

LUÍS GUSTAVO PICOLO

**IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE MODELO
POROELÁSTICO LINEAR 3D**

**Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção
do diploma de Engenharia de Petróleo.**

SÃO PAULO

2024

LUÍS GUSTAVO PICOLO

**IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE MODELO
POROELÁSTICO LINEAR 3D**

**Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção
do diploma de Engenharia de Petróleo.**

**Área de concentração: Geomecânica em
meios porosos**

Orientador: Ronaldo Carrion

SÃO PAULO

2024

FICHA CATALOGRÁFICA

Picolo, Luís Gustavo
IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE MODELO POROELÁSTICO
LINEAR 3D / L. G. Picolo -- São Paulo, 2024.
59 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Minas e de Petróleo.

1.Geomecânica em meios porosos I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Minas e de Petróleo II.t.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho, realizado ao longo de três anos, foi uma jornada de crescimento pessoal e acadêmico. Este percurso me permitiu aprofundar o meu conhecimento prático em áreas específicas da Engenharia de Petróleo. Cada etapa do processo, desde o desenvolvimento das equações até a implementação computacional, reforçou habilidades de resolução de problemas e proporcionou a oportunidade de aplicar de maneira concreta princípios de pesquisa, matemáticos e computacionais.

Gostaria de dedicar um parágrafo especial para expressar minha admiração ao meu orientador, Dr. Professor Ronaldo Carrion. Sua orientação, conhecimento e suporte constante foram fundamentais para a realização deste projeto. Sua disponibilidade e a vontade de compartilhar seu conhecimento em cada fase deste trabalho foram inspiradoras. A cada etapa, o Professor Carrion contribuía com sugestões, ideias claras e um apoio teórico robusto que ampliou enormemente meu entendimento e habilidade para conduzir este trabalho.

Gratidão a Deus, minha família e amigos, que me permitiram alcançar este marco em minha jornada acadêmica. Suas palavras de encorajamento, apoio inabalável e amor foram fundamentais para superar os desafios e conquistar este objetivo. Sou imensamente grato por cada momento compartilhado, cada conselho sábio e cada gesto de incentivo. Esta conquista não é só minha, mas de vocês também.

RESUMO

A poroelasticidade é um campo interdisciplinar que une a mecânica dos sólidos porosos e a mecânica dos fluidos. Este trabalho de conclusão de curso expande a formulação poroelástica de 2D para 3D, permitindo simulações mais precisas e realistas. Utilizando o método dos elementos finitos e malhas tetraédricas, a simulação numérica é realizada em Python, analisando o deslocamento e a pressão em uma rocha saturada com fluidos submetida a esforços de compressão.

Os métodos explícitos são empregados para a integração temporal, que para o problema equilibra eficiência computacional e estabilidade de longo prazo. Condições de contorno drenadas são definidas para simular cenários realistas, o que influencia diretamente a distribuição de pressões e tensões dentro do material.

Este estudo não apenas avança a compreensão teórica da poroelasticidade em 3D, mas também demonstra a aplicação prática de técnicas numéricas para resolver problemas em engenharia geotécnica e geomecânica. Exemplos de tais problemas incluem geometrias irregulares, propriedades heterogêneas e anisotropias. Aplicações práticas desse estudo abrangem casos como a subsidência em torno de poços de extração, onde é possível considerar condições simplificadas de propriedades homogêneas. Assim, a pesquisa proporciona uma base sólida para futuras investigações e aplicações no campo da engenharia para a análise e mitigação de fenômenos geomecânicos.

Palavras-chave: poroelasticidade, 3D, método dos elementos finitos.

ABSTRACT

Poroelasticity is an interdisciplinary field that combines the mechanics of porous solids and fluid mechanics. This thesis expands the poroelastic formulation from 2D to 3D, allowing for more precise and realistic simulations. Using the finite element method and tetrahedral meshes, the numerical simulation is performed in Python, analyzing displacement and pressure in a fluid-saturated rock subjected to compressive stresses.

Explicit methods are employed for temporal integration, which for this problem balances computational efficiency and long-term stability. Drained boundary conditions are defined to simulate realistic scenarios, which directly influence the distribution of pressures and stresses within the material.

This study not only advances the theoretical understanding of 3D poroelasticity but also demonstrates the practical application of numerical techniques to solve problems in geotechnical and geomechanical engineering. Examples of such problems include irregular geometries, heterogeneous properties, and anisotropies. Practical applications of this study encompass cases such as subsidence around extraction wells, where simplified conditions of homogeneous properties can be considered. Thus, this research provides a solid foundation for future investigations and applications in engineering for the analysis and mitigation of geomechanical phenomena.

Keywords: poroelasticity, 3D, finite element method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Elemento Tetraédrico	20
Figura 2 - Malha tetraédrica de 1536 elementos	39
Figura 3 - Fluxograma Código Python Parte 1	44
Figura 4 - Fluxograma Código em Python Parte 2	45
Figura 5 - Parâmetros utilizados para avaliação do problema.....	47
Figura 6 - Deslocamentos calculados para diferentes posições e instantes de tempo para os nós do eixo central da malha de 1536 elementos e passo de tempo 0.1s	48
Figura 7 - Deslocamentos calculados analiticamente para diferentes posições e instantes de tempo.....	49
Figura 8 - Pressões calculadas para diferentes posições e instantes de tempo para os nós do eixo central da malha de 1536 elementos e passo de tempo 0.1s	50
Figura 9 - Pressões calculadas analiticamente para diferentes posições e instantes de tempo	51
Figura 10 - Pressões Calculadas para Diferentes Posições e instantes para os nós de posição $X = 1.5$ e $Y = 10.5$ da malha de 1536 elementos e passo de tempo 0.1s	52
Figura 11 - Valores de Pressões Calculadas para Diferentes Posições e instantes para os nós de posição $X = 1.5$ e $Y = 10.5$ da malha de 1536 elementos e passo de tempo 0.1s	Error! Bookmark not defined.
Figura 12 - Valores de Pressões Calculadas para Diferentes Posições e instantes para os nós de posição $X = 10.5$ e $Y = 1.5$ da malha de 1536 elementos e passo de tempo 0.1s	53

Figura 13 - Valores de Pressões Calculadas para Diferentes Posições e instantes para os nós de posição $X = 10.5$ e $Y = 1.5$ da malha de 1536 elementos e passo de tempo 0.1s **Error! Bookmark not defined.**

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	OBJETIVO	13
1.2	JUSTIFICATIVA	13
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
3	MÉTODO	19
3.1	DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES PARA O MODELO POROELÁSTICO 3D – SISTEMAS DE EQUAÇÕES NA FORMA MATRICIAL.....	19
3.2	DISCRETIZAÇÃO USANDO TETRAEDROS.....	20
3.3	EQUAÇÃO GERAL DAS FUNÇÕES DE FORMA DO ELEMENTO TETRAÉDRICO	21
3.4	SOLUÇÕES DAS FUNÇÕES DE FORMA PARA O DOMÍNIO DO PROBLEMA.....	21
3.5	FUNÇÕES DE FORMA DO TETRAEDRO	22
3.6	EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO MECÂNICO	23
3.7	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS CONTENDO AS COMPONENTES DE DESLOCAMENTO USANDO EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS	23
3.8	EQUAÇÕES DE DESLOCAMENTO-PRESSÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO MECÂNICO	24
3.9	EQUAÇÕES DE DESLOCAMENTO-PRESSÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO MECÂNICO MANIPULADAS.....	25
3.10	MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS	26
3.11	INTEGRAÇÃO POR PARTES	27
3.12	EQUAÇÕES PARA A PRESSÃO DE POROS A PARTIR DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE FLUIDO	28
3.13	INTEGRAÇÃO POR PARTES APÓS A APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS PARA A EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DO FLUIDO	29

3.14 EQUAÇÕES RESIDUAIS PONDERADAS INTEGRADAS POR PARTES NA FORMA MATRICIAL: EQUILIBRIO MECÂNICO E DIFUSÃO DE FLUIDO	29
3.15 COMPONENTES DA MATRIZ S_{ij}	30
3.16 PRESSÃO NA FORMA MATRICIAL.....	32
3.17 APROXIMAÇÃO POR DIFERENÇAS FINITAS NAS DERIVADAS TEMPORAIS.....	32
3.18 MÉTODO EXPLÍCITO E IMPLÍCITO	33
3.19 SISTEMA $[K]\{x\} = \{F\}$ PARA O PROBLEMA POROELÁSTICO 3D.....	35
4 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA	36
4.1 CARACTERÍSTICAS DA SIMULAÇÃO	36
4.2 PROPRIEDADES DA ROCHA E DO FLUIDO	37
4.3 PROPRIEDADES E CARACTERÍSTICAS DA MALHA.....	38
4.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	39
4.5 DESCRIÇÃO DO CÓDIGO EM PYTHON.....	41
5 RESULTADOS	46
5.1 RESULTADOS ESPERADOS	46
5.2 RESULTADOS OBTIDOS	46
6 CONCLUSÃO.....	54
7 TRABALHOS FUTUROS.....	57
REFERENCIAS.....	58

1 INTRODUÇÃO

Poroelasticidade é uma teoria que se refere às interações complexas entre o fluxo de fluidos e as deformações em sólidos presentes em um meio poroso. Os materiais porosos são estruturas compostas por pequenos espaços vazios, ou poros, os quais estão preenchidos por fluidos. Essas estruturas podem ser encontradas em objetos naturais e artificiais, desde rochas e solos até tecidos biológicos, espumas, cerâmicas e produtos de papel (WANG, 2000).

Quando uma força externa é aplicada a um meio poroso, a pressão exercida afeta a fração de volume ocupada pelos poros. Assim, ao considerar os poros preenchidos com fluido, sob a influência de uma carga externa, os poros comprimem-se, levando a uma mudança na pressão do fluido. Este aumento de pressão impulsiona o movimento do fluido através da matriz porosa, uma dinâmica que é crucial para a compreensão de processos naturais e industriais.

Por outro lado, o sólido que compõe a matriz porosa que podem ser caracterizados como visco-poro-elásticos também reage a essa mudança. A deformação do volume dos poros induz o material sólido a se deslocar e se deformar. A natureza dessa deformação depende de uma série de fatores, incluindo as propriedades elásticas do sólido, a magnitude da força aplicada e a estrutura do meio poroso. A modelagem de tais fenômenos, portanto, requer um entendimento sólido de várias disciplinas, mecânica dos fluidos, a mecânica dos sólidos e a termodinâmica. Isso torna a poroelasticidade um campo de estudo desafiador e multidisciplinar.

Na engenharia de petróleo, o estudo da poroelasticidade é fundamental para prever o comportamento de reservatórios de petróleo e gás. Na biologia e na medicina, pode contribuir para a compreensão dos processos de fluxo e transporte em tecidos biológicos. Na geologia, ajuda a entender a dinâmica do fluxo de água subterrânea e o comportamento das rochas sob estresse tectônico.

O Método dos Elementos Finitos (FEM) é uma abordagem numérica utilizada para resolver equações diferenciais parciais que modelam uma variedade de problemas físicos, incluindo problemas poroelásticos tridimensionais. Em termos gerais, o FEM transforma um problema contínuo, como um problema poroelástico, em

uma série de problemas discretos que podem ser resolvidos com o auxílio de modelos de álgebra linear computacional. O domínio contínuo (no nosso caso, o meio poroso 3D) é subdividido em um conjunto de subdomínios menores e mais manejáveis chamados "elementos finitos". Cada elemento é conectado aos outros por pontos chamados "nós". Os nós e os elementos formam uma malha que cobre todo o domínio do problema (KATTAN, 2008).

Para resolver um problema poroelástico 3D, primeiramente precisamos formular as equações poroelásticas que governam o comportamento do meio. As equações poroelásticas são descritas por uma combinação das leis de conservação de massa, bem como a lei de Darcy que representa o balanço da quantidade de movimento para o fluxo de fluidos em meios porosos. Essas equações são expressas em termos de pressões de fluidos e deslocamentos de sólidos.

No contexto da poroelasticidade, a equação a ser resolvida é uma equação de difusão acoplada com as equações de equilíbrio mecânico. Estas equações representam a interação entre o movimento do fluido (representado pela equação de difusão) e a deformação do sólido (representada pelas equações de equilíbrio). Em um problema tridimensional, estas equações são dependentes do espaço em três dimensões, tornando-os intrinsecamente mais complexos do que seus equivalentes bidimensionais (Cheng, 2016).

Uma das etapas na aplicação do FEM a um problema poroelástico 3D é a discretização do domínio. O domínio (ou seja, o volume do material poroso que estamos estudando) é dividido em uma série de pequenos "elementos finitos". Os vértices desses elementos, onde eles se intersectam, são referidos como "nós". Cada um desses elementos podem ser tratados como tetraedros ou hexaedros, por exemplo.

Após a discretização, as equações diferenciais são convertidas em um sistema de equações algébricas usando um processo chamado de "método dos resíduos ponderados", este processo envolve o uso do método de Galerkin.

Finalmente, as equações algébricas são resolvidas para encontrar a solução em cada nó. Em um problema poroelástico, uma das escolhas é a solução em cada nó inclui o deslocamento do sólido e a pressão do fluido. Dadas as condições de

contorno do problema, o sistema de equações resultante é geralmente grande e esparso.

A aplicação do FEM a problemas poroelásticos 3D é bastante complexo, devido ao acoplamento entre o movimento do fluido e a deformação do sólido e à natureza tridimensional do problema. No entanto, com uma implementação cuidadosa, o FEM pode proporcionar uma ferramenta poderosa para a resolução destes problemas. Uma das principais vantagens do FEM é que ele é capaz de lidar com domínios complexos e condições de contorno variadas. Isso o torna ideal para modelar problemas poroelásticos 3D, que frequentemente envolvem geometrias complicadas e condições de contorno variáveis no tempo e no espaço.

Além disso, o FEM é altamente flexível: o tamanho do problema pode ser facilmente aumentado ou diminuído simplesmente alterando o número de elementos na malha. Isso significa que o FEM pode ser usado para resolver problemas poroelásticos em várias escalas, desde pequenos experimentos de laboratório até grandes simulações de reservatórios de petróleo.

Na mecânica dos solos, uma distinção importante é feita entre problemas drenados e não drenados. Essa distinção é baseada na capacidade do fluido de se mover ou "drenar" de um meio poroso quando um esforço é aplicado. Nos problemas drenados, quando um esforço é aplicado ao meio poroso, o fluido dentro dos poros é capaz de se mover livremente para fora dos poros. Essa movimentação de fluido causa uma mudança no volume dos poros, levando a uma redistribuição da pressão do fluido. Como o fluido pode drenar, a pressão do fluido permanece constante no equilíbrio. Por outro lado, nos problemas não drenados, o esforço é aplicado tão rapidamente que o fluido nos poros não tem tempo para se mover ou drenar. Outro caso é quando o meio está selado e com isso a velocidade de carregamento não importa. Como resultado, o volume dos poros permanece constante e a pressão do fluido aumenta (Prévost, J.H, 1980).

Portanto, a distinção entre problemas drenados e não drenados é fundamental na poroelasticidade pois remete a caracterização laboratorial dos parâmetros poroelásticos. A consideração do regime de drenagem apropriado é crucial para a modelagem da resposta de materiais porosos sob carregamento.

1.1 OBJETIVO

Este trabalho tem como objetivo desenvolver e implementar uma solução computacional para o modelo poroelástico 3D utilizando o método dos elementos finitos, ao utilizar a expansão das equações poroelásticas de 2D para o cenário tridimensional. Além disso, busca-se estruturar e construir um algoritmo capaz de resolver as equações poroelásticas 3D em um ambiente computacional, permitindo a análise detalhada do comportamento de um meio poroso tridimensional quando submetido a variações de pressão do fluido ou a tensões na matriz sólida.

1.2 JUSTIFICATIVA

A utilização de modelos computacionais tem um papel fundamental em diversas áreas da engenharia e das ciências, especialmente no setor de petróleo, pois possibilita uma redução significativa de custos operacionais e um aumento de segurança em muitas operações. Isso é possível pois esses modelos permitem a simulação de diferentes cenários, fornecendo antecipadamente resultados e indicando possíveis condições críticas que poderiam surgir no ambiente operacional. Na área de petróleo, a modelagem computacional é crucial para a análise da pressão de poros, essencial no controle de estabilidade de reservatórios e na prevenção de falhas durante a perfuração.

O projeto de operações de fraturamento hidráulico se baseiam em simulações numéricas de simulações para otimizar a criação de fraturas e maximizar a extração de hidrocarbonetos. Modelos computacionais também são indispensáveis em processos de Recuperação melhorada, onde permitem a avaliação de diferentes estratégias para aumentar a recuperação de petróleo de reservatórios maduros. Operações complexas e de alto custo, como a extração de petróleo em águas profundas, são diretamente beneficiadas pelo aprimoramento dessas tecnologias de simulação, garantindo eficiência e segurança nas operações de perfuração e produção.

No entanto, a simulação de problemas complexos pode rapidamente esgotar os recursos computacionais disponíveis. Por isso, é essencial desenvolver um ambiente

de desenvolvimento que simplifique a abordagem inicial. Isso facilita a escalabilidade dos recursos computacionais e permite a busca por melhores arquiteturas e condições de execução.

Embora softwares como o COMSOL já possuam implementações baseadas em elementos finitos, no caso desse trabalho, o objetivo é aprendizado e teste de métodos numéricos. Para isso, a extensão das equações do modelo 2D para o 3D e implementação numérica em software foi o estudo escolhido. Esta é uma tarefa que requer uma compreensão da teoria subjacente e da modelagem computacional, e tem o potencial de abrir novas oportunidades em uma variedade de campos de aplicação.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A poroelasticidade é um campo que estuda a interação entre a deformação de sólidos porosos e o fluxo de fluidos em seus poros (Biot, 1941), sendo crucial para entender processos geomecânicos e hidrogeológicos (Cheng, 2016). A poroelasticidade estática é predominante na literatura, focando em situações onde o movimento do fluido e a deformação do esqueleto sólido ocorrem simultaneamente e se influenciam mutuamente. Esta abordagem é essencial para modelar comportamentos como a consolidação dos solos, onde a drenagem do fluido influencia diretamente a deformação do solo (Biot, 1941; Wang, 2000).

Além disso, a poroelasticidade dinâmica, que considera a propagação de ondas elásticas em meios saturados por fluidos, está relacionada à resposta em alta frequência, ampliando a aplicação desta teoria para cenários onde a velocidade do movimento das fases é significativa. Este ramo é relevante para a análise de vibrações e ondas de tensão em materiais porosos saturados com aplicações para a engenharia de reservatórios e estudos sísmicos. A utilização de modelos poroelásticos em 3D permite uma análise mais detalhada e realista das interações fluido-sólido em rochas e outros materiais geológicos (Coussy, 2003; Dormieux et al., 2006).

A teoria da poroelasticidade de Biot tem sido amplamente aplicada em diversas áreas da engenharia e geociências. No campo da engenharia geotécnica, é utilizada para modelar a consolidação de solos saturados, permitindo prever a deformação e a dissipação de pressões de poro ao longo do tempo. Na engenharia de reservatórios, auxilia na compreensão do comportamento de rochas reservatório durante a produção de petróleo. Além disso, na biomecânica, a teoria de Biot é empregada para estudar a resposta mecânica de tecidos biológicos porosos, como cartilagens e ossos, sob diferentes condições de carga e pressão intersticial. Essas aplicações demonstram a versatilidade e a importância da teoria de Biot na modelagem de materiais porosos saturados em diversos contextos (BIOT, 1941; WANG, 2000).

A extensão das equações poroelásticas 2D disponíveis em (Wang, 2000) para 3D é um passo necessário para simulações mais precisas e realistas. As equações em 3D incluem termos adicionais que capturam as variações ao longo do terceiro eixo, proporcionando uma representação mais completa dos fenômenos físicos. Esta

extensão é vital para a modelagem de processos geomecânicos complexos, onde as interações entre os fluidos e a matriz sólida ocorrem em todas as direções espaciais (Wang, 2000; Coussy, 2003).

A adaptação das equações diferenciais parciais do modelo 2D para 3D requer um entendimento das interações entre os parâmetros físicos envolvidos. Isso inclui a consideração das forças de corpo, tensões de cisalhamento e variações de pressão ao longo de todas as direções.

O método dos elementos finitos (FEM) é uma técnica numérica amplamente utilizada para resolver problemas em engenharia e física. O MEF permite a discretização de domínios contínuos em elementos menores, facilitando a solução de equações diferenciais parciais que descrevem o comportamento do sistema. Esta metodologia permite a análise de deformações e distribuições de pressão em materiais porosos saturados por fluidos (Hughes, 2000; Zienkiewicz et al., 2013).

A utilização do MEF envolve a criação de uma malha que representa a geometria do material estudado. Cada elemento da malha é associado a uma região do domínio acoplada a um conjunto de equações que descrevem o comportamento local do fluido e do sólido. A solução dessas equações para todos os elementos permite a construção de um modelo global que captura as interações complexas dentro do material (Cook et al., 2001; Belytschko et al., 1994).

A escolha de elementos tetraédricos em malhas de elementos finitos é estratégica, especialmente em modelos 3D, devido à sua capacidade de adaptação a geometrias complexas e à facilidade na geração automática de malhas. Esses elementos possibilitam uma distribuição eficiente e uniforme em domínios tridimensionais com formas irregulares, assegurando uma representação mais fiel e detalhada da área de estudo. As funções de forma associadas aos tetraedros permitem interpolar variáveis de interesse, como deslocamentos, pressões e tensões, dentro de cada elemento, proporcionando precisão na análise e versatilidade na simulação de fenômenos geomecânicos (Cook et al., 2001; Zienkiewicz et al., 2013).

A simulação numérica de modelos poroelásticos envolve a resolução de equações diferenciais que descrevem as interações entre o fluido e o sólido em meios porosos. Utilizando a linguagem de programação Python, por exemplo, é possível implementar

algoritmos para resolver essas equações, permitindo a análise temporal e espacial do comportamento do sistema. Esta abordagem computacional é essencial para investigar a resposta de materiais porosos sob diferentes condições de carregamento e confinamento.

É necessário que a implementação de simulações numéricas realize estudos paramétricos e a avaliação de diferentes cenários, oferecendo uma ferramenta para a previsão do comportamento do domínio. A simulação numérica é uma parte fundamental da análise de poroelasticidade, proporcionando uma compreensão que seria difícil de obter por métodos experimentais ou analíticos tradicionais.

Os métodos explícitos e implícitos são abordagens numéricas utilizadas para a integração temporal em simulações poroelásticas. O método explícito calcula as respostas do sistema em pequenos incrementos de tempo, o que pode torná-lo mais eficiente para certos problemas dinâmicos. Por outro lado, o método implícito envolve a resolução de equações simultâneas em cada passo de tempo, o que o torna incondicionalmente estável. A escolha entre métodos explícitos e implícitos depende de um estudo de estabilidade numérica para garantir a adequação da abordagem em relação à estabilidade e convergência da simulação (Bathe, 1996; Hall, 2012).

Por outro lado, o método implícito, embora envolva a inversão de matrizes que podem ser resolvidas com ferramentas do Python, é computacionalmente intensivo. A escolha entre métodos explícitos e implícitos depende das características específicas do problema a ser resolvido. (Zienkiewicz et al., 2013; Cook et al., 2001).

A definição de condições de contorno são parte do problema e também aspecto crítico nas simulações poroelásticas, pois determina como o sistema interage com seu ambiente. Condições de contorno drenadas, por exemplo, permitem a saída de fluido do sistema, influenciando diretamente a distribuição de pressões e tensões dentro do material. Estas condições são essenciais para modelar cenários realistas onde o fluxo de fluido pode ocorrer livremente através das fronteiras do sistema.

É evidente que a escolha adequada das condições de contorno garante que a simulação represente fielmente os fenômenos físicos observados em situações reais. Condições de contorno bem definidas são fundamentais para a precisão dos resultados da simulação, permitindo uma análise detalhada e confiável dos processos

geomecânicos. Este aspecto é particularmente importante em estudos de estabilidade de encostas, fundações e reservatórios de petróleo, onde a modelagem precisa das condições de contorno é essencial para a otimização da perfuração de poços, o planejamento de operações de fraturamento hidráulico, a implementação de técnicas de recuperação avançada de petróleo (EOR) e a avaliação da integridade estrutural dos reservatórios durante a produção (Cheng, 2016; Coussy, 2003).

3 MÉTODO

A primeira etapa deste projeto consistiu em estender a formulação poroelástica de duas dimensões para três dimensões. Para realizar essa tarefa, a literatura existente referente à poroelasticidade 2D foi de extrema importância. O processo descrito abaixo envolveu o estudo cuidadoso da literatura base (WANG, 2000) e a integração dos conhecimentos adquiridos para o desenvolvimento de um quadro teórico coerente e sólido para a poroelasticidade 3D.

3.1 DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES PARA O MODELO POROELÁSTICO 3D – SISTEMAS DE EQUAÇÕES NA FORMA MATRICIAL

O propósito fundamental deste trabalho é resolver o sistema de equações matriciais $[M]\{U\}^{t+\Delta t} + [K]\{U\}^k = \{F\}^k$ sendo k uma variável que pode apontar para aproximação explícita $k = t$ ou implícita $k = t + \Delta t$ ou mista ao partir dos termos K e F para atender parte $k = t$ e parte $k = t + \Delta t$. Este sistema representa as equações diferenciais parciais que governam a difusão de fluidos na rocha. A matriz $[K]$ é a matriz de rigidez, que descreve as propriedades elásticas da rocha e sua interação com o fluido. O vetor U representa os deslocamentos nas três direções e a pressão de poros, enquanto o vetor F contém as forças externas que atuam sobre o sistema.

O processo de solução é realizado de forma iterativa, avançando passo a passo no tempo. Em cada passo, a solução do sistema de equações fornece os deslocamentos e pressões dos poros para o próximo instante. Estes valores são então armazenados para uso futuro.

O armazenamento dos resultados, permite a criação de representações visuais dos deslocamentos e pressões dos poros ao longo do tempo. Estas representações podem ser estáticas (imagens) ou dinâmicas (animações), proporcionando uma visão clara da evolução dessas quantidades ao longo do tempo. Isso não só facilita a compreensão dos fenômenos em estudo, mas também pode revelar padrões ou comportamentos que poderiam ser difíceis de perceber de outra forma.

Armazenar esses resultados também possibilita uma análise aprofundada do comportamento dos deslocamentos e pressões dos poros. Ao estudar a evolução ao longo do tempo, podemos visualizar o comportamento da rocha e do fluido sob várias condições.

3.2 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL USANDO TETRAEDROS

O primeiro passo crucial na implementação computacional do modelo poroelástico 3D foi a escolha do elemento finito e suas funções de forma. Os elementos finitos são subdivisões do domínio total do problema e, neste contexto, referem-se ao volume total do meio poroso em estudo. A seleção de um elemento finito impacta diretamente a precisão e eficácia da solução computacional.

A Figura 1 ilustra a geometria do elemento tetraédrico utilizado na discretização espacial do domínio, destacando seus quatro nós e a disposição das arestas que formam a estrutura. Além disso, a simplicidade dos elementos isoparamétricos facilita a definição e o cálculo das funções de forma, essenciais para a precisão das simulações. Os nós formadores de cada elemento são descritos por coordenadas cartesianas, o que permite uma representação clara e eficiente no espaço 3D.

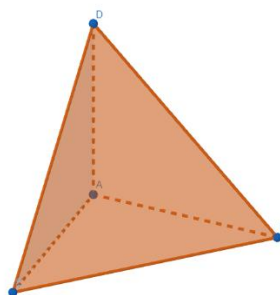


Figura 1: Elemento Tetraédrico

A Equação (1) mostra o cálculo implementado para o volume de cada elemento finito da malha, a partir das coordenadas cartesianas dos nós formadores.

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (1)$$

3.3 EQUAÇÃO GERAL DAS FUNÇÕES DE FORMA DO ELEMENTO TETRAÉDRICO

As equações (2) a (5) descrevem analiticamente o formato das funções para cada elemento de deslocamento e pressão para cada elemento. Como o problema está em um cenário de três dimensões, com a presença de um fluido que exercerá uma pressão no meio poroso, descrito por tetraedros, teremos portanto quatro funções de forma N_K , três funções em relação aos deslocamentos U, V e W e uma em relação à pressão P onde m representa o número de nós do elemento finito escolhido conforme posto por (Wang, 2000).

$$\hat{u}^e(x, y, z) = \sum_{K=1}^m N_K^e(x, y, z) U_K \quad (2)$$

$$\hat{v}^e(x, y, z) = \sum_{K=1}^m N_K^e(x, y, z) V_K \quad (3)$$

$$\hat{w}^e(x, y, z) = \sum_{K=1}^m N_K^e(x, y, z) W_K \quad (4)$$

$$\hat{p}^e(x, y, z) = \sum_{K=1}^m N_K^e(x, y, z) P_K \quad (5)$$

3.4 SOLUÇÕES DAS FUNÇÕES DE FORMA PARA O DOMÍNIO DO PROBLEMA

As equações (6) a (9) são as equações globais de deslocamento e pressão para o problema Poroelástico 3D, definidas para o domínio do problema, isso significa realizar a somatória para o número de nós do elemento tetraédrico, ou seja, quatro nós.

$$\hat{u}(x, y, z) = \sum_{K=1}^{NNODE} N_K(x, y, z) U_K \quad (6)$$

$$\hat{v}(x, y, z) = \sum_{K=1}^{NNODE} N_K(x, y, z) V_K \quad (7)$$

$$\hat{w}(x, y, z) = \sum_{K=1}^{NNODE} N_K(x, y, z) W_K \quad (8)$$

$$\hat{p}(x, y, z) = \sum_{K=1}^{NNODE} N_K(x, y, z) P_K \quad (9)$$

3.5 FUNÇÕES DE FORMA DO TETRAEDRO

Para o elemento finito tetraédrico, as funções de forma são detalhadamente delineadas na literatura (Kattan, 2008). Com base nessa literatura, derivamos as equações (10) a (13), que caracterizam as funções de forma para o elemento tetraédrico linear, considerando que os nós são descritos no espaço em coordenadas cartesianas. Esse conjunto de equações serve como uma base para a interpolação da solução no elemento tetraédrico e são vitais para a implementação do Método dos Elementos Finitos no contexto da poroelasticidade 3D.

$$N_1 = \frac{1}{6V} (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y + \delta_1 z) \quad (10)$$

$$N_2 = \frac{1}{6V} (\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 y + \delta_2 z) \quad (11)$$

$$N_3 = \frac{1}{6V} (\alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 y + \delta_3 z) \quad (12)$$

$$N_4 = \frac{1}{6V} (\alpha_4 + \beta_4 x + \gamma_4 y + \delta_4 z) \quad (13)$$

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; \alpha_2 = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; \alpha_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; \alpha_4 = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (14)$$

$$\beta_1 = -\begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; \beta_2 = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; \beta_3 = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; \beta_4 = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (15)$$

$$\gamma_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix}; \gamma_2 = -\begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix}; \gamma_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix}; \gamma_4 = -\begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$\delta_1 = - \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}; \delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}; \delta_3 = - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}; \delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (17)$$

3.6 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO MECÂNICO

As equações de equilíbrio mecânico expressam o equilíbrio de forças no material poroso sob condições de tensão. A notação geral para estas equações encapsula as interações entre deformações do material sólido e o fluxo do fluido no meio poroso (WANG, 2000). Este conjunto de equações guia a implementação computacional e a análise numérica.

A notação geral para as equações de equilíbrio mecânico para o problema tridimensional está descrita na Equação (18).

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = -F_i \quad (18)$$

Assim a notação para cada direção está disponível nas equações (19) a (21).

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0 \quad (21)$$

3.7 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS CONTENDO AS COMPONENTES DE DESLOCAMENTO USANDO EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

O processo de desenvolvimento das equações diferenciais parciais que representam o equilíbrio mecânico com as componentes de deslocamento é fundamental na análise poroelástica. Essas equações são obtidas através da substituição das equações constitutivas, que descrevem as propriedades inerentes do

material poroso, nas equações de equilíbrio de forças ao considerar o meio como isotrópico.

A equação geral de equilíbrio mecânico, que representa o comportamento do meio poroso em 3D sob uma variedade de condições de carregamento, é dada pela equação (22). As equações específicas para cada uma dessas direções são fornecidas pelas equações (23) a (25), respectivamente.

$$G\nabla^2 u_i + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} = \alpha \frac{\partial p}{\partial x_i} - F_i \quad (22)$$

$$G\nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right] = \alpha \frac{\partial p}{\partial x} - F_x \quad (23)$$

$$G\nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right] = \alpha \frac{\partial p}{\partial y} - F_y \quad (24)$$

$$G\nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] = \alpha \frac{\partial p}{\partial z} - F_z \quad (25)$$

3.8 EQUAÇÕES DE DESLOCAMENTO-PRESSÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO MECÂNICO

As forças de corpo são forças distribuídas que atuam em todo o volume de um objeto, como a força gravitacional. Ao zerar as forças de corpo, estamos assumindo que a influência dessas forças é insignificante para o problema em estudo, principalmente para o caso monofásico que estamos lidando, onde o sistema está em equilíbrio a densidade é constante e temos uma pressão em excesso, ou seja, uma pressão adicional que submete o meio a uma carga externa. Essa é uma suposição feita no livro base e simplifica a análise, permitindo focar nas interações mecânicas mais relevantes entre a estrutura sólida e o fluido nos poros.

Desta maneira, com a suposição de que as forças de corpo são negligenciáveis, podemos simplificar a Equação (22), o que resulta nas equações de deslocamento-pressão das equações de equilíbrio mecânico. Essas equações são dadas por (26), (27) e (28) para as direções x, y e z, respectivamente. Essas são as equações que governam o comportamento mecânico do meio poroso, permitindo

entender como o deslocamento da estrutura sólida e a pressão do fluido nos poros estão inter-relacionados em resposta às forças aplicadas.

$$G \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \frac{G}{1-2\nu} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right] = \alpha \frac{\partial p}{\partial x} \quad (26)$$

$$G \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \frac{G}{1-2\nu} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right] = \alpha \frac{\partial p}{\partial y} \quad (27)$$

$$G \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \frac{G}{1-2\nu} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] = \alpha \frac{\partial p}{\partial z} \quad (28)$$

3.9 EQUAÇÕES DE DESLOCAMENTO-PRESSÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO MECÂNICO MANIPULADAS

As equações de equilíbrio mecânico obtidas no tópico anterior são complexas e não mantem de forma clara a conexão entre os componentes de deslocamento (u , v , w) e a pressão (P) com os componentes de tensão.

Por isso, optamos por uma reorganização e manipulação dessas equações, assim como na literatura, visando expressá-las de uma maneira que evidencie essa conexão e facilite o tratamento numérico subsequente. O objetivo aqui é reformular as equações para que possamos lidar diretamente com os componentes de deslocamento e pressão, mas mantendo a ligação com as tensões.

Com essa manipulação, chegamos às equações (29) a (31), em que as constantes multiplicativas são $\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}$, $\frac{2G\nu}{1-2\nu}$ e G respectivamente. Nota-se que esses termos comuns são derivados da relação de Poisson e ao módulo de cisalhamento, características intrínseca dos materiais elásticos. Essas equações reformuladas nos permitem proceder com a implementação numérica do problema de forma mais direta.

$$\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \alpha \frac{\partial p}{\partial x} \quad (29)$$

$$\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + G \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = \alpha \frac{\partial p}{\partial y} \quad (30)$$

$$\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + G \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} = \alpha \frac{\partial p}{\partial z} \quad (31)$$

3.10 MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS

No contexto do Método dos Elementos Finitos, a solução de um problema é aproximada dentro de cada elemento por meio de funções de interpolação, também chamadas de funções de forma. Essas funções de forma, que são definidas localmente para cada elemento, permitem a descrição do comportamento do problema dentro do elemento em termos dos valores da solução nos nós do elemento.

No caso do problema poroelástico tridimensional que estamos considerando, essas funções de forma são aplicadas às componentes de deslocamento em cada direção (u , v , w) e à pressão dos poros (p), sendo elas parte constituinte das Equações de deslocamento e pressão (2), (3), (4), e (5). Assim, U_K , V_K , W_K e P_K representam o deslocamento e a pressão dos poros em cada nó do elemento, respectivamente.

Para resolver o problema, adotamos o método de Galerkin, que é uma variante do método de resíduos ponderados. O objetivo deste método é minimizar o resíduo, ou seja, a diferença entre a solução aproximada e a solução exata da equação governante. Neste método, as funções de ponderação escolhidas são as próprias funções de forma.

Ao aplicar este método, o domínio do problema é dividido em uma malha de elementos finitos tetraédricos, e a solução é obtida por meio da integração das equações governantes ponderadas em cada um desses elementos. Isso resulta em um sistema linear de equações algébricas que pode ser resolvido para encontrar a solução aproximada do problema em toda a malha.

Assim, para cada equação governante, obtemos um conjunto de equações de resíduos ponderados. Estas são dadas pelas equações (32) a (34).

$$\int \int \int_D \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} N_L(x, y, z) dx dy dz = 0 \quad (32)$$

$$\int \int \int_D \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + G \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - \alpha \frac{\partial p}{\partial y} N_L(x, y, z) dx dy dz = 0 \quad (33)$$

$$\int \int \int_D \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + G \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} N_L(x, y, z) dx dy dz = 0 \quad (34)$$

3.11 INTEGRAÇÃO POR PARTES

A integração por partes permite transformar as equações diferenciais de segunda ordem em equações de primeira ordem. Quando aplicamos a integração por partes às Equações de resíduos ponderados (32) a (34) referentes aos resíduos ponderados, reduzimos a ordem das derivadas para um. Isso é feito manipulando as equações de maneira que as derivadas de segunda ordem sejam "transferidas" das funções de ponderação para as funções de forma, resultando em equações de primeira ordem.

Em seguida, substituímos as expressões para as funções de forma de um elemento tetraédrico como descrito pelas Equações (6) a (9) nas equações integradas por partes. Este procedimento nos permite expressar o problema inteiramente em termos das incógnitas nodais.

Como resultado deste processo, obtemos as Equações (35) a (37). Estas representam as equações de resíduos ponderados, agora em termos das variáveis nodais e com derivadas de primeira ordem.

$$\begin{aligned}
& \int \int \int_D \left[\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial x} + G \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial y} + G \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial z} \right] U_K dx dy dz \\
& + \int \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial y} + G \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial x} \right] V_K dx dy dz \\
& + \int \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial z} + G \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial x} \right] W_K dx dy dz \\
& + \int \int \int_D \left[\alpha \frac{\partial N_K}{\partial x} N_L \right] P_K dx dy \\
& - \int \int_{\Gamma} [(\sigma_{xx} + \alpha p)n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z] N_L dA = 0
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
& \int \int \int_D \left[\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial y} + G \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial x} + G \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial z} \right] U_K dx dy dz \\
& + \int \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial x} + G \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial y} \right] V_K dx dy dz \\
& + \int \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial z} + G \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial y} \right] W_K dx dy dz \\
& + \int \int \int_D \left[\alpha \frac{\partial N_K}{\partial y} N_L \right] P_K dx dy \\
& - \int \int_{\Gamma} [(\sigma_{yx}n_x + (\sigma_{yy} + \alpha p)n_y + \sigma_{yz}n_z)] N_L dA = 0
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
& \int \int \int_D \left[\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial z} + G \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial x} + G \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial y} \right] U_K dx dy dz \\
& + \int \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial x} + G \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial z} \right] V_K dx dy dz \\
& + \int \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial y} + G \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial z} \right] W_K dx dy dz \\
& + \int \int \int_D \left[\alpha \frac{\partial N_K}{\partial z} N_L \right] P_K dx dy \\
& - \int \int_{\Gamma} [(\sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y + (\sigma_{zz} + \alpha p)n_z)] N_L dA = 0
\end{aligned} \tag{37}$$

3.12 EQUAÇÕES PARA A PRESSÃO DE POROS A PARTIR DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE FLUIDO

Ao seguir o equacionamento disponível em (Wang, 2000) a partir da equação geral para a difusão de fluido expressão em (38), obtemos a equação (39).

$$\alpha \frac{\partial e_{kk}}{\partial t} + S_e \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \nabla^2 p + Q \quad (38)$$

$$\alpha \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] + S_e \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right] \quad (39)$$

3.13 INTEGRAÇÃO POR PARTES APÓS A APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS PARA A EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DO FLUIDO

O mesmo procedimento utilizado para se chegar nas Equações (35) a (37) é aplicado para a equação de difusão de fluido e assim obtemos a Equação (40).

$$\begin{aligned} & \int \int \int_D \alpha \left[N_L \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{dU_K}{dt} + N_L \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{dV_K}{dt} + N_L \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{dW_K}{dt} \right] dx dy dz \\ & + \int \int \int_D S_e N_L N_K \frac{dP_K}{dt} dx dy dz \\ & + \int \int \int_D \frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial x} + \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial y} + \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial z} \right] P_K dx dy dz \\ & - \int \int_{\tau} \left[\frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial y} n_y + \frac{\partial p}{\partial z} n_z \right] N_L dA = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

3.14 EQUAÇÕES RESIDUAIS PONDERADAS INTEGRADAS POR PARTES NA FORMA MATRICIAL: EQUILÍBRIO MECÂNICO E DIFUSÃO DE FLUIDO

Uma das etapas-chave do MEF é o transporte das equações locais do elemento na matriz global do sistema. Este procedimento consiste em somar as contribuições dos coeficientes U, V, W e P (referentes ao deslocamento nas direções x, y, z e à pressão dos poros, respectivamente) de cada elemento para a matriz global. Em termos mais concretos, isto significa que para cada nó compartilhado por vários elementos, as contribuições de cada elemento para esse nó são somadas.

Ao organizar as Equações (35), (36), (37) e (40) desta forma, é possível reformulá-las na forma matricial. Essa etapa é crucial, pois transforma as equações em um formato que é mais eficiente e conveniente para solucionar numericamente. As expressões matriciais resultantes podem ser vistas nas equações (41) a (43).

É importante destacar que a montagem do sistema global é uma etapa crítica e deve ser exata, uma vez que qualquer erro nesta fase pode levar a resultados incorretos ou instáveis no processo de solução.

$$[S^{11}]U + [S^{12}]V + [S^{13}]W + [S^{14}]P = B^1 \quad (41)$$

$$[S^{21}]U + [S^{22}]V + [S^{23}]W + [S^{24}]P = B^2 \quad (42)$$

$$[S^{31}]U + [S^{32}]V + [S^{33}]W + [S^{34}]P = B^3 \quad (43)$$

3.15 COMPONENTES DA MATRIZ S^{ij}

As matrizes S^{ij} e os termos B^i formam a base da representação matricial de nosso sistema de equações. Na verdade, esses componentes são correlacionados com os termos integrados das Equações (35) a (37).

Cada um dos elementos da matriz S^{ij} , representa uma interação específica entre os nós do sistema. De forma mais específica, os elementos na matriz S^{ij} correspondem às contribuições de um elemento finito particular para o sistema global, o que significa que eles são diretamente proporcionais à resistência do material em um ponto específico à deformação.

Já os termos B^i , conhecidos como termos de carregamento, representam as forças externas atuando sobre o sistema. Estes podem incluir, por exemplo, a pressão exercida pelo fluido nos poros do material.

Assim, S^{ij} e B^i e as Equações (35) a (37) é uma das chaves para a solução do sistema. As Equações (44) a (58) detalham essas correlações e nos ajudam a entender como os termos individuais das Equações (35) a (37) se manifestam na estrutura matricial.

Ao entender essa correlação, somos capazes de construir uma representação matricial precisa do sistema. Essa representação é essencial para a solução numérica do problema, pois nos permite usar técnicas de álgebra linear para resolver o sistema de equações.

$$S_{LK}^{11} = \int \int \int_D \left[\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial x} + G \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial y} + G \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (44)$$

$$S_{LK}^{12} = \int \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial y} + G \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial x} \right] dx dy dz \quad (45)$$

$$S_{LK}^{13} = \int \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial z} + G \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial x} \right] dx dy dz \quad (46)$$

$$S_{LK}^{14} = \int \int \int_D \left[\alpha \frac{\partial N_K}{\partial x} N_L \right] dx dy dz \quad (47)$$

$$S_{LK}^{21} = \int \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial x} + G \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial y} \right] dx dy dz \quad (48)$$

$$S_{LK}^{22} = \int \int \int_D \left[\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial y} + G \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial x} + G \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (49)$$

$$S_{LK}^{23} = \int \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial z} + G \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial y} \right] dx dy dz \quad (50)$$

$$S_{LK}^{24} = \int \int \int_D \left[\alpha \frac{\partial N_K}{\partial y} N_L \right] dx dy dz \quad (51)$$

$$S_{LK}^{31} = \int \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial x} + G \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (52)$$

$$S_{LK}^{32} = \int \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial y} + G \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (53)$$

$$S_{LK}^{33} = \int \int \int_D \left[\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial z} + G \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial x} + G \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial y} \right] dx dy dz \quad (54)$$

$$S_{LK}^{34} = \int \int \int_D \left[\alpha \frac{\partial N_K}{\partial z} N_L \right] dx dy dz \quad (55)$$

$$B_L^1 = \int \int_\Gamma [(\sigma_{xx} + \alpha p)n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z] N_L dA \quad (56)$$

$$B_L^2 = \int \int_\Gamma [(\sigma_{yx}n_x + (\sigma_{yy} + \alpha p)n_y + \sigma_{yz}n_z] N_L dA \quad (57)$$

$$B_L^3 = \int \int_\Gamma [(\sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y + (\sigma_{zz} + \alpha p)n_z] N_L dA \quad (58)$$

3.16 PRESSÃO NA FORMA MATRICIAL

Ao analisar as equações de difusão de fluidos, adotamos a mesma abordagem que foi aplicada para as matrizes S . Essa abordagem envolve a representação da pressão em uma forma matricial, acumulando as contribuições de cada elemento individualmente. Assim, obtemos a Equação 40 em uma apresentação matricial. Isso nos permite estabelecer uma correspondência entre os termos das integrais presentes nas Equações (35) a (37) e (40) e as Equações (44) a (58).

Desse modo, conseguimos uma visão mais clara de como as variações de pressão, que dirigem a difusão do fluido, influenciam o comportamento poroelástico global do meio.

$$[A^1] \frac{dU}{dt} + [A^2] \frac{dV}{dt} + [A^3] \frac{dW}{dt} + [A^4] \frac{dP}{dt} + [A^4]\{P\} = B^4 \quad (59)$$

$$A_{LK}^1 = \int \int \int_D \alpha \frac{\partial N_K}{\partial x} N_L dx dy dz \quad (60)$$

$$A_{LK}^2 = \int \int \int_D \alpha \frac{\partial N_K}{\partial y} N_L dx dy dz \quad (61)$$

$$A_{LK}^3 = \int \int \int_D \alpha \frac{\partial N_K}{\partial z} N_L dx dy dz \quad (62)$$

$$A_{LK}^4 = \int \int \int_D S_e N_L N_K dx dy dz \quad (63)$$

$$A_{LK}^5 = \int \int \int_D \frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial x} + \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial y} + \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (64)$$

$$B_L^4 = \int \int_\tau \left[\frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial y} n_y + \frac{\partial p}{\partial z} n_z \right] N_L dA \quad (65)$$

3.17 APROXIMAÇÃO POR DIFERENÇAS FINITAS NAS DERIVADAS TEMPORAIS

Finalmente, a resolução do sistema é realizada por meio da aplicação do método de diferenças finitas para aproximar as derivadas temporais. Este consiste na

aproximação linear das derivadas temporais por meio da diferença entre os valores da variável em dois instantes de tempo distintos, separados por um intervalo de tempo pré-determinado.

Este intervalo de tempo, também conhecido como passo de tempo tem um papel crucial na precisão e estabilidade da simulação. Se o passo de tempo for muito grande, pode-se perder eventos rápidos ou oscilações na solução e não garantir estabilidade numérica. Se for muito pequeno, a simulação pode exigir um tempo computacional excessivo. Portanto, a escolha de um passo de tempo adequado é crucial para equilibrar precisão e eficiência computacional.

O sistema é resolvido iterativamente, avançando passo a passo no tempo. Em cada passo, as equações são resolvidas para o estado atual do sistema e, em seguida, esse estado é atualizado com base nas derivadas calculadas. Este processo é repetido até que se atinja o tempo final desejado ou se atinjam outras condições de parada predefinidas.

Ao usar este método, podemos obter uma série temporal da evolução do sistema, representada pelas Equações (66) a (69) o que nos permite entender como o sistema responde a variações de pressão ao longo do tempo.

$$\left\{\frac{dU}{dt}\right\} = \frac{1}{\Delta t} (\{U\}^{t+\Delta t} - \{U\}^t) \quad (66)$$

$$\left\{\frac{dV}{dt}\right\} = \frac{1}{\Delta t} (\{V\}^{t+\Delta t} - \{V\}^t) \quad (67)$$

$$\left\{\frac{dW}{dt}\right\} = \frac{1}{\Delta t} (\{W\}^{t+\Delta t} - \{W\}^t) \quad (68)$$

$$\left\{\frac{dP}{dt}\right\} = \frac{1}{\Delta t} (\{P\}^{t+\Delta t} - \{P\}^t) \quad (69)$$

3.18 MÉTODO EXPLÍCITO E IMPLÍCITO

Na análise numérica, existem duas abordagens principais para resolver equações diferenciais: os métodos explícito e implícito. A escolha entre um e outro pode afetar significativamente a precisão, a estabilidade e a eficiência computacional da solução.

No método explícito, o estado atual do sistema é usado para calcular o próximo estado. Isso significa que todas as variáveis são determinadas diretamente pelas condições iniciais e pelo tempo atual. No entanto, essa abordagem pode levar a instabilidades numéricas e acumulação de erro, especialmente quando a resolução temporal é alta (pequenos passos de tempo). Ou seja, pequenos erros na solução atual podem levar a grandes erros na próxima etapa.

Por outro lado, o método implícito é incondicionalmente estável. Nele, o próximo estado do sistema é calculado considerando-se o próprio estado, criando um sistema de equações que deve ser resolvido em cada passo de tempo, o que torna o método incondicionalmente estável.

O parâmetro β é utilizado para controlar a estratégia utilizada. Um valor de $\beta = 1$ corresponde a um método totalmente explícito, $\beta = \frac{1}{2}$ o método de Crank Nicolson, enquanto $\beta = 0$ corresponde a um método totalmente implícito.

Levando em consideração as duas estratégias distintas para a resolução das equações diferenciais - os métodos implícito e explícito - decidiu-se estruturar uma solução que pudesse abranger ambas. A intenção é construir um código que permita alternar entre essas metodologias de forma flexível, de modo a facilitar as comparações e análises em relação ao impacto de cada método na resolução do nosso problema.

A importância dessa abordagem dual reside na possibilidade de explorar as vantagens de cada método em situações diferentes, permitindo assim uma análise mais robusta.

Assim para exemplificar, ao aplicar para a Equação (66) abaixo temos:

$$U = \beta U^t + (1 - \beta)U^{t+\Delta t} \quad (70)$$

$$\beta = 0 \rightarrow U = U_1^{t+\Delta t} \quad (71)$$

$$\beta = 1 \rightarrow U = U^t \quad (72)$$

3.19 SISTEMA $[K]\{x\} = \{F\}$ PARA O PROBLEMA POROELÁSTICO 3D

Ao prosseguir com os cálculos, o objetivo era reformatar as componentes identificadas por meio das integrais acima para o formato que seria implementado nas funções de resolução do problema em Python: $[K]\{x\} = \{F\}$. Esse formato é usado para representar sistemas de equações lineares, onde $[K]$ é a matriz de coeficientes, x é o vetor de incógnitas e F é o vetor dos termos independentes.

Com base na formulação tridimensional desenvolvida, procedemos para desenvolver o sistema e chegamos à matriz de coeficientes $[K]$, que é uma matriz de dimensão $4N \times 4N$ onde N é o número de nós da malha. Já os vetores x e F desenvolvidos representam, respectivamente, o conjunto de variáveis desconhecidas (valores de deslocamento e pressão de cada nó) e o vetor F são as forçantes.

$$K = \begin{bmatrix} (1-\beta)[S11]_{NXN} & (1-\beta)[S12]_{NXN} & (1-\beta)[S13]_{NXN} & (1-\beta)[S14]_{NXN} \\ (1-\beta)[S21]_{NXN} & (1-\beta)[S22]_{NXN} & (1-\beta)[S23]_{NXN} & (1-\beta)[S24]_{NXN} \\ (1-\beta)[S31]_{NXN} & (1-\beta)[S32]_{NXN} & (1-\beta)[S33]_{NXN} & (1-\beta)[S34]_{NXN} \\ [A1]_{NXN} & [A2]_{NXN} & [A3]_{NXN} & [A4]_{NXN} + \Delta t(1-\beta)[A5]_{NXN} \end{bmatrix}_{4X4}$$

$$x = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{t+\Delta t} \\ \vdots \\ U_n^{t+\Delta t} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} V_1^{t+\Delta t} \\ \vdots \\ V_n^{t+\Delta t} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} W_1^{t+\Delta t} \\ \vdots \\ W_n^{t+\Delta t} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} P_1^{t+\Delta t} \\ \vdots \\ P_n^{t+\Delta t} \end{pmatrix} \end{pmatrix}_{4X1}$$

$$F = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix} - [S^{11}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} U_1^t \\ \vdots \\ U_N^t \end{pmatrix} - [S^{12}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} V_1^t \\ \vdots \\ V_N^t \end{pmatrix} - [S^{13}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} W_1^t \\ \vdots \\ W_N^t \end{pmatrix} - [S^{14}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} P_1^t \\ \vdots \\ P_N^t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix} - [S^{21}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} U_1^t \\ \vdots \\ U_N^t \end{pmatrix} - [S^{22}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} V_1^t \\ \vdots \\ V_N^t \end{pmatrix} - [S^{23}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} W_1^t \\ \vdots \\ W_N^t \end{pmatrix} - [S^{24}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} P_1^t \\ \vdots \\ P_N^t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix} - [S^{31}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} U_1^t \\ \vdots \\ U_N^t \end{pmatrix} - [S^{32}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} V_1^t \\ \vdots \\ V_N^t \end{pmatrix} - [S^{33}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} W_1^t \\ \vdots \\ W_N^t \end{pmatrix} - [S^{34}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} P_1^t \\ \vdots \\ P_N^t \end{pmatrix} \\ \Delta t \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix}_{NX1} - [A^1]_{NXN} \begin{pmatrix} -U_1^t \\ \vdots \\ -U_N^t \end{pmatrix}_{NX1} - [A^2]_{NXN} \begin{pmatrix} -V_1^t \\ \vdots \\ -V_N^t \end{pmatrix}_{NX1} - [A^3]_{NXN} \begin{pmatrix} -W_1^t \\ \vdots \\ -W_N^t \end{pmatrix}_{NX1} - [A^4]_{NXN} \begin{pmatrix} -P_1^t \\ \vdots \\ -P_N^t \end{pmatrix}_{NX1} - [A^5]_{NXN}\Delta t\beta \begin{pmatrix} -P_1^t \\ \vdots \\ -P_N^t \end{pmatrix}_{NX1} \end{pmatrix}_{4X1}$$

(73)

4 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Decidimos optar pelo método explícito para a resolução de nosso problema. O método explícito permite que cada novo passo de tempo seja calculado com base apenas no passo de tempo atual. Isto é, cada etapa é uma função explícita das etapas anteriores, o que torna os cálculos rápidos e eficientes. Além disso, o método explícito é muito eficaz para problemas que apresentam um comportamento previsível ao longo do tempo, onde o estado atual é um bom indicador do estado futuro. Com base na análise do problema e considerando os prós e contras de diferentes métodos, concluímos que o método explícito seria a melhor escolha para a resolução de nosso problema.

4.1 CARACTERÍSTICAS DA SIMULAÇÃO

O problema proposto envolve a simulação de um sólido tridimensional representando uma amostra de rocha porosa com dimensões de 12x12x12 metros. Essa rocha está preenchida com fluido, o que caracteriza o cenário poroelástico. O estudo tem como objetivo compreender o comportamento da rocha, saturada com fluido, quando submetida a um esforço de compressão na base (σ_{zz}), que é assumido ser negativo, representando uma compressão. Em um contexto geológico, tais condições podem ocorrer, por exemplo, em formações rochosas subterrâneas sob a influência de forças tectônicas ou do peso de camadas de rocha sobrejacentes.

Este é um problema drenado, o que significa que a pressão dos fluidos nos poros da rocha tem a oportunidade de se equilibrar com as mudanças na pressão. Isso implica que a pressão do fluido pode variar, permitindo o movimento do fluido dentro e fora da rocha. A simulação captura o comportamento da rocha sob compressão, levando em conta as interações entre a matriz rochosa e os fluidos em seus poros. Compreender esse comportamento tem aplicações práticas importantes na exploração e produção de petróleo e gás e na gestão de reservatórios de água subterrânea, por exemplo.

4.2 PROPRIEDADES DA ROCHA E DO FLUIDO

Apresentaremos e discutiremos os resultados de nossa análise, considerando as propriedades específicas da rocha que utilizamos em nossos testes. Essas propriedades são importantes para compreender a natureza do nosso estudo e os resultados obtidos.

A rocha saturada de fluido em estudo possui propriedades físicas e mecânicas bem definidas que têm implicações significativas para o seu comportamento sob diferentes condições. Aqui estão as propriedades fundamentais da rocha que são relevantes para o nosso estudo, explicadas simplificadaamente:

Módulo de cisalhamento (G em Pa): Este valor, também conhecido como módulo de rigidez, descreve a capacidade da rocha de resistir a deformações cisalhantes. Isso é importante em contextos onde a rocha é submetida a tensões de cisalhamento que poderiam distorcer sua estrutura, como em falhas geológicas ou durante a extração de recursos minerais.

Constante de Biot (α , adimensional): Nomeado em homenagem ao físico francês Maurice Anthony Biot descreve a deformação do meio e o conteúdo de fluido a pressão constante. Essa constante é relevante em rochas porosas preenchidas com fluido, onde mudanças na pressão do fluido podem induzir deformações na matriz da rocha

Coefficiente de Poisson (ν , adimensional): Este coeficiente é uma medida da capacidade da rocha de se contrair ou expandir em uma direção perpendicular à direção da força aplicada. Quando uma rocha é comprimida ou esticada, ela responde com uma expansão ou contração em uma direção perpendicular à força. O coeficiente de Poisson quantifica essa relação.

Compressibilidade efetiva (S_e , em Pa^{-1}): Esta propriedade descreve a capacidade de armazenamento de uma rocha sob deformação constante, refletindo como o volume de fluido armazenado na rocha muda em resposta a variações de pressão. Quanto maior a compressibilidade, maior a capacidade da rocha de armazenar fluido à medida que a pressão aplicada varia

Permeabilidade (k , em m^2): A permeabilidade de uma rocha é uma medida da facilidade com que um fluido pode se mover através dela como resposta a um determinado gradiente de pressão. Isso depende da porosidade da rocha e do tamanho e interconexão dos poros.

Viscosidade (μ em $Pa \cdot s$): A viscosidade é uma medida da resistência de um fluido ao fluxo. Simplificadamente, fluidos com alta viscosidade fluem mais lentamente do que aqueles com baixa viscosidade. A viscosidade pode influenciar a rapidez com que os fluidos se movem através da rocha, o que é importante para aplicações como a extração de petróleo e gás.

Estas propriedades são fundamentais para a compreensão do comportamento da rocha sob diferentes condições de estresse e permitem-nos modelar as respostas de forma precisa. Portanto, a simulação buscará capturar o comportamento da rocha sob a pressão de compressão aplicada, levando em conta as interações entre a matriz rochosa e os fluidos em seus poros.

4.3 PROPRIEDADES E CARACTERÍSTICAS DA MALHA

Neste estudo, foram considerados parâmetros que impactam diretamente a simulação poroelástica. Além disso, a configuração da malha para a simulação foi planejada para equilibrar detalhamento e eficiência computacional, assegurando que os resultados obtidos ofereçam tanto a precisão necessária quanto a viabilidade prática para a realização dos cálculos. Abaixo, são descritos os principais parâmetros e a estrutura da malha utilizada.

Além dos parâmetros mencionados, a malha utilizada para a simulação foi composta por 1536 elementos (Figura 2). Esse número representa uma quantidade intermediária, escolhida para oferecer um equilíbrio entre a resolução dos detalhes e a eficiência computacional. Com essa configuração, é possível capturar as nuances do comportamento do sistema simulado, assegurando que as variações locais e os gradientes de grandezas físicas sejam representados suficientemente. Ao mesmo tempo, o uso de uma quantidade moderada de elementos evita o aumento excessivo do tempo de processamento e dos recursos computacionais necessários, permitindo

uma execução mais prática e acessível da simulação. Dessa forma, a escolha da malha com 1536 elementos garante que o modelo atenda aos requisitos de economia computacional, mantendo a simulação robusta e eficiente.

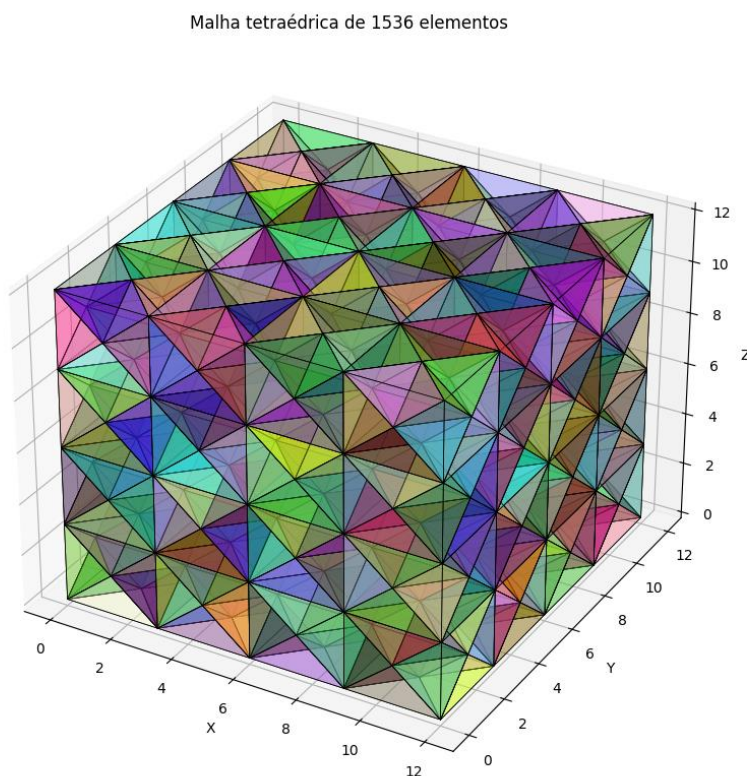


Figura 2 - Malha tetraédrica de 1536 elementos

4.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno são um conjunto de restrições que definem o comportamento de um sistema físico nas suas fronteiras ou limites. Elas são parte do problema e fundamentais para a solução de equações diferenciais parciais que descrevem o comportamento de sistemas físicos, no nosso caso um modelo poroelástico. As condições de contorno determinam o comportamento do um sistema, limitando ou especificando seus valores em determinados pontos ou regiões.

No contexto deste problema, estamos analisando o comportamento de um cubo que representa uma rocha, sob condições de variação de pressão e deslocamento. Para cada nó na malha de elementos finitos que representa o cubo, definimos

condições de contorno que determinam se o nó pode se mover nas direções x, y, z e se a pressão pode ou não variar. As condições de contorno no nosso problema são definidas por uma lista de quatro dígitos, cada um podendo ser 0 ou 1. Esses dígitos representam, respectivamente, a possibilidade de variação nas direções x, y, z e a condição de pressão. Quando o dígito é 1, isso significa que é permitida a variação na direção ou condição correspondente. Por outro lado, um dígito 0 impede a variação. Por exemplo, a lista [1, 0, 1, 1] permitiria variações na direção x e z e na pressão, mas não na direção y.

Dessa forma, as condições de contorno foram definidas de acordo com a localização do nó para refletir seu comportamento em função da sua localização:

- Se o nó está no interior do cubo, ele pode se mover em todas as direções e a pressão pode variar.
- Se o nó pertence a uma face, ele pode se deslocar apenas sob sua face e sua pressão pode variar. Com exceção da face inferior, os nós pertencentes a ela possuem condição de contorno para pressões iguais a 0.
- Se o nó pertence a uma aresta, ele pode se deslocar sob sua aresta e sua pressão pode variar. A pressão é igual a zero para nós pertencentes a arestas na base do cubo.
- Os nós de canto na face inferior do cubo podem se deslocar apenas em z e suas pressões não podem variar.
- Os nós de canto na face superior do cubo não podem se deslocar em nenhuma direção e suas pressões podem variar.
- Para as faces em que a pressão pode variar temos outra restrição: não há fluxo, então $\frac{dP}{dn} = 0$, ou seja impermeável ou sem fluxo de fluido.

A razão para aplicar essas condições de contorno é que elas refletem as restrições físicas do problema que estamos tentando resolver. Por exemplo, um nó na face de um cubo de rocha real não pode se mover para fora do cubo, porque seria obstruído pela rocha circundante. Essas condições de contorno ajudam a modelar as restrições físicas e as interações entre a rocha e fluido, o que torna nosso modelo mais preciso e realista.

As condições de contorno definem o comportamento do sistema em regiões específicas, nesse caso, as bordas do nosso "cubo" que representa a rocha. Ao estabelecer a condição de contorno de pressão igual a 0 para os nós que pertencem à face inferior do cubo, estamos efetivamente criando uma área de baixa pressão por onde o fluido pode sair. Existe, portanto, condições onde definimos faces seladas (regiões onde não definimos condições de Neuman) e faces onde permitimos o fluido ser drenado (condição de Dirichlet).

Essa área de baixa pressão desempenha um papel crucial na dinâmica do fluxo de fluidos. Na natureza, os fluidos tendem a se mover de áreas de alta pressão para áreas de baixa pressão. Ao criar uma região de pressão mais baixa na face inferior do nosso modelo, estamos direcionando o fluxo de fluido para fora do domínio.

Portanto, essa condição de contorno de pressão 0 na face inferior do cubo serve para simular o comportamento natural do fluido, que é escoar em direção a regiões de menor pressão. Esse ensaio é fundamental para entender a consolidação em caracterização laboratorial.

Com estas condições de contorno aplicadas, o modelo de elementos finitos está agora definido para simular a resposta da rocha sob condições realistas de pressão e tensão.

4.5 DESCRIÇÃO DO CÓDIGO EM PYTHON

O código em Python desenvolvido para este estudo foi estruturado para possuir boa eficiência e legibilidade, garantindo sua reutilização eficaz, uma vez que certas funções demandam um tempo computacional considerável. Com uma abordagem modular, o código é dividido em duas partes fundamentais: a definição das funções e a execução dos cálculos.

A primeira parte, definição das funções, funciona como o esqueleto do código. Nesta seção, todas as operações necessárias são encapsuladas em funções dedicadas. Isso não apenas aumenta a legibilidade do código, como também facilita a depuração e o teste de partes individuais do código sem a necessidade de executar

o programa inteiro. Além disso, essas funções podem ser facilmente reutilizadas em outros contextos ou projetos, contribuindo para a eficiência do código.

A segunda parte é a execução dos cálculos. Aqui, as funções definidas anteriormente são "chamadas" na ordem correta e realizam os cálculos necessários para resolver o problema da malha de entrada. Os dados de entrada são processados, as constantes são inicializadas, os cálculos são executados e os arquivos .txt que possuem os deslocamentos de cada nó em x, y, z e os valores de pressão são exportados.

Além disso, para garantir a clareza, o código está comentado, explicando o objetivo de cada função e os detalhes dos cálculos realizados. Assim, o código em Python foi desenvolvido de uma maneira que não só resolve o problema em questão, mas também serve como uma base sólida para futuros trabalhos de pesquisa.

Como podemos ver nas Figuras 5 e 6 que representam as etapas de importação de bibliotecas e definição das funções, uma série de funções é definida para realizar várias tarefas:

- Inicializar Constantes: inicializa as constantes necessárias para os cálculos subsequentes, como as propriedades da rocha.
- Leitura: é responsável pela leitura de dados de entrada da malha de elementos finitos do arquivo de texto.
- Coord Vol: é usada para calcular os volumes dos elementos na malha.
- Basis Function: é usada para calcular as funções de forma para cada elemento da malha.
- Vetor Normal: calcula o vetor normal às faces de cada triângulo que compõem cada tetraedro da malha.
- Inicializa área triângulos: inicializa as variáveis responsáveis pelas áreas de cada triângulo na malha.
- Set areas zero e self check: definem áreas que não são do contorno para zero.
- Matriz $S_{ij}A_{ij}$: calcula as matrizes S_{ij} e A_{ij} locais para cada elemento.
- Matriz b_i : calcula os termos das matrizes b_i para cada elemento.
- Matrizes globais: transporta as matrizes S e A locais para a respectiva matriz global.

- Vetores Bglobais: organiza os vetores B em um vetor B global.
- Propriedades Iterações: define as propriedades das iterações para resolver o sistema como o tempo total da simulação e o passo de tempo.
- Matriz K: calcula a matriz de rigidez do sistema.
- Inicialização das matrizes U_{nn} , V_{nn} , W_{nn} e P_{nn} : inicializa as matrizes para armazenar os deslocamentos e a pressão dos poros em cada nó da malha no atual passo de tempo.
- Vetor F: calcula o vetor de carga do sistema no atual passo de tempo.
- Solve problem: resolve o sistema resultante $[K]\{U\} = \{F\}$, para todos os instantes de tempo.
- Xnntsplot, Unntsplot, Vnntsplot, Wnntsplot, Pnntsplot: essas funções armazenam os resultados obtidos para cada deslocamento e pressão em uma matriz, para que as animações possam ser produzidas.

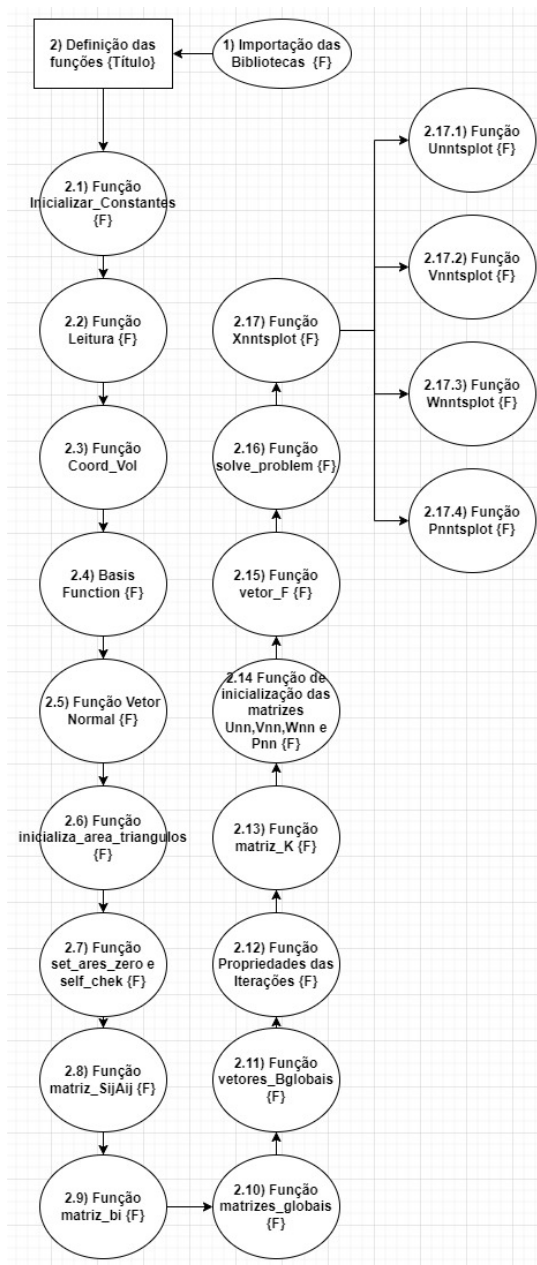


Figura 3 - Fluxograma Código Python Parte 1

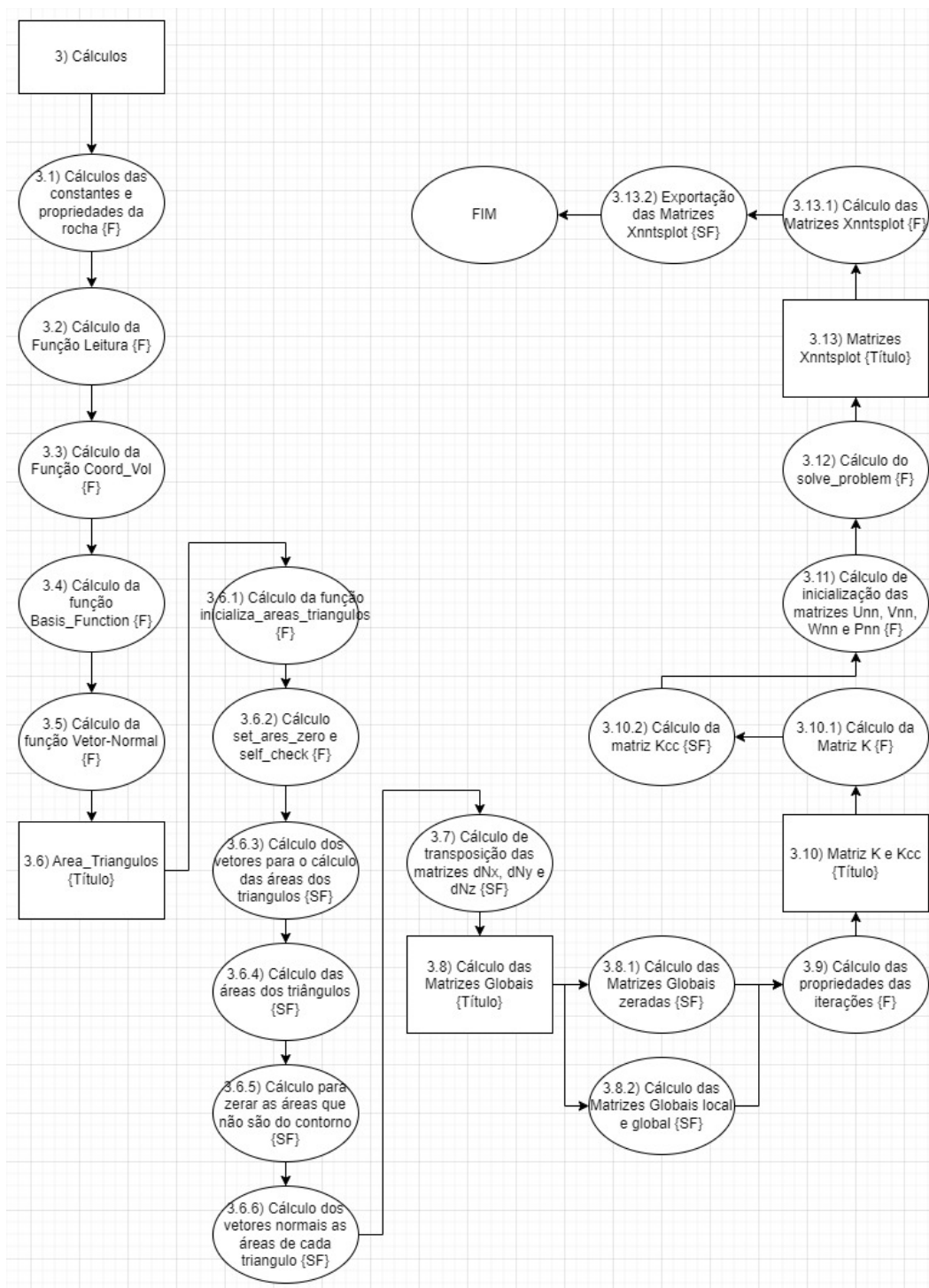


Figura 4 - Fluxograma Código em Python Parte 2

5 RESULTADOS

5.1 RESULTADOS ESPERADOS

Com base nas características da simulação e nas condições impostas, espera-se que o comportamento da pressão e da deformação siga um padrão condizente com os princípios físicos do problema. Durante a simulação, prevê-se que a pressão nos nós da malha diminua progressivamente ao longo do tempo, um fenômeno que ocorre devido à tendência do fluido a sair gradualmente através do meio rochoso, resultando em uma queda de pressão típica de processos de difusão em meios porosos.

Em regiões superiores da rocha, a pressão após a reação da aplicação da tensão tende a ser mais elevada, em função da concentração de fluido nas camadas superiores em reação a aplicação do esforço de compressão na base da rocha, gerando um gradiente de pressão entre o topo e a base da rocha. Inversamente, nos nós localizados nas regiões mais baixas, espera-se que a pressão seja menor, já que parte do fluido foi deslocada para as camadas superiores, resultando em um gradiente de pressão descendente.

No que diz respeito à deformação, é esperado que os nós próximos à base da rocha apresentem maiores deformações em comparação aos localizados no topo, devido à maior concentração de tensões nas camadas inferiores. Isso resulta em forças compressivas mais intensas e, conseqüentemente, maior deformação.

Dessa forma, os resultados da simulação devem refletir esses comportamentos esperados, oferecendo uma compreensão detalhada da distribuição de pressão e deformação ao longo do tempo e em diferentes regiões da rocha.

5.2 RESULTADOS OBTIDOS

Os valores e parâmetros utilizados para gerar os resultados encontram-se na Figura 5.

Parâmetro	Valor	Unidade
-----------	-------	---------

L	12	[m]
P_0	10^8	[Pa]
G	$6 \cdot 10^9$	[Pa]
α	0,79	—
ν	0,2	—
$S\epsilon$	$8 \cdot 10^{-11}$	[Pa ⁻¹]
k	$1,9 \cdot 10^{-13}$	[m ²]
μ	10^{-3}	[Pa.s]

Figura 5 - Parâmetros utilizados para avaliação do problema

O comportamento esperado para os deslocamentos foi evidenciado pelos resultados obtidos nas simulações, conforme evidenciado pelo gráfico exposto na Figura 6. A análise desses dados confirma que os nós localizados próximos à base da rocha exibem, de fato, as maiores deformações quando comparados aos nós situados nas regiões superiores. Esse resultado corrobora a hipótese de que a concentração da pressão exercida nas camadas inferiores, gera forças compressivas mais intensas na base, resultando em maiores deslocamentos.

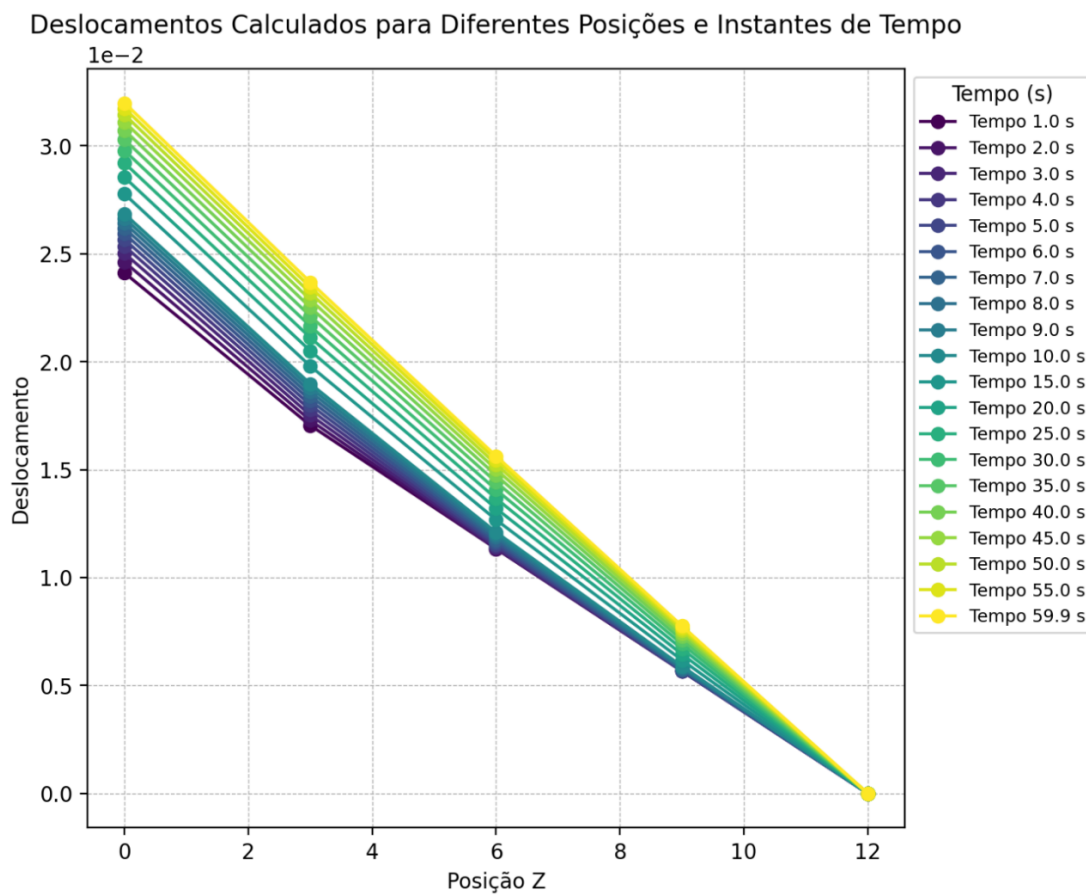


Figura 6 - Deslocamentos em metros calculados para diferentes posições em metros e instantes de tempo para os nós do eixo central da malha de 1536 elementos e passo de tempo 0.1s

Os resultados de deslocamento podem ser comparados e validados com os resultados analíticos 2D apresentados na Figura 7, conforme expostos no trabalho de (Reis, 2018). Tanto o formato, quanto a escala dos resultados é semelhante aos resultados analíticos, diferindo somente em valores absolutos.

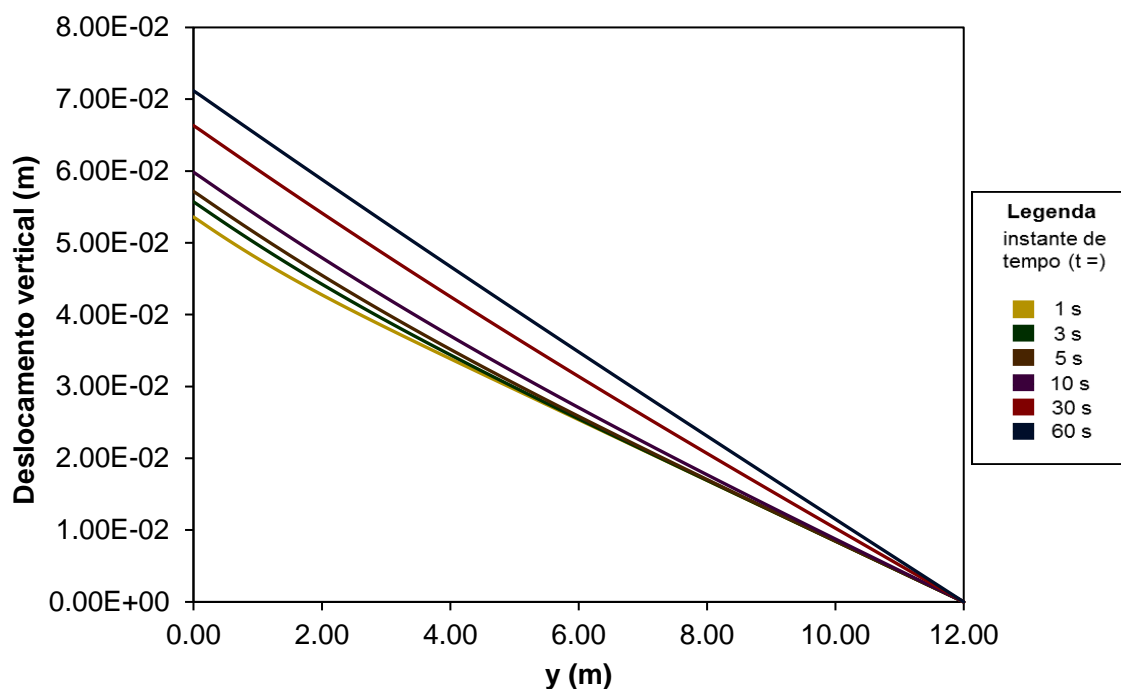


Figura 7 - Deslocamentos calculados analiticamente para diferentes posições e instantes de tempo em (Reis, 2018)

A pressão nos nós diminuiu ao longo do tempo, especialmente após a reação inicial à pressão aplicada na base da rocha. Isso se alinha com o comportamento esperado de dissipação da pressão à medida que o fluido se dispersa pela malha de nós da simulação. No início, a aplicação de pressão causa uma resposta imediata nos nós, mas com o passar do tempo, a pressão tende a decair, conforme o sistema busca atingir um estado de equilíbrio.

Além disso, ao final da simulação, o comportamento da pressão apresentou um padrão consistente com o esperado. Nós situados em posições mais elevadas da rocha mantiveram pressões mais altas, enquanto os nós localizados mais próximos da base exibiram pressões mais baixas. Esse gradiente de pressão era previsto devido à influência da distribuição do fluido ao longo da rocha, com maior acumulação de pressão nas regiões superiores e menor nas inferiores. Através gráfico exposto na Figura 8, é possível verificar detalhadamente esse comportamento. Os dados mostram claramente a queda de pressão ao longo do tempo, assim como a variação de pressão em diferentes posições na rocha, confirmando a correlação entre a posição em z dos nós e os níveis de pressão.

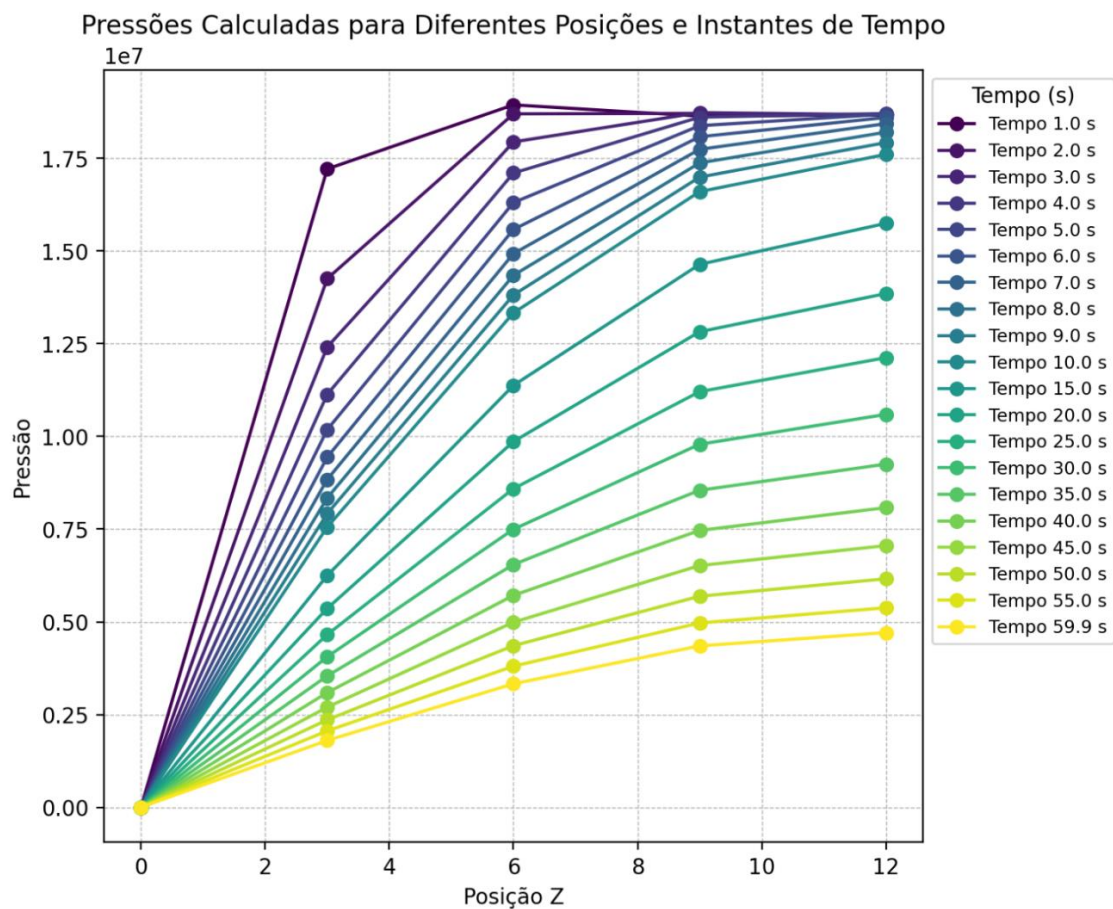


Figura 8 - Pressões em Pa calculadas para diferentes posições em metros e instantes de tempo para os nós do eixo central da malha de 1536 elementos e passo de tempo 0.1s

Os resultados de pressão podem ser comparados e validados com os resultados analíticos 2D apresentados na Figura 9, conforme expostos no trabalho de (Reis, 2018).

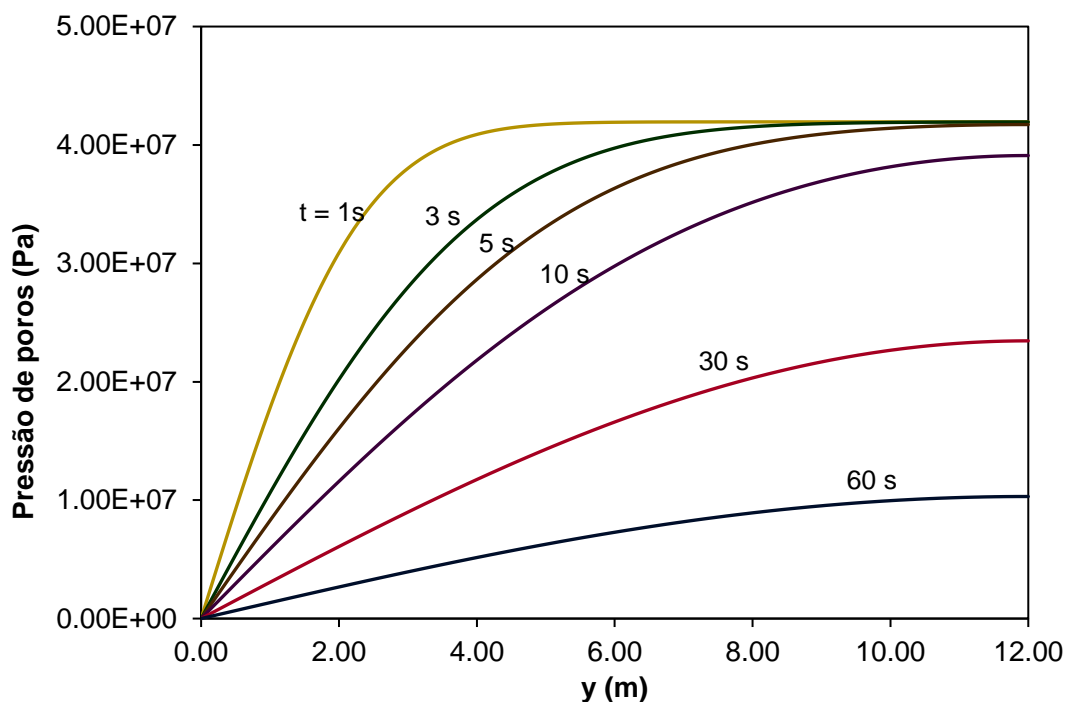


Figura 9 - Pressões calculadas analiticamente para diferentes posições e instantes de tempo em (Reis, 2018)

Outra análise realizada foi em relação a simetria dos resultados. Os valores de deslocamento e pressão analisados nas posições selecionadas da rocha apresentam simetria notável quando comparados a posições simétricas. Essa simetria indica uma distribuição uniforme das forças internas dentro da malha tetraédrica utilizada, bem como das deformações resultantes. Isso reflete a uniformidade das propriedades geomecânicas da rocha submetida às condições do carregamento aplicado e corrobora para a validação da simulação realizada. Como exemplo, temos as figuras 10e 11 que mostram os gráficos de pressão e valores de pressão para os nós localizados no eixo de coordenadas $X = 1.5$ e $Y = 10.5$ e o eixo simétrico com $X = 10.5$ e $Y = 1.5$.

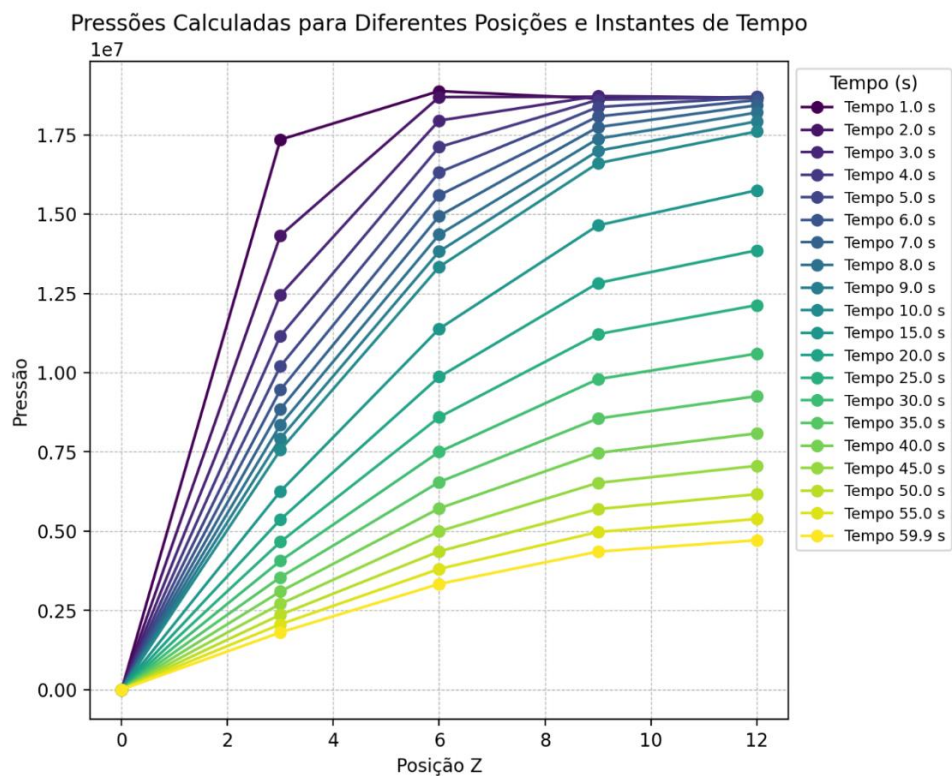


Figura 10 - Pressões Calculadas para Diferentes Posições e instantes para os nós de posição $X = 1.5$ e $Y = 10.5$ da malha de 1536 elementos e passo de tempo 0.1s

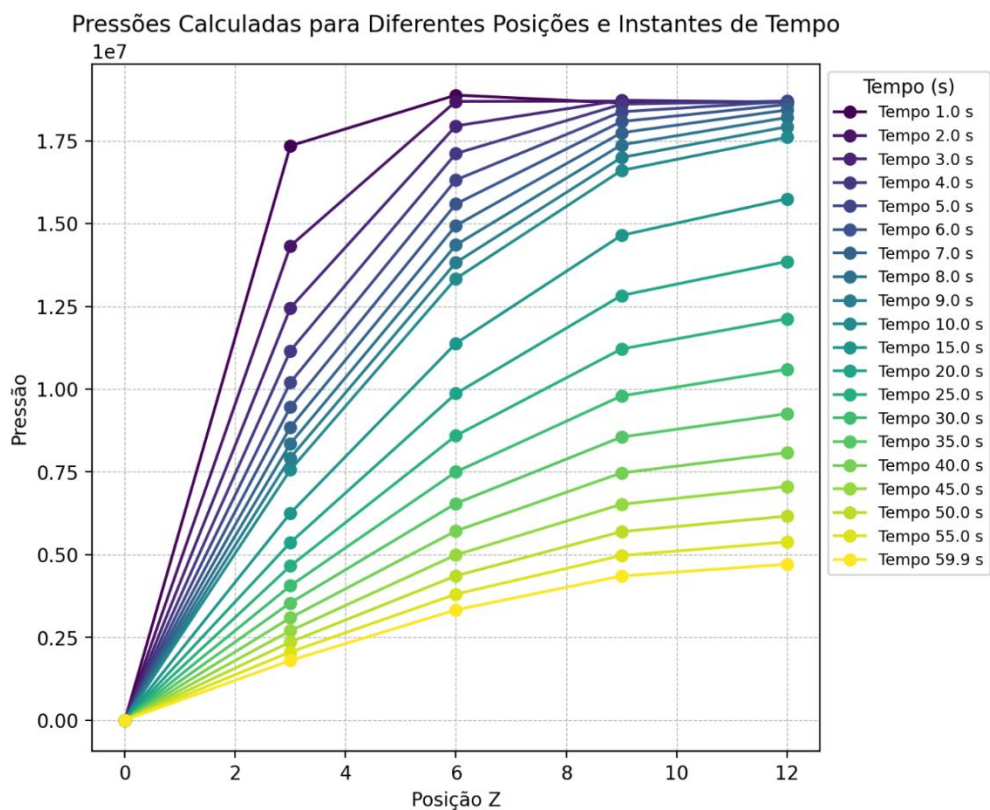


Figura 11 - Valores de Pressões Calculadas para Diferentes Posições e instantes para os nós de posição $X = 10.5$ e $Y = 1.5$ da malha de 1536 elementos e passo de tempo 0.1s

6 CONCLUSÃO

Os resultados das simulações confirmaram o comportamento esperado para os deslocamentos e pressões na rocha porosa. Observou-se que os nós localizados próximos à base da rocha apresentaram as maiores deformações em comparação com os nós das regiões superiores, corroborando a hipótese de que a concentração de pressão nas camadas inferiores gera forças compressivas mais intensas na base. Os gráficos de deslocamento e pressão forneceram suporte quantitativo para a previsão teórica, e os resultados de deslocamento foram comparados e validados com os resultados analíticos apresentados em (Wang, 2000) apresentando similaridade em formato e escala, apesar das diferenças em valores absolutos devido às limitações da simulação tridimensional em relação ao modelo bidimensional analítico.

A pressão nos nós diminuiu ao longo do tempo, especialmente após a reação inicial à pressão aplicada na base da rocha, alinhando-se com o comportamento esperado de dissipação da pressão à medida que o fluido se dispersa pela malha. No final da simulação, observou-se um padrão consistente, onde nós em posições mais elevadas mantiveram pressões mais altas, enquanto os nós próximos à base exibiram pressões mais baixas. Esse gradiente de pressão era previsto devido à distribuição do fluido ao longo da rocha, com maior acumulação nas regiões superiores.

Os dados confirmaram a correlação entre a posição em z dos nós e os níveis de pressão, indicando consistência na tendência dos resultados obtidos. No entanto, os gráficos apresentados diferem um pouco em termos de valores absolutos quando comparados aos resultados analíticos apresentados em (Wang, 2000). Essa discrepância sugere a possibilidade de erros na implementação do código em Python utilizado para a análise. O trabalho está em revisão e finalizar o processo de validação, com o objetivo de identificar e corrigir possíveis falhas no código e garantir maior precisão nos resultados apresentados.

Adicionalmente, a análise revelou a simetria nos valores de deslocamento e pressão quando comparados em posições simétricas da rocha. Essa simetria indica uma distribuição uniforme das forças internas e das deformações na malha tetraédrica utilizada, refletindo a uniformidade das propriedades geomecânicas da rocha sob as

condições de carregamento aplicadas. Essa observação corrobora a validação da simulação realizada.

O desenvolvimento e a implementação de uma solução computacional para o modelo poroelástico 3D utilizando o método dos elementos finitos representaram um avanço significativo na simulação de fenômenos poroelásticos complexos. Ao expandir as equações poroelásticas de 2D para o cenário tridimensional e construir um algoritmo capaz de resolver essas equações em um ambiente computacional, este trabalho proporcionou uma ferramenta valiosa para a análise detalhada do comportamento de meios porosos tridimensionais sob variações de pressão do fluido ou tensões na matriz sólida.

A utilização de modelos computacionais permitiu maior flexibilidade e uma compreensão do processo de modelagem, para simular problemas complexos sem esgotar rapidamente os recursos computacionais disponíveis. Embora existam softwares como o COMSOL com implementações baseadas em elementos finitos, a abordagem adotada facilitará a escalabilidade dos recursos computacionais e a exploração de diferentes arquiteturas e condições de execução. Isso é particularmente relevante em áreas como a engenharia de petróleo, onde simulações precisas podem levar a reduções significativas de custos operacionais e aumento da segurança.

Os achados deste trabalho têm implicações em diversas aplicações, incluindo a previsão do comportamento de reservatórios na engenharia de petróleo, a compreensão de processos de fluxo em tecidos biológicos na medicina e a análise do fluxo de água subterrânea e respostas de rochas a estresses tectônicos na geologia. A capacidade de modelar e simular problemas poroelásticos tridimensionais com precisão e eficiência abre novas oportunidades para pesquisas e aplicações práticas nesses campos.

Em suma, este estudo demonstrou a viabilidade e os benefícios de desenvolver uma solução computacional para modelos poroelásticos 3D utilizando o método dos elementos finitos. A simulação bem-sucedida e a validação com resultados analíticos confirmam a precisão do modelo e a eficácia da abordagem adotada. Este trabalho contribui para o avanço da modelagem poroelástica e fornece uma base sólida para

futuros desenvolvimentos na simulação de interações complexas entre fluxo de fluidos e deformações em meios porosos.

7 TRABALHOS FUTUROS

Como continuidade deste trabalho, propõe-se a extensão da formulação atual para permitir a análise da precisão em função do passo de tempo. Investigar como diferentes passos de tempo afetam os resultados numéricos pode fornecer ideias valiosas sobre a estabilidade e a eficiência do método utilizado. Essa análise permitirá otimizar o equilíbrio entre a precisão dos resultados e o custo computacional, essencial para aplicações em sistemas complexos.

Além disso, é recomendada a realização de análises utilizando uma malha mais refinada, com um número maior de elementos. O refinamento da malha tende a aumentar a acurácia espacial dos resultados. Essa abordagem contribuirá para a validação do modelo numérico, assegurando que os resultados não são influenciados por limitações impostas pela discretização grosseira.

Para aprofundar a análise da integridade dos resultados obtidos através de simulações mais abrangentes, pode ser explorada a utilização de diferentes malhas tetraédricas com variadas discretizações, o que permitirá avaliar como a resolução da malha influencia a precisão e a estabilidade das simulações. Além disso, considerar espaçamentos de tempo distintos e períodos de simulação variados, permitirá verificar a sensibilidade do modelo às condições temporais e garantir que os passos de tempo adotados não comprometam a fidelidade dos dados.

Integrando essas propostas, espera-se aprofundar a compreensão dos fenômenos estudados e aprimorar a confiabilidade dos resultados obtidos. A análise combinada da influência do passo de tempo, do refinamento da malha e da geometria do domínio permitirá desenvolver um modelo numérico mais robusto e preciso, contribuindo significativamente para avanços futuros na área de pesquisa.

REFERENCIAS

BERGER, L. A Low Order Finite Element Method for Poroelasticity with Applications to Lung Modelling. 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1609.06892>. Acesso em: 10 nov. 2024.

BIOT, M. A. General Theory of Three-Dimensional Consolidation. *Journal of Applied Physics*, v. 12, n. 2, p. 155–164, 1941.

BIOT, M. A. Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid. *Journal of Applied Physics*, v. 26, n. 2, p. 182–185, 1955.

BELYTSCHKO, T.; KRIEG, R. D.; LIN, J. I. *Element-Free Galerkin Methods*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*. 9. ed. Boston: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010.

CHENG, A. H.-D. *Theory and Applications of Transport in Porous Media Poroelasticity*. Oxford, Mississippi: Springer Nature, 2016.

CHENG, A. H.-D.; DETOURNAY, E. Fundamentals of Poroelasticity. In: *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects*, v. II, Analysis and Design Method, Pergamon Press, 1993, p. 113-171.

COMSOL. Poroelasticity. Disponível em: <https://www.comsol.com/multiphysics/poroelasticity>. Acesso em: 04 ago. 2023.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Wiley, 2001.

COUSSY, O. *Poromechanics*. Wiley, 2003.

DETOURNAY, E.; CHENG, A. H.-D. *Fundamentals of Poroelasticity*, Elsevier, 1993. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-040615-2.50011-3>. Acesso em: 10 nov. 2024.

Engelder, Terry. *Stress Regimes in the Lithosphere*. Princeton University Press, 1993. JSTOR, <http://www.jstor.org/stable/j.ctt7zv82v>. Accessed 10 Nov. 2024.

HARSH. Basics of Finite Element Method: Direct Stiffness Method - Part 1. Medium. Disponível em: <https://ichbinharsh.medium.com/basics-of-finite-element-method-direct-stiffness-method-part-1-2676f3ee062a>. Acesso em: 04 ago. 2023.

HUGHES, T. J. R. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, 2000.

KATTAN, P. I. MATLAB Guide to Finite Elements: An Interactive Approach. 2. ed. Berlin: Springer-Verlag, 2008. ISBN 978-3-540-70697-7.

LAVRIK, V.; HOMENYUK, S.; MEZHUZEV, V. A Derivation of the Stiffness Matrix for a Tetrahedral Finite Element by the Method of Moment Schemes, 2020. Disponível em: <https://ceur-ws.org/Vol-2711/paper17.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2024.

LOGAN, D. L. A First Course in the Finite Element Method. 4. ed. Toronto: Nelson, Thomson Canada Limited, 2007. ISBN 0-534-55298-6.

MOBEDI, M.; BARISIK, M.; NAKAYAMA, A. Heat and Fluid Flow of Gases in Porous Media with Micropores: Slip Flow Regime: Analysis, Design, and Application, 2016.

NOORISHAD, J.; AYATOLLAHI, M. S.; WITHERSPOON, P. A. A Finite-Element Method for Coupled Stress and Fluid Flow Analysis in Fractured Rock Masses. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 1982. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0148906282908889>. Acesso em: 10 nov. 2024.

PARKER, R. L. Geophysical Inverse Theory. Princeton: Princeton University Press, 1994. ISBN 0-691-03634-9.

PRÉVOST, J. H. Mechanics of continuous porous media. International Journal of Engineering Science, v. 18, n. 8, p. 787-800, 1980. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020722580900269>. Acesso em: 10 nov. 2024.

RANDERSON, J.; BOKHARI, S. Finite Element Analysis for Engineers. Springer, 2016.

REIS, Livia Bueno. Estudo do meio poroelástico linear com auxílio do método dos elementos finitos. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia de Petróleo) – Universidade de São Paulo, Santos, 2018.

SMITH, G. D. Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. Oxford University Press, 1985.

VU, N. M. Modeling of Fluid Flow through a Fractured Porous Medium by Using a Single Singular Integral Equation, 2023. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Ngoc-Vu-41/publication/356535966_Modeling_of_fluid_flow_through_a_fractured_porous_medium_by_using_a_single_singular_integral_equation/links/619f8bb5f8565a76fdf46d76/Modeling-of-fluid-flow-through-a-fractured-porous-medium-by-using-a-single-singular-integral-equation.pdf. Acesso em: 10 nov. 2024.

WANG, H. F. Theory of Linear Poroelasticity with Applications to Geomechanics and Hydrogeology. Princeton: Princeton University Press, 2000.

YUAN, Q.; YIN, D.; CHEN, Y. A Simple Line-Element Model for Three-Dimensional Analysis of Steady Free Surface Flow through Porous Media. Water, 2023. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2073-4441/15/6/1030>. Acesso em: 10 nov. 2024.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013.



IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE MODELO POROELÁSTICO LINEAR 3D

Luís Gustavo Picolo

Orientador: Prof. Ronaldo Carrion

Artigo Sumário referente à disciplina PMI3349 – Trabalho de Conclusão de Curso II

Este artigo foi preparado como requisito para completar o curso de Engenharia de Petróleo na Escola Politécnica da USP.

Template versão 2021v01.

Resumo

A poroelasticidade é um campo interdisciplinar que une a mecânica dos sólidos porosos e a mecânica dos fluidos. Este trabalho de conclusão de curso expande a formulação poroelástica de 2D para 3D, permitindo simulações mais precisas e realistas. Utilizando o método dos elementos finitos e malhas tetraédricas, a simulação numérica é realizada em Python, analisando o deslocamento e a pressão em uma rocha saturada com fluidos submetida a esforços de compressão.

Este estudo não apenas avança a compreensão teórica da poroelasticidade em 3D, mas também demonstra a aplicação prática de técnicas numéricas para resolver problemas em engenharia geotécnica e geomecânica. Exemplos de tais problemas incluem geometrias irregulares, propriedades heterogêneas e anisotropias. Aplicações práticas desse estudo abrangem casos como a subsidência em torno de poços de extração, onde é possível considerar condições simplificadas de propriedades homogêneas. Assim, a pesquisa proporciona uma base sólida para futuras investigações e aplicações no campo da engenharia para a análise e mitigação de fenômenos geomecânicos.

Abstract

Poroelasticity is an interdisciplinary field that combines the mechanics of porous solids and fluid mechanics. This thesis expands the poroelastic formulation from 2D to 3D, allowing for more precise and realistic simulations. Using the finite element method and tetrahedral meshes, the numerical simulation is performed in Python, analyzing displacement and pressure in a fluid-saturated rock subjected to compressive stresses.

This study not only advances the theoretical understanding of 3D poroelasticity but also demonstrates the practical application of numerical techniques to solve problems in geotechnical and geomechanical engineering. Examples of such problems include irregular geometries, heterogeneous properties, and anisotropies. Practical applications of this study encompass cases such as subsidence around extraction wells, where simplified conditions of homogeneous properties can be considered. Thus, this research provides a solid foundation for future investigations and applications in engineering for the analysis and mitigation of geomechanical phenomena.

1. Introdução

A poroelasticidade descreve as interações complexas entre o fluxo de fluidos e as deformações dos sólidos em meios porosos, como rochas, solos e tecidos biológicos (WANG, 2000). Quando uma carga externa é aplicada a esses materiais, a pressão nos fluidos internos varia devido à compressão dos poros, provocando o movimento do fluido através da matriz porosa. Este trabalho tem como objetivo desenvolver e implementar uma solução computacional para o modelo poroelástico 3D utilizando o

método dos elementos finitos, expandindo as equações poroelásticas de 2D para o cenário tridimensional e construindo um algoritmo capaz de resolver essas equações em um ambiente computacional.

2. Metodologia

Neste projeto, escolhemos o elemento finito tetraédrico para nossa análise poroelástica 3D devido à sua simplicidade geométrica e versatilidade na adaptação a várias configurações de domínios tridimensionais. Além disso, a simplicidade dos elementos isoparamétricos facilita a definição e o cálculo das funções de forma.

O propósito deste trabalho é resolver o sistema de equações matriciais $[\mathbf{M}]\{\mathbf{U}\}^{t+\Delta t} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\}^k = \{\mathbf{F}\}^k$ sendo k uma notação genérica que pode apontar para aproximação explícita $\mathbf{k} = \mathbf{t}$ ou implícita $\mathbf{k} = \mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}$ ou mista ao partir dos operadores \mathbf{K} e \mathbf{F} para atender parte $\mathbf{k} = \mathbf{t}$ e parte $\mathbf{k} = \mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}$. Esse sistema representa as equações diferenciais parciais que governam a difusão de fluidos na rocha. A matriz $[\mathbf{K}]$ é a matriz de rigidez, que descreve as propriedades elásticas da rocha e sua interação com o fluido. Os vetores U, V e W representam os deslocamentos nas três direções e P a pressão de poros, enquanto o vetor F contém as forças externas que atuam sobre o sistema. O processo de solução é realizado de forma iterativa, avançando passo a passo no tempo. Em cada passo, a solução do sistema de equações fornece os deslocamentos e pressões dos poros para aquele instante específico. Estes valores são então armazenados para uso futuro.

$$K = \begin{bmatrix} (1-\beta)[S11]_{NXN} & (1-\beta)[S12]_{NXN} & (1-\beta)[S13]_{NXN} & (1-\beta)[S14]_{NXN} \\ (1-\beta)[S21]_{NXN} & (1-\beta)[S22]_{NXN} & (1-\beta)[S23]_{NXN} & (1-\beta)[S24]_{NXN} \\ (1-\beta)[S31]_{NXN} & (1-\beta)[S32]_{NXN} & (1-\beta)[S33]_{NXN} & (1-\beta)[S34]_{NXN} \\ [A1]_{NXN} & [A2]_{NXN} & [A3]_{NXN} & [A4]_{NXN} + \Delta t(1-\beta)[A5]_{NXN} \end{bmatrix}_{4X4}$$

$$x = \begin{pmatrix} U_1^{t+\Delta t} \\ \vdots \\ U_n^{t+\Delta t} \\ V_1^{t+\Delta t} \\ \vdots \\ V_n^{t+\Delta t} \\ W_1^{t+\Delta t} \\ \vdots \\ W_n^{t+\Delta t} \\ P_1^{t+\Delta t} \\ \vdots \\ P_n^{t+\Delta t} \end{pmatrix}_{4X1}$$

$$F = \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix} - [S^{11}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} U_1^t \\ \vdots \\ U_N^t \end{pmatrix} - [S^{12}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} V_1^t \\ \vdots \\ V_N^t \end{pmatrix} - [S^{13}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} W_1^t \\ \vdots \\ W_N^t \end{pmatrix} - [S^{14}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} P_1^t \\ \vdots \\ P_N^t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix} - [S^{21}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} U_1^t \\ \vdots \\ U_N^t \end{pmatrix} - [S^{22}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} V_1^t \\ \vdots \\ V_N^t \end{pmatrix} - [S^{23}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} W_1^t \\ \vdots \\ W_N^t \end{pmatrix} - [S^{24}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} P_1^t \\ \vdots \\ P_N^t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix} - [S^{31}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} U_1^t \\ \vdots \\ U_N^t \end{pmatrix} - [S^{32}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} V_1^t \\ \vdots \\ V_N^t \end{pmatrix} - [S^{33}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} W_1^t \\ \vdots \\ W_N^t \end{pmatrix} - [S^{34}]_{NXN}\beta \begin{pmatrix} P_1^t \\ \vdots \\ P_N^t \end{pmatrix} \\ \Delta t \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix}_{NX1} - [A^1]_{NXN} \begin{pmatrix} -U_1^t \\ \vdots \\ -U_N^t \end{pmatrix}_{NX1} - [A^2]_{NXN} \begin{pmatrix} -V_1^t \\ \vdots \\ -V_N^t \end{pmatrix}_{NX1} - [A^3]_{NXN} \begin{pmatrix} -W_1^t \\ \vdots \\ -W_N^t \end{pmatrix}_{NX1} - [A^4]_{NXN} \begin{pmatrix} -P_1^t \\ \vdots \\ -P_N^t \end{pmatrix}_{NX1} - [A^5]_{NXN}\Delta t\beta \begin{pmatrix} -P_1^t \\ \vdots \\ -P_N^t \end{pmatrix}_{NX1} \end{array} \right\}_{4X1}$$

(1)

onde:

$$S_{LK}^{11} = \int \int \int_D \left[\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial x} + G \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial y} + G \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial z} \right] dx dy dz$$

$$S_{LK}^{12} = \int \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial y} + G \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial x} \right] dx dy dz$$

$$S_{LK}^{13} = \int \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial z} + G \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial x} \right] dx dy dz$$

$$S_{LK}^{14} = \int \int \int_D \left[\alpha \frac{\partial N_K}{\partial x} N_L \right] dx dy dz$$

$$S_{LK}^{21} = \int \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial x} + G \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial y} \right] dx dy dz$$

$$S_{LK}^{22} = \int \int \int_D \left[\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial y} + G \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial x} + G \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial z} \right] dx dy dz$$

$$S_{LK}^{23} = \int \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial z} + G \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial y} \right] dx dy dz$$

$$S_{LK}^{24} = \int \int \int_D \left[\alpha \frac{\partial N_K}{\partial y} N_L \right] dx dy dz$$

$$S_{LK}^{31} = \int \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial x} + G \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial z} \right] dx dy dz$$

$$S_{LK}^{32} = \int \int \int_D \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial y} + G \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial z} \right] dx dy dz$$

$$S_{LK}^{33} = \int \int \int_D \left[\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial z} + G \frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial x} + G \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial y} \right] dx dy dz$$

$$S_{LK}^{34} = \int \int \int_D \left[\alpha \frac{\partial N_K}{\partial z} N_L \right] dx dy dz$$

$$B_L^1 = \int \int_{\Gamma} [(\sigma_{xx} + \alpha p)n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z] N_L dA$$

$$B_L^2 = \int \int_{\Gamma} [(\sigma_{yx}n_x + (\sigma_{yy} + \alpha p)n_y + \sigma_{yz}n_z] N_L dA$$

$$B_L^3 = \int \int_{\Gamma} [(\sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y + (\sigma_{zz} + \alpha p)n_z] N_L dA$$

$$[A^1] \frac{dU}{dt} + [A^2] \frac{dV}{dt} + [A^3] \frac{dW}{dt} + [A^4] \frac{dP}{dt} = B^4$$

$$A_{LK}^1 = \int \int \int_D \alpha \frac{\partial N_K}{\partial x} N_L dx dy dz$$

$$A_{LK}^2 = \int \int \int_D \alpha \frac{\partial N_K}{\partial y} N_L dx dy dz$$

$$A_{LK}^3 = \int \int \int_D \alpha \frac{\partial N_K}{\partial z} N_L dx dy dz$$

$$A_{LK}^4 = \int \int \int_D S_e N_L N_K dx dy dz$$

$$A_{LK}^5 = \int \int \int_D \frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial N_K}{\partial x} \frac{\partial N_L}{\partial x} + \frac{\partial N_K}{\partial y} \frac{\partial N_L}{\partial y} + \frac{\partial N_K}{\partial z} \frac{\partial N_L}{\partial z} \right] dx dy dz$$

$$B_L^4 = \int \int_\tau \left[\frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial y} n_y + \frac{\partial p}{\partial z} n_z \right] N_L dA$$

Os parâmetros utilizados na simulação incluem o módulo de cisalhamento $G = 6 \times 10^9 Pa$, a razão de Poisson $\nu = 0,2$, o coeficiente de compressibilidade efetiva $S_e = 8 \times 10^{-11} Pa^{-1}$, o coeficiente de Biot $\alpha = 0,79$ e a permeabilidade da rocha $k = 1.9 \times 10^{-13} m^2$, cada um desempenhando um papel essencial na caracterização do comportamento mecânico e do fluxo em rochas porosas: G e ν influenciam a resposta elástica da rocha sob esforços mecânicos; S_e e α avaliam as interações entre a matriz sólida e os fluidos nos poros, para entender a deformação dependente da pressão de poros; e k é chave na determinação do fluxo de fluidos dentro da rocha, afetando a dissipação de pressão e a distribuição do fluido. Outros parâmetros importantes são o comprimento, largura e altura da rocha de 12 metros, a pressão inicial aplicada $P_0 = 1 \times 10^8$ e a viscosidade dinâmica do fluido $\mu = 1 \times 10^{-3} Pa \cdot s$; P_0 influencia a resposta inicial do sistema ao ser aplicada na base da rocha, e μ afeta a resistência ao fluxo do fluido nos poros, influenciando a taxa de dissipação de pressão e o tempo para o sistema atingir o equilíbrio, todos selecionados para refletir condições reais e essenciais para a simulação precisa do comportamento mecânico e de fluxo em rochas porosas. Além dos parâmetros mencionados, a malha utilizada para a simulação foi composta por 1536 elementos (Figura 1). Esse número representa uma quantidade intermediária, para oferecer um equilíbrio entre a resolução dos detalhes e a eficiência computacional. Dessa forma, a escolha da malha com 1536 elementos garante que o modelo atenda aos requisitos de economia computacional, mantendo a simulação robusta e eficiente.

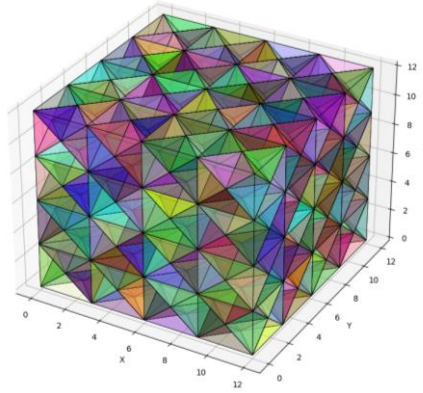


Figura 1 – Malha Tetraédrica de 1536 elementos

3. Resultados

A implementação realizada é similar ao problema de Terzaghi e os resultados das simulações evidenciaram o comportamento esperado para os deslocamentos e pressões na rocha, conforme exposto nas Figuras 2, 4 e 8. A análise dos dados confirma que os nós próximos à base da rocha exibem as maiores deformações em comparação com os nós das regiões superiores, corroborando a hipótese de que a concentração de pressão nas camadas inferiores gera forças compressivas mais intensas na base. A pressão nos nós diminuiu ao longo do tempo, especialmente após a reação inicial à pressão aplicada na base, alinhando-se ao comportamento esperado de dissipação da pressão à medida que o fluido se dispersa pela malha de nós da simulação. Inicialmente, a aplicação de pressão causa um incremento imediato de pressão (resposta não drenada), mas com o passar do tempo, a pressão tende a decair conforme o sistema busca atingir um estado de equilíbrio.

No final da simulação, o comportamento da pressão apresentou um padrão consistente com o esperado: ao final da simulação, nós em posições mais elevadas mantiveram pressões mais altas, enquanto os nós próximos à base exibiram pressões mais baixas. Esse gradiente de pressão era previsto

devido à distribuição do fluido ao longo da rocha, com maior acumulação nas regiões superiores. Os dados, mostram claramente a queda de pressão ao longo do tempo e a variação de pressão em diferentes posições, confirmando a correlação entre a posição em z dos nós e os níveis de pressão. Os resultados de deslocamento e pressão podem ser comparados os resultados analíticos disponíveis no trabalho de (Reis, 2018) e expostos nas Figuras 2, 3, 4 e 5. Tanto o formato quanto a escala dos resultados são semelhantes aos analíticos, diferindo apenas em valores absolutos.

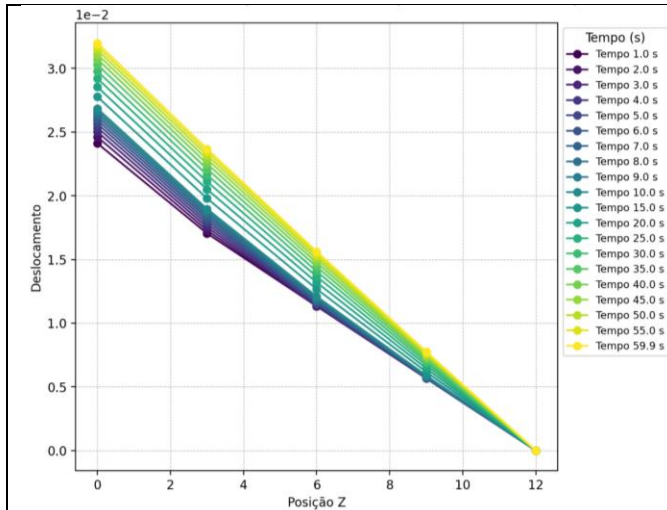


Figura 2 - Deslocamentos calculados para diferentes posições e instantes de tempo para os nós do eixo central da malha de 1536 elementos e passo de tempo 0.1s

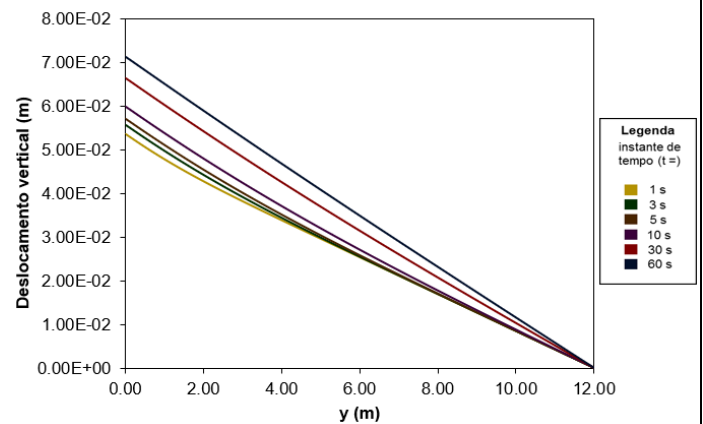


Figura 3 - Deslocamentos calculados analiticamente para diferentes posições e instantes de tempo

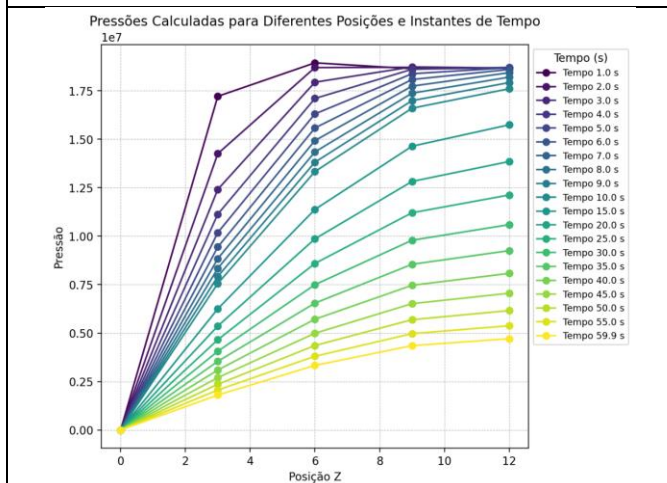


Figura 4 - Pressões calculadas para diferentes posições e instantes de tempo para os nós do eixo central da malha de 1536 elementos e passo de tempo 0.1s

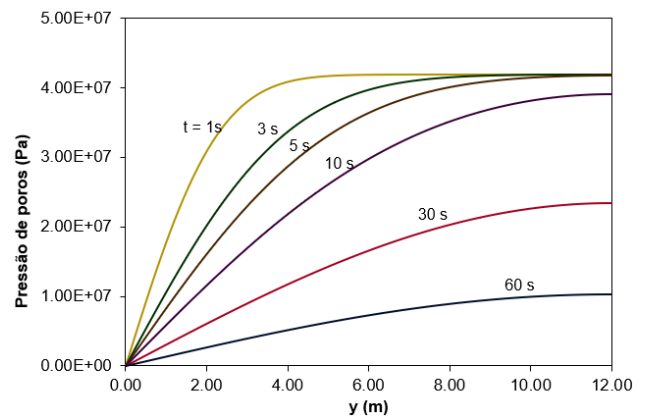


Figura 5 - Pressões calculadas analiticamente para diferentes posições e instantes de tempo

4. Conclusão

Os resultados das simulações confirmaram o comportamento esperado para os deslocamentos e pressões na rocha porosa. Observou-se que os nós localizados próximos à base da rocha apresentaram as maiores deformações em comparação com os nós das regiões superiores, corroborando a hipótese de que a concentração de pressão nas camadas inferiores gera forças compressivas mais intensas na base. Os gráficos de deslocamento e pressão forneceram suporte quantitativo para a previsão teórica, e os resultados de deslocamento foram comparados com os resultados analíticos de Reis (2018),

apresentando similaridade em formato e escala, apesar das diferenças em valores absolutos. Os dados confirmaram a correlação entre a posição em z dos nós e os níveis de pressão, indicando consistência na tendência dos resultados obtidos. No entanto, os gráficos apresentados diferem um pouco em termos de valores absolutos quando comparados aos resultados analíticos apresentados em (Wang, 2000). Essa discrepância sugere a possibilidade de erros na implementação do código em Python utilizado para a análise. O trabalho está em revisão e finalizar o processo de validação, com o objetivo de identificar e corrigir possíveis falhas no código e garantir maior precisão nos resultados apresentados.

O desenvolvimento e a implementação de uma solução computacional para o modelo poroelástico 3D utilizando o método dos elementos finitos representaram um avanço significativo na simulação de fenômenos poroelásticos complexos. Ao expandir as equações poroelásticas de 2D para o cenário tridimensional e construir um algoritmo capaz de resolver essas equações em um ambiente computacional, este trabalho proporcionou uma ferramenta valiosa para a análise detalhada do comportamento de meios porosos tridimensionais sob variações de pressão do fluido ou tensões na matriz sólida.

Em suma, este estudo demonstrou a viabilidade e os benefícios de desenvolver uma solução computacional para modelos poroelásticos 3D utilizando o método dos elementos finitos. A simulação bem-sucedida e a validação com resultados analíticos confirmam a precisão do modelo e a eficácia da abordagem adotada. Este trabalho contribui para o avanço da modelagem poroelástica e fornece uma base sólida para futuros desenvolvimentos na simulação de interações complexas entre fluxo de fluidos e deformações em meios porosos.

5. Referências

- REIS, Livia Bueno. Estudo do meio poroelástico linear com auxílio do método dos elementos finitos. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia de Petróleo) – Universidade de São Paulo, Santos, 2018.
- WANG, H. F. Theory of Linear Poroelasticity with Applications to Geomechanics and Hydrogeology. Princeton: Princeton University Press, 2000.