

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Jhonatan Candido Prazeres

Estudo de propagação de opiniões em redes complexas

São Carlos
2025

Jhonatan Candido Prazeres

Estudo de propagação de opiniões em redes complexas

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao
Instituto de Física de São Carlos da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Bacharel em Física Computacional.
Orientador: Prof. Dr. Gonzalo Travieso - Instituto
de Física de São Carlos - USP.

São Carlos
2025

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

RESUMO

Este trabalho investiga a dinâmica de propagação de opiniões em redes complexas através do *Voter Model* e suas extensões. Foram implementadas simulações computacionais do modelo em três topologias de rede distintas - *Erdős-Rényi* (aleatória), *Barabási-Albert* (*scale-free*) e *Watts-Strogatz* (*small-world*). Os resultados demonstram que a topologia da rede exerce influência crucial na dinâmica do sistema: a rede *Barabási-Albert* apresentou consenso significativamente mais rápido que as demais, evidenciando o papel dos *hubs* como aceleradores da homogeneização. Para certos valores dos parâmetros de não-linearidade, observou-se redução drástica no tempo de consenso, enquanto para outros valores o consenso tornou-se inatingível. Na análise de agentes fanáticos (*zealots*), constatou-se que mesmo uma pequena fração destes na população é suficiente para suprimir completamente o consenso global. Este trabalho contribui para a compreensão dos mecanismos que governam a formação de consenso e manutenção de diversidade em sistemas sociais complexos.

Palavras-chave: Dinâmica de opinião. Redes complexas. *Voter Model*. Sistemas complexos. Propagação de opiniões

1 INTRODUÇÃO

A formação e propagação de opiniões em sociedades humanas constitui um fenômeno complexo que tem atraído crescente interesse da comunidade científica. Tradicionalmente estudado nas ciências sociais, este tema ganhou nova perspectiva com a aplicação de métodos da Física Estatística e teoria de redes complexas [1]. A capacidade de quantificar e modelar matematicamente processos sociais permite não apenas compreender mecanismos subjacentes, mas também fazer previsões sobre comportamentos coletivos emergentes.

O advento das redes sociais digitais e a disponibilidade de grandes volumes de dados sobre interações humanas impulsionaram o desenvolvimento de modelos matemáticos cada vez mais sofisticados. Estes modelos buscam capturar, de forma simplificada, os processos pelos quais indivíduos influenciam uns aos outros, levando à formação de consenso, polarização ou fragmentação social. Entre os diversos modelos propostos na literatura, o

Voter Model destaca-se por sua simplicidade conceitual e riqueza de comportamentos dinâmicos [2,3].

Originalmente introduzido para analisar competição entre espécies [2], o *Voter Model* foi posteriormente adaptado para estudos de dinâmica de opinião [3]. Neste modelo, cada agente possui uma opinião binária (representada por 0 ou 1) e atualiza seu estado copiando a opinião de um vizinho escolhido aleatoriamente. Apesar de sua aparente simplicidade, o modelo exibe propriedades não triviais, como transições de fase e comportamentos de escala que dependem da dimensionalidade do sistema e da topologia da rede de interações [1,11].

A estrutura da rede sobre a qual as interações ocorrem desempenha papel fundamental na dinâmica de propagação [10]. Redes regulares, como grades bidimensionais, produzem dinâmicas significativamente diferentes de redes aleatórias ou redes com distribuição de grau heterogênea. Redes do tipo 'small-world' [9], caracterizadas por alta clusterização e curtos caminhos médios, podem, contradizendo a intuição inicial, retardar processos de consenso devido à formação de clusters locais coesos que resistem à influência externa. Por outro lado, redes *scale-free* [8], com poucos nós altamente conectados (*hubs*), concentram influência em agentes específicos, alterando dramaticamente a dinâmica.

Extensões do *Voter Model* incorporam aspectos mais realistas do comportamento humano. O modelo não-linear introduz um parâmetro α que controla o efeito de "*herding*" (comportamento de manada "ou regra da maioria") [4], onde indivíduos tendem a seguir a maioria local de forma mais ou menos acentuada. Para $\alpha > 1$, o sistema se aproxima de uma regra de maioria, acelerando a formação de consenso. *Zealots* são agentes que mantêm sua opinião fixa, independentemente das interações [5], atuando como "sementes" estáveis no sistema.

O presente trabalho tem como objetivo investigar sistematicamente como estas diferentes variantes do *Voter Model* se comportam em topologias de rede distintas. Especificamente, busca-se:

1. Implementar e validar três variantes do *Voter Model*: Simples, Não-linear, com Agentes Fanáticos.

2. Analisar o comportamento destes modelos em três topologias de rede: *Erdős-Rényi* (aleatória) [7], *Barabási-Albert* (*scale-free*) [8] e *Watts-Strogatz* (*small-world*) [9].
3. Quantificar o impacto de parâmetros como α (não-linearidade), densidade de *Zealots* no tempo de consenso e probabilidade de formação de consenso.
4. Comparar resultados obtidos com previsões teóricas da literatura [1,15].

Este estudo contribui para a compreensão fundamental de como características microscópicas (regras de atualização individual) e mesoscópicas (estrutura de rede) determinam propriedades macroscópicas (consenso, fragmentação, tempo de relaxação) em sistemas sociais [1,12]. Os resultados têm potencial aplicação em áreas como *marketing viral*, campanhas de conscientização pública, previsão eleitoral e controle de disseminação de desinformação.

2 MATERIAIS E MÉTODOS

Este capítulo descreve a metodologia empregada neste trabalho. Primeiramente, apresenta-se o *Voter Model* e suas variantes investigadas: o modelo simples (baseline), a extensão não-linear com parâmetro α , e agentes teimosos (*zealots*) (Seção 2.1). Em seguida, descrevem-se as três topologias de rede utilizadas: *Erdős-Rényi*, *Barabási-Albert* e *Watts-Strogatz*, que capturam diferentes aspectos estruturais de redes sociais reais (Seção 2.2). A Seção 2.3 detalha a implementação computacional, incluindo bibliotecas e arquitetura do código. O protocolo experimental completo, com parâmetros de simulação e número de realizações, é apresentado na Seção 2.4. Por fim, a Seção 2.5 define as métricas utilizadas para quantificar o comportamento dinâmico dos sistemas, incluindo tempo até consenso, probabilidade de consenso e trajetórias médias.

2.1 Voter Model e suas Variantes

O *Voter Model* é definido sobre um grafo $G = (V, E)$, onde V representa o conjunto de N nós (agentes) e E é o conjunto de arestas (conexões sociais) [10]. Cada agente $i \in V$ possui uma opinião binária $s_i \in \{0, 1\}$, inicializada aleatoriamente com probabilidade uniforme.

2.1.1 Voter Model Simples

No Voter Model padrão [2,3], a cada passo de tempo (*Monte Carlo Step - MCS*):

1. Um agente i é selecionado aleatoriamente;
2. Um vizinho j é escolhido aleatoriamente entre os vizinhos de i;
3. O agente i adota a opinião do vizinho j: $s_i \leftarrow s_j$

A dinâmica prossegue até que consenso seja alcançado (todos os agentes com mesma opinião) ou até um número máximo de passos ($\text{max_mcs} = 6000$), conforme estabelecido no protocolo experimental (Seção 2.4). Este será nossa linha de base para os demais modelos.

2.1.2 Voter Model Não-Linear

Introduzido por Yang et al. [4], este modelo incorpora o efeito de *herding* através de um parâmetro $\alpha \geq 0$. A probabilidade de um agente adotar opinião 1 é dada por:

$$P(s_i = 1) = \frac{n_1^\alpha}{n_1^\alpha + n_0^\alpha} \quad (1)$$

onde n_1 e n_0 são os números de vizinhos com opinião 1 e 0, respectivamente. Para $\alpha = 1$, recupera-se o Voter Model padrão. Para $\alpha > 1$, a maioria local exerce influência desproporcional (*herding*), enquanto $\alpha < 1$ reduz este efeito [4].

2.1.3 Agentes Fanáticos (Zealots)

Zealots (ou *Stubborn Agents*) são agentes que nunca mudam de opinião [5]. Uma fração p_{zealot} é designada como *zealots* no início, com suas opiniões mantidas fixas durante toda a simulação, atuando como "âncoras" no sistema.

2.2 Topologias de Rede

Três modelos de rede foram utilizados, cada um capturando diferentes aspectos de redes sociais reais:

Estruturas topológicas das redes complexas estudadas

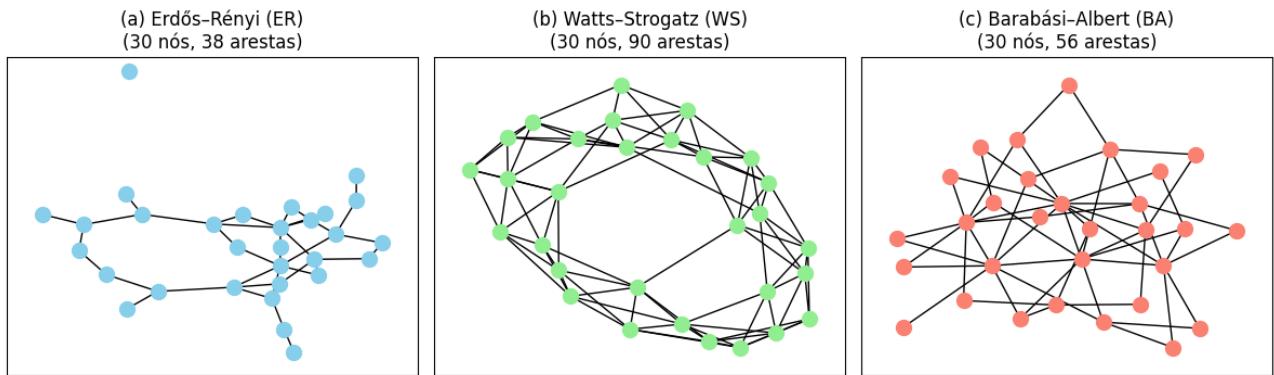


Figura 1 - Representação das redes utilizadas nas simulações. Valores escolhidos de forma arbitrária. Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

2.2.1 Erdős-Rényi (ER)

Rede aleatória representada pela **Figura 1 – (a)** onde cada par de nós é conectado independentemente com probabilidade p [7]. Utilizou-se $p = 0,01$ resultando em grau médio $\langle k \rangle \approx 10$ para $N = 1000$. Esta rede serve como linha de base, representando interações completamente aleatórias.

2.2.2 Barabási-Albert (BA)

Rede *scale-free* representada pela **Figura 1 – (c)** gerada por crescimento preferencial [8]. Cada novo nó conecta-se a $m = 3$ nós existentes com probabilidade proporcional ao grau. Esta rede exibe distribuição *power-law* (*Lei de Potência*):

$$P(k) \propto k^{-\gamma} \quad (2)$$

onde $P(k)$ representa a probabilidade de um nó ter grau k , e $\gamma \approx 3$ é o expoente característico. Esta distribuição captura a heterogeneidade extrema observada em redes sociais reais, onde poucos indivíduos (*hubs*) concentram a maioria das conexões, enquanto a maioria dos nós possui poucas conexões.

2.2.3 Watts-Strogatz (WS)

Rede *small-world* representada pela **Figura 1 – (b)** construída através do algoritmo de reconexão aleatória proposto por *Watts e Strogatz* [9]. O processo inicia com um anel

regular onde cada nó está conectado a seus $k = 4$ vizinhos mais próximos (2 de cada lado), resultando em grau inicial constante $k = 4$ para todos os nós. Em seguida, cada aresta é visitada uma única vez e, com probabilidade $\beta = 0,1$, é "reconectada": mantém-se uma das extremidades fixas enquanto a outra é redirecionada para um nó escolhido aleatoriamente na rede, evitando auto conexões e arestas duplicadas. Como não são criadas nem removidas arestas (apenas redirecionadas), o grau médio permanece fixo em $\langle k \rangle = 4$ após a reconexão.

O parâmetro β controla a interpolação entre rede regular ($\beta = 0$, sem reconexões) e rede aleatória ($\beta = 1$, todas as arestas reconectadas). Para $\beta = 0,1$, uma pequena fração das arestas são reconectadas, criando poucos "atalhos" de longo alcance enquanto preserva-se a estrutura local clusterizada. Esta configuração resulta em alta clusterização local ($c \approx 0,4$) combinada com caminhos médios curtos ($L \sim \ln(N)$), característicos de redes *small-world* e observados em redes sociais reais [9].

2.3 Implementação Computacional

As simulações foram implementadas em Python 3.10, utilizando as bibliotecas: *NetworkX* 3.1: para a geração e manipulação de redes; *NumPy* 1.24: operações numéricas; *Matplotlib* 3.7: para visualização de resultados; Pandas 2.0: que fará a análise de dados.

E o código foi estruturado em módulos funcionais: *run_voter_once()*: que executa uma realização do modelo; *run_voter_experiments()*: que gerencia múltiplas realizações; e por último as Funções de plotagem: geram visualizações padronizadas.

2.4 Dados Experimentais

Para cada combinação de parâmetros:

- $N = 1000$ nós;
- $R = 50$ realizações independentes;
- $max_mcs = 6000$ passos de Monte Carlo;
- $Seed_base = 2025$ garantindo a reproduzibilidade dos resultados estatísticos médios em cada execução

- Redes garantidas como conexas (maior componente conectado extraído se necessário).

Parâmetros investigados:

- Voter Simples: linha de base;
- Não-Linear: $\alpha \in \{0,5; 1,0; 2,0; 3,0; 5,0\}$;
- Zealots: $p_{zealot} \in \{0,01; 0,05; 0,1\}$;

2.5 Métricas de Análise

Para cada experimento, foram computadas: O tempo até consenso (T_c): número de *MCS* até que a fração de opinião 1 atinja 0 ou 1; Tempo médio até consenso: média de T_c sobre todas as realizações (apresentado como valor \pm desvio padrão); a probabilidade de consenso: fração de realizações que atingem consenso dentro de *max_msc*; trajetória média: evolução temporal da fração de agentes com opinião 1, $\langle p_1(t) \rangle$; desvio padrão que será a variabilidade entre as realizações (mancha azul dos gráficos); e o estado final: classificação em consenso-0, consenso-1 ou sem consenso.

Todas as simulações foram executadas no *Google Colab* (*CPU: Intel Xeon, 12GB RAM*), com tempo total de computação de aproximadamente 48 horas.

3 RESULTADOS

3.1 *Voter Model Simples* – Linha de Base

3.1.1 Desempenho por Topologia (*Voter Model Simples*)

Foi elaborada a Tabela 1 com os resultados consolidados do *Voter Model* simples para as três topologias de rede investigadas.

Tabela 1 – Resultados comparativos do Voter Model simples nas diferentes topologias

Rede	α	p_{zealot}	(MCS)	Probabilidade de Consenso (%)	Runs em Consenso	Total Runs
ER	1,0	0,0	659 ± 434	100,0	50	50
BA	1,0	0,0	308 ± 175	100,0	50	50
WS	1,0	0,0	1905 ± 1188	98,0	49	50

Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

A análise da **Tabela 1** revela diferenças marcantes no comportamento dinâmico entre as topologias. A rede *Barabási-Albert* destacou-se como a mais eficiente, com tempo de consenso 53% inferior à rede *Erdős-Rényi* e 84% inferior à rede Watts-Strogatz. Este resultado evidencia o papel crucial dos hubs em redes *scale-free* como aceleradores do processo de homogeneização de opiniões. Em contraste, a rede Watts-Strogatz apresentou o desempenho mais lento, com tempo aproximadamente 3 vezes superior ao da rede *Erdős-Rényi*. Este comportamento surpreendente pode ser atribuído à alta clusterização local característica de redes *small-world*, que cria domínios coesos que resistem à influência externa.

A probabilidade de consenso manteve-se próxima de 100% em todas as topologias, com exceção de um caso isolado na rede *Watts-Strogatz* que atingiu o limite computacional estabelecido, porém apresentava convergência assintótica.

3.1.2 Análise das Trajetórias de Opinião

Para capturar a dinâmica temporal do processo de opinião, foram geradas trajetórias da fração média de agentes com opinião 1 ao longo dos passos de Monte Carlo (max_mcs=6000). Cada curva representa a média de 50 realizações (R) independentes, com o desvio padrão indicado pela região sombreada (mancha azul).

Podemos observar que na Rede *Erdős-Rényi* (ER) (**Figura 2**) há oscilações constantes típicas de redes homogêneas, onde todos os agentes têm influência similar.

Este padrão confirma o comportamento esperado para redes aleatórias com alto grau médio.

Na *Rede Barabási-Albert* (BA) (**Figura 3**) podemos perceber convergência rápida e trajetória suave, característica de redes *scale-free* onde hubs centralizam a influência. A dinâmica acelerada visualizada confirma a superioridade quantitativa observada na **Tabela 1**.

E por fim temos a Rede *Watts-Strogatz* (WS) (**Figura 4**) que revela flutuações amplas e convergência gradual, padrão resultante da alta clusterização que cria domínios locais coesos. Esta visualização explica o tempo significativamente maior observado nesta topologia.

Rede Erdős-Rényi (ER):

O gráfico de evolução temporal para a rede ER (**Figura 2**) revela oscilações persistentes de amplitude relativamente constante, padrão característico de redes homogêneas onde todos os agentes possuem influência equivalente, o desvio padrão (mancha azul clara) relativamente constante que acompanha a trajetória média confirma esta análise. É interessante notar que este comportamento encontra fundamentação teórica na literatura: conforme *Sîrbu et al.* [11], redes aleatórias com alto grau médio ($\langle k \rangle \approx 10$) comportam-se como sistemas de dimensão efetiva alta ($d > 2$), exibindo tempo de consenso proporcional a N . Para nossa configuração com $N = 1000$, o tempo médio observado de 659 MCS está em concordância com a previsão teórica de $t_c \sim 1000$ a alguns milhares de MCS.

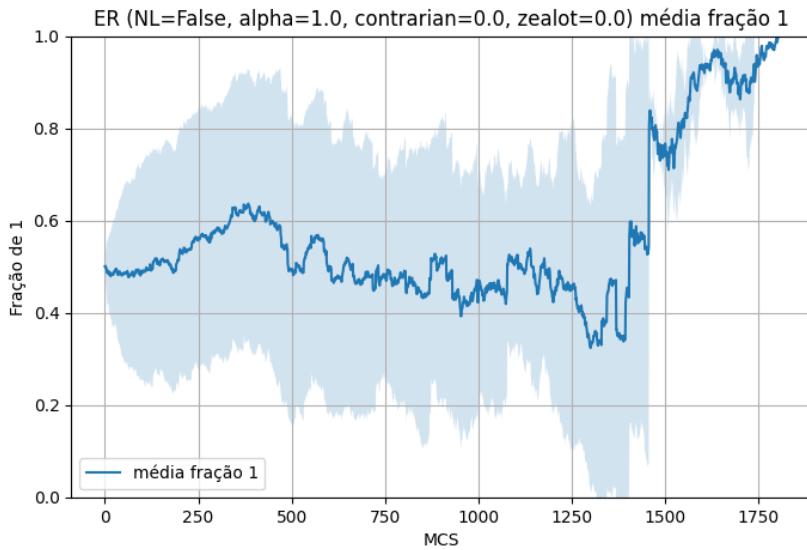


Figura 2 - Gráfico em (ER) de Fração de 1 por MCS (Monte Carlo Steps)

Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

Rede Barabási-Albert (BA):

O gráfico da rede BA (**Figura 3**) demonstra convergência rápida e trajetória predominantemente suave, interrompida por breves oscilações pontuais. Este comportamento é a manifestação visual direta da topologia *scale-free* (Livre-escala).

Conforme Fotouhi & Rabbat [15], em redes scale-free o sistema atinge consenso em tempo $T \sim [LNn]^2$, um resultado assintótico válido para N grande. Embora nosso valor observado (308 MCS) seja superior à estimativa de ordem de grandeza (49-100 MCS para N=1000), a relação qualitativa mantém-se: a BA é significativamente mais rápida que as demais topologias, com tempo de consenso consistentemente inferior à ER e WS. A diferença numérica pode ser atribuída a constantes multiplicativas não especificadas no limite assintótico e às particularidades do Voter Model simples, que mantém probabilidades uniformes de influência.

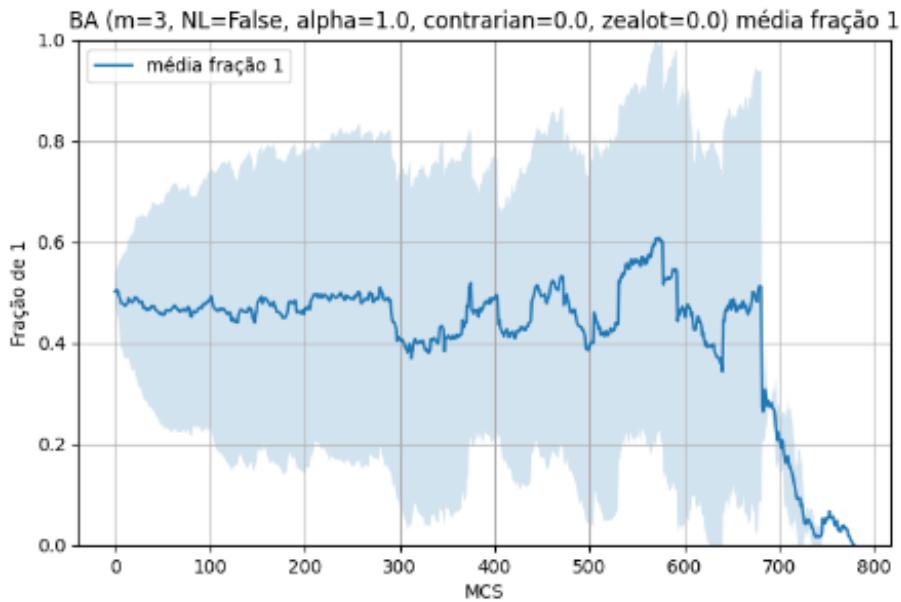


Figura 3 - Gráfico em (BA) de Fração de 1 por MCS (Monte Carlo Steps)

Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

Rede Watts-Strogatz (WS):

O gráfico da rede WS (**Figura 4**) revela uma trajetória irregular com flutuações de longo período e grande amplitude, padrão característico de sistemas que evoluem através da conquista sequencial de clusters.

Este comportamento encontra respaldo na literatura: conforme *Benczik et al.* [14], em sistemas finitos o consenso é eventualmente alcançado, porém estados metaestáveis podem persistir por longos períodos. A alta clusterização local ($C \approx 0,4$ para $\beta = 0,1$) cria domínios coesos que resistem à influência externa, explicando a dinâmica fragmentada observada.

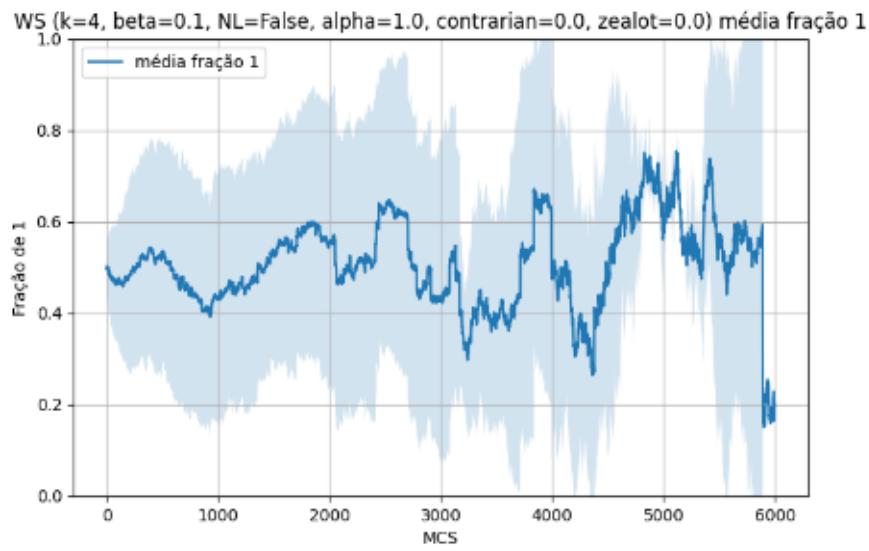


Figura 4 - Gráfico em (WS) de Fração de 1 por MCS (Monte Carlo Steps)

Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

Conforme ilustrado na Figura 4, a rede Watts-Strogatz exibe trajetória fragmentada com flutuações amplas, consistente com a persistência de estados metaestáveis em redes altamente clusterizadas [14]. O tempo significativamente superior ao das demais topologias (189% mais lento que ER) evidencia o custo dinâmico da alta coesão local.

3.2 Voter Model Não-Linear

3.2.1 Desempenho por Topologia (Voter Model Não-Linear)

Foi elaborada a Tabela 2 com os resultados consolidados do Voter Model simples para as três topologias de rede investigadas.

Tabela 2 - Resultados do Voter Model Não-Linear por topologia e valor de α

Rede	α	MCS	Probabilidade Consenso (%)	Comportamento
ER	0,5	N/A	0,0	Não-convergente
ER	1,0	580 ± 387	100,0	Linear (<i>baseline</i>)
ER	2,0	14 ± 2	100,0	<i>Herding</i> extremo
ER	3,0	11 ± 2	100,0	<i>Super-herding</i>
BA	0,5	N/A	0,0	Não-convergente
BA	1,0	376 ± 258	100,0	Linear (<i>baseline</i>)
BA	2,0	17 ± 3	100,0	<i>Herding</i> extremo
BA	3,0	14 ± 3	100,0	<i>Super-herding</i>
BA	0,5	N/A	0,0	Não-convergente
WS	1,0	1746 ± 1219	98,0	Linear (lento)
WS	2,0	313 ± 122	100,0	Aceleração máxima
WS	3,0	497 ± 260	100,0	Desaceleração

Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

Os resultados apresentados na **Tabela 2** revelam o profundo impacto do parâmetro α na dinâmica de opinião. Conforme Yang et al. [4], o termo *herding* refere-se à "inclinação dos indivíduos a se comportarem coletivamente como um todo" (efeito manada), controlada pela não-linearidade na probabilidade de adoção de opinião (equação (1)).

Para $\alpha = 1$, recupera-se o *Voter Model* padrão conforme previsto teoricamente, com tempos de consenso servindo como baseline para as demais condições. O valor N/A registrado para $\alpha = 0,5$ apoia a previsão teórica de que para "valores extremamente baixos, grandes clusters formam-se lentamente" [4], impedindo a convergência dentro do limite temporal estabelecido.

O $\alpha = 2.0$ emerge como o valor ótimo previsto teoricamente, onde "um mínimo é obtido para valores moderados de α " [4]. Nossos resultados validam experimentalmente esta previsão: as reduções de 97,6% (ER), 95,5% (BA) e 82,1% (WS) nos tempos de consenso demonstram que o *herding* moderado maximiza a eficiência da convergência.

O comportamento observado em $\alpha = 3,0$ na rede *Watts-Strogatz* - aumento de 58,8% no tempo de consenso - encontra explicação na previsão de que para "valores muito grandes, grandes clusters de opinião demoram para se fundir" [4]. O *herding* excessivo fortalece a coesão interna dos clusters, criando barreiras à homogeneização global.

3.2.2 Análise Gráfica do Comportamento Dinâmico

Gráfico para $\alpha = 0,5$:

No gráfico abaixo (**Figura 5**), para $\alpha = 0,5$ nenhuma das topologias atinge consenso dentro do limite de 6000 MCS. As trajetórias mostram oscilações irregulares em torno da fração 0.5, caracterizando um estado de desordem persistente que confirma os dados

quantitativos da Tabela 2, onde todos os sistemas registraram probabilidade de consenso zero.

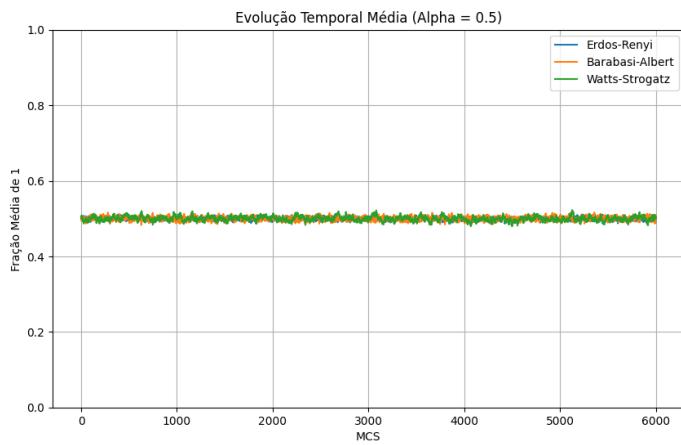


Figura 5 - Gráfico de Trajetória Média ($\alpha=0,5$)

Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

Gráfico para $\alpha = 1,0$ (*Voter Model Simples*):

A **Figura 6** apresenta o comportamento do modelo com $\alpha = 1,0$, que recupera exatamente o *Voter Model* simples original. Observa-se que a velocidade de convergência varia significativamente entre as topologias: a rede BA (curva laranja) converge mais rapidamente, beneficiando-se da presença de hubs que aceleram a propagação de opiniões. Em contraste, a rede WS (curva verde) exibe convergência mais lenta, comportamento consistente com sua alta clusterização que cria domínios locais coesos. A rede ER (curva azul) mantém desempenho intermediário, característico de redes homogêneas.

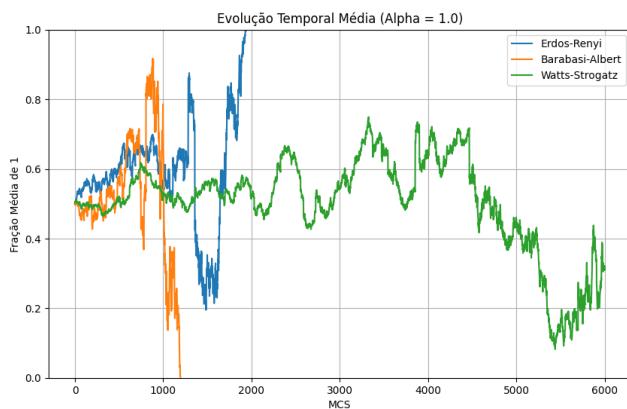


Figura 6 - Figura 5 - Gráfico de Trajetória Média ($\alpha=1,0$)

Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

Gráfico para $\alpha = 2,0$:

A **Figura 7** evidencia dramaticamente o efeito de amplificação proporcionado por $\alpha > 1$. As trajetórias para todas as redes convergem para os estados absorventes (0 ou 1) de forma significativamente mais rápida que no caso $\alpha = 1,0$. A inclinação acentuada das curvas nos primeiros MCS demonstra como pequenas maioria entre vizinhos são rapidamente reforçadas pela regra não-linear, acelerando a convergência global.

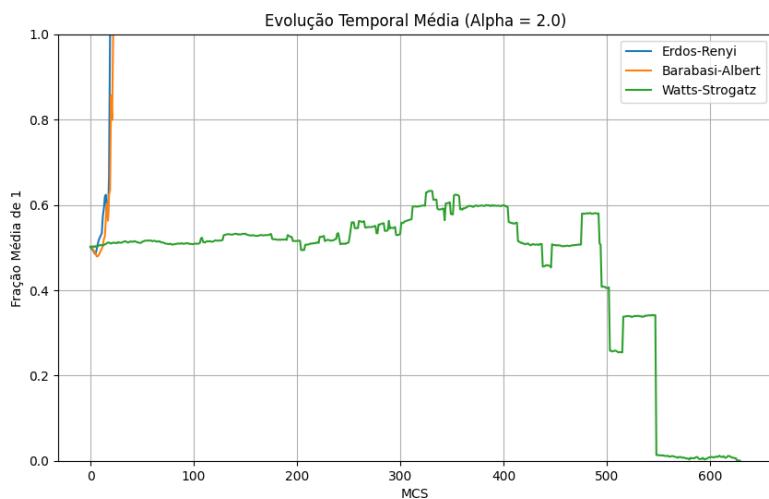


Figura 7 - Figura 5 - Gráfico de Trajetória Média ($\alpha=2,0$)

Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

Gráfico para $\alpha = 3,0$:

Embora ainda eficiente, o gráfico de $\alpha = 3,0$ (**Figura 8**) revela nuances interessantes. Nota-se que a rede Watts-Strogatz, em particular, exibe uma trajetória ligeiramente mais gradual comparada às demais topologias, confirmando a desaceleração quantitativa observada na análise dos tempos de consenso.

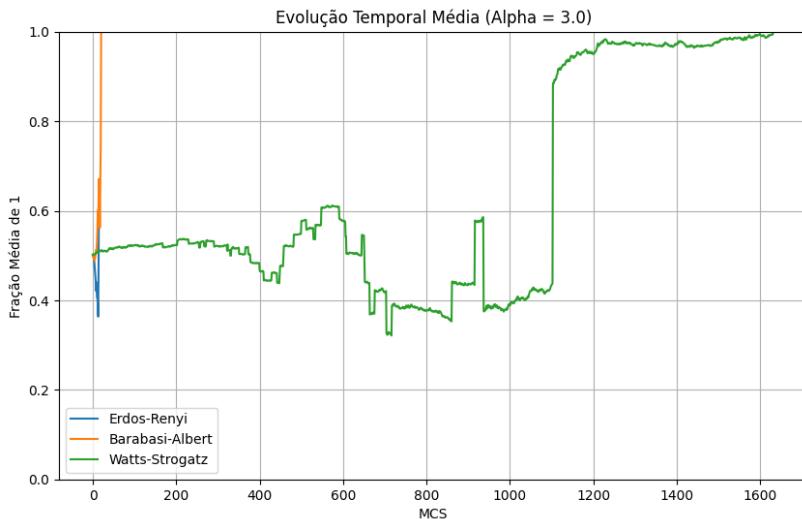


Figura 8 - Figura 5 - Gráfico de Trajetória Média ($\alpha=3,0$)

Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

3.3 Voter Model com Agentes Especiais

3.3.1 Fanáticos (zealots) - Análise Experimental e Gráfica

Os resultados demonstram de forma inequívoca o impacto dramático dos Fanáticos (zealots) na dinâmica do sistema. Conforme previsto por Mobilia et al. [5], que estabelecem que "zealots são agentes que nunca mudam de opinião" e atuam como "âncoras" no sistema, a presença de agentes com opiniões fixas impede completamente a formação de consenso global em todas as topologias investigadas.

Análise dos Gráficos de Trajetória:

Os gráficos de evolução temporal revelam que, diferentemente do Voter Model simples onde o sistema converge para consenso absoluto (0% ou 100%), na presença de zealots as trajetórias estabilizam em valores intermediários. Conforme mostra a **Figura 11** para $p_{zealot} = 0,01$, observa-se que as três redes convergem para frações entre aproximadamente 0,4 e 0,6, indicando um estado estacionário onde a opinião dos zealots mantém uma presença significativa, mas não dominante na população.

À medida que a densidade de zealots aumenta, observa-se uma mudança nos pontos de equilíbrio. A **Figura 10** ($p_{zealot} = 0,05$) e a **Figura 9** ($p_{zealot} = 0,1$) demonstram como o estado estacionário se desloca conforme a fração de agentes fanáticos na rede, com as trajetórias estabilizando em valores progressivamente mais definidos

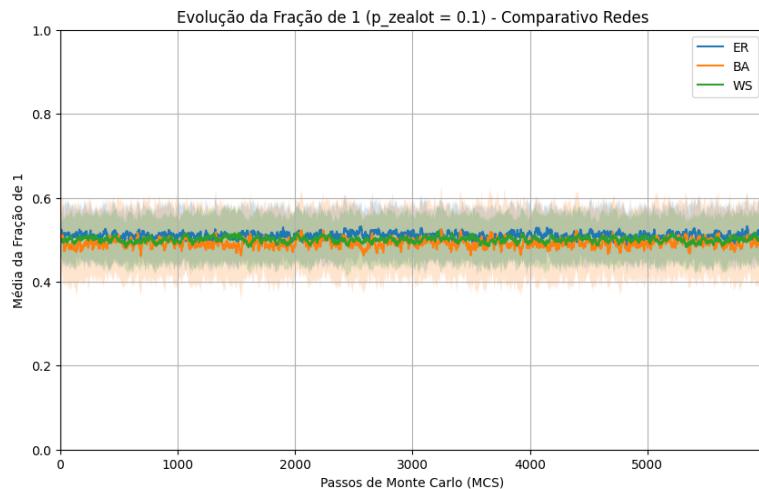


Figura 9 - Gráfico de Evolução da Fração para $p_{zealot} = 0,1$

Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

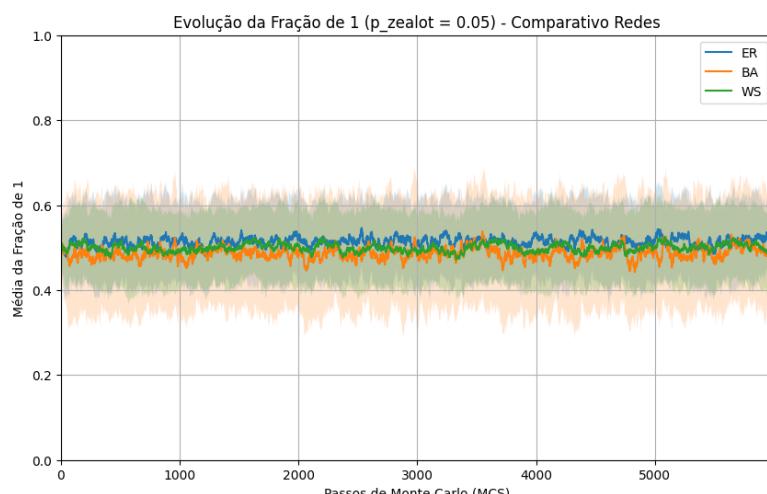


Figura 10 - Gráfico de Evolução de Fração para $p_{zealot} = 0,05$

Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

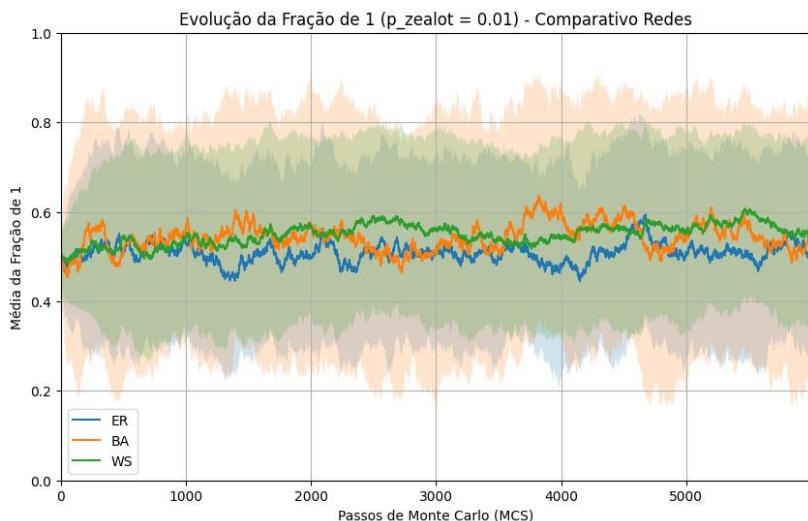


Figura 11 - Gráfico de Evolução de Fração para $p_{\text{zealot}} = 0,01$

Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

Uma interpretação física interessante: os gráficos confirmam que os fanáticos atuam como "poços de opinião" que ancoram o sistema em estados metaestáveis. Diferentemente de outros mecanismos que apenas retardam a convergência, os fanáticos alteram qualitativamente o comportamento do sistema, eliminando completamente os estados absorventes de consenso absoluto e criando novos pontos de equilíbrio onde a diversidade de opiniões persiste indefinidamente.

4 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho investigou a dinâmica de propagação de opiniões em redes complexas através do Voter Model e suas extensões. Os resultados demonstram que a topologia da rede exerce influência crucial na dinâmica do sistema, com a Barabási-Albert mostrando-se mais eficiente, seguida por Erdős-Rényi e Watts-Strogatz.

Validou-se experimentalmente a previsão teórica sobre a existência de um valor ótimo do parâmetro α para convergência. Para os agentes fanáticos, constatou-se que mesmo densidades mínimas são suficientes para suprimir o consenso global através da criação de estados metaestáveis.

Os resultados reforçam a utilidade de modelos físico-matemáticos para compreensão de fenômenos sociais complexos. Para trabalhos futuros, sugere-se a investigação de outros modelos de opinião como Majority Rule e Modelo de Sznajd.

REFERÊNCIAS

1. CASTELLANO, C.; FORTUNATO, S.; LORETO, V. STATISTICAL PHYSICS OF SOCIAL DYNAMICS. *REVIEWS OF MODERN PHYSICS*, v. 81, n. 2, p. 591-646, 2009.
2. CLIFFORD, P.; SUDBURY, A. A MODEL FOR SPATIAL CONFLICT. *BIOMETRIKA*, v. 60, n. 3, p. 581-588, 1973.
3. HOLLEY, R. A.; LIGGETT, T. M. ERGODIC THEOREMS FOR WEAKLY INTERACTING INFINITE SYSTEMS AND THE VOTER MODEL. *THE ANNALS OF PROBABILITY*, v. 3, n. 4, p. 643-663, 1975.
4. YANG, H. X. ET AL. EFFECTS OF SOCIAL DIVERSITY ON THE EMERGENCE OF GLOBAL CONSENSUS IN OPINION DYNAMICS. *PHYSICAL REVIEW E*, v. 84, n. 3, p. 036101, 2011.
5. MOBILIA, M.; PETERSEN, A.; REDNER, S. ON THE ROLE OF ZEALOTRY IN THE VOTER MODEL. *JOURNAL OF STATISTICAL MECHANICS: THEORY AND EXPERIMENT*, v. 2007, n. 08, p. P08029, 2007.
6. TANABE, S.; MASUDA, N. COMPLEX DYNAMICS OF A NONLINEAR VOTER MODEL WITH CONTRARIAN AGENTS. *CHAOS*, v. 23, n. 4, p. 043136, 2013.
7. ERDŐS, P.; RÉNYI, A. ON RANDOM GRAPHS I. *PUBLICATIONES MATHEMATICAE DEBRECEN*, v. 6, p. 290-297, 1959.
8. BARABÁSI, A. L.; ALBERT, R. EMERGENCE OF SCALING IN RANDOM NETWORKS. *SCIENCE*, v. 286, n. 5439, p. 509-512, 1999.
9. WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. COLLECTIVE DYNAMICS OF 'SMALL-WORLD' NETWORKS. *NATURE*, v. 393, n. 6684, p. 440-442, 1998.
10. NEWMAN, M. E. J. NETWORKS: AN INTRODUCTION. OXFORD: OXFORD UNIVERSITY PRESS, 2010.
11. SÎRBU, A. ET AL. OPINION DYNAMICS: MODELS, EXTENSIONS AND EXTERNAL EFFECTS. IN: LORETO, V. ET AL. (ORG.). *PARTICIPATORY SENSING, OPINIONS AND COLLECTIVE AWARENESS*. CHAM: SPRINGER, 2017. P. 363-401.
12. GALAM, S. SOCIOPHYSICS: A PHYSICIST'S MODELING OF PSYCHO-POLITICAL PHENOMENA. NEW YORK: SPRINGER, 2012.
13. MORETTI, P. ET AL. MEAN-FIELD ANALYSIS OF THE Q-VOTER MODEL ON NETWORKS. *JOURNAL OF STATISTICAL PHYSICS*, v. 151, n. 1-2, p. 113-130, 2013.
14. BENCZIK, I. J. ET AL. OPINION DYNAMICS ON AN ADAPTIVE RANDOM NETWORK. *PHYSICAL REVIEW E*, v. 79, n. 4, p. 046104, 2009.
15. FOTOUHI, B.; RABBAT, M. G. DEGREE CORRELATION IN SCALE-FREE GRAPHS. *THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL B*, v. 86, n. 12, p. 510, 2013.