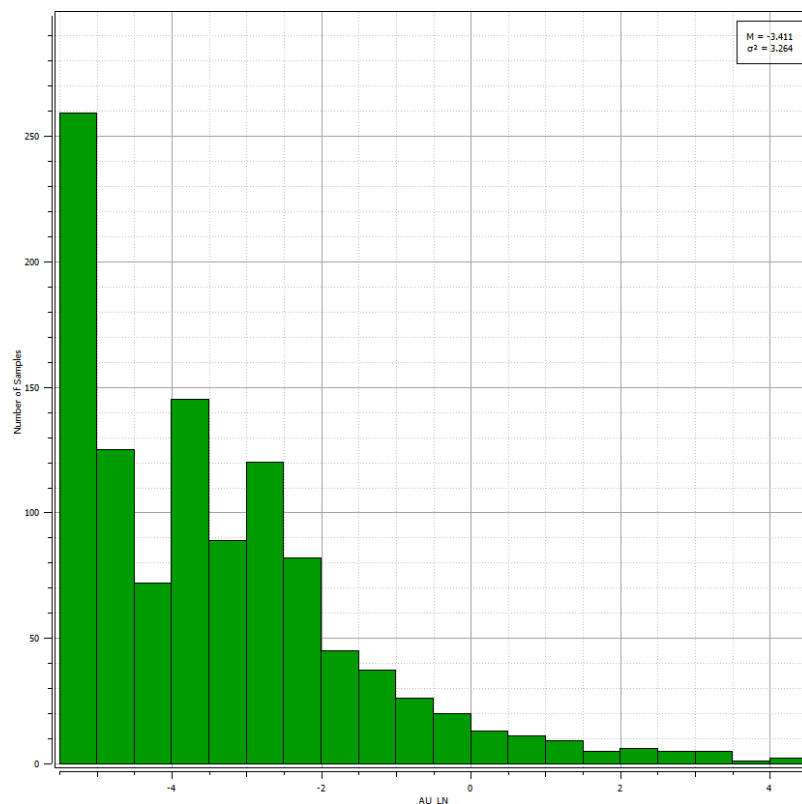


Figura 10: Histograma da variável de ouro transformada pelo logaritmo natural + 10.

5.6. Cálculo do Variograma Experimental e Ajuste de Modelo Teórico

Em seguida, foi realizada a análise espacial da variável original e da variável transformada para as lentes superior e inferior, através do cálculo do variograma experimental e ajuste do modelo teórico.

5.6.1. Variografia da Lente Superior

A lente superior é caracterizada por uma mineralização com 650 metros de comprimento, mergulhando aproximadamente 30° para NW e com espessura média equivalente a 10 metros, podendo chegar a mais de 50 metros em algumas regiões. Em relação a malha de sondagem, o espaçamento médio entre amostras no plano da mineralização é de 25 metros, justificando um tamanho de passo a ser utilizado na variografia entre 20 e 25 metros.

5.6.1.1. Variável de ouro original

Para o cálculo do variograma experimental da variável de ouro original, foi necessário simular um variograma omnidirecional, ou seja, um variograma com tolerância angular igual a 90° no plano da mineralização. Devido à alta variância do ouro, os variogramas direcionais, mesmo com alta tolerância angular, resultavam em efeito pepita puro, um comportamento onde não há

correlação espacial entre os pontos amostrais, independentemente da distância entre eles. Além disso, foi utilizado um tamanho de passo equivalente a 25 metros, com uma tolerância de passo de 50%. Os parâmetros para o cálculo do variograma experimental são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5: Parâmetros do variograma experimental da variável original na lente superior.

Direção (°)	Tamanho do Passo (m)	Tolerância do Passo (%)	Tolerância angular (°)	
			In-plane	Off-plane
<i>Downhole</i>	1	50	*	*
-30→320	25	50	90	80
00→230	25	50	90	80
060→320	25	50	90	*

Em relação a modelagem do variograma, foi utilizado duas estruturas esféricas e um efeito pepita equivalente a 0,2 da variância do ouro. O patamar do variograma foi normalizado, adotando 1 como variância espacial máxima. Na Figura 11 é apresentado os variogramas *downhole*, omnidirecional e vertical, e na Tabela 6 os parâmetros utilizados na modelagem.

Tabela 6: Parâmetros para ajuste do modelo de variograma da variável original na lente superior.

Estrutura	Modelo	Patamar	<i>Major</i>	<i>Semi-Major</i>	<i>Minor</i>
<i>Nugget effect</i>	-	0,2	-	-	-
Estrutura 1	Esférico	0,33	21	21	7
Estrutura 2	Esférico	0,47	60	60	50

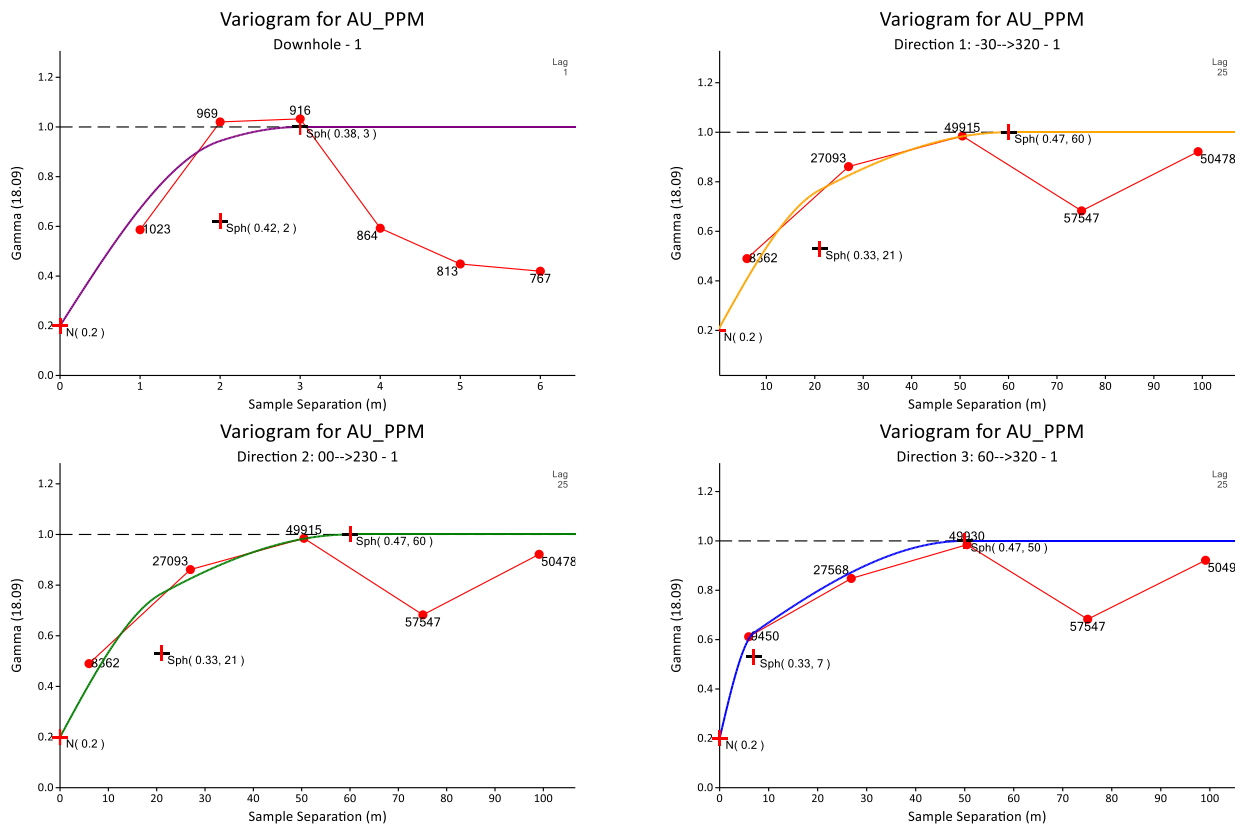


Figura 11: Variogramas *downhole*, D1, D2 e D3 da variável de ouro original na lente superior.

5.6.1.2. Variáveis de ouro transformadas

Já para o cálculo do variograma experimental das variáveis de ouro transformadas, foi possível utilizar variogramas direcionais com tolerâncias angulares menores. Devido a transformação logarítmica, a variância da distribuição diminui bastante, de modo que a diferença entre pares de pontos é mais sutil e o variograma não apresenta o comportamento de efeito pepita puro. Os parâmetros de tamanho e tolerância do passo foram mantidos bastante semelhantes, utilizando um passo de 20 metros. Os parâmetros para o cálculo do variograma experimental são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7: Parâmetros do variograma experimental das variáveis transformadas na lente superior.

Direção (°)	Tamanho do Passo (m)	Tolerância do Passo (%)	Tolerância angular (°)	
			In-plane	Off-plane
<i>Downhole</i>	1	50	*	*
-28→343	20	50	10	2
-10→247	20	50	45	1
060→320	5	50	45	*

Em relação a modelagem do variograma, também foi utilizado duas estruturas esféricas e um efeito pepita equivalente a 0,2 da variância do ouro transformado. O mesmo esquema do patamar normalizado foi utilizado, e o variograma apresenta anisotropia geométrica, com variação dos alcances para diferentes direções, porém com o mesmo patamar. Na Figura 12 é apresentado os variogramas *downhole*, principal (D1), secundário (D2) e vertical (D3), e na Tabela 8 os parâmetros utilizados na modelagem.

É possível reparar que como as direções são mais direcionadas e menos generalistas que no variograma omnidirecional, os alcances foram reduzidos em todas as direções (menos no variograma *downhole*). Enquanto a direção principal tem uma variância espacial bem estruturada, seu par ordenado apresenta poucos pares de pontos mesmo aplicando uma tolerância angular de 45°.

Tabela 8: Parâmetros para ajuste do modelo de variograma das variáveis transformadas na lente superior.

Estrutura	Modelo	Patamar	Major	Semi-Major	Minor
<i>Nugget effect</i>	-	0,2	-	-	-
Estrutura 1	Esférico	0,54	58	34	5
Estrutura 2	Esférico	0,26	70	40	25

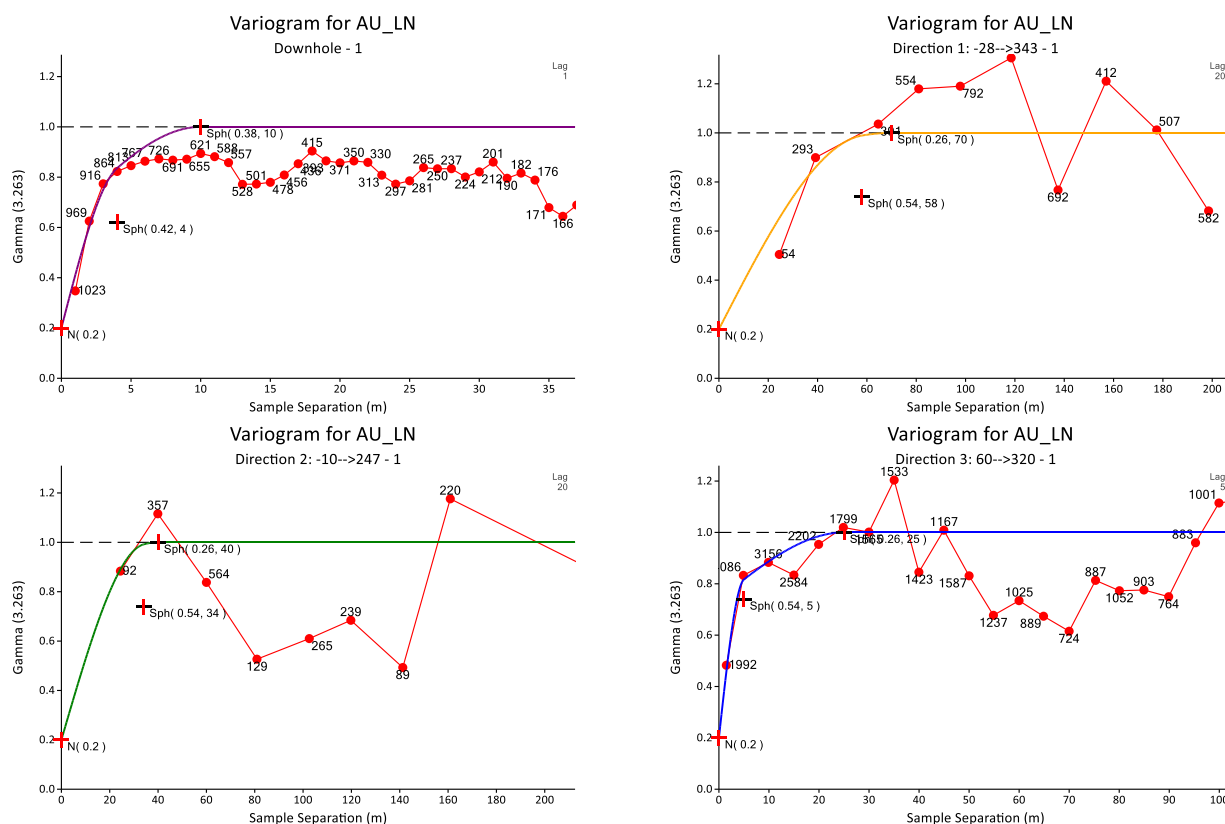


Figura 12: Variogramas *downhole*, D1, D2 e D3 das variáveis de ouro transformadas na lente superior.

5.6.2. Variografia da Lente Inferior

A lente inferior é caracterizada por uma mineralização com 850 metros de comprimento, mergulhando aproximadamente 30° para NW e com espessura média equivalente a 5 metros, podendo chegar a mais de 40 metros em algumas regiões. Em relação a malha de sondagem, quando comparada a lente superior, possui um espaçamento médio entre amostras bem maior, chegando a 50 metros no plano da mineralização.

Essa diferença de espaçamento ocorre pois cerca de 50% das sondagens finalizam na lente superior, diminuindo a densidade amostral da lente inferior. Dessa maneira, foi utilizado um tamanho de passo na direção principal entre 50 e 60 metros. Outro ponto importante desse domínio é a presença de grandes áreas sem amostras, dado que a continuidade da lente foi inferida pela geologia local e continuidade de teores.

5.6.2.1. Variável de ouro original

Para o cálculo do variograma experimental da variável de ouro original, foi necessário simular um variograma omnidirecional no plano da mineralização assim como na lente superior, devido à alta variância que resultava em efeito pepita puro aos variogramas direcionais. Além disso, foi utilizado um tamanho de passo equivalente a 55 metros, com uma tolerância de passo de 50%. Os parâmetros para o cálculo do variograma experimental são apresentados na Tabela 9.

Tabela 9: Parâmetros do variograma experimental da variável original na lente inferior.

Direção (°)	Tamanho do Passo (m)	Tolerância do Passo (%)	Tolerância angular (°)	
			In-plane	Off-plane
<i>Downhole</i>	2	50	*	*
-30→320	55	50	90	75
00→230	55	50	90	75
060→320	20	50	90	*

Em relação a modelagem do variograma, também foi utilizado duas estruturas esféricas e um efeito pepita equivalente a 0,2 da variância do ouro. Quando comparado a lente superior, a lente inferior parece ser mais continua devido a alcances maiores, porém na direção vertical, parece ter pouca continuidade de teores. Na Figura 13 é apresentado os variogramas *downhole*, omnidirecional (D1 e D2) e vertical (D3), e na Tabela 10 os parâmetros utilizados na modelagem.

Tabela 10: Parâmetros para ajuste do modelo de variograma da variável original na lente inferior.

Estrutura	Modelo	Patamar	Major	Semi-Major	Minor
<i>Nugget effect</i>	-	0,2	-	-	-
Estrutura 1	Esférico	0,47	129	129	7
Estrutura 2	Esférico	0,33	130	130	10

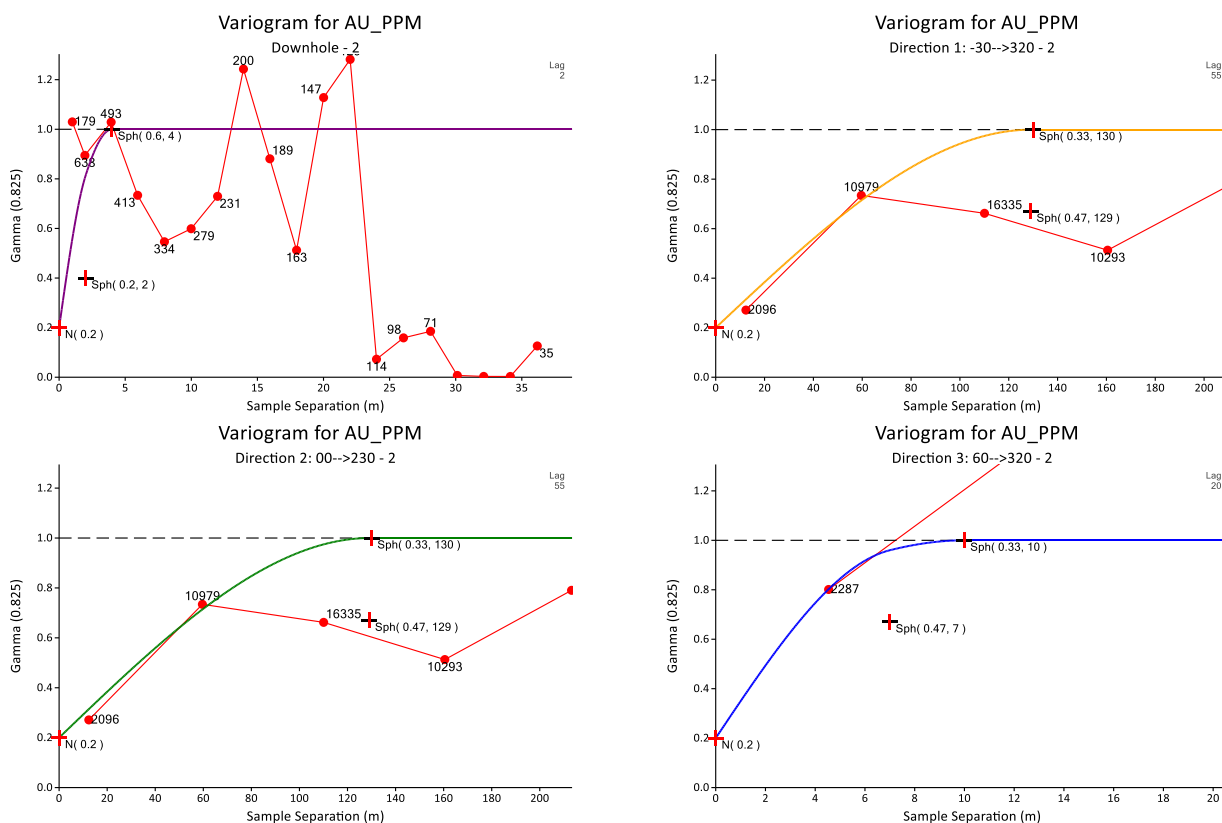


Figura 13: Variogramas *downhole*, D1, D2 e D3 da variável de ouro original na lente superior.

5.6.2.2. Variáveis de ouro transformadas

Já para o cálculo do variograma experimental das variáveis de ouro transformadas, foi possível utilizar variogramas direcionais com tolerâncias angulares menores, dado que a transformação logarítmica diminuiu o efeito dos outliers no cálculo do variograma experimental. O tamanho do passo na direção principal se manteve semelhante, utilizando um passo de 60 metros, porém em seu par ordenado, como as amostras são mais próximas, foi utilizado um passo de 30 metros. Os parâmetros para o cálculo do variograma experimental são apresentados na Tabela 11.

Tabela 11: Parâmetros do variograma experimental das variáveis transformadas na lente inferior.

Direção (°)	Tamanho do Passo (m)	Tolerância do Passo (%)	Tolerância angular (°)	
			In-plane	Off-plane
<i>Downhole</i>	1	50	*	*
-30→314	60	50	22.5	5
02→226	30	50	45	15
060→320	5	50	22.5	*

Finalmente, para a modelagem do último variograma, também foi utilizado duas estruturas esféricas e um efeito pepita equivalente a 0,2 da variância do ouro transformado. A principal diferença em relação ao domínio original foi o alcance na direção secundária, que diminuiu para 30 metros, evidenciando uma forte anisotropia geométrica a lente inferior. Na Figura 14 é apresentado os variogramas e na Tabela 12 os parâmetros utilizados na modelagem.

Tabela 12: Parâmetros para ajuste do modelo de variograma das variáveis transformadas na lente inferior.

Estrutura	Modelo	Patamar	<i>Major</i>	<i>Semi-Major</i>	<i>Minor</i>
<i>Nugget effect</i>	-	0,2	-	-	-
Estrutura 1	Esférico	0,25	27	14	3
Estrutura 2	Esférico	0,55	100	30	13

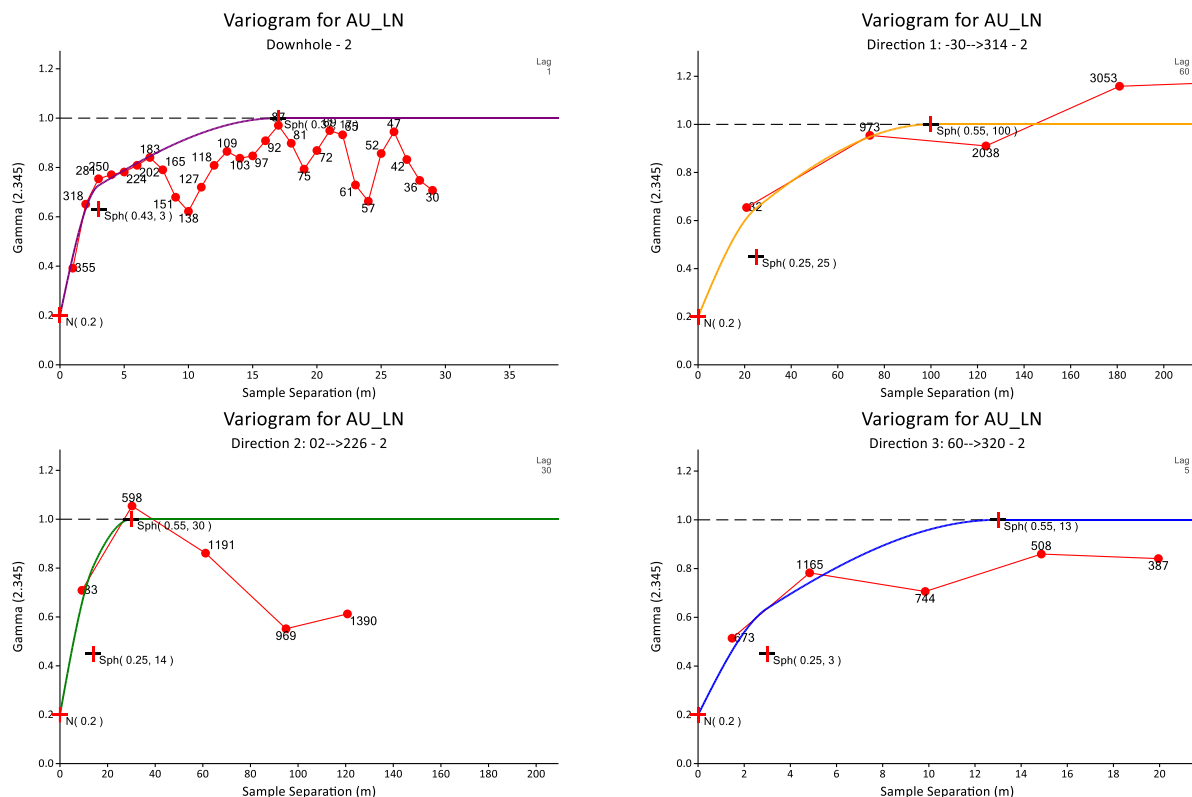


Figura 14: Variogramas *downhole*, D1, D2 e D3 das variáveis de ouro transformadas na lente inferior.

5.7. Definição dos Parâmetros de Vizinhaça

Uma vez com os variograma definidos, é possível estabelecer os parâmetros de vizinhaça a serem utilizados durante a estimativa. A vizinhaça em uma krigagem define como os pontos amostrados próximos a um bloco a ser estimado são selecionados para fazer parte dessa estimativa. Esses parâmetros são essenciais para a garantir que a estimativa seja feita de forma eficiente, considerando um número adequado de amostras e levando em conta a estrutura espacial dos dados, como direção e continuidade espacial da mineralização, além da densidade amostral.

Em seguida, para validação dos parâmetros de estimativa, foi realizada a validação cruzada para cada variável em ambas as lentes. É uma técnica que consiste na remoção de uma amostra e na estimativa desse mesmo ponto retirado utilizando os mesmos parâmetros de estimativa, vizinhaça e de modelo de variograma. Dessa maneira, é possível comparar o valor real versus o valor estimado de diversos pontos do depósito. Além disso, é possível calcular métricas de desempenho, como o erro médio e o coeficiente de correlação do estimado x real.

5.7.1. Vizinhaça na Lente Superior

Na lente superior, os parâmetros de vizinhaça foram baseados no variograma da variável de ouro transformada, dado que foi utilizado uma direção preferencial de mineralização ao contrário de um variograma omnidirecional. Além disso, foram utilizadas três passadas a fim de estimar todos os blocos da lente, sendo a primeira passada equivalente à metade dos alcances do variograma, e colocado também um número máximo de amostras por furo para evitar que o bloco seja enviesado pelo furo mais próximo. Como foi aplicado um limite de amostras por furo, não foi feito o uso de octantes. Os parâmetros de vizinhaça utilizados na estimativa da lente superior estão apresentados na Tabela 13.

Tabela 13: Parâmetros de vizinhaça para estimativa na lente superior.

Variável	Passo	Distância de Busca (m)			Nº de Amostras		Nº máx. de amostras por furo
		Máx.	Interm.	Mín.	Min.	Máx	
AU_PPM	1	35	20	12	6	12	2
AU_LN_10	2	70	40	24	4	12	2
AU_LOG2_10							
AU_LOG10_10	3	105	60	36	2	12	2
Orientação do elipsoide: <i>Dip Azimuth</i> = 320°; <i>Dip</i> = 30°.							

5.7.1.1. Validação Cruzada dos dados originais

Inicialmente, foi realizada a validação cruzada da variável de ouro original, que obteve um coeficiente de correlação de Pearson equivalente a 0,49. Na Figura 15 é apresentado o gráfico de dispersão dos valores reais versus estimados, onde é observado diversos valores reais próximos a zero sendo estimados com altos valores, além de alguns valores estimados como negativos. Em geral, o coeficiente de correlação é enviesado pelos *outliers* da variável AU_PPM e não representa de maneira efetiva a validação cruzada realizada.

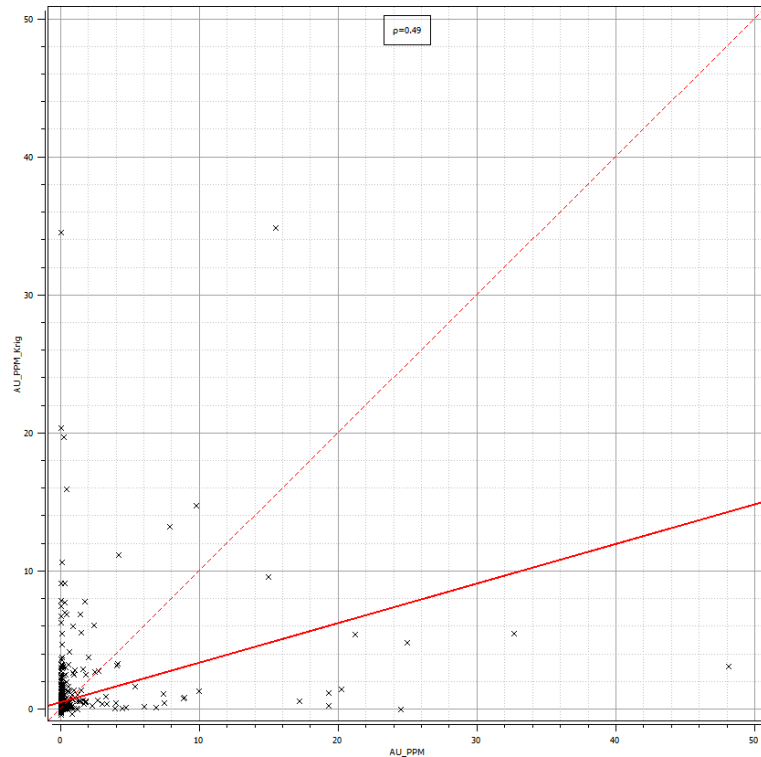


Figura 15: Validação cruzada para variável de ouro original na lente superior, onde a bissetriz é representada pela linha pontilhada e a regressão linear pela reta vermelha.

5.7.1.2. Validação Cruzada dos dados transformados

Já para os dados transformados, a situação já é diferente. Na Figura 16, é apresentado o gráfico de dispersão para os valores transformados reais versus estimados, no qual há um grande aumento no coeficiente de correlação, que subiu para a 0,74. Ainda há o mesmo problema de valores repetidos próximos a zero, iguais a 0,005 ppm ou 0,025 ppm, sendo superestimados, porém a influência de *outliers* é bem reduzida. Além disso, a validação cruzada para todas as variáveis transformadas, utilizando logaritmo natural, de base 2 e base 10, tiveram o mesmo resultado.

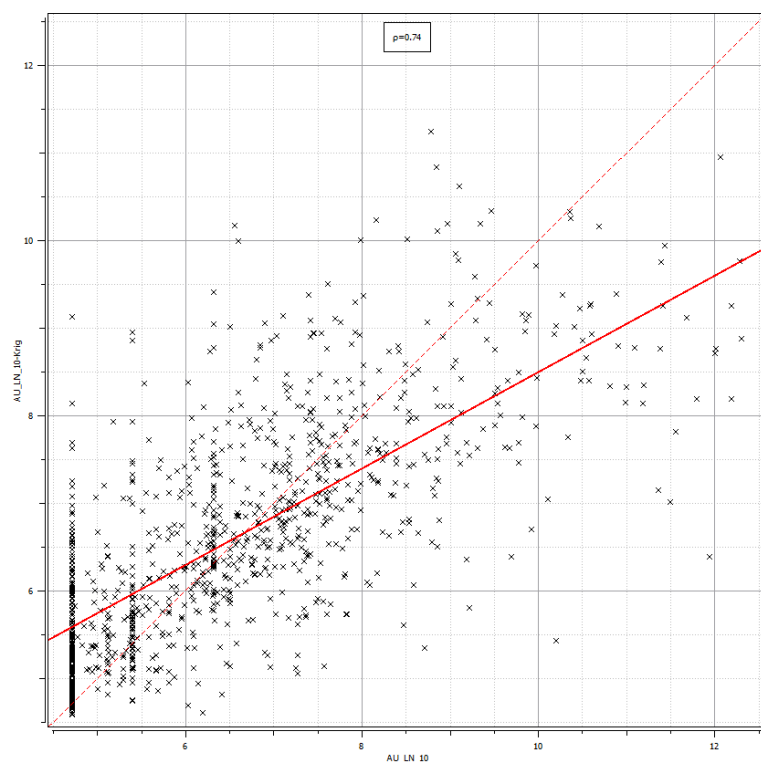


Figura 16: Validação cruzada para as variáveis de ouro transformadas na lente superior, onde a bisettriz é representada pela linha pontilhada e a regressão linear pela reta vermelha.

5.7.2. Vizinhança na Lente Inferior

Já na lente inferior, após diversos testes de vizinhança, os parâmetros foram baseados no variograma omnidirecional da variável de ouro original. Dado a baixa densidade amostral da lente, os eixos do elipsoide foram equivalentes ao alcance do variograma na primeira passada e duas vezes esse valor na segunda passada, sem necessidade de utilizar uma terceira passada. Assim como na lente superior, foi utilizado um máximo de duas amostras por furo. Os parâmetros de vizinhança da lente inferior são apresentados na Tabela 14.

Tabela 14: Parâmetros de vizinhança para estimativa na lente inferior.

Variável	Passo	Distância de Busca (m)			Nº de Amostras		Nº máx. de amostras por furo
		Máx.	Interm.	Mín.	Min.	Máx	
AU_PPM	1	130	130	10	6	12	2
AU_LN_10							
AU_LOG2_10	2	260	260	20	4	12	2
AU_LOG10_10							
Orientação do elipsóide: <i>Dip Azimuth</i> = 320°; <i>Dip</i> = 30°; <i>Pitch</i> = 85°							

5.7.2.1. Validação Cruzada dos dados originais

Em relação a validação cruzada para os dados originais da lente inferior, os valores de ouro originais reais versus estimados apresentam um coeficiente de correlação de Pearson igual a 0,15, de maneira que não há correlação entre os domínios. Novamente a regressão linear foi bastante enviesada por *outliers*, além de que diversos valores próximos a zero foram superestimados ou até estimados como valores negativos. Na Figura 17 é apresentado o gráfico de dispersão dos valores de ouro reais versus estimados na lente inferior.

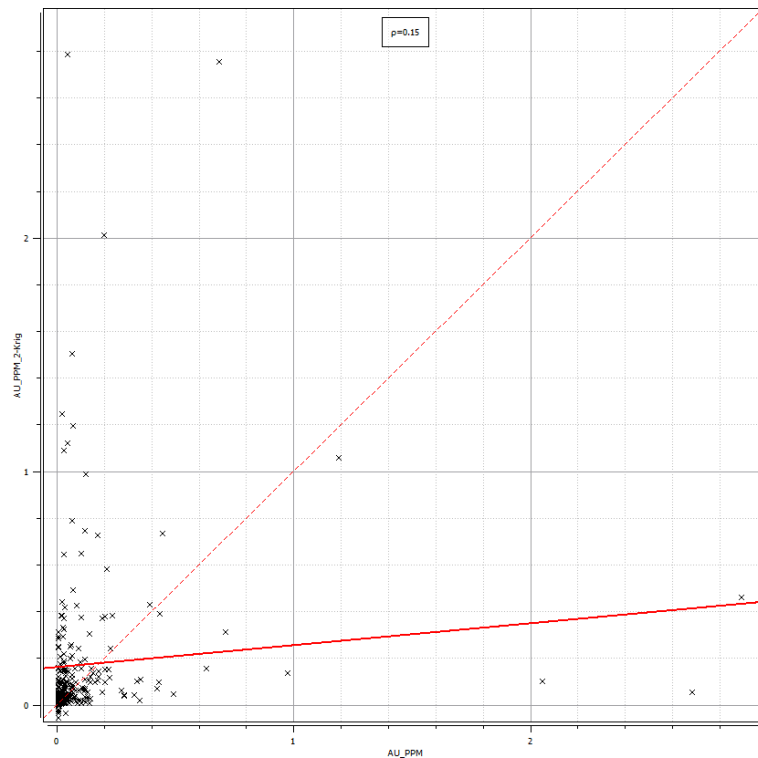


Figura 17: Validação cruzada para a variável de ouro original na lente inferior, onde a bissetriz é representada pela linha pontilhada e a regressão linear pela reta vermelha.

5.7.2.2. Validação Cruzada dos dados transformados

Já para os dados transformados, houve um grande aumento do coeficiente de correlação que equivale a 0,68. Desta vez, não há mais a influência de outliers nem a presença de valores estimados negativos, porém continua com a superestimativa daqueles valores transformados iguais a 2,356 ppm (originalmente igual a 0,005 ppm). Novamente, os resultados da validação cruzada para todas as variáveis transformadas, utilizando logaritmo natural, de base 2 e base 10, somados a uma constante igual a 10, foram os mesmos.

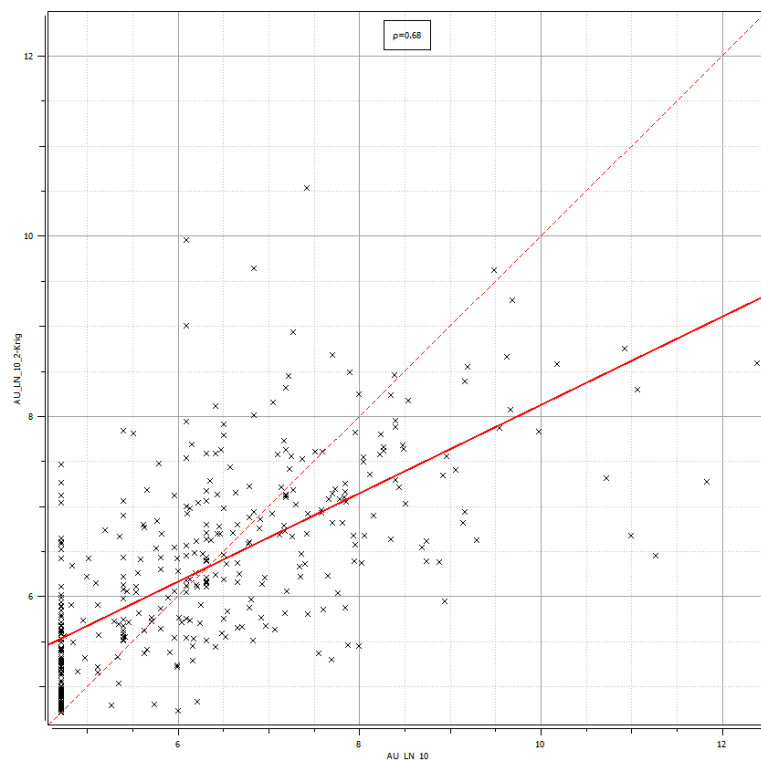


Figura 18: Validação cruzada para as variáveis de ouro transformadas na lente inferior, onde a bisetriz é representada pela linha pontilhada e a regressão linear pela reta vermelha.

5.8. Estimativa por Krigagem Ordinária e Krigagem Lognormal

Uma vez com os modelos de variograma e parâmetros de vizinhança definidos, é possível realizar as estimativas por krigagem ordinária das variáveis originais e transformadas. Em relação aos parâmetros utilizados na estimativa, foi utilizado o modelo de blocos apresentado na Tabela 2, com discretização do bloco por 3x3x3 nos eixos XYZ, e a estimativa realizada nas células parentais. Além disso, na krigagem dos dados originais houve valores negativos devido a diversas amostras estarem próximas de 0,005 ppm, mas foram tratados posteriormente e tiveram seu novo valor equivalente a zero.

5.8.1. Estimativas na Lente Superior

5.8.1.1. Krigagem Ordinária – variável de ouro original

A krigagem ordinária foi realizada segundo os parâmetros descritos acima para a variável regularizada de ouro. Os parâmetros de vizinhança para os dados não transformados da lente superior foram apresentados na Tabela 13, e o modelo de variograma utilizado se encontra na Tabela 6. As estatísticas descritivas da estimativa dos dados originais estão apresentadas abaixo, na Tabela 15, acompanhadas da Figura 19, que ilustra o modelo estimado.

Tabela 15: Estatísticas descritivas da variável original estimada na lente superior.

Variável	Lente	Nº de blocos	Média	Mínimo	Q1	Q2	Q3	Máximo	Desvio Padrão	C.V.
AU_PPM_OK	Superior	38000	0,284	0,005	0,008	0,023	0,159	56,551	1,303	4,581

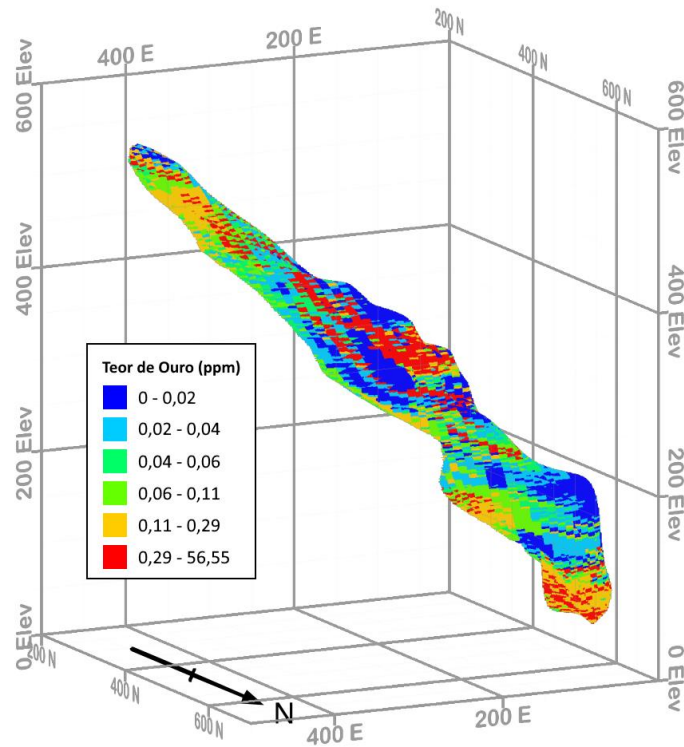


Figura 19: Modelo estimado por krigagem ordinária dos dados originais na lente superior.

5.8.1.2. Krigagem Lognormal – variáveis de ouro transformadas

Já para as variáveis de ouro transformadas pela aplicação do logaritmo natural, de base 2 e base 10 somados a uma constante igual a 10, foi realizada a krigagem ordinária seguida da transformação reversa dos valores estimados. Essa transformação reversa foi realizada de duas maneiras: a primeira pela aplicação do expoente nos resultados transformados subtraindo a constante; e a segunda pela aplicação da Equação 7, que retira o expoente dos resultados transformados menos a constante, somado a um termo de não viés, calculado através da variância da krigagem e multiplicador de Lagrange.

$$Z_{OLK}^*(x_0) = \exp\left(Y_{OK}^*(x_0) + \frac{\sigma_{OK}^2}{2} - \mu\right)$$

Equação 9: Transformação reversa para domínio original (Journel, 1980).

Para a krigagem lognormal na lente superior, os parâmetros de vizinhança utilizados foram apresentados na Tabela 13, e o modelo de variograma utilizado se encontra na Tabela 8. As estatísticas descritivas dos resultados retro transformados pela aplicação do expoente estão na Tabela 16 e seu respectivo modelo tridimensional pode ser visualizado na Figura 20.

Tabela 16: Estatísticas descritivas das variáveis transformadas estimadas na lente superior, retro transformadas pela aplicação do expoente de cada logaritmo.

Variável	Lente	Nº de blocos	Média	Mínimo	Q1	Q2	Q3	Máximo	Desvio Padrão	C.V.
AU_LN_10_LK	Superior	38000	0,055	0,005	0,013	0,026	0,059	9,381	0,125	2,296
AU_LOG2_10_LK	Superior	38000	0,055	0,005	0,013	0,026	0,059	9,381	0,125	2,296
AU_LOG10_10_LK	Superior	38000	0,055	0,005	0,013	0,026	0,059	9,381	0,125	2,296

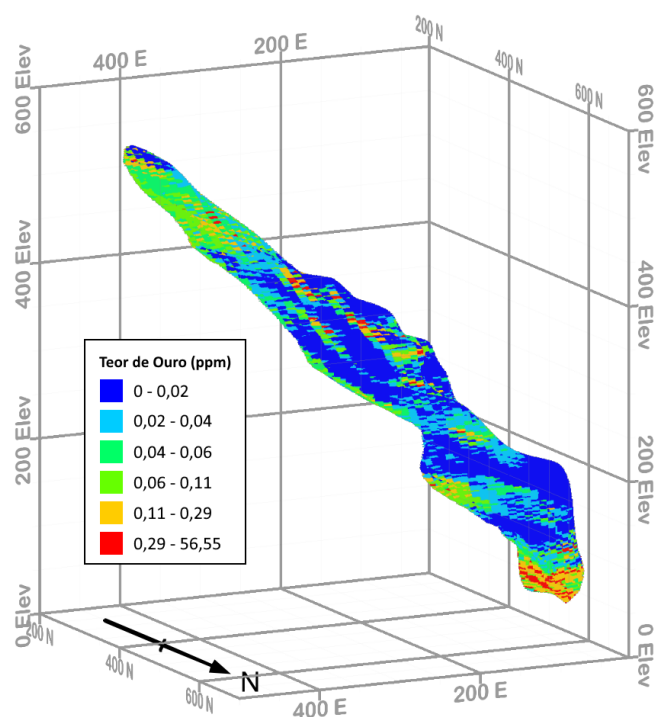


Figura 20: Modelo estimado por krigagem lognormal com transformação reversa pela aplicação do expoente.

Em relação as estatísticas descritivas da krigagem lognormal que teve a transformação reversa realizada pela aplicação da Equação 7, estão apresentadas na Tabela 17. O modelo estimado encontra-se na Figura 21.

Tabela 17: Estatísticas descritivas das variáveis estimadas na lente superior retro transformadas pela Equação 7.

Variável	Lente	Nº de blocos	Média	Mínimo	Q1	Q2	Q3	Máximo	Desvio Padrão	C.V.
AU_LN_10_LK2	Superior	38000	0,266	0,008	0,050	0,099	0,245	21,816	0,700	2,631

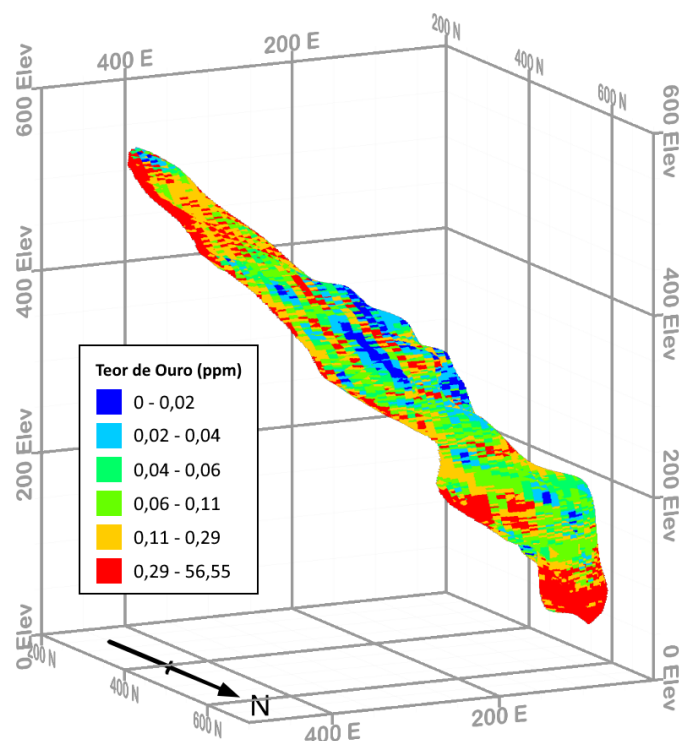


Figura 21: Modelo estimado por krigagem lognormal com transformação reversa pela Equação 7 na lente superior.

5.8.2. Estimativas na Lente Inferior

5.8.2.1. Krigagem Ordinária – variável de ouro original

Já na lente inferior, para a krigagem ordinária dos dados de ouro originais, os parâmetros de vizinhança utilizados são aqueles apresentados na Tabela 14, e o modelo de variograma utilizado se encontra na Tabela 10. As estatísticas descritivas da estimativa dos dados originais estão apresentadas abaixo, na Tabela 18, acompanhadas da Figura 22, que ilustra o modelo estimado.

Tabela 18: Estatísticas descritivas da variável original estimada na lente inferior.

Variável	Lente	Nº de blocos	Média	Mínimo	Q1	Q2	Q3	Máximo	Desvio Padrão	C.V.
AU_PPM_OK	Inferior	36819	0,198	0	0,031	0,067	0,186	5,437	0,414	2,091

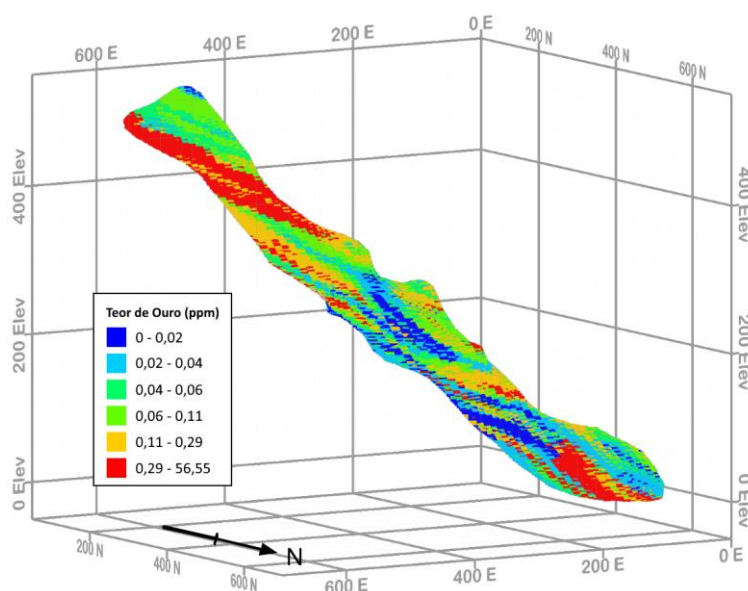


Figura 22: Modelo estimado por krigagem ordinária dos dados originais na lente inferior.

5.8.2.2. Krigagem Lognormal – variáveis de ouro transformadas

Finalmente, em relação a krigagem lognormal das variáveis transformadas na lente inferior, foi feita a mesma metodologia de transformação reversa dos dados da lente superior, um método pela aplicação do expoente e outro pela aplicação da Equação 7.

Para a krigagem lognormal na lente inferior, os parâmetros de vizinhança foram apresentados na Tabela 14, e o modelo de variograma utilizado se encontra na Tabela 12. As estatísticas descritivas dos resultados retro transformados pela aplicação do expoente estão na Tabela 19 e seu respectivo modelo tridimensional pode ser visualizado na Figura 23.

Tabela 19: Estatísticas descritivas das variáveis transformadas estimadas na lente inferior, retro transformadas pela aplicação do expoente de cada logaritmo.

Variável	Lente	Nº de blocos	Média	Mínimo	Q1	Q2	Q3	Máximo	Desvio Padrão	C.V.
AU_LN_10_LK	Inferior	36819	0,041	0,005	0,016	0,026	0,048	1,256	0,051	1,244
AU_LOG2_10_LK	Inferior	36819	0,041	0,005	0,016	0,026	0,048	1,257	0,051	1,244
AU_LOG10_10_LK	Inferior	36819	0,041	0,005	0,016	0,026	0,048	1,256	0,051	1,244

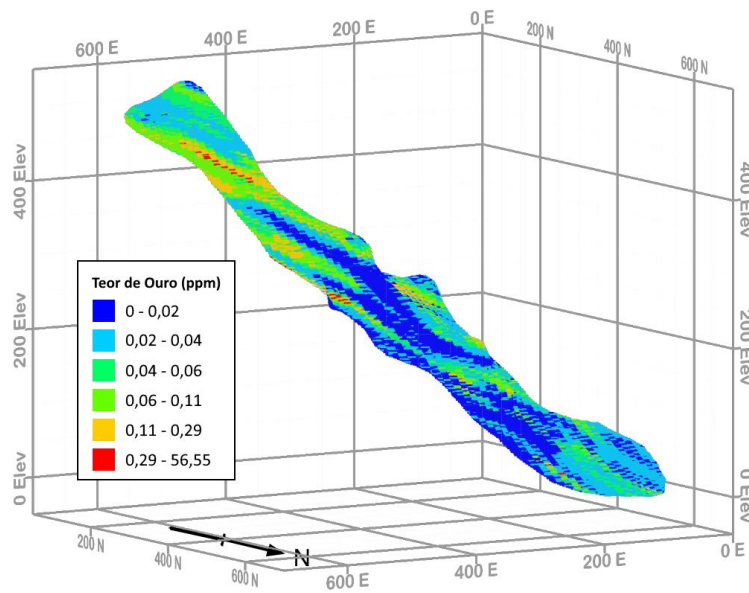


Figura 23: Modelo estimado por krigagem lognormal dos dados transformados na lente inferior.

Em relação as estatísticas descritivas da krigagem lognormal que teve a transformação reversa realizada pela aplicação da Equação 7, estão apresentadas na Tabela 20. O modelo estimado encontra-se na Figura 24.

Tabela 20: Estatísticas descritivas das variáveis estimadas na lente inferior retro transformadas pela Equação 7.

Variável	Lente	Nº de blocos	Média	Mínimo	Q1	Q2	Q3	Máximo	Desvio Padrão	C.V.
AU_LN_10_LK2	Inferior	36819	0,116	0,008	0,040	0,073	0,128	2,697	0,154	1,326

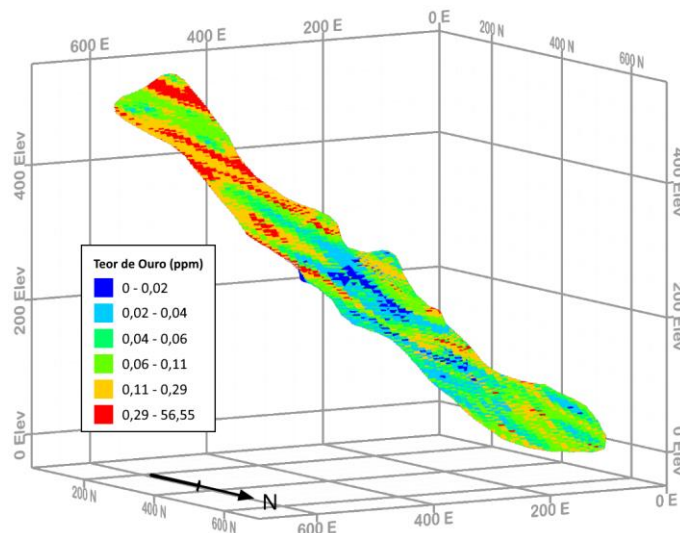


Figura 24: Modelo estimado por krigagem lognormal com transformação reversa pela Equação 7 na lente inferior.

6. DISCUSSÃO E INTERPRETAÇÃO DE RESULTADOS

Em relação a interpretação e comparação dos resultados obtidos pela krigagem ordinária e krigagem lognormal, a análise comparativa será feita a partir das estatísticas descritivas dos domínios, *Log Probability Plots*, *QQ-Plots* e histogramas.

6.1. Resultados na Lente Superior

Na Tabela 21 estão apresentadas todas as estimativas realizadas na lente superior. A variável AU_PPM representa os dados amostrais, AU_PPM_OK representa o modelo estimado por krigagem ordinária e AU_LN_10_OK, AU_LOG2_10_LK, AU_LOG10_10_LK representam as variáveis transformadas pela aplicação do logaritmo natural, de base 2 e de base 10, respectivamente, somadas a uma constante 10, estimadas por krigagem ordinária e retro transformadas pela aplicação do expoente. Finalmente, AU_LN_10_LK2 representa a variável transformada pelo logaritmo natural com sua transformação reversa realizada pela Equação 7.

De início, é possível observar que todas as estimativas subestimaram os dados amostrais, uma vez que ocorreu a diluição das amostras *high-grade* quando foram estimadas no volume de bloco. Além disso, como esperado, as transformações logarítmicas tiveram o mesmo resultado independente da base utilizada. Os quartis 1, 2 e 3 se mantiveram constantes na maioria dos resultados, tirando o domínio AU_LN_10_LK2, que superestimou todos, e mesmo assim obteve uma média menor que AU_PPM_OK.

Tabela 21: Estatísticas descritivas dos dados amostrais e de todas as variáveis estimadas na lente superior.

Variável	Lente	Nº de amostras	Média	Mínimo	Q1	Q2	Q3	Máximo	Desvio Padrão	C.V.
AU_PPM	Superior	1078	0,598	0,005	0,007	0,025	0,081	85,43	4,253	7,117
AU_PPM_OK	Superior	38000	0,284	0,005	0,008	0,023	0,159	56,551	1,303	4,581
AU_LN_10_LK	Superior	38000	0,055	0,005	0,013	0,026	0,059	9,381	0,125	2,296
AU_LOG2_10_LK	Superior	38000	0,055	0,005	0,013	0,026	0,059	9,381	0,125	2,296
AU_LOG10_10_LK	Superior	38000	0,055	0,005	0,013	0,026	0,059	9,381	0,125	2,296
AU_LN_10_LK2	Superior	38000	0,266	0,008	0,050	0,099	0,245	21,816	0,700	2,631

Nas Figuras 25, 26 e 27 estão apresentados o *Log Probability Plot*, *QQ-Plot* (até 2 ppm) e histograma (até 2 ppm), respectivamente, dos dados amostrais e domínios estimados por krigagem ordinária e lognormal. A partir desses gráficos, é possível visualizar que todas as estimativas sofrem bastante com o efeito de suavização da krigagem, no qual os valores mais baixos sofrem com superestimativa e aqueles valores maiores sofrem com subestimativa,

diminuindo a variabilidade do depósito. Além disso, é apresentado que AU_PPM_OK e AU_LN_10_LK2 apresentam distribuições bastante semelhantes, porém a krigagem ordinária se mostrou mais próxima dos dados amostrais. Já nos resultados de AU_LN_10_LK, pela análise do *QQ-Plot*, sua distribuição se aproxima dos valores reais apenas próximo a origem, a partir de 0,1 ppm, por exemplo, já tem resultados bastante subestimados, sem representar os teores altos de maneira efetiva.

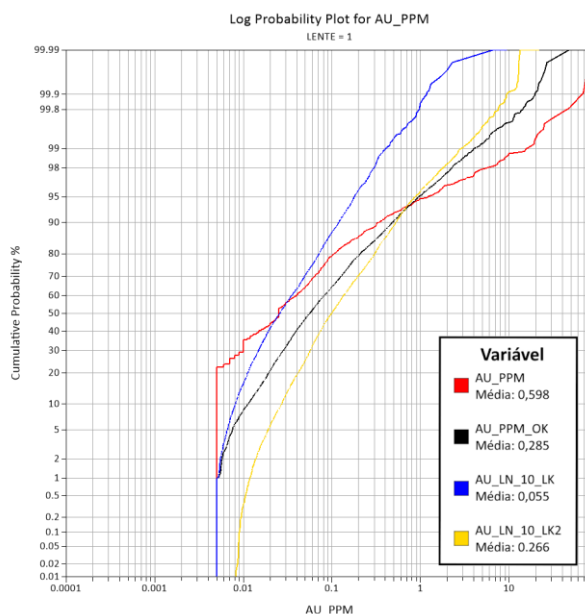


Figura 25: Log Probability Plot dos dados amostrais e das estimativas na lente superior.

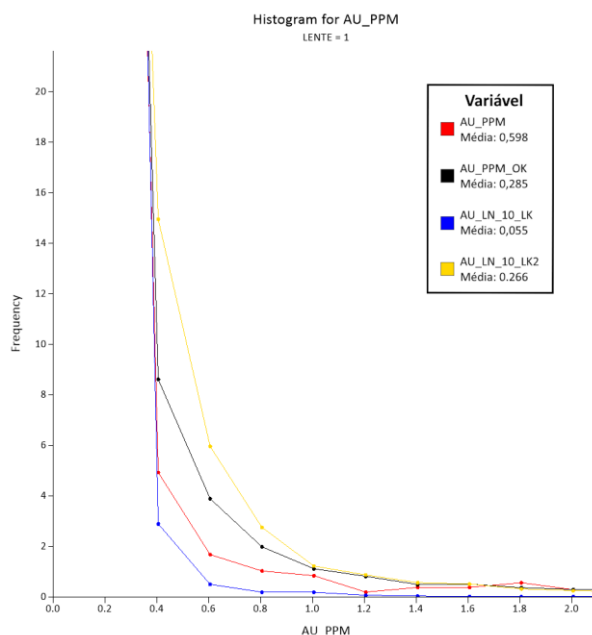


Figura 26: Histograma dos dados amostrais e das estimativas (até 2 ppm) na lente superior.

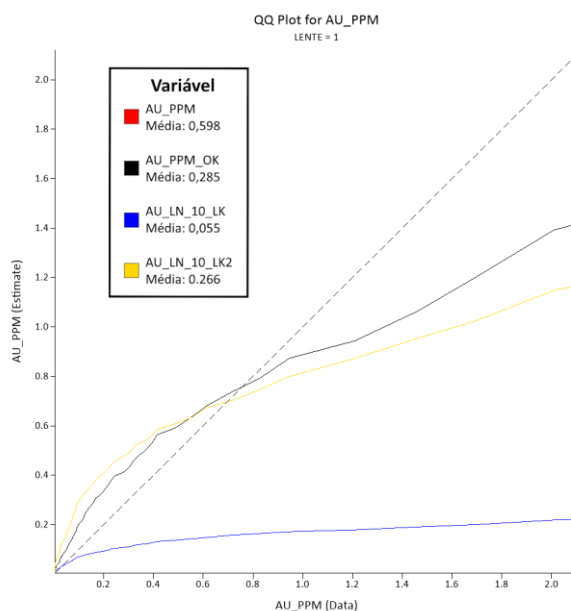


Figura 27: QQ-Plot dos dados amostrais e das estimativas (até 2 ppm) na lente superior.

Por outro lado, através da análise dos *Swath Plots* da Figura 28, os valores de AU_PPM_OK e AU_LN_10_LK2, que em suas distribuições pareciam muito semelhantes, se destoam bastante. A variável da krigagem lognormal parece sofrer com o efeito de borda e não acompanha os intervalos de alto teor assim como a krigagem ordinária.

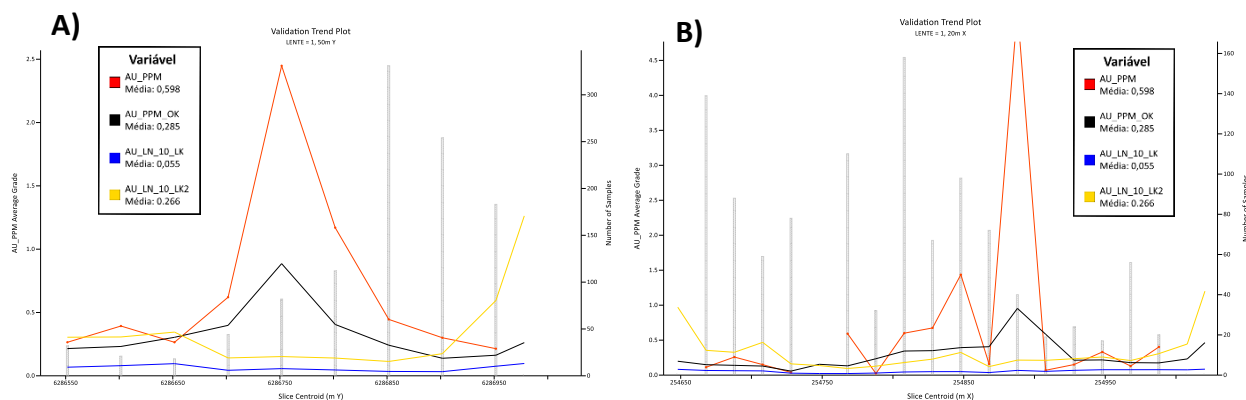


Figura 28: Swath Plot A) Intervalos de 50 metros na direção Y; B) Intervalos de 20 metros na direção X dos dados amostrais e das estimativas na lente superior.

Portanto, em relação a comparação dos métodos de krigagem ordinária e krigagem lognormal na lente superior, a krigagem ordinária se manteve uma técnica mais assertiva e confiável. Uma vez que na distribuição original o valor 0,005 ppm representava aproximadamente 30% dos valores, a variável não se comportou bem no teste de lognormalidade, ou seja, não se classifica como uma variável lognormal, mesmo possuindo assimetria positiva. Dessa maneira, mesmo transformando os dados para logaritmo, sua distribuição continuava sendo assimétrica positiva e a metodologia foi comprometida.

6.2. Resultados na Lente Inferior

Já na lente inferior, a comparação é semelhante, porém com algumas pequenas diferenças. Na Tabela 22, estão apresentadas as estatísticas descritivas dos dados amostrais e dos domínios estimados por krigagem ordinária e krigagem lognormal, com as mesmas abreviações explicadas anteriormente. Dessa vez a krigagem ordinária foi superestimada e teve seus quartis 1, 2 e 3 próximos da variável AU_LN_10_LK2, enquanto as estimativas das variáveis AU_LN_10_LK foram novamente bastante subestimadas.

Tabela 22: Estatísticas descritivas dos dados amostrais e de todas as variáveis estimadas na lente superior.

Variável	Lente	Nº de amostras	Média	Mínimo	Q1	Q2	Q3	Máximo	Desvio Padrão	C.V.
AU_PPM	Inferior	392	0,167	0,005	0,005	0,020	0,060	11,648	0,908	5,424
AU_PPM_OK	Inferior	36819	0,198	0	0,031	0,067	0,186	5,437	0,414	2,091
AU_LN_10_LK	Inferior	36819	0,041	0,005	0,016	0,026	0,048	1,256	0,051	1,244
AU_LOG2_10_LK	Inferior	36819	0,041	0,005	0,016	0,026	0,048	1,257	0,051	1,244
AU_LOG10_10_LK	Inferior	36819	0,041	0,005	0,016	0,026	0,048	1,256	0,051	1,244
AU_LN_10_LK2	Inferior	36819	0,116	0,008	0,040	0,073	0,128	2,697	0,154	1,326

Nas Figuras 29, 30 e 31 estão apresentados o *Log Probability Plot*, *QQ-Plot* (até 2 ppm) e histograma (até 2 ppm), respectivamente, dos dados amostrais e domínios estimados por krigagem ordinária e lognormal na lente inferior. A principal diferença quando comparamos com a lente superior é que a variável AU_LN_10_LK2 parece ser um meio termo entre AU_LN_10_LK, que continua bastante subestimada, e AU_PPM_OK, superestimada. De qualquer maneira, a krigagem ordinária ainda se assemelha de melhor maneira aos dados amostrais.

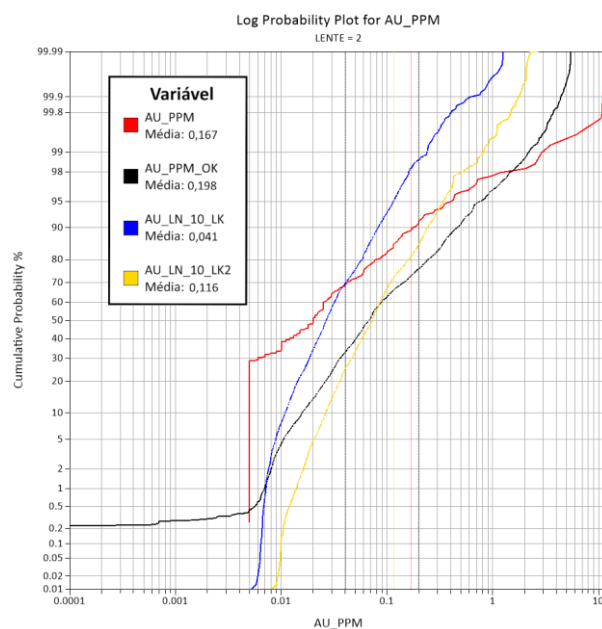


Figura 29: Log Probability Plot dos dados amostrais e das estimativas na lente inferior.

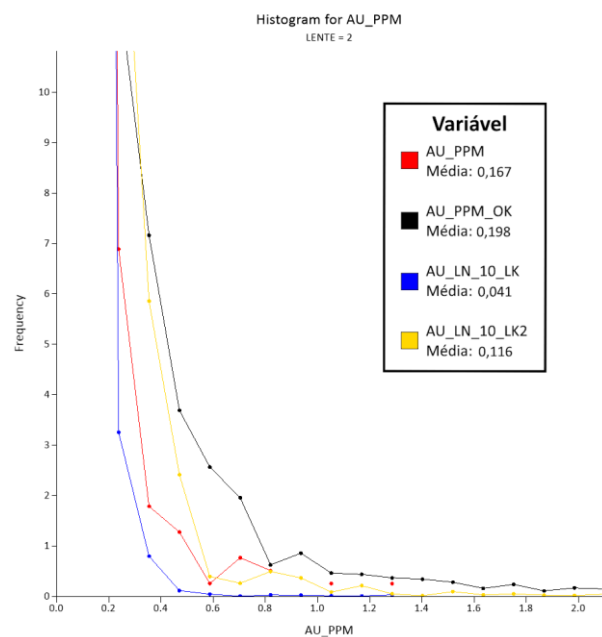


Figura 30: Histograma dos dados amostrais e das estimativas (até 2 ppm) na lente inferior.

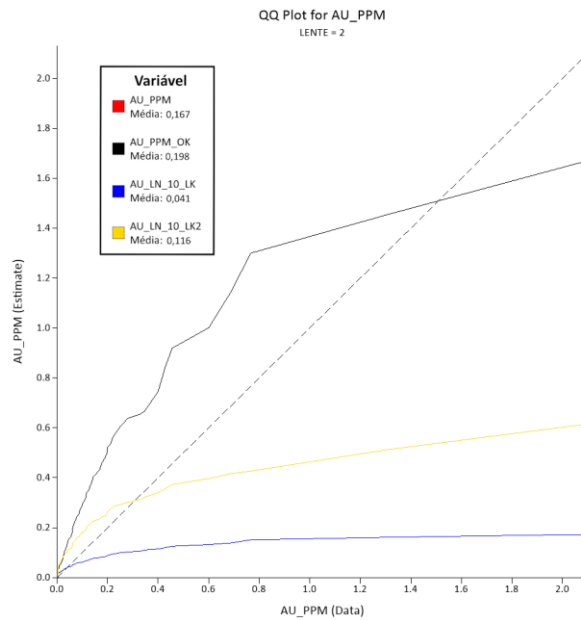


Figura 31: QQ-Plot dos dados amostrais e das estimativas (até 2 ppm) na lente inferior.

Além disso, através da análise de *Swath Plots* na lente inferior (Figura 32), não parece ocorrer efeito de borda pela variável AU_LN_10_LK2, que acompanha os altos teores de maneira mais eficiente quando comparada com a situação da lente superior. A krigagem ordinária ainda se mantém mais assertiva acompanhando as regiões de alto teor com uma leve suavizada.

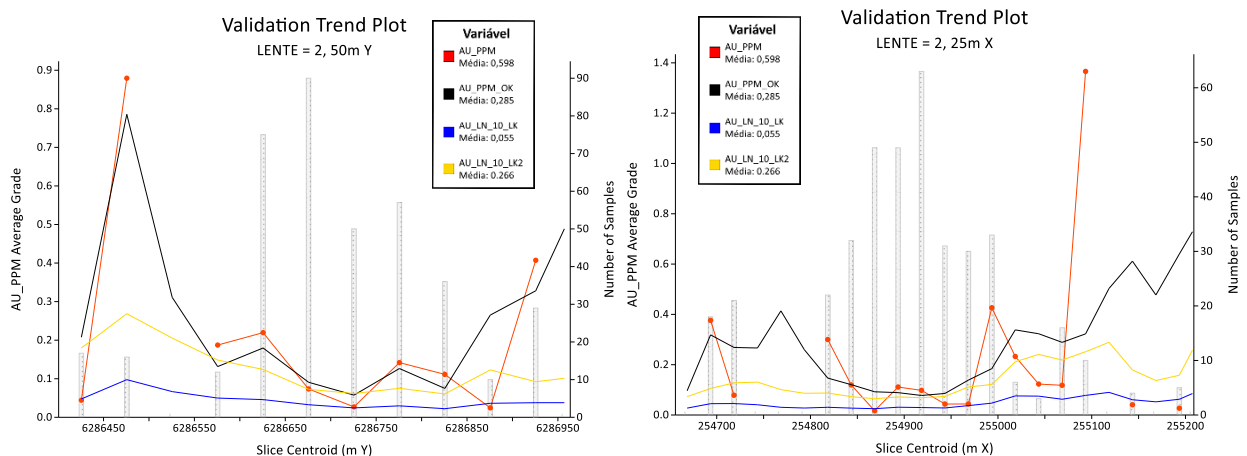


Figura 32: *Swath Plot* A) Intervalos de 50 metros na direção Y; B) Intervalos de 25 metros na direção X dos dados amostrais e das estimativas na lente superior.

Portanto, assim como na lente superior, a krigagem ordinária mostrou-se uma técnica mais adequada para o depósito em estudo. Os valores equivalentes a 0,005 ppm também se repetem na lente inferior, representando cerca de 30% do total de amostras, de modo que o problema é o mesmo em ambas as lentes.

7. CONCLUSÕES

No projeto realizado, a análise comparativa mostrou que a estimativa por krigagem ordinária se mostrou um método mais assertivo que a krigagem lognormal, com a transformação reversa realizada de duas maneiras diferentes, para o depósito de ouro em estudo. A principal problemática foi a distribuição da variável de ouro, com aproximadamente 30% de seus valores equivalentes a 0,005 ppm, de modo que a variável não se comportava como lognormal. Dessa maneira, mesmo aplicando a transformação logarítmica, a assimetria positiva continuava.

Mesmo com a seleção de amostras de ambas as lentes sendo feitas de forma cautelosa, a fim de trabalhar apenas com dados de interesse econômico, a intercalação abrupta de teores fez com que esses valores do limite de detecção representassem ainda uma grande classe do depósito. O ideal seria realizar uma seleção ainda mais restrita, de modo a trabalhar com uma distribuição próxima a lognormal, porém correndo o risco de diminuir o número de amostras de maneira excessiva.

Ainda assim, a transformação logarítmica se mostrou bastante efetiva no cálculo do variograma experimental e ajuste de modelo teórico, dado que para os dados originais só foi possível calcular variogramas omnidirecionais, enquanto as variáveis transformadas conseguiram identificar uma direção preferencial da mineralização. Além disso, esse estudo é um bom exemplo de que a krigagem lognormal não representa sempre uma estimativa mais assertiva dos *outliers* para depósitos minerais com distribuições assimétricas positivas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Agterberg, F.P., 1974, Geomathematics: Mathematical background and Geo-Science Applications. Amsterdam, Elsevier, 596p.
- Burrough, P.A., Mcdonnell, R.A., 1998, Principles of geographical information systems: Oxford, Oxford University Press, 155 p.
- Caers, J., 2011, Modeling uncertainty in the Earth Sciences: Sussex, Wiley-Blackwell, 229 p.
- CBRR, 2022, Guia CBRR para Declaração de Informações de Exploração, Recursos Minerais e Reservas Minerais.
- Deutsch, C.V., Journel, A.G., 1997, GSLIB: Geostatistical Software Library and User's Guide (2 ed.): New York, Oxford University Press, 369 p.
- Journel, A.G., 1980, The lognormal approach to predicting local distribution of selective mining unit grades: Mathematical Geology, v. 12, p. 285-303, doi:10.1007/BF01029417.
- Journel, A.G., 1983, Nonparametric estimation of spatial distributions: Mathematical Geology, v. 15, p. 445-468, doi:10.1007/BF01031292.
- Journel, A.G., Huijbregts, C.J., 1978, Mining geostatistics: London, Academic Press, 600 p.
- Koch, G.S.; Link, R.F. 1970. Statistical analysis of geological data: New York, Dover Publications Inc. Vol. I. 375 p.; Vol. II. 438p.
- Kreyszig, E., 1968, Statistische Methoden und ihre Anwendungen: Göttingen, Vandenhoeck and Ruprecht, 422 p.
- Krishnamoorthy, K., 2016, Handbook of statistical distributions with applications: Boca Raton, CRC Press. 398p.
- Lapin, L.L., 1998, Probability and statistics for modern engineering: Prospect Heights, Waveland Press. Inc. 810p.

- Matheron, G., 1962, *Traité de Géostatistique Appliquée*, Tome I: Mémoires du Bureau de Recherches Géologiques et Minières: Editions Technip, v. 14, 333 p.
- Matheron, G., 1971, *The Theory of Regionalized Variables and Its Applications*: Paris, Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique in Fontainebleau, 211 p.
- Saito, H., Goovaerts, P., 2000, Geostatistical interpolation of Positively Skewed and Censored Data in a Dioxin-Contaminated Site: *Environmental Science Technology*, v. 34, p. 4228-4235, doi:10.1021/es991450y.
- Yamamoto, J.K., 2001, *Avaliação e Classificação de Reservas Minerais*: São Paulo, EDUSP; FAPESP, 226 p.
- Yamamoto, J.K., 2007, On unbiased backtransform of lognormal kriging estimates: *Computers & Geosciences*, v. 11, p. 219-234, doi:10.1007/s10596-007-9046-x.
- Yamamoto, J.K., Furuie, R. de A., 2010, A survey into estimation of lognormal data: *Geociências*, v. 29, no. 1, p. 5-19.
- Yamamoto, J.K., Landim, P.M.B., 2013, *Geoestatística: conceitos e aplicações*: São Paulo, Oficina de Textos, 215 p.
- Yamamoto, J.K., 2020, *Estatística, análise e interpolação de dados geoespaciais*: São Paulo, Gráfica Paulos, 308 p.