

Danilo Rocha Gomes

**Avaliação Empírica de Modelos Preditivos: Uma
Análise do CAPM e do Modelo de Três Fatores
Aplicados a B3**

São Paulo

2024

Danilo Rocha Gomes

Avaliação Empírica de Modelos Preditivos: Uma Análise do CAPM e do Modelo de Três Fatores Aplicados a B3

Monografia submetida ao Curso de Graduação de Economia na Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de bacharel em Economia

Universidade de São Paulo
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Programa de Graduação

Orientador: Rodrigo De Losso da Silveira Bueno

São Paulo

2024

Danilo Rocha Gomes

Avaliação Empírica de Modelos Preditivos: Uma Análise do CAPM e do Modelo de Três Fatores Aplicados a B3/ Danilo Rocha Gomes. – São Paulo, 2024-41 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Rodrigo De Losso da Silveira Bueno

Monografia(TCC) – Universidade de São Paulo
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Programa de Graduação, 2024.

1. CAPM. 2. Modelo Multifatorial. 3. B3 4. Fama-French I. Rodrigo De Losso da Silveira Bueno. II. Universidade de São Paulo. III. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade.

CDU 02:141:005.7

Agradecimentos

Agradeço a todos que colaboraram para realização deste trabalho direta e indiretamente, especialmente a minha mãe, ao meu pai, aos meus amigos de faculdade, e às amizades construídas durante meu intercâmbio na Alemanha.

Resumo

Metodologias de precificação de ativos são amplamente utilizadas para cálculo de estimativas de retorno esperado de ativos que ainda não foram negociados no mercado. O propósito deste estudo foi avaliar o desempenho do CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) e do modelo de três fatores por meio de uma abordagem de avaliação preditiva (*ex-ante*), adotando-se um procedimento em dividido em dois momentos – regressões em séries temporais e *cross-section* – com prêmios de risco calculados pelo procedimento de Fama e Macbeth (1973). Também foi utilizado o procedimento de Clark e West (2005) para avaliar se a adição de novos parâmetros no modelo de três fatores aprimorou a capacidade preditiva comparado ao modelo CAPM. As conclusões da investigação indicam que ambos os modelos examinados se mostraram insuficientes para elucidar as flutuações nos retornos das ações no mercado de ações do Brasil. Em contraste com certas descobertas empíricas que não empregam avaliações prognósticas, o estudo revela que os efeitos tamanho e valor não são observáveis no mercado de ações para o caso brasileiro, apesar da indicação do fator de mercado contribuir para elucidar os retornos previstos. Em última análise, somente em metade das carteiras foi possível observar diferenças estatísticas nas previsões dos modelos, onde o CAPM apresentou melhor nível de ajuste. Os resultados deste estudo suscitaram questionamentos, principalmente decorrentes da inovação da metodologia aplicada ao mercado brasileiro, e também o fato de o assunto permanecer controverso no cenário acadêmico do Brasil.

Palavras-chaves: *Capital Asset Pricing Model*, três fatores, modelo multifatorial, Fama-Macbeth, Clark e West, erro quadrático médio.

Abstract

Asset pricing methodologies are widely used to calculate expected return estimates for assets that have not yet been traded on the market. The purpose of this study was to evaluate the performance of the CAPM (Capital Asset Pricing Model) and the three-factor model through a predictive evaluation approach (ex-ante), adopting a procedure divided into two moments – series regressions temporal and (cross-section) – with risk premiums calculated using the Fama and Macbeth (1973) procedure. The Clark and West (2005) procedure was also used to evaluate whether the addition of new parameters in the three-factor model improved the predictive capacity compared to the CAPM model. The conclusions of the investigation indicate that both models examined proved insufficient to elucidate fluctuations in stock returns in the Brazilian stock market. In contrast to certain empirical findings that do not employ prognostic assessments, the study reveals that the size and value effects are not observable in the stock market for the Brazilian case, despite the indication of the market factor contributing to elucidating the expected returns. Ultimately, only in half of the portfolios was it possible to observe statistical differences in the model predictions, where the CAPM presented a better level of adjustment. The results of this study raised questions, mainly due to the innovation of the methodology applied to the Brazilian market, and also the fact that the subject remains controversial in the Brazilian academic scenario.

Key-words: Capital Asset Pricing Model, 3-factors, multifactor model, Fama-Macbeth, Clark and West, mean squared error.

Lista de tabelas

Tabela 1	– Seleção das Carteiras Baseado no Tamanho e índice B/M	23
Tabela 2	– Número de firmas consideradas ao final de cada ano	24
Tabela 3	– Estatística descritiva das carteiras de janeiro 2001 a dezembro 2022 . .	25
Tabela 4	– Estatística descritiva das carteiras de fevereiro de 2020 a dezembro de 2022	25
Tabela 5	– Carteira <i>Small Low</i> - Betas para as variáveis de risco dos modelos CAPM e três fatores para cada ano	31
Tabela 6	– Carteira <i>Small High</i> - Betas para as variáveis de risco dos modelos CAPM e três fatores para cada ano	31
Tabela 7	– Carteira <i>Big Low</i> - Betas para as variáveis de risco dos modelos CAPM e três fatores para cada ano	32
Tabela 8	– Carteira <i>Big High</i> - Betas para as variáveis de risco dos modelos CAPM e três fatores para cada ano	32
Tabela 9	– Resultados das regressões de seção transversal dos prêmios para os fatores de risco das carteiras em cada ano	33
Tabela 10	– Coeficiente Clark e West para cada carteira	36

Lista de abreviaturas e siglas

CAPM	<i>Capital Asset Pricing Model</i>
B/M	<i>Book-to-market</i>
B3	Bolsa de Valores do Brasil
SMB	<i>Small Minus Big</i>
HML	<i>High Minus Low</i>
DI	Depósito Interfinanceiro, taxa de juros interbancária que é utilizada como referência para diversas operações financeiras no Brasil
EQM	Erro Quadrático Médio

Sumário

1	INTRODUÇÃO	9
2	REVISÃO DA LITERATURA	13
2.1	TEORIA DO PORTFÓLIO	13
2.2	CAPM	14
2.3	MODELO DE TRÊS FATORES	17
2.4	APLICAÇÃO AO CASO BRASILEIRO	19
3	METODOLOGIA	21
3.1	COLETA DE DADOS	21
3.2	AMOSTRA	21
3.3	CONSTRUÇÃO DAS CARTEIRAS	22
3.4	ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS DAS CARTEIRAS	24
3.5	ESTIMAÇÃO DOS RETORNOS MENS AIS	26
3.6	ESTIMAÇÃO DOS PRÊMIOS DE RISCO	26
3.7	Teste de Previsão	29
4	RESULTADOS	31
4.1	Prêmios de risco estimados	33
4.2	Retornos estimados para cada carteira	34
4.3	Testes de previsão	36
5	CONCLUSÃO	38
	Referências	40

1 Introdução

Os modelos empregados na precificação de ativos desempenham uma função importante no processo decisório em relação à alocação de capital, uma responsabilidade significativa tanto para investidores quanto para instituições financeiras e de investimento. Nesse contexto, o campo das finanças tem se concentrado no avanço de diversas metodologias destinadas a melhorar a forma como os ativos são precificados. Devido à variabilidade substancial que os mercados financeiros podem apresentar, é imperativo explorar a adequação dos vários modelos para cada ambiente de mercado específico. No entanto, em relação ao mercado financeiro brasileiro, os resultados encontrados até o momento ainda carecem de consistência (Galdi; Securato, 2007).

Nesse sentido, o CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) foi formulado por Mossin, Sharpe e Lintner, fundamentado no modelo de seleção de portfólio de Markowitz introduzido 12 anos antes. Posteriormente, modelos mais sofisticados de precificação, por exemplo o modelo de três fatores dos autores Fama e French (1993), foram elaborados a fim de melhorar a capacidade preditiva do modelo de CAPM e capturar irregularidades de mercado.

O modelo conhecido como CAPM ganhou reconhecimento significativo devido à sua utilidade na determinação de retornos previstos para ativos com risco. Apesar da ausência de validação empírica completa, esse modelo oferece uma métrica valiosa para estabelecer um preço justificável, considerando a interação da demanda e oferta de ativos no mercado. Isso se aplica a vários cenários, como o valor inicial das ações de uma empresa envolvida em um IPO (sigla em inglês para Oferta Pública Inicial) ou o rendimento esperado de uma carteira de investimentos. O CAPM postula que o rendimento previsto de um determinado ativo demonstra uma correlação positiva e linear com o coeficiente beta, representando o risco não diversificável (Sharpe, 1964). A justificativa para empregar o CAPM decorre de sua capacidade de fornecer previsões lógicas e intuitivamente sólidas em relação à avaliação de risco e à correlação entre risco e retorno. No entanto, devido à simplicidade do modelo, que se concentra apenas em uma única variável, o fator mercado, que pode explicar as variações nos retornos entre diferentes ações, teorias alternativas foram propostas por estudiosos para oferecer previsões de avaliação de ativos mais eficazes.

Eugene Fama e Kenenth French (1993), com base no trabalho anterior de Sharpe (1964) e Lintner (1965), observaram que as ações categorizadas de acordo com atributos financeiros específicos exibiram um retorno médio mais elevado, não atribuível ao beta. Consequentemente, os estudiosos sugeriram incorporar dois fatores de risco adicionais à estrutura, a saber, a capitalização de mercado de uma ação e seu prêmio em relação ao valor

contábil, incorporado pela relação B/M (*book-to-market equity*). Os autores argumentam que firmas com um valor de mercado reduzido provavelmente terão um retorno médio maior em comparação com firmas com maior valor de mercado. Isso é atribuído à crença de que empresas menores possuem um maior potencial de crescimento em comparação com suas contrapartes maiores. Além disso, espera-se que empresas caracterizadas por um alto índice B/M, que significa a razão entre o valor do ativo da empresa e seu valor de mercado, gerem um retorno médio maior do que aquelas com um índice mais baixo.

Com base nessa descoberta, Fama e French (1993) formularam uma estrutura de três fatores com a capacidade de prever o rendimento dos investimentos no mercado de ações, que são os fatores mercado. Assim como no CAPM, o primeiro fator é o mercado. O segundo fator, é o SMB (ou *Small Minus Big*), que sintetiza a diferença de retornos médios entre firmas pequenas e grandes. O terceiro fator, é o HML (*High Minus Low*), que corresponde ao retorno médio de carteiras de alto índice B/M, subtraído do retorno médio de carteiras de baixo índice B/M. O modelo visa oferecer um maior nível de capacidade explicativa contrastado ao modelo CAPM, até então amplamente aceito. Posteriormente, Fama e Macbeth (1973) introduziram uma abordagem intrigante de teste preditivo. Eles conduziram testes empíricos no CAPM em duas etapas distintas: primeiro, analogamente ao procedimento de Fama e French (1993), eles conduziram regressões em séries temporais usando informações da própria amostragem (*within-sample*) para estimar o fator de risco betas. Em segundo lugar, esses betas calculados foram utilizados como variáveis independentes em regressões transversais com informações de fora da amostragem para avaliar hipóteses derivadas dos modelos. Durante esse estágio, Fama e Macbeth (1973) empregaram sua técnica original para calcular os erros padrão dos coeficientes, posteriormente conhecida como procedimento de Fama e Macbeth.

Até hoje, vários estudos de pesquisa examinaram o modelo de três fatores e sua utilização em várias economias desenvolvidas, produzindo resultados resilientes. Embora tenham sido feitas tentativas para reproduzir o modelo em países emergentes como o Brasil, as descobertas foram menos robustas devido à natureza subdesenvolvida do mercado de ações nessas regiões, decorrente do conhecimento limitado e da ausência de um conjunto de dados abrangente. No entanto, na última década, o mercado acionário brasileiro passou por transformações significativas, marcadas pelo crescimento substancial na quantidade de ativos listados na bolsa e pelo influxo de investidores. (Wolf; Oliveira; Palludeto, 2018).

Atualmente, o mercado no Brasil pode ser considerado diversificado devido à presença de um número significativo de empresas que operam em diversos setores. Em comparação com outras bolsas do mundo, a B3 ocupa a 16^a posição em valor de mercado e a 18^a posição em número de empresas listadas¹, sendo a maior bolsa de valores da América Latina. Ainda que a Bolsa brasileira sofra com problemas relacionados a inflação

¹ <<https://www.investing.com/>>

e a instabilidade institucional, nos últimos anos, dados da Economática revelam que o Ibovespa tem superado resultados das Bolsas do México, Chile, Colômbia, Peru e Argentina em rentabilidade.

Portanto, o objetivo final desta monografia é, a partir do retorno mensal de carteiras selecionadas, replicar os testes CAPM e três fatores de Fama-French (1993), e estimar, a partir de dados do passado, o retorno mensal das carteiras para o período de janeiro de 2016 a dezembro de 2022, avaliando também a significância dos fatores de risco no processo de estimação. Alguns trabalhos já foram realizados com a mesma premissa, porém, devido a carência de dados relacionados a ações no Brasil, tais estudos apresentaram conclusões com carência de embasamento. Assim, o trabalho atual tem como ponto de partida o crescimento em número de ativos (principalmente nos anos mais recentes) listados em Bolsa durante o período avaliado a fim de se apresentar um resultado mais robusto da aplicação dos modelos a ativos listado na bolsa de valores brasileira.

Além disso, como o período considerado na estimação inclui os anos de 2020 a 2021, é possível avaliar a capacidade preditiva dos modelos durante os pandemias de Covid-19, período em que houve uma forte queda da atividade econômica em quase todos os países, o que impactou o resultado das empresas nas bolsas de valores mundo a fora.

No Brasil, em fevereiro de 2020 houve a comprovação do primeiro caso de Covid-19 no Brasil. A partir do anúncio da primeira infecção, o Ibovespa, principal índice que mede desempenho das ações na B3, foi apresentando um cenário de deterioração ainda maior comparado ao período em que no Brasil não se havia deflagrado casos de Covid, registrando inúmeras baixas diárias, atingindo sua mínima no crash do coronavírus, registrando 62.161 pontos no dia 23 de março de 2020. Diante desse cenário, a Bolsa passava por uma sequência de *circuit breakers* (mecanismo de interrupção das negociações na bolsa de valores quando há queda significativa do índice Bovespa) no auge do pânico com a pandemia.

Este é um estudo longitudinal retrospectivo. As informações referentes às carteiras utilizados e fatores de risco foram retirados do *site* Núcleo de Pesquisas em Economia Financeira da Universidade de São Paulo (NEFIN), e cobre todo o período avaliado na pesquisa. A estrutura das carteiras segue o método descrito no estudo original (Fama; French, 1993), e foi feita por meio da classificação dos ativos amostrais de acordo com cada fator de risco - valor, tamanho e mercado. Além disso, as carteiras foram ajustadas anualmente. Importante ressaltar a relevância em se adotar um universo móvel de ações, uma vez que, convencionalmente, o as ações que compõem as amostras na literatura acadêmica muitas vezes é estático desde o início até o final do período de análise. O desenvolvimento dessa abordagem teve como objetivo abordar a questão da escassez de dados no mercado acionário brasileiro.

Como metodologia utilizada para cálculo da estimação dos prêmios de risco, foi-se adotado a técnica de Fama e Macbeth (1973). Nesse procedimento, os autores conduziram

os testes práticos do CAPM através de um método de dois estágios: o primeiro estágio, seguindo uma abordagem semelhante à adotada por Fama e French (1993), envolvendo a realização de regressões em séries temporais usando dados amostrais internos para a estimativa dos betas associados aos fatores de risco; o segundo estágio utilizou os mesmos betas obtidos como variáveis independentes em regressões de seção transversal com o objetivo de obter os prêmios de risco dos fatores considerados.

Para avaliar a diferença de previsão entre os modelos adotados, foi adotado procedimento de Clark e West (2007). O procedimento é particularmente útil quando se deseja comparar a capacidade preditiva de modelos, que é o caso do modelo CAPM e do modelo de três fatores, que no trabalho são aplicados para prever retornos mensais das carteiras entre janeiro de 2016 a dezembro de 2022. Assim, o objetivo é comparar os erros de previsão dos modelos em questão e verificar se essas diferenças são estatisticamente significativas. Isso é feito por meio de um teste de hipótese que avalia se as diferenças nos erros de previsão entre os modelos são maiores do que o esperado aleatoriamente.

Em síntese, a inovação neste estudo reside em quatro pontos principais:

- A maioria dos estudos referentes a essa temática aplicados ao Brasil datam de 2000 a 2012, período em que o mercado acionário brasileiro possuía menor número de ativos;
- A adoção de um universo móvel de ações, em que os ativos que são lançados na Bolsa durante o período considerado são incorporados à base de dados à medida que atendem aos critérios do modelo;
- Adoção dos procedimentos de Fama-Macbeth e Clark e West para avaliação da eficácia dos modelos de precificação e avaliar se a adição de parâmetros no modelo de três fatores melhora capacidade preditiva do modelo; e
- Avaliar de maneira preliminar a capacidade preditiva dos métodos CAPM e três fatores em prever retornos de ativos na época da pandemia Covid-19, devido ao período estudado incluir os anos de 2020 a 2022.

O estudo atual está organizado em cinco seções: introdução, revisão da literatura, metodologia, resultados e conclusão. Na introdução, são discutidas as questões que motivaram o estudo, os objetivos do estudo e é apresentada de forma resumida o procedimento adotado. A revisão de literatura aborda a Teoria dos Portfólios e elucida os modelos de precificação utilizados no trabalho. Na metodologia, são detalhados os procedimentos para coletar, organizar e preparar os dados. Os resultados apresentam os achados obtidos na análise da base de dados, incluindo a comparação entre os retornos médios estimados e os realizados. Na conclusão, são destacadas as principais interpretações derivadas deste estudo.

2 Revisão da Literatura

Até a divulgação do influente artigo ‘*Portfolio Selection*’ de Markowitz em 1952, que posteriormente foi publicado em 1959 em formato de livro, a metodologia de tomada de decisão no campo dos investimentos foi compreendida tanto pela disciplina de economia quanto pela nascente área de finanças como uma busca pela otimização da lucratividade. O primeiro paradigma estava confinado aos limites do arcabouço teórico e visava elucidar a conduta de um investidor. Supunha-se que, no processo de avaliação de oportunidades de investimento, um investidor optaria consistentemente pela opção que promettesse o maior retorno em relação ao seu valor atual. Essa pressuposição implicava a capacidade do investidor de examinar as entradas de caixa geradas por cada opção de investimento, projetando a duração necessária para obter os retornos de cada investimento potencial e, posteriormente, justapondo-os utilizando uma taxa de desconto padrão, como o rendimento de um título do governo de taxa predeterminada ou a taxa de poupança.

2.1 TEORIA DO PORTFÓLIO

Markowitz (1952) apresentou uma crítica aos modelos que se baseavam exclusivamente na maximização dos retornos, argumentando que tal abordagem seria inadequada, uma vez que não levaria em conta os benefícios da diversificação (Markowitz, 1959). O autor sustentou que a diversificação possui vantagens amplamente reconhecidas tanto do ponto de vista teórico quanto empírico. As bases fundamentais de seu modelo incluem (Markowitz, 1952):

- Todos os investidores possuem aversão ao risco e tem como objetivo maximizar sua riqueza por meio da busca de otimizar os retornos do portfólio nos próximos períodos;
- Pressupõe-se a inexistência de custos de transação e tributos;
- Os retornos das ações são frequentemente assumidos como distribuídos de forma normal, ou então, os investidores costumam ter funções utilidade que seguem um modelo quadrático

O modelo de maximização dos retornos, no entanto, contradiz o conceito de diversificação. Dada essa premissa, no caso de uma opção de investimento fornecer retornos maiores do que outras opções, está logicamente implícito que todos os recursos devem ser direcionados para essa opção, o que coloca a diversificação como uma estratégia menos rentável.

Markowitz (1952) afirma que a deficiência acima mencionada emana da pressuposição de que os fluxos de caixa são predeterminados, ao passo que, na realidade, os resultados futuros são ambíguos no contexto de cada escolha de investimento e podem se desviar acentuadamente das previsões (Hicks, 1946 *apud* Nascimento, 2021, p.15). Consequentemente, ele propõe integrar a noção de imprevisibilidade a essa estrutura analítica. Apesar do fato de a incerteza ter sido reconhecida e deliberada em trabalhos acadêmicos, particularmente no campo da teoria, houve uma deficiência em uma tradução quantitativa para o domínio financeiro que permitisse sua utilização em exames práticos. A aplicação de princípios matemáticos e estatísticos para avaliar risco e retorno é comumente reconhecida como o principal avanço de Markowitz no campo das finanças.

O autor postula que examinar as imperfeições do mercado em um estudo pode ser feito por meio da utilização do conceito de risco, que mede a variabilidade dos retornos de um ativo específico. Para isso, ele sugere que os retornos do investimento sejam vistos como variáveis discretas e que os princípios estatísticos sejam empregados para avaliar a relação risco-retorno. O retorno é um indicador que representa o quanto o investidor ganhou (ou perdeu) com um investimento, enquanto o risco pode ser compreendido como a flutuação no retorno, indicada pelo desvio padrão dos pontos de dados. Dentro dessa estrutura, os indivíduos constroem carteiras amalgamando vários ativos que exibem um certo nível de correlação entre si, o que pode ser exemplificado imaginando várias empresas dentro do mesmo setor que normalmente demonstram padrões de desempenho semelhantes.

Uma vez que a álgebra foi considerada aplicável ao exame de variáveis de risco e retorno, surgiu a oportunidade de criar modelos matemáticos para as variâncias e retornos de várias carteiras. Ao combinar dois ativos, independentemente do peso atribuído a cada um, Markowitz (1952) descobriu que diferentes combinações de ativos levam a níveis variáveis de variação e retorno. Assim, existem combinações que superam outras, conhecidas como “combinações eficientes”, que oferecem a menor variância em cada nível de retorno.

A contribuição de Markowitz (1952), que se tornou a "Teoria Moderna de Portfólio", foi laureada com o Prêmio Nobel de Economia em 1990. Sua importância na área de finanças é indiscutível, pois estabeleceu os fundamentos teóricos e matemáticos para diversas pesquisas subsequentes.

2.2 CAPM

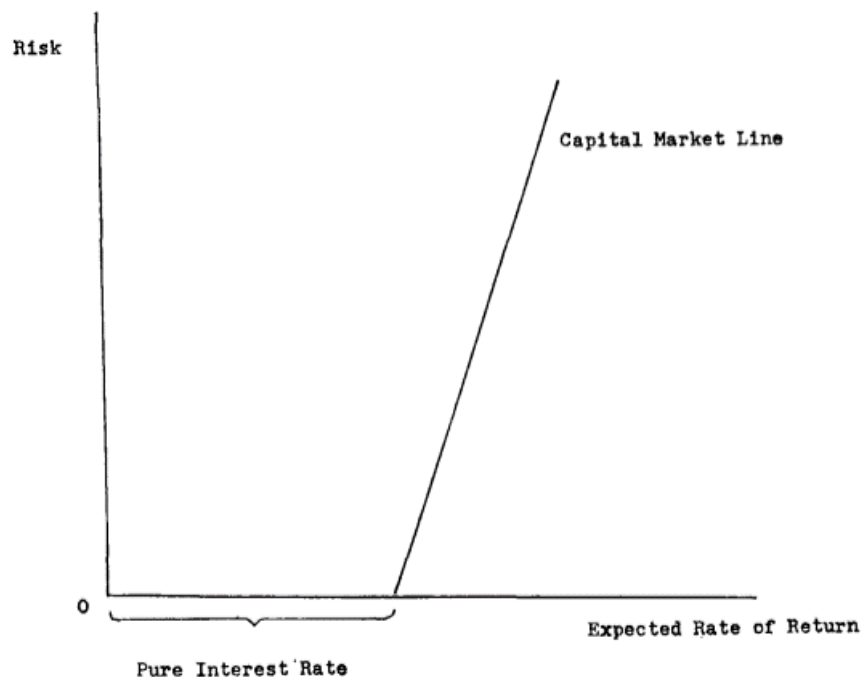
O modelo de variância média fundamental, introduzido por Markowitz (1952), desempenhou um papel crucial no desenvolvimento do *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) de Sharpe (1964). Por meio da utilização da estrutura CAPM, Sharpe ampliou o conceito de diversificação e eficiência para diferentes graus de risco para cada agente de mercado,

formulando assim uma teoria do equilíbrio do mercado (Nascimento, 2021).

No intuito de formular sua conjectura, Sharpe (1964) fez uso de certas suposições que, embora reconhecidas como irrealistas, eram fundamentais para o funcionamento do modelo: assumir homogeneidade entre agentes, horizontes de investimento uniformes, percepção consistente do risco, utilidades quadráticas para indivíduos, retornos originados de uma distribuição normal ou gaussiana e homogeneidade nas expectativas em relação ao desempenho dos ativos. Essas suposições apresentadas por Sharpe (1964) sugerem que as ações negociadas sofreriam oscilações de preço, fazendo com que ações com menor demanda diminuíssem de preço inicialmente, ao mesmo tempo que ativos com melhor resultado esperado tivessem um aumento no preço. Esse ajuste contínuo de preços indica que, com o tempo, os ativos negociados se tornariam elementos atraentes para a construção de uma carteira eficiente com base em um apetite de risco específico.

Essa situação também sugere que as combinações efetivas de ativos estão relacionadas de forma positiva e dependem de um limite linear que significa o maior nível de retorno previsto com base no nível de risco assumido (Nascimento, 2021). Sharpe (1964) se referiu a essa associação linear eficiente como Linha do Mercado de Capitais (ou 'CML', na sigla em inglês), que delineia uma alocação ideal entre ativos livres de risco e outras oportunidades de investimento.

Figura 1 – Linha do Mercado de Capitais



Posteriormente, a CML foi adotada na mensuração do risco, não somente de carteiras, mas também de riscos intrínsecos a investimentos individuais. Sharpe (1964) observou que, independentemente do conjunto de investimentos, uma parcela do retorno obtido não pode ser mitigada pela diversificação. Esse tipo de risco, associado ao mercado

como um todo, ficou conhecido como "risco sistemático". O CAPM utiliza o beta como uma medida do risco sistemático para determinar o retorno esperado de um ativo, levando em consideração o risco e o retorno do mercado no geral. A representação matemática do modelo CAPM é descrita através da seguinte equação:

$$E(R_i) = R_f + \beta_{im}(E(R_m) - R_f) \quad (2.1)$$

Onde:

$E(R_i)$: Expectativa de retorno de um ativo/carteira;

R_f : Taxa livre de risco;

β_{im} : Parâmetro Beta;

$E(R_m)$: Retorno esperado do mercado;

$E(R_m) - R_f$: Prêmio de mercado.

O modelo CAPM é fundamentado na análise do risco dos ativos e no custo de capital, baseando-se em pressupostos sobre o comportamento dos investidores, distribuições de risco e retorno, e princípios de mercado. Sharpe (1964) argumentou que a diversificação pode mitigar todos os tipos de risco, exceto o risco sistemático, destacando assim que o nível de impacto da atividade econômica ao retorno do ativo é uma variável fundamental para avaliar seu risco.

As colaborações significativas de Sharpe (1964) para o modelo de Markowitz (1952) desempenharam um papel crucial na ampliação da aplicação e complexidade dos modelos de média e variância. Isso foi conseguido por meio da extensão do conceito original para um modelo de equilíbrio, facilitando assim sua resolução. Isso possibilitou não apenas a aplicação dos modelos para a análise de carteiras, mas também para a análise de ativos individuais.

Apesar de sua relevância, o modelo CAPM possui uma limitação importante, pois utiliza apenas o risco sistemático como parâmetro para calcular os retornos esperados de investimentos. Estudos posteriores identificaram outros fatores que influenciam o retorno esperado de um ativo. Banz (1981) observou que empresas de menor capitalização (*small stocks*) apresentavam historicamente retornos maiores. Stattman (1980) demonstrou que o retorno das ações nos EUA era superior para *value stocks*, ou seja, ações de empresas com maior razão entre valor de mercado e seu valor contábil do patrimônio líquido (o que representa um índice *book-to-market* [BM] mais alto).

Diante dessa perspectiva, Fama e French (1993) ampliaram o modelo CAPM introduzindo novas variáveis para incorporar a sensibilidade do retorno a outros fatores de risco, visando assim melhorar a precisão do modelo preditivo. Ao considerar essas variáveis, Fama e French (1993) as adotaram como representantes de fatores de risco. Eles

argumentaram que os dados empíricos sugerem uma correlação entre as duas variáveis e o sucesso financeiro; especificamente, que empresas grandes ou em expansão geralmente apresentam retornos mais baixos sobre os ativos em comparação com empresas pequenas ou orientadas por valor. Consequentemente, prevê-se que haverá prêmios de risco favoráveis associados a cada uma dessas três variáveis.

O modelo de três fatores de Fama e French, em um primeiro momento, oferece maior precisão na explicação de retornos esperados quando vis-à-vis ao CAPM (Malaga; Securato, 2004), sugerindo sua superioridade na modelagem do mercado acionário brasileiro (Araújo; Oliveira; Silva, 2012).

2.3 MODELO DE TRÊS FATORES

Vários estudos têm demonstrado que o CAPM, ao adotar apenas o beta do mercado como fator de risco, possui limitações em sua capacidade de explicar e prever os retornos dos ativos em um mercado. A partir de pesquisas anteriores, e com o objetivo de melhorar o potencial preditivo do CAPM, Fama e French (1992) elaboraram um novo trabalho, conhecido como Modelo de três fatores de Fama e French (1993), que adiciona outros dois fatores, além do beta de mercado. Os dois novos fatores introduzidos por Fama e French (1992) são o índice *book-to-market* (B/M), capturado pelo fator HML, e tamanho da firma, capturado pelo fator SMB.

O fator SMB captura o prêmio relacionado ao risco associado às ações de empresas de menor tamanho comparadas às grandes. A ideia é que as ações de empresas de menor porte, historicamente, apresentam retornos superiores às ações de empresas maiores, possivelmente devido a um maior risco de falência, menor liquidez, entre outros fatores. Assim, o SMB é calculado como a diferença entre o retorno de uma carteira formada por empresas pequenas e uma carteira formada por empresas grandes. Já o fator B/M tenta capturar o prêmio de risco associado às ações de firmas com alto valor contábil (*book value*) comparadas às ações com baixo valor contábil. Empresas com alto B/M são geralmente consideradas *value stocks*, enquanto as de baixo B/M são consideradas *growth stocks*. O fator B/M é calculado como a diferença entre o retorno de uma carteira de empresas com maior índice B/M e o retorno de uma carteira de empresas de menor índice B/M.

A fórmula do modelo de Fama e French é dada pela equação de regressão abaixo:

$$R_{it} - R_f = a_i + b_i(R_{Mt} - R_f) + c_i\text{SMB}_t + d_i\text{HML}_t + e_{it} \quad (2.2)$$

Onde:

- R_{it} : Retorno da carteira i no período t ;
- R_f : Taxa livre de risco no período t ;
- R_{Mt} : Retorno do mercado no período t ;
- SMB_t : Diferença entre o retorno de carteiras de ações das empresas de menor tamanho e empresas de maior tamanho;
- HML_t : Diferença entre o retorno de carteiras de ações com alto índice B/M (valor contábil/valor de mercado) e baixo índice B/M;
- e_{it} : Resíduo;
- $a_i, b_i, c_i, e d_i$: Coeficientes que representam a sensibilidade do ativo/carteira aos fatores de riscos.

No intuito de examinar o impacto desses fatores nos retornos das ações, Fama e French (1992) formaram carteiras e inseriram as duas novas variáveis de risco do modelo. Suas análises abrangeram bolsas renomadas como a Bolsa de Valores de Nova York (NYSE), a Bolsa de Valores Americana (AMEX), a Bolsa de Valores de Tóquio (TSE), a Bolsa de Valores de Londres (LSE), a Bolsa de Valores de Frankfurt (FWB), a Bolsa de Valores de Paris (Euronext Paris), entre outras. Ao testar o modelo, eles exploraram uma variedade de períodos temporais, desde o início do século XX até o momento de suas pesquisas. Essa abordagem ampla permitiu que eles examinassem a robustez e a eficácia do modelo em diferentes contextos econômicos e períodos de mercado, fornecendo uma base sólida para sua aceitação na comunidade financeira.

No trabalho dos autores, as empresas foram divididas entre pequenas (S, de *small*) e grandes (B, de *big*) com base em comparações de seus tamanhos de mercado - o preço de suas ações multiplicado pela quantidade das mesmas. No que se refere ao índice B/M, as empresas foram avaliadas conforme seus índices e combinadas da seguinte maneira: empresas de baixo índice, que compreendiam 30% das empresas com os menores índices; empresas de B/M médio, representando 40% das empresas com índices entre os mais baixos e os mais altos; e empresas de alto B/M, incluindo as 30% das empresas com os maiores índices no ranking (Nascimento, 2021).

O estudo revelou que os dois fatores - tamanho e B/M - sinalizam ter influência significativa nos retornos médios das ações em uma análise transversal. Embora haja a possibilidade de que os resultados relacionados ao tamanho e ao índice *book-to-market* das empresas sejam meramente aleatórios e não estejam na verdade ligados à antecipação dos retornos previstos, a probabilidade desse erro aleatório, especialmente no caso do fator B/M, é considerada baixa. Os pesquisadores relataram uma grande correlação entre o fator

book-to-market e o retorno médio entre os anos 1963 e 1990. Além disso, as conclusões indicam que empresas com maior fração B/M tendem a apresentar persistentemente menores retornos sobre os ativos em comparação com empresas com menor fração B/M. Do mesmo modo, empresas de menor porte parecem passar por períodos prolongados de menores retornos, ao contrário das grandes empresas (Fama; French, 1992).

2.4 APLICAÇÃO AO CASO BRASILEIRO

Vários trabalhos foram realizados para avaliar a aplicabilidade do modelo CAPM à Bolsa brasileira, visando entender sua capacidade de explicar os retornos de ativos, tanto de forma individual quanto em carteiras. Alguns desses estudos compararam o CAPM com outros modelos, mas a maioria concentrou-se em analisar as características do CAPM e testar sua capacidade explicativa (Araújo; Oliveira; Silva, 2012).

Sintetizando os dados de uma amostra de mais de 40 trabalhos, o estudo realizado por Araújo (2012) revelou que a capacidade explicativa do CAPM foi validada em pouco mais de 58% dos casos, enquanto em 42% foi rejeitada a habilidade do modelo em prever o retorno do acionista. Além disso, cerca de metade dos artigos da amostra aplicou regressão linear simples. No entanto, a maioria dos trabalhos de pesquisa utilizando regressão linear múltipla justapôs a estrutura CAPM com modelos alternativos, como o modelo de três fatores desenvolvido por Fama e French (1992) (Nascimento, 2021). Em sua investigação, o autor afirma:

Como caráter de conclusão, de forma geral, o modelo tem apresentado desempenho satisfatório no mercado brasileiro, apesar dos desajustes decorrentes da indisponibilidade de dados para certos períodos, da inadequação, apontada pela literatura, das proxies da carteira de mercado e do ativo livre de risco, do mercado brasileiro, para a realização de testes empíricos da teoria. Dessa maneira, as anomalias apontadas não estariam na teoria, e sim, na sua operacionalização. Com isso, tem-se buscado comparar seu desempenho com outros modelos, ou acrescentar fatores que ampliem seu poder de predição do retorno de ativos, para a obtenção de um apreçamento mais adequado para esse mercado... (Araújo; Oliveira; Silva, 2012, pp.21).

Em comparação com o CAPM, o modelo de Fama e French tem recebido menos atenção no mercado financeiro no Brasil. Málaga e Securato (2004) realizaram uma análise das ações da BOVESPA de 1995 a 2003, empregando o CAPM tradicional e o modelo de três fatores de Fama e French (1992). Os resultados mostraram uma performance superior do modelo de três fatores comparado ao CAPM na explanação das oscilações dos retornos dos ativos. Descobriu-se também que o fator tamanho tem significância estatística, embora em uma direção contraditória às observações originais de Fama e French (1992). Os pesquisadores inferiram que todos os componentes do modelo desempenham um papel

crucial, capturando coletivamente fatores sistêmicos além daqueles considerados pelo fator de mercado.

Outros estudos semelhantes foram conduzidos por autores como Argolo, Leal e Almeida (2012), que examinaram dados entre 1995 e 2007. Seus resultados corroboram a conclusão de Málaga e Securato (2004) de que o modelo de Fama e French (1992) oferece uma visão mais abrangente das informações em comparação com o CAPM. No entanto, as variáveis relacionadas ao tamanho das empresas e ao índice B/M não apresentaram resultados estatísticos significantes, sendo que a única variável relevante em nos testes foi o parâmetro beta. Tal ponto fez com que os autores sugerissem cautela ao considerar o modelo de três fatores em estudos aplicados à Bolsa brasileira, pois pode ser problemático, possivelmente devido a uma amostra de menor tamanho, com maior instabilidade e menor liquidez.

3 METODOLOGIA

3.1 COLETA DE DADOS

A amostra das empresas analisadas para análise *ex-ante* foi formada por empresas que eram listadas na Bolsa brasileira – B3, entre janeiro 2001 e dezembro de 2021, e foram coletadas do *site* NEFIN¹. O mercado de ações brasileiro já estava operacional antes desse período. Contudo, até 1999, a taxa isenta de risco foi utilizada como instrumento do regime cambial indexado e foi frequentemente fixada em níveis muito elevados. Portanto, para estimar os prêmios de risco no Brasil, comumente são utilizados dados a partir do ano 2000 (Filho, 2016). Os detalhes sobre os critérios de liquidez também podem ser encontrados no *site* do NEFIN – Núcleo de Pesquisas em Economia Financeira da Universidade de São Paulo.

3.2 AMOSTRA

Como metodologia para composição das amostras do NEFIN, foram adotados critérios de elegibilidade para composição das amostras que culminaram em menos empresas comparado ao montante total de empresas listadas na B3 conforme o período trabalhado. Assim, foram excluídas da base de dados empresas em que:

- As ações foram inicialmente listadas antes de dezembro do ano $t - 1$;
- As ações foram negociadas em menos de 80% dos dias no ano $t - 1$ com volume inferior a R\$ 500.000,00 por dia. No caso de as ações terem sido listadas no ano $t - 1$, o período em consideração vai do dia da cotação até o último dia do ano;
- Tivessem mais de uma ação negociada para a mesma empresa. Para evitar que essas empresas tivessem um impacto duplo na análise, manteve-se apenas o ativo com maior liquidez.

Assim, ações que não preenchiam os requisitos foram sendo excluídas da amostra, o que criou um universo móvel de número de ações consideradas mensalmente para cada ano. No período de 2001 a 2021, o conjunto de ações líquidas conforme os pré-requisitos adotados, variou de 37 (de abril a dezembro de 2003) a 211 (de janeiro a abril de 2021).

Para a seleção dos fatores de risco, foram compilados as informações coletadas pelo Núcleo de Pesquisas em Economia Financeira da USP. Conforme a metodologia praticada

¹ <https://nefin.com.br/>

pelo NEFIN (que é apresentada em seu *site*), para cálculo dos fatores mercado, SMB e HML foram utilizados dados dos ativos selecionados com base nos critérios de elegibilidade mencionados. O fator mercado se trata da diferença entre o retorno diário da carteira de mercado, ponderado pelo valor de mercado (considerando todas as ações que atendem aos critérios estabelecidos) e a taxa diária livre de risco. A taxa livre de risco é a taxa DI *swap* de 30 dias para ambos os métodos de estimação. Para o fator SMB, no mês de janeiro do ano t , as ações elegíveis foram ordenadas de forma ascendente com base na capitalização de mercado em dezembro do ano $t - 1$ e divididas em 3 quantis (carteiras). Em seguida, foram calculados os retornos igualmente ponderados da primeira carteira (“*Small*”) e da terceira carteira (“*Big*”). O fator SMB é obtido subtraindo o retorno da carteira “*Big*” do retorno da carteira “*Small*”. Quanto ao fator HML, no mês de janeiro do ano t , as ações elegíveis foram também classificadas de forma ascendente em 3 quantis de acordo com a relação *book-to-market* das empresas em junho do ano $t - 1$. Posteriormente, foram calculados os retornos igualmente ponderados da primeira carteira (“*Low*”) e da terceira carteira (“*High*”). O fator HML é o retorno da carteira “*High*” menos o retorno da carteira “*Low*”. Para a estimação dos retornos mensais das carteiras, todos os dados dos fatores de risco foram convertidos para uma base mensal.

3.3 CONSTRUÇÃO DAS CARTEIRAS

O processo de elaboração das carteiras segue o mesmo método descrito por Fama e French (1993), em que as ações da amostra são categorizados de acordo com sua classificação em cada fator de risco. Inicialmente, o modelo de três fatores criava seis carteiras distintas por meio da sobreposição de duas categorias para o atributo tamanho (*small* e *big*) e três categorias para o atributo valor (*low*, *medium* e *high*) (Nascimento, 2021). Posteriormente, ao apresentar o modelo de cinco fatores, os pesquisadores discutiram a decisão de categorizar o tamanho em três classes, observando que essa escolha foi arbitrária. No entanto, eles observaram que essa alteração não afetou os resultados, que se mostraram consistentes independentemente do número de categorias, sendo apenas amplificados pela maior quantidade de classificações (Fama; French, 2015).

Usando essa classificação, os ativos são distribuídos em carteiras específicas, levando em conta como eles se encaixam nas variáveis de risco. Essas carteiras sofrem ajustes anuais com base em dados dos demonstrativos financeiros das empresas e nas capitalizações de mercado atualizadas.

Considerando a abordagem 2x2, 50% das ações de maior capitalização são designadas como “*big*”, ao mesmo tempo que 50% das ações com menor tamanho são categorizadas como “*small*”. Da mesma forma, 50% das ações com maior razão B/M são classificadas como “*high*”, a medida que as ações restantes são rotuladas como “*low*”. A combinação

dessas categorias resulta na formação de quatro carteiras:

- SL (*small* e *low*)
- SH (*small* e *high*)
- BL (*big* e *low*)
- BH (*big* e *high*)

Assim, para cada ano, foram construídas 4 carteiras: SL, SH, BL e BH, como é possível ver na Tabela 1 adiante:

Tabela 1 – Seleção das Carteiras Baseado no Tamanho e índice B/M

Carteiras	Composição
SL (<i>Small/Low</i> B/M)	Ações de empresas com valor de mercado pequeno e pequeno índice B/M
SH (<i>Small/High</i> B/M)	Ações de empresas com valor de mercado pequeno e alto índice B/M
BL (<i>Big/Low</i> B/M)	Ações de empresas com valor de mercado alto e pequeno índice B/M
BH (<i>Big/High</i> B/M)	Ações de empresas com valor de mercado alto e grande índice B/M

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os ativos são, então, designados para carteiras com base na interseção dos fatores de risco. Como previamente comentado, as carteiras passam por um processo anual de recalibração, seguindo os dados divulgadas nos relatórios contábeis e nos valores de tamanho de mercado. Abaixo, é possível encontrar o número de ações considerados no estudo no último mês de cada ano, de 2001 a 2021 para cada carteira:

Tabela 2 – Número de firmas consideradas ao final de cada ano

Year	Month	Size1_BM1	Size1_BM2	Size2_BM1	Size2_BM2	Total
2001	12	8	11	13	8	40
2002	12	9	12	12	9	42
2003	12	8	10	11	8	37
2004	12	8	13	14	7	42
2005	12	10	18	20	10	58
2006	12	13	13	17	15	58
2007	12	16	19	23	20	78
2008	12	29	30	32	29	120
2009	12	23	27	27	25	102
2010	12	18	27	28	20	93
2011	12	30	30	31	30	121
2012	12	33	29	28	33	123
2013	12	32	33	31	32	128
2014	12	29	37	36	30	132
2015	12	24	35	38	26	123
2016	12	18	36	36	17	107
2017	12	20	33	32	19	104
2018	12	22	38	39	23	122
2019	12	25	39	41	26	131
2020	12	26	40	43	28	137
2021	12	21	46	56	30	153

Fonte: Elaborado pelo autor.

3.4 ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS DAS CARTEIRAS

As carteiras utilizadas no trabalho estão organizados conforme a Tabela 3 a seguir. Na primeira coluna é apresentado o nome de cada carteira. A segunda coluna contém os percentis usados como pontos de quebra para a construção das carteiras; a terceira mostra a média dos retornos mensais realizados das carteira de janeiro a 2001 a dezembro de 2022; a quarta coluna apresenta mostra a média dos excessos de retorno mensais realizados de cada uma das carteiras sobre o retorno de investimento livre de risco. Os excessos de retorno de cada carteira são fundamentais pois são considerados como variáveis dependentes para estimação dos prêmios de risco. A quinta coluna mostra os desvios padrões dos excessos de retornos mensais das carteiras; a quinta coluna demonstra o retorno acumulado durante todo o período considerado; e por último, a sexta coluna mostra o retorno acumulado de 2001 a 2021 do retorno das carteiras deduzido do retorno acumulado da taxa livre de risco considerada.

Tabela 3 – Estatística descritiva das carteiras de janeiro 2001 a dezembro 2022

Portfolio	Percentis	Média Retornos	Média Excessos dos Retornos	Desvio Padrão	Retornos Acumulados
<i>Small Low</i>	[0,50; 0,20]	1,0%	0,1%	7,9%	-44,3%
<i>Small High</i>	[0,50; 80,100]	1,6%	0,7%	8,7%	98,4%
<i>Big Low</i>	[50,100; 0,20]	1,1%	0,2%	6,4%	-6,0%
<i>Big High</i>	[50,100; 80,100]	1,3%	0,4%	7,2%	52,5%

Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir das informações de retorno médio no intervalo avaliado, as carteiras SL, SH, BL, BH apresentaram retornos mensais positivos, variando de 1% a 1,6%. As carteiras *Small High* e *Small Low* tendem a apresentar maior desvio padrões, o que vai ao encontro do trabalho de Fama e French (2003), o que é justificado pelo maior risco associado ao menor tamanho das empresas. Além disso, as carteiras que apresentam maior índice *book-to-market* (*Small High* e *Big High*) apresentam retornos superiores às carteiras com menor índice (*Small Low* e *Big Low*). Esse resultado é consistente com a ideia de que empresas consideradas "*value stocks*" (ações de valor) podem oferecer retornos maiores como forma de compensação pelo maior risco percebido em comparação com as "*growth stocks*" (ações de crescimento). Ainda na Tabela 3 é possível notar que a carteira *Small High* é a carteira que apresenta a maior média de retornos, e por conseguinte, maior média de excesso de retornos mensais. A carteira *Big Low* apresenta menor dispersão no período considerado, identificado através do menor desvio padrão.

Vale ressaltar que, durante a pandemia, a Bolsa brasileira foi bastante afetada negativamente pela pandemia do Covid-19. Na Tabela 4 abaixo foi feito o recorte das estatísticas descritivas de cada uma das carteiras com dados realizados de fevereiro de 2020, quando houve detecção da primeira infecção do vírus em território nacional, a dezembro de 2022, quando as medidas de restrição a circulação começaram a ser aliviadas:

Tabela 4 – Estatística descritiva das carteiras de fevereiro de 2020 a dezembro de 2022

Portfolio	Percentis	Média Retornos	Média Excessos dos Retornos	Desvio Padrão Retornos	Retornos Acumulados
<i>Small Low</i>	[0,50; 0,20]	0,1%	-0,2%	11,3%	-18,4%
<i>Small High</i>	[0,50; 80,100]	0,5%	0,2%	12,4%	-14,5%
<i>Big Low</i>	[50,100; 0,20]	0,1%	-0,2%	8,9%	-14,4%
<i>Big High</i>	[50,100; 80,100]	0,1%	-0,2%	9,2%	-14,8%

Fonte: Elaborado pelo autor.

No recorte realizado nota-se que a média dos retornos mensais caem, e, no caso

das carteiras *Small Low* e *Big Low*, ficam abaixo dos retornos livres de risco, ainda que apresentem retornos positivos ao longo do período avaliado. Os retornos acumulados de todas as carteiras são negativos, e os desvios padrões das carteiras são superiores quando comparados ao período de 2016 a 2022. Justapondo tais fatos, conclui-se que de fato houve uma piora dos retornos e aumento da instabilidade do mercado acionário durante o período pandêmico, associado à instabilidade no cenário macroeconômico e também à disrupção nas cadeias produtivas, que impactaram de maneira direta e indireta as empresas listadas.

3.5 ESTIMAÇÃO DOS RETORNOS MENSASIS

Para estimar as expectativas de retornos mensais de cada uma das carteiras, foram utilizadas as técnicas de estimação baseadas nos modelos CAPM (Equação 2.1) e três fatores (Equação 2.2) apresentadas na Revisão da Literatura.

Assim, na estimação da R_f (taxa livre de risco) do mês $t+1$, foi considerado a taxa *DI swap* de 30 dias do mês t . Desse modo, a taxa livre de risco se altera para cada mês. Para estimar os betas dos fatores de risco, foram feitas regressões de séries temporais por OLS (*Ordinary Least Squares*) com base nos valores *ex-ante* dos retornos mensais e fatores de risco. Os prêmios dos fatores de risco foram calculados conforme o procedimento de Fama-Macbeth, através da média dos prêmios mensais dos fatores obtidas pelas regressões *cross-section* entre os retornos mensais $R_{i,t}$ e os betas dos fatores obtidos na regressão por OLS. Nas duas seções a seguir, os procedimentos adotados para a obtenção dos betas e prêmios serão detalhados.

3.6 ESTIMAÇÃO DOS PRÊMIOS DE RISCO

Como anteriormente apresentado, as teorias de precificação de ativos frequentemente utilizam "fatores de risco" para explicar retornos de ativos. Esses fatores podem variar de macroeconômicos (por exemplo, inflação ao consumidor ou taxa de desemprego) a financeiros (tamanho da empresa, rentabilidade, etc). A regressão em dois passos de Fama-MacBeth é uma maneira prática de testar como esses fatores descrevem retornos de carteira ou ativos. O objetivo é encontrar o prêmio pela exposição a esses fatores. No primeiro passo, o retorno de cada carteira é regredido contra uma ou mais séries temporais de fatores para determinar sua exposição a cada um. No segundo passo, é feita a regressão da seção transversal dos retornos das carteiras contra as exposições aos fatores, em cada período de tempo, para obter uma série temporal de coeficientes de prêmios de risco para cada fator. A perspicácia de Fama-MacBeth é então fazer a média desses coeficientes, uma vez para cada fator, para dar o prêmio esperado para uma exposição unitária a cada fator de risco ao longo do tempo.

No primeiro passo, para n retornos de carteira ou ativo e m fatores, as exposições aos fatores β s são obtidas calculando-se n regressões, cada uma em m fatores (cada equação a seguir representa uma regressão):

$$\begin{aligned} R_{1,t1} &= \alpha_1 + \beta_{1,F1}F_{1,t1} + \beta_{1,F2}F_{2,t1} + \dots + \beta_{1,Fm}F_{m,t1} + e_{1,t1} \\ R_{2,t2} &= \alpha_2 + \beta_{2,F1}F_{1,t2} + \beta_{2,F2}F_{2,t2} + \dots + \beta_{2,Fm}F_{m,t2} + e_{2,t2} \\ &\dots \\ R_{n,T} &= \alpha_n + \beta_{n,F1}F_{1,T} + \beta_{n,F2}F_{2,T} + \dots + \beta_{n,Fm}F_{m,T} + e_{n,T} \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $R_{i,t}$ é o retorno da carteira ou ativo i (n total) no tempo t , $F_{j,t}$ é o fator j (m total) no tempo t , $\beta_{i,Fm}$ são as exposições aos fatores que descrevem como os retornos estão expostos aos fatores, e t varia de 1 a T . Importante notar que cada regressão utiliza os mesmos fatores F , porque o objetivo é determinar a exposição do retorno de cada carteira a um conjunto dado de fatores. Assim, os betas obtidos pela regressão do ano T_0 a T são utilizados para a previsão dos retornos no ano $T+1$.

Nessa etapa do trabalho foi efetuada uma única regressão considerando os retornos mensais e fatores de risco de janeiro de 2001 a dezembro de 2015, para assim obter os betas de cada fator de risco que seriam utilizados para a previsão dos retornos mensais no ano de 2016. De 2016 a 2021, ao final de cada ano, os dados realizados de retornos e fatores eram incorporados no modelo de previsão para a previsão dos retornos mensais do ano posterior. Assim, para o ano de 2017, os betas utilizados para previsão dos retornos foram obtidos a partir da regressão dos retornos mensais pelos fatores de risco de janeiro de 2001 a dezembro de 2016. E assim, o processo foi repetido até a estimação dos retornos mensais de 2022.

O segundo passo é calcular T regressões de seção transversal dos retornos sobre as m estimativas dos β s (chamados de $\hat{\beta}$) calculados no primeiro passo. Importante ressaltar que cada regressão utiliza os mesmos β s do primeiro passo, porque agora o objetivo é a exposição dos n retornos aos m carregamentos de fatores ao longo do tempo (por exemplo, uma exposição maior ao fator significa um retorno maior):

$$\begin{aligned} R_{i,1} &= \gamma_{1,1}\hat{\beta}_{i,F1} + \gamma_{1,2}\hat{\beta}_{i,F2} + \dots + \gamma_{1,m}\hat{\beta}_{i,Fm} + \epsilon_{i,1} \\ R_{i,2} &= \gamma_{2,1}\hat{\beta}_{i,F1} + \gamma_{2,2}\hat{\beta}_{i,F2} + \dots + \gamma_{2,m}\hat{\beta}_{i,Fm} + \epsilon_{i,2} \\ &\dots \\ R_{i,T} &= \gamma_{T,1}\hat{\beta}_{i,F1} + \gamma_{T,2}\hat{\beta}_{i,F2} + \dots + \gamma_{T,m}\hat{\beta}_{i,Fm} + \epsilon_{i,T} \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde os retornos R são os mesmos dos da Equação 3.1, γ são coeficientes que representam quanto o retorno esperado das ações aumentaria, se este fator de risco das ações aumentasse uma unidade, e em cada regressão i varia de 1 a n .

No final, há $m + 1$ séries γ (incluindo a constante no segundo passo) para cada fator, cada uma de comprimento T . Fama-Macbeth assume que os γ 's são i.i.d - variáveis aleatórias e identicamente distribuídas - pelo fato de os retornos serem (quase) descorrelacionados uns dos outros ao longo do tempo. A média da série temporal dos γ 's podem ser interpretados como o prêmio de risco para o fator de risco específico - mercado, HML ou SMB.

Para o cálculo dos retornos esperados do ano $T + 1$, tal como na etapa anterior, os prêmios de risco adotados foram calculados com base nas médias dos γ 's de T_0 a T . Por exemplo, para o cálculo dos prêmios de risco médio de cada fator em 2016, foi considerada a média dos prêmios de risco de cada fator obtidos através das regressões *cross-section* entre os retornos mensais e betas obtidos na etapa anterior de janeiro de 2001 até dezembro de 2015. E o processo foi repetido para os demais anos.

Em ambos os modelos, o beta derivado da regressão em séries temporais é uma estimativa do verdadeiro beta (Malaga; Securato, 2004). No entanto, ainda que um beta verdadeiro e constante existisse, o que possuímos é apenas uma estimativa passível de erros amostrais. Assim, as imprecisões nos cálculos dos betas resultarão em um coeficiente beta tendencioso para baixo e um intercepto tendencioso para cima na regressão *cross-section* (Elton et al., 2004, *apud* Malaga; Securato, 2004).

Considerando que o valor verdadeiro do beta está correlacionado de maneira positiva com a variância dos resíduos, esses resíduos podem ser vistos como uma aproximação do verdadeiro beta (Mussa; Famá; Santos, 2012). Consequentemente, o retorno tende a estar correlacionado positivamente com o risco residual (Elton; Gruber; Brown, 2012). Para lidar com essas questões ao testar modelos de retornos preditivos, Fama e Macbeth (1973) propuseram duas estratégias: 1) mensurar betas para carteiras em vez de ações individuais; e 2) calcular os betas por meio de múltiplas regressões mensais de seção transversal, usando os parâmetros médios como coeficientes na equação *cross-section* global. Essa abordagem passou a ser referida como o método de Fama e Macbeth (1973) para calcular os erros-padrão.

Eugene Fama e James D. MacBeth (1973) conduziram um estudo pioneiro no qual criaram 20 grupos de carteiras de títulos para estimar os betas em uma regressão inicial com dados em séries temporais. Em seguida, eles conduziram várias regressões adicionais usando dados transversais em todos os meses dentro do prazo. Esse novo método permitiu o exame das mudanças nos parâmetros ao longo do tempo e mitigou a potencial correlação serial entre o risco residual e o “beta verdadeiro”. Além disso, a significância estatística de cada variável na equação geral pode ser avaliada medindo o desvio padrão da média e determinando se a média se desvia significativamente de zero por um alto número de desvios padrão (Malaga; Securato, 2004).

Para validar os modelos CAPM e de três fatores, algumas hipóteses podem ser formuladas nesta etapa (Mussa; Rogers; Securato, 2009):

- As equações devem apresentar intercepto igual a zero. Assim, não se espera retorno excedente em cada modelo;
- Nenhuma variável adicional deve ser significativa na explicação das flutuações dos retornos das carteiras; e
- No que se refere ao CAPM, espera-se que um aumento no risco (capturado pelo índice beta), provoca aumento do retorno, seguindo uma relação linear.

3.7 Teste de Previsão

No estudo de previsões, é comum se comparar diferentes modelos para se avaliar quais possuem melhor qualidade de ajuste dos dados. No primeiro momento, no intuito de comparar as previsões dos modelos CAPM e três fatores, a metodologia de Diebold e Mariano (1995) e West (1996) foi adotada, calculando-se os erros quadráticos médios (EQM) entre os valores realizados e estimados. Nessa abordagem, os erros quadráticos dos modelos foram calculados da seguinte forma:

$$L(r_t^c) = (r_t - \hat{r}_t^c)^2, \quad L(r_t^f) = (r_t - \hat{r}_t^f)^2, \quad (3.3)$$

em que r_t é a série com os retornos realizados, e \hat{r}_t^c e \hat{r}_t^f são as previsões do modelo parcimonioso e do modelo mais abrangente, respectivamente. No trabalho em questão, devido ao fato do modelo três fatores incorporar mais elementos em sua fórmula, vamos admitir que este assumirá o papel do modelo mais amplo, e assim \hat{r}_t^c representará as previsões do modelo CAPM. A avaliação de precisão da previsão baseia-se em saber se a média diferencial de "perdas" d_t é zero, em que:

$$d_t = L(r_t^c) - L(r_t^f) = (r_t - \hat{r}_t^c)^2 - (r_t - \hat{r}_t^f)^2, \quad (3.4)$$

Nesse sentido, em Diebold e Mariano (1995) e West (1996), a hipótese nula de igual precisão da previsão é:

$$H_0 = E[d_t] = E[L(r_t^c) - L(r_t^f)] = EQM^c - EQM^f = 0, \quad (3.5)$$

Clark e McCracken (2001) demonstram que ao comparar modelos aninhados, as estatísticas de teste de Diebold e Mariano (1995) serão não-normais e o uso de valores críticos padrão resultará em testes mal dimensionados. Assim, Clark e West (2006) propõem uma estatística corrigida de Diebold-Mariano que considera o ponto de, sob a hipótese nula, o EQM do modelo estrutural e do modelo de referência não são iguais. Se a hipótese nula for verdadeira, a estimação do modelo estrutural produz uma estimativa ruidosa do

parâmetro, supostamente igual a zero na população, aumentando o EQM na amostra. Eles sugerem um EQM ajustado para o modelo alternativo que é ajustado para baixo para ter EQMs iguais sob a hipótese nula. Assim, a função diferencial de perda pode ser ajustada da seguinte forma:

$$d_t - adj_t = L(r_t^c) - L(r_t^f) - adj_t = (r_t - \hat{r}_t^f)^2 - (r_t - \hat{r}_t^c)^2 - (\hat{r}_t^c - \hat{r}_t^f)^2. \quad (3.6)$$

Clark e West (2006) conduziram um estudo para examinar se a média populacional da série ajustada $d - adj_t$ é igual a zero. Esta investigação foi baseada na seguinte estatística específica:

$$CW = \frac{\tilde{d}}{\text{var}(\tilde{d})^{1/2}} \quad (3.7)$$

onde \tilde{d} é a média de $d - adj_t$. Dessa forma, caso a estatística de teste CW seja superior ao valor crítico, rejeitamos a hipótese nula, e pode-se concluir que um dos modelos é estatisticamente superior em termos de previsão.

4 RESULTADOS

Da Tabela 5 à Tabela 8 são apresentadas os betas obtidos através das regressões OLS ao fim de cada ano que são utilizados para previsão do ano posterior:

Tabela 5 – Carteira *Small Low* - Betas para as variáveis de risco dos modelos CAPM e três fatores para cada ano

Ano	Beta_CAPM	Beta_Mercado	Beta_SMB	Beta_HML
2015	1,02	1,05	0,59	-0,10
2016	0,99	1,01	0,56	-0,15
2017	0,99	1,00	0,56	-0,16
2018	0,99	1,02	0,50	-0,11
2019	0,99	1,01	0,49	-0,11
2020	1,01	1,00	0,49	-0,10
2021	1,03	1,01	0,49	-0,10

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 6 – Carteira *Small High* - Betas para as variáveis de risco dos modelos CAPM e três fatores para cada ano

Ano	Beta_CAPM	Beta_Mercado	Beta_SMB	Beta_HML
2015	1,05	1,05	0,65	0,11
2016	1,08	1,04	0,67	0,07
2017	1,10	1,05	0,66	0,08
2018	1,10	1,06	0,64	0,11
2019	1,11	1,07	0,66	0,10
2020	1,14	1,06	0,65	0,10
2021	1,15	1,07	0,65	0,10

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 7 – Carteira *Big Low* - Betas para as variáveis de risco dos modelos CAPM e três fatores para cada ano

Ano	Beta_CAPM	Beta_Mercado	Beta_SMB	Beta_HML
2015	0,92	0,94	0,14	-0,14
2016	0,89	0,93	0,14	-0,16
2017	0,89	0,93	0,14	-0,17
2018	0,89	0,93	0,13	-0,15
2019	0,89	0,94	0,14	-0,16
2020	0,91	0,94	0,14	-0,16
2021	0,91	0,94	0,14	-0,16

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 8 – Carteira *Big High* - Betas para as variáveis de risco dos modelos CAPM e três fatores para cada ano

Ano	Beta_CAPM	Beta_Mercado	Beta_SMB	Beta_HML
2015	0,95	0,92	0,16	0,29
2016	1,00	0,92	0,15	0,28
2017	1,01	0,93	0,15	0,29
2018	1,00	0,92	0,16	0,27
2019	1,00	0,92	0,17	0,27
2020	1,01	0,93	0,16	0,27
2021	1,01	0,92	0,15	0,27

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nas análises das tabelas, foi observado que os coeficientes "Beta CAPM" se destacaram em relação aos coeficientes "Beta_mercado" nas carteiras *Small High* e *Big High*, que se trata do mesmo fator mercado quando os demais fatores do modelo de três fatores foram adicionados. Essa constatação está em linha com descobertas anteriores de Mussa, Santos e Famá (2007) e Málaga e Securato (2004). De acordo com Fama e French (1993), essa diferença pode estar relacionada à correlação dos demais fatores com o fator de mercado. Por outro lado, os coeficientes do fator SMB foram mais expressivos nas carteiras *Small*, sugerindo que esse fator tem maior poder explicativo para empresas de menor porte. Quanto aos coeficientes do fator HML, eles foram mais elevados nas carteiras *High*, indicando uma melhor explicação para ações com índices *book-to-market* mais altos. Nas carteiras *Small*, os betas apresentaram resultados negativos, o que também é uma observação relevante.

4.1 Prêmios de risco estimados

Após efetuação da regressão do retorno mensal de cada carteira contra os fatores de risco, o segundo passo do procedimento de Fama-Macbeth consiste em realizar regressões *cross-section* entre os retornos das carteiras e os coeficientes dos fatores de risco obtidos no primeiro passo. A Tabela 9 abaixo traz os resultados das regressões *cross-section* da compensação para a exposição dos fatores de risco, ou seja, o prêmio de risco, para os períodos:

Tabela 9 – Resultados das regressões de seção transversal dos prêmios para os fatores de risco das carteiras em cada ano

Ano	Prêmio de mercado (CAPM)	Prêmio de mercado (três fatores)	Prêmio SMB	Prêmio HML
2015	0,37%	0,28%	0,07%	0,04%
	2,72%	2,47%	0,61%	0,75%
2016	1,12%	0,48%	0,06%	0,45%
	1,98%	2,66%	0,59%	0,73%
2017	1,77%	1,77%	0,30%	0,46%
	1,76%	2,52%	0,56%	0,69%
2018	1,95%	1,03%	0,29%	0,83%
	1,68%	2,20%	0,58%	0,73%
2019	2,30%*	1,78%*	0,45%	0,81%
	1,61%	2,11%	0,56%	0,70%
2020	1,87%	2,04%	0,40%	0,71%
	1,44%	2,24%	0,55%	0,67%
2021	1,93%	2,01%*	0,46%	0,73%
	1,36%	2,08%	0,53%	0,65%

Fonte: Elaborado pelo autor. Nota: Para cada ano, na primeira linha estão os prêmios de risco de cada fator específico; na segunda linha estão os desvios padrões. * indica que o coeficiente é significativo a 5%. Os erros-padrão para cálculo do *t*-estatístico foram calculados conforme a técnica de Fama e Macbeth (1973).

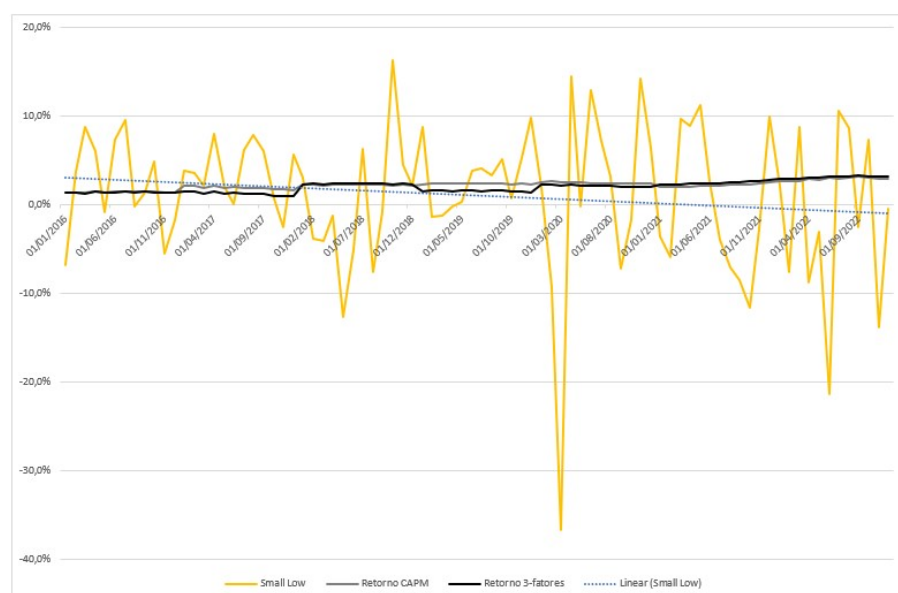
Na tabela acima, os betas se mostraram significativos somente para os fatores mercado, e em alguns períodos específicos. No modelo CAPM, observou-se que o prêmio de risco do fator mercado apresentou significância estatística a um nível de significância de 5% para justificar os retornos somente no ano 2019. Já o prêmio de risco do fator mercado no modelo de três fatores, o beta apresentou significância estatística nos anos 2019 e 2021. Os prêmios pelos fatores SMB e HML não apresentaram significância estatística em nenhum dos modelos, sugerindo uma insuficiência na explicação dos retornos da carteira por meio desses fatores. Consequentemente, existe uma restrição na elucidação dos retornos por

meio de fatores de risco, pois períodos ocasionais revelam um prêmio de risco notável vinculado aos fatores acima mencionados.

4.2 Retornos estimados para cada carteira

Nas figuras abaixo estão apresentados os gráficos referentes aos retornos estimados e realizados das carteiras ao longo dos anos:

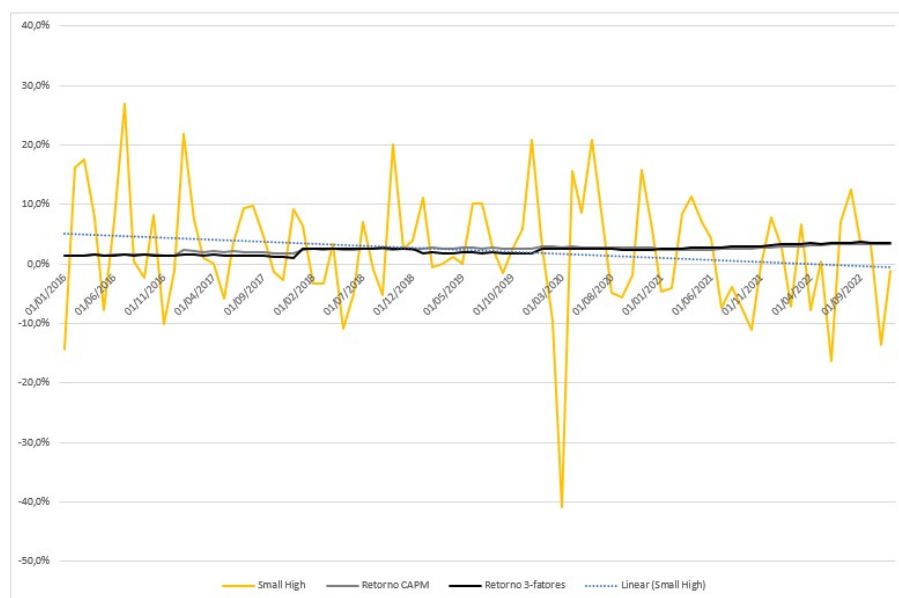
Figura 2 – Retornos realizados e estimados da carteira *Small Low* com base nos modelos CAPM e 3-fatores



Fonte: Elaborado pelo autor.

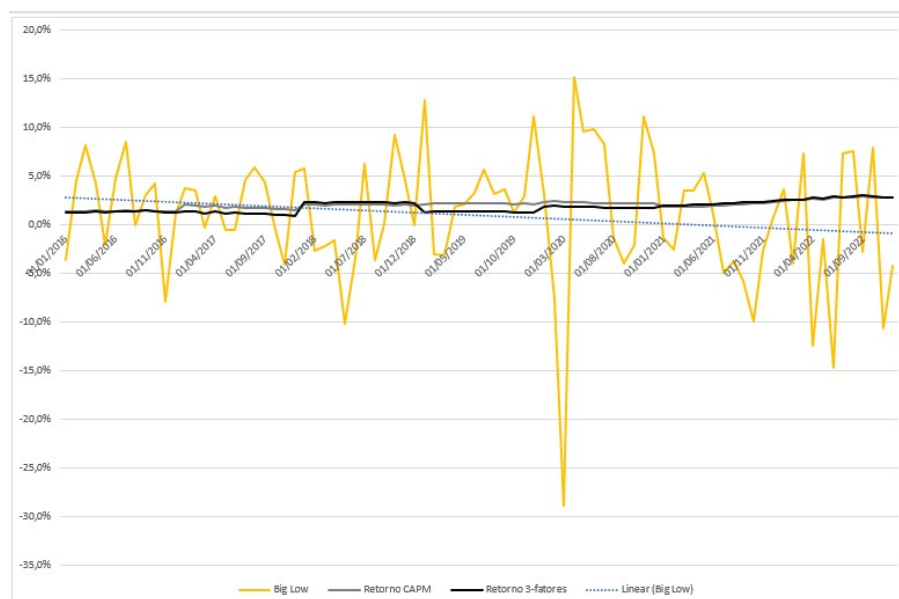
Nas figuras é possível que os retornos realizados possuem significativa oscilação não capturada pelos modelos de previsão durante o período analisado. Isso se torna mais perceptível a partir de fevereiro de 2020, em que se observa forte variação dos retornos das carteiras devido a pandemia de Covid-19. Além disso, nos gráficos foram apresentados as linhas de tendência dos retornos das carteiras (em pontilhado), e nota-se que em todas há uma tendência de redução dos retornos ao longo do tempo, que passam a ser negativos a partir de 2021. Tal resultado é diferente do observado através dos retornos estimados, em que nas quatro carteiras, há uma tendência positiva dos retornos esperados pelos modelos. Assim, é possível concluir que os retornos estimados não refletem de maneira satisfatória os retornos realizados de janeiro de 2016 a dezembro de 2022.

Figura 3 – Retornos realizados e estimados da carteira *Small High* com base nos modelos CAPM e três fatores



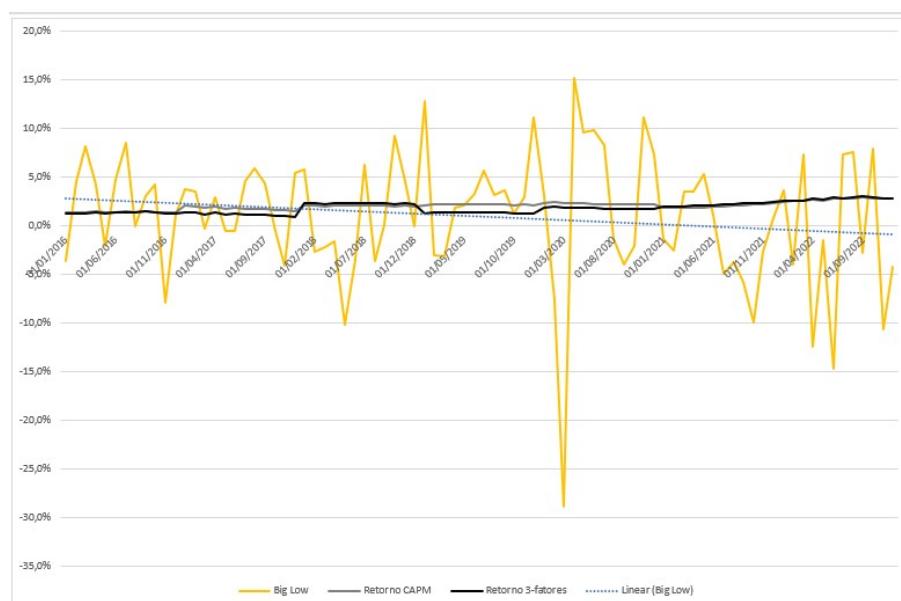
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4 – Retornos realizados e estimados da carteira *Big Low* com base nos modelos CAPM e três fatores



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 5 – Retornos realizados e estimados da carteira *Big High* com base nos modelos CAPM e três fatores



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.3 Testes de previsão

A Tabela 10 baixo mostra os resultados da aplicação do procedimento Clark e West (2006):

Tabela 10 – Coeficiente Clark e West para cada carteira

Teste	<i>Small Low</i>	<i>Small High</i>	<i>Big Low</i>	<i>Big High</i>
<i>CW</i>	-2,222*	-2,592*	-1,873%	-1,481%
	0,006%	0,008%	0,006%	0,005%

Fonte: Elaborado pelo autor. Nota: A tabela apresenta os resultados do teste de Clark e West para as previsões estimadas pelos modelos CAPM e três fatores, sob a hipótese nula de que não haja diferença estatística entre as previsões dos modelos. O teste utiliza 84 observações, que correspondem aos meses de janeiro de 2016 a dezembro de 2022. * indica que o coeficiente é significativo a 5%.

Os resultados presentes na linha superior das colunas 2 a 5 se refere aos valores do coeficiente CW, e a linha inferior apresenta os desvios padrões de $d - adj_t$. Conforme os resultados da tabela mostram, nas carteiras *Small Low* e *Small High*, a hipótese nula é rejeitada a um nível de significância de 5%, sugerindo que as previsões dos dois modelos são estatisticamente distintos. Como o teste estatístico assume um valor negativo, o resultado evidencia que o modelo CAPM apresentou um nível de ajuste melhor para previsão dos retornos mensais das quatro carteiras. No entanto, o mesmo não pode ser concluído das carteiras *Big Low* e *Big High*, pois o teste estatístico não foi suficiente para

rejeitar a hipótese nula.

5 CONCLUSÃO

O estudo teve como objetivo avaliar e contrastar os modelos CAPM e de três fatores por meio de um método de previsão (*ex-ante*) dos retornos mensais das carteiras no período de 2016 a 2022. Isso foi feito por meio de regressões em duas etapas: séries temporais e seção transversal. Para se aproximar do trabalho original de Fama-French (1993), foram adotadas as carteiras de ações classificadas por tamanho e valor pelo Núcleo de Pesquisas em Economia Financeira da USP (NEFIN) entre 2001 e 2021. Após cada ano avaliado, as informações sobre os retornos mensais e fatores de risco de cada carteira foram incorporadas aos modelos para tornar as análises de previsão mais robustas.

As descobertas revelaram que todos os modelos careciam de confiabilidade adequada para elucidar as flutuações nos retornos das ações no mercado brasileiro, particularmente durante as fases iniciais do surto de Covid-19, caracterizado por um declínio acentuado nos retornos das ações. Além disso, a inserção dos fatores SMB e HML não foi significativa em nenhum dos modelos ou períodos testados. Esse resultado foi reforçado pelo procedimento de Clark e West (2006), onde apenas duas carteiras (*Small Low* e *Small High*) mostraram previsões estatisticamente diferentes. Em ambas as carteiras, o CAPM apresentou uma melhor qualidade de ajuste das previsões, indo de encontro às conclusões originais de Fama-French (1993).

É importante reconhecer que os resultados da pesquisa atual devem ser analisados com cuidado, devido às restrições do estudo. Uma restrição notável diz respeito à disponibilidade limitada de ações no mercado brasileiro para a criação das carteiras analisadas neste estudo, que apresenta um menor nível de maturidade em comparação com mercados mais desenvolvidos, como o americano. Esse problema pode levar ao estabelecimento de um conjunto limitado e não diversificado de carteiras, o que pode impactar a precisão dos testes *cross-section*. É importante mencionar que o autor não abordou essa restrição, pois ela é impactada pelas características intrínsecas à Bolsa brasileira.

Por último, é importante destacar que houve diferenças significativas observadas nos resultados do presente estudo em comparação com pesquisas anteriores realizadas no mercado acionário brasileiro. A disparidade mais evidente está na importância do fator tamanho, que foi considerado substancial nas investigações conduzidas por Mussa, Santos e Famá (2007) e Málaga e Securato (2004), no entanto não mostrou importância no estudo atual. Essa divergência poderia ser potencialmente atribuída às variações metodológicas entre os estudos. Consequentemente, a evidência empírica local serve para apoiar a noção de que esse assunto permanece em seus estágios iniciais e continua sendo um tópico de considerável debate nos círculos acadêmicos. Embora as descobertas possam

ter gerado mais consultas do que conclusões definitivas, elas estão, sem dúvida, prontas para enriquecer as investigações futuras, particularmente em termos de diversificação dos critérios empregados nas metodologias e identificação de fatores de risco pertinentes que são exclusivos de mercados emergentes como o Brasil.

Referências

- ARAÚJO, E. A. T.; OLIVEIRA, V. do C.; SILVA, W. A. C. Capm em estudos brasileiros: uma análise da pesquisa. *Revista de Contabilidade e Organizações*, v. 6, n. 15, p. 95–122, 2012.
- ARGOLO, É. F. B.; LEAL, R. P. C.; ALMEIDA, V. d. S. O modelo de fama e french é aplicável no brasil? *Relatórios Coppead*, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2012.
- BANZ, R. W. The relationship between return and market value of common stocks. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 9, n. 1, p. 3–18, 1981.
- CLARK, T. E.; MCCRACKEN, M. W. Tests of equal forecast accuracy and encompassing for nested models. *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 105, n. 1, p. 85–110, 2001.
- CLARK, T. E.; WEST, K. D. Approximately normal tests for equal predictive accuracy in nested models. *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 138, n. 1, p. 291–311, 2007.
- DIEBOLD, F. X.; MARIANO, R. S. Comparing predictive accuracy. *Journal of Business and Economic Statistics*, v. 13, n. 3, p. 253–263, 1995.
- ELTON, E.; GRUBER, M.; BROWN, S. *Moderna teoria de carteiras e análise de investimentos*. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2012.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. The cross-section of expected stock returns. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 47, n. 2, p. 427–465, 1992.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 33, n. 1, p. 3–56, 1993.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. A five-factor asset pricing model. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 116, n. 1, p. 1–22, 2015.
- FAMA, E. F.; MACBETH, J. D. Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. *Journal of political economy*, The University of Chicago Press, v. 81, n. 3, p. 607–636, 1973.
- GIOVANNETTI, BRUNO CARA et al. Risk premia estimation in Brazil: Wait until 2041. University of São Paulo (FEA-USP), 2016.
- GALDI, F. C.; SECURATO, J. R. O risco idiossincrático é relevante no mercado brasileiro? *Revista Brasileira de Finanças*, Sociedade Brasileira de Finanças, v. 5, n. 1, p. 41–58, 2007.
- HICKS, J. R. Value and capital, 1939. Mathematical Appendix, v. 311312, 1946.
- MALAGA, F.; SECURATO, J. Aplicação do modelo de fama e french no mercado acionário brasileiro: um estudo empírico do período de 1995-2003. *ENCONTRO DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO (ENANPAD)*, v. 28, 2004.

MARKOWITZ, Harry. Portfolio Selection, Monograph 16, Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University. 1959.

MUSSA, A.; FAMÁ, R.; SANTOS, J. O. d. A adição do fator de risco momento ao modelo de precificação de ativos dos três fatores de fama & french aplicado ao mercado acionário brasileiro. *REGE-Revista de Gestão*, v. 19, n. 3, p. 431–447, 2012.

NASCIMENTO, L. K. Análise comparativa dos modelos de precificação de ativos: Capm, modelo de 3 fatores de fama e french e modelo de 5 fatores de fama e french no mercado brasileiro. 2021.

SHARPE, W. F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 19, n. 3, p. 425–442, 1964.

STATTMAN, D. Book values and stock returns. the chicago mba: A journal of selected papers, 4, 25-45. *Reproduced with permission of the copyright owner. Further reproduction prohibited without permission*, 1980.

WEST, K. D. Asymptotic inference about predictive ability. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 1067–1084, 1996.

WOLF, P. J. W.; OLIVEIRA, G. C. de; PALLUDETO, A. W. A. O mercado de ações no brasil (2003-2015): evolução recente e medidas para o seu desenvolvimento. *Pesquisa & Debate*, v. 30, n. 2 (54), 2018.