

Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística

**Ensino e Divulgação de Topologia:
abordagens a partir da fórmula de Euler sobre poliedros**

Monografia desenvolvida na disciplina MAT0451 - Projeto de Ensino de Matemática

Guilherme da Costa Cruz
Orientador: Eduardo Colli

São Paulo - SP
2023

Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística

**Ensino e Divulgação de Topologia:
abordagens a partir da fórmula de Euler sobre poliedros**

Guilherme da Costa Cruz

Esta versão da monografia contém as correções e alterações sugeridas pela Banca Examinadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 12 de Dezembro de 2023.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Eduardo Colli (orientador)
Prof. Dr. Ivan Struchiner
Prof. Dr. Rogério Augusto dos Santos Fajardo

São Paulo - SP
2023

Resumo

Este trabalho tem como foco a proposta de abordagens para a divulgação e o ensino de Topologia para estudantes de Ensino Fundamental e Médio. Tais propostas são inspiradas no desenvolvimento histórico dessa área da Matemática, tendo como ponto de partida as fórmulas de Euler e de Descartes sobre poliedros. Para além da mera proposição, foi possível aplicá-las através de oficinas realizadas em turmas de Ensino Fundamental e Médio de uma escola de São Paulo. Além da exposição de tais oficinas e do embasamento matemático que a inspirou, o presente texto também apresenta uma construção de uma bola cabeluda com o intuito de ilustrar o teorema que carrega o seu nome.

Abstract

This work focus on presenting several approaches related to the divulgation and teaching of Topology for middle and high school students. These proposals are inspired on the historical development of this branch of Mathematics, and use Euler's and Descartes' formulas about polyhedra as starting points. Beyond simply proposing approaches, it was possible to apply them through workshops which were done in middle and high school classes in a São Paulo school. Besides presenting the application of such workshops and the mathematical background which inspired it, this text also presents a construction of a hairy ball with the intention of illustrating the theorem which carries its name.

Conteúdo

Introdução	5
1 Exposição teórico-matemática	7
1.1 Poliedros e Superfícies	7
1.2 A(s) fórmula(s) de Euler, Descartes e Poincaré	8
1.3 Consequências da fórmula de Euler	12
1.4 Teoremas sobre a característica de Euler	15
2 Construindo uma bola cabeluda	19
2.1 Proposta e Material utilizado	19
2.2 Confecção	21
2.3 Discussão	23
3 Oficinas de Topologia para o Ensino Básico	25
3.1 Descrição das oficinas	25
3.2 Aplicação das oficinas	29
Discussão Final	35
A Teorema de Classificação de Superfícies	37
B Planificação de toros poliedrais	45

Introdução

No Ensino Básico, a Geometria é vista como a parte mais visual da Matemática, mas, ainda assim, muitas vezes é dado um enfoque bastante grande à aplicação mecânica de fórmulas. Isso pode acabar por reduzir o caráter criativo que a Matemática e, em especial, a Geometria possuem. Por outro lado, acreditamos que é importante mostrar aos estudantes a imensidade de possibilidades que existem nos campos de estudo da Matemática. Assim, pensamos que um reino da Matemática consideravelmente desconhecido para a sociedade em geral, mas que possui conceitos e ideias bastante visuais é o da Topologia.

Mesmo assim, devemos lembrar que a grade curricular escolar já possui uma variedade de conteúdos, e que a inclusão de mais um tema necessita, no mínimo, de uma boa quantidade de bom senso. Assim, para propor novos assuntos, torna-se necessário a realização de diálogos com conteúdos já previstos na grade curricular. Esse é o caso, por exemplo, da fórmula de Euler, que é generalizada dentro da Topologia para qualquer superfície, mas que dialoga com a habilidade EF06MA17 da BNCC: “quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial”.

Em outro aspecto, acreditamos que o tema de Topologia seja propício para evidenciar a interface entre Arte e Matemática. Com efeito, muitas superfícies topológicas, como modelos da faixa de Möbius e da garrafa de Klein, são objetos de arte (veja [FS08] por exemplo). Desse modo, pode-se abrir um campo para atividades interdisciplinares que tenham como principal objetivo estimular a criatividade dos alunos.

O principal objetivo deste trabalho está em apontar caminhos para o ensino de Topologia de Superfícies, com especial enfoque em estudantes de Ensino Fundamental e Médio. Tais caminhos são, de certa forma, inspirados no próprio desenvolvimento histórico da área e têm como ponto de partida as fórmulas de Euler (1750) e de Descartes (~1630) sobre poliedros. A primeira delas afirma que um poliedro convexo com F faces, A arestas e V vértices satisfaz a igualdade $V - A + F = 2$, enquanto que a segunda afirma que a deficiência angular total de qualquer poliedro convexo é igual a 720° (ou 4π). Como pode-se notar, tais resultados trazem à mente uma visão bastante geral sobre o tipo de informação que é comum a uma diversidade de formas geométricas. Basicamente, essa é a essência da Topologia, a área da Matemática que estuda as propriedades de objetos geométricos preservadas quando são submetidos a deformações contínuas, como esticar, inflar, entortar ou encolher. Com o passar dos anos, ao longo do século XIX, a fórmula de Euler foi analisada para poliedros não-convexos e notou-se que existem tanto casos em que ela continua sendo válida (como um poliedro “com degraus”) como casos em que não (como um poliedro com buracos). Apenas no fim do século, o trabalho de Poincaré pôde dar a resposta definitiva para tais estudos: um poliedro satisfaz a fórmula de Euler quando ele é topologicamente equivalente a uma esfera. Atualmente, o número dado por $V - A + F$ é comumente chamado de característica de Euler-Poincaré.

Na literatura, também puderam ser encontrados outros trabalhos que propõem atividades que visam o ensino de Topologia no Ensino Básico. Entre eles, elencamos as monografias de Ferron [Fer17], Sugarman [Sug14] e Fiorotto [Fio20]. A principal diferença do presente trabalho em relação a esses é, de fato, o uso da fórmula de Euler como ingrediente central e motivador.

Estrutura do texto: No primeiro capítulo, são apresentadas algumas das bases matemáticas que justificam e esclarecem a relação que a fórmula de Euler possui com a Topologia. Também, é apresentada a importância de tal fórmula para a Matemática, através da exposição de diferentes problemas nos quais ela pode ser aplicada. No capítulo seguinte, é apresentado o processo de construção de um objeto físico que visa ilustrar um importante resultado de Topologia, o teorema da bola cabeluda. Isso

foi feito com o intuito de fornecer mais uma ferramenta para a divulgação de Topologia. No terceiro capítulo, são apresentados os principais resultados do presente trabalho: oficinas de Topologia que foram aplicadas com turmas de Ensino Fundamental e Médio. Assim, são descritas tanto as propostas ideais das oficinas quanto as suas aplicações. Num capítulo final, são discutidos outros tópicos de Topologia que não foram abordados aqui, mas que poderiam ser proveitosamente analisados tendo como foco as suas didatizações.

Terminologia e notações matemáticas: Quando estivermos falando sobre um poliedro, as letras maiúsculas V , A e F serão usadas para denotar, respectivamente, as suas quantidades de vértices, arestas e faces. Além disso, as palavras “isomorfismo” ou “isomorfas” sempre serão utilizadas para se referir a isomorfismos topológicos; em outras palavras, elas substituirão os usuais termos “homeomorfismo” e “homeomorfas”.

Capítulo 1

Exposição teórico-matemática

Neste capítulo, apresentaremos aspectos teóricos de Topologia Algébrica que esclarecem o tratamento topológico dado à fórmula de Euler. Vale ressaltar que, tendo em vista a clareza da exposição, o rigor matemático adotado aqui é menor do que aquele geralmente encontrado em livros-texto de Matemática. Também, sempre que possível, serão apresentados comentários históricos sobre o desenvolvimento e a descoberta dos tópicos apresentados.

As principais referências para a escrita desse capítulo são os livros de Richeson [Ric08], que apresenta o nascimento da Topologia através da fórmula de Euler, e o de Federico [Fed82, Parts I and II], que apresenta uma tradução comentada de um manuscrito de Descartes sobre poliedros.

1.1 Poliedros e Superfícies

Um espaço topológico X nada mais é do que um conjunto munido de uma *topologia*, isto é, uma escolha adequada dos subconjuntos de X para serem chamados de *abertos*. Equivalentemente, uma topologia é determinada ao escolhermos quais subconjuntos podem ser considerados as vizinhanças de seus pontos. Essas noções nos dão uma forma bastante interessante de pensar o conceito de continuidade de funções, sem a necessidade de utilizar os usuais “epsilons” e “deltas” da Análise Real. Mais precisamente, temos o seguinte:

Definição 1.1.1. Uma função $f: X \rightarrow Y$ entre os espaços topológicos X e Y é *contínua* se, para todo aberto A de Y , vale que $f^{-1}[A]$ é um aberto de X .

Também, definimos que dois espaços são topologicamente isomorfos quando existe uma função que preserva suas topologias. Em outras palavras, temos que uma função $f: X \rightarrow Y$ é um *isomorfismo topológico* se for uma função contínua cuja inversa também é contínua.

Vista do modo acima, a disciplina de Topologia pode ser estudada de um modo até mesmo desvinculado de aspectos geométricos. No entanto, no caso deste trabalho, focaremos nos aspectos mais visuais dessa teoria. Por exemplo, os espaços topológicos que estudaremos são as *superfícies*, como a esfera, o toro, a garrafa de Klein e tantas outros. Formalmente, a maneira mais usual de definir uma *superfície* é como um espaço topológico localmente isomorfo a \mathbb{R}^2 , enquanto que os espaços localmente isomorfos a \mathbb{R}^n são chamados de *variedades (topológicas) de dimensão n* .

Essencialmente, podemos pensar que há quatro tipos de isomorfismos entre superfícies [Fio20, p. 33]:

1. Esticar ou inflar a superfície ou partes dela
2. Encolher a superfície ou partes dela
3. Entortar a superfície ou partes dela
4. Recorte e (re)colagem de partes da superfície, obedecendo algumas regras.

Um dos principais focos do presente trabalho está nas noções topológicas que são motivadas pela fórmula de Euler. Desse modo, precisamos fornecer alguns esclarecimentos sobre os objetos centrais do nosso estudo: os poliedros.

Primeiramente, definamos polígonos:

Definição 1.1.2. Uma curva em \mathbb{R}^2 é *poligonal* se ela é formada pela união de finitos segmentos de retas. Um *polígono* é a região em \mathbb{R}^2 compacta determinada por uma curva poligonal fechada e sem autointerseções.

Com essa definição, temos que todo polígono é, em particular, isomorfo a um disco. Isso é uma consequência do teorema de Jordan–Schoenflies por exemplo, veja [Wik23].

Agora, deve-se ficar claro que não há uma única forma universal de se definir poliedros, de modo que cada uma depende do contexto e dos interesses de estudo de cada um. Para o nosso caso, é desejável que todo poliedro seja, em particular, uma superfície topológica. Assim, um poliedro será uma reunião de um número finito de polígonos (i.e. faces) satisfazendo certas regras, como:

- cada lado de um desses polígonos é, também, lado de exatamente um outro polígono. Em outras palavras, cada aresta é adjacente a exatamente duas faces.
- não há singularidades, como as geradas quando colamos duas pirâmides através de seus vértices.

Uma outra condição que é muitas vezes exigida é a de que a interseção de duas faces é igual a uma aresta, um vértice ou vazia. Aqui, não iremos pedir tal exigência tendo em mente que alguns poliedros com auto-interseções, como modelos polidrais do plano projetivo ou da garrafa de Klein (figura 1.1), também merecem a nossa atenção.

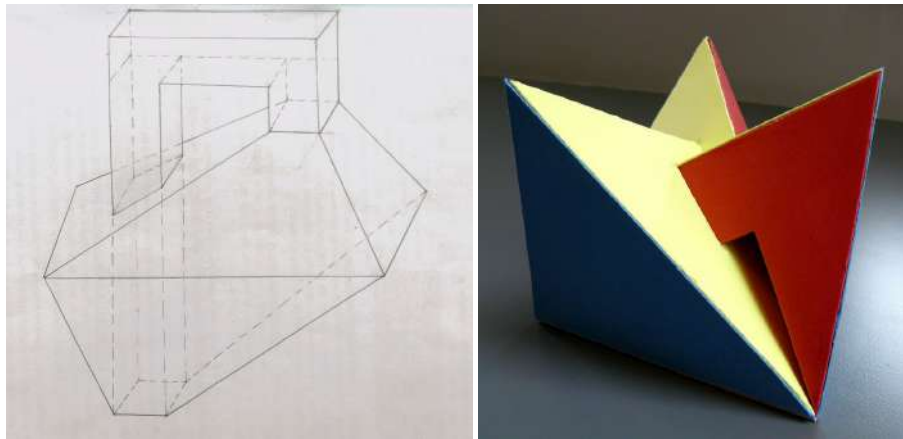


Figura 1.1: À esquerda, um modelo poliedral da garrafa de Klein. À direita, um modelo poliedral da superfície de Boy (que é isomorfa ao plano projetivo) conhecido como poliedro de Brehm; figura de Laura Gay [Gay] (sob a licença CC BY-NC-SA 3.0 DEED).

1.2 A(s) fórmula(s) de Euler, Descartes e Poincaré

Em 1750, Euler inaugurou uma nova forma de estudar os poliedros (ou corpos sólidos na terminologia da época). Basicamente, ele notou que, para estudá-los, não se poderia ficar restrito ao estudo de suas faces e de seus ângulos sólidos. Para tanto, um novo conceito se tornava necessário: as *arestas*. Assim, ele notou que haveria três tipos de objetos: os vértices¹, que são pontos, as arestas, que são linhas, e as faces, que são superfícies. Com isso, uma interessante questão torna-se presente:

Questão 1.2.1. *Quais características de um poliedro são determinadas pela sequência de números (V, A, F) ?*

Em outras palavras, o quão diferente dois poliedros com mesmos números de vértices, arestas e faces podem ser? Por exemplo, é fácil encontrar dois poliedros que possuem mesma quantidade de faces, mas números de vértices distintos, como uma pirâmide quadrangular e um prisma triangular. Para o caso de V , A e F coincidirem simultaneamente, é necessário pensar em poliedros menos convencionais, como alguns sólidos arquimedianos. Por exemplo, tanto o cubo truncado quanto o

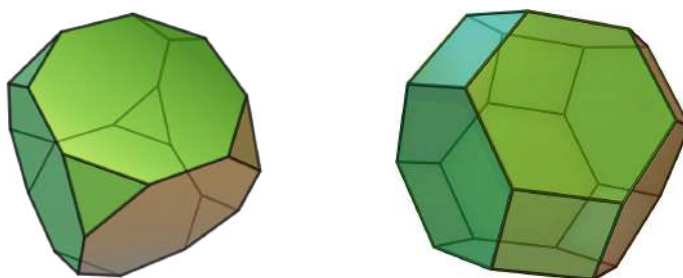


Figura 1.2: O cubo truncado, à esquerda, e o octaedro truncado, à direita, possuem as mesmas quantidades de vértices, arestas e faces. Fonte: *Wikimedia Commons* (sob a licença CC BY-SA 3.0 DEED).

octaedro truncado (figura 1.2) possuem 24 vértices, 36 arestas e 14 faces; já o dodecaedro truncado e o icosaedro truncado (i.e. a bola de futebol) possuem ambos 60 vértices, 90 arestas e 32 faces.

Tendo tais quantidades em mente, Euler descobriu a sua famosa fórmula: todo poliedro convexo satisfaz a relação $V + F = A + 2$. Provavelmente, o matemático chegou a essa conclusão através de um pensamento indutivo, ou seja, ele notou que muitos poliedros, como pirâmides, prismas e os cinco poliedros regulares, satisfaziam essa igualdade e inferiu que o mesmo se aplicava aos outros. De fato, Euler enunciou sua fórmula em um artigo apresentado em 1750 [Eul58b], mas sua demonstração só foi apresentada no ano seguinte [Eul58a].

A prova de Euler é baseada em reduzir sistematicamente um poliedro até que ele tenha uma forma simples o suficiente para garantir que a igualdade seja válida (veja [Ric08, Chapter 7]). Apesar de ela ter sido aceito por certos matemáticos na época, ela não atinge os padrões de rigor para a maioria dos matemáticos hoje em dia. Nos anos seguintes, muitas outras provas e extensões do teorema foram elaboradas, entre elas:

- a demonstração de Legendre (1794) [Leg94], que se baseia na projeção de um poliedro sobre uma esfera e na utilização de fórmulas sobre áreas de polígonos esféricos. Com ela, pode-se facilmente concluir que a fórmula é válida, mais geralmente, para qualquer poliedro *estrelado*, ou seja, aqueles que possuem um ponto interno O de modo que todo segmento entre O e algum outro ponto do poliedro está contido em seu interior. Veja [Ric08, Chapter 10].
- a demonstração de Cauchy (1813) [Cau09], que inicia retirando uma face do poliedro e, em seguida, transportando (continuamente) as faces até obter uma figura plana com diversos polígonos. Uma análise dessa prova e dos diversos poliedros aos quais ela pode ser aplicada pode ser conferida no artigo de Elon [Lim85b]. Por exemplo, ela é válida ao considerar um poliedro em forma de “U”.
- a demonstração de von Staudt (1847) [vS47, pp. 18-23], que é elegantemente elaborada através de um simples argumento de grafos. Para tanto, ele elabora duas claras hipóteses essencialmente topológicas sobre os poliedros: que seja possível chegar de qualquer vértice a outro através de um caminho de arestas; que qualquer ciclo (isto é, um caminho que começa e termina no mesmo ponto) de arestas que não passa por um mesmo vértice duas vezes divida o poliedro em duas partes. Veja [Ric08, pp. 152-155].

Referências de outros matemáticos que forneceram provas e extensões para o teorema de Euler podem ser encontradas em [Fed82, 70-71].

Agora, veremos que a fórmula de Euler possui uma íntima conexão com outra fórmula, que foi descoberta mais de 100 anos antes pelo filósofo e matemático francês Descartes. Tal resultado, no entanto, não foi publicado na época e só veio a ser conhecido pela comunidade científica no ano de 1860, quando um manuscrito de Descartes foi descoberto. Em mais detalhes, uma cópia dele foi encontrada dentro de uma coleção de escritos de Leibniz até então não catalogados. Dado, ainda, que o manuscrito original continua perdido, é difícil apontar uma data precisa para a descoberta da fórmula de Descartes. Segundo Federico [Fed82, §4], pode-se afirmar que a escrita do manuscrito ocorreu por volta do ano 1630.

¹Vale ressaltar que esse termo ainda não era utilizado por Euler. Ele utilizava o termo “ângulos sólidos”.

Um primeiro aspecto que nos permite aproximar o manuscrito de Descartes aos trabalhos de Euler é a importância dada a entender os poliedros de maneira aritmética. Por outro lado, a principal diferença é que o matemático francês não identificava de maneira explícita os conceitos de arestas ou mesmo de vértices, de modo que os elementos de um poliedro que ele dava maior enfoque eram, além das faces, os seguintes:

- os ângulos sólidos, isto é, os “ângulos tridimensionais” formados no encontro das faces em cada vértice
- os ângulos planos, que estão presentes em cada face.

Note que o primeiro corresponde aos vértices e, dado que o número de ângulos em um polígono é igual ao de lados, o segundo está conectado com as arestas. Desse modo, ele obteve fórmulas que relacionavam a quantidade desses elementos dentro de um poliedro. Para enunciá-las mais claramente, vejamos, agora, a seguinte definição.

Definição 1.2.2. A *deficiência angular de um vértice* é dada por 2π menos a soma dos ângulos adjacentes a este vértice. A *deficiência angular total de um poliedro* é igual à soma das deficiências angulares de seus vértices.

Intuitivamente, temos que a deficiência angular de um vértice é positiva quando ele forma um “bico”. Com isso em mente, podemos formular a seguinte equivalência: um poliedro é convexo se, e somente se, a deficiência angular de cada um de seus vértices é positiva.

A *fórmula de Descartes* nos diz que a deficiência angular total de qualquer poliedro convexo é igual a 4π . A forma como Descartes descobriu essa fórmula foi através de um pensamento por analogia com a soma dos ângulos externos de um polígono, que é igual a 2π . Nas palavras do matemático francês:

“Assim como numa figura plana todos os ângulos externos, tomados juntos, são iguais a quatro ângulos retos, em um corpo sólido todos os ângulos sólidos externos, tomados juntos, são iguais a oito ângulos retos.” [Fed82, p.44; tradução nossa]

Também, vale apontar que Descartes esclarece que a medida de um ângulo sólido externo é igual, dentro da nossa nomenclatura, à deficiência angular do seu vértice.

Abaixo, veremos como essa fórmula pode ser facilmente deduzida da fórmula de Euler e vice-versa. Ou seja, ambas as fórmulas são equivalentes.

Proposição 1.2.3. A soma S de todos os ângulos planos de um poliedro satisfaz $S = 2\pi(A - F)$.

Demonstração. Utilize que a soma S_i dos ângulos internos de uma face n_i -agonal é dada por $S_i = \pi(n_i - 2)$ e realize a soma de tais igualdades considerando todas as faces do poliedro. \square

Corolário 1.2.4. A *deficiência angular total de um poliedro* é igual a $2\pi \cdot (V - A + F)$. Em particular, um poliedro satisfaz a *fórmula de Euler* se, e somente se, satisfaz a *fórmula de Descartes*.

Demonstração. Note que a deficiência angular total é dada por $2\pi V - S$ e aplique a proposição acima. \square

Vale ressaltar que um enunciado equivalente ao da proposição 1.2.3 era conhecido por Descartes (veja [Fed82, p. 54]). A grande diferença é que, não possuindo o conceito de arestas, ele focava na contagem do número P de ângulos planos, de modo que a fórmula se tornaria $S = \pi P - 2\pi F$. Desse modo, ele pôde deduzir a seguinte fórmula muito similar à de Euler: $P = 2F + 2V - 4$. A única observação necessária para chegar exatamente à igualdade $V - A + F = 2$ é a de que $P = 2A$ e, sobre isso, o próprio matemático francês escreveu:

“Há sempre duas vezes mais ângulos planos na superfície de um corpo sólido do que lados; pois um lado é sempre comum a duas faces.” [Fed82, p.54; tradução nossa]

Dada a simplicidade de se deduzir a fórmula de Euler a partir do manuscrito de Descartes, muitos matemáticos passaram a afirmar que este a havia antecipado ou que já a conhecia, veja [Fed82, Chapter 9].

Agora, apresentaremos o resultado crucial que permite enxergar que a fórmula de Euler, na verdade, é um resultado que depende da topologia dos poliedros. Em outras palavras, responderemos a seguinte questão fundamental: quais são os poliedros que satisfazem a igualdade $V - A + F = 2$?

Definição 1.2.5. Dado um poliedro P , chamamos a quantidade dada por $V - A + F$ de *característica de Euler* de P e a denotamos por $\chi(P)$.

Teorema 1.2.6 (Poincaré). *Dois poliedros isomorfos possuem a mesma característica de Euler.*

Ideia da demonstração. Para provar este teorema, normalmente é utilizada uma poderosa ferramenta da Topologia Algébrica, a Teoria de Homologia. Basicamente, para cada poliedro P , definimos os chamados grupos de homologia de P , denotados por $H_i(P)$, $i = 0, 1, \dots$. Para defini-los, digamos que P possui n_2 faces, n_1 arestas e n_0 vértices. Com isso, constrói-se uma certa sequência de funções d_i , chamadas de *funções* (ou *mapas*) de bordo²

$$0 \xrightarrow{d_3} \mathbb{R}^{n_2} \xrightarrow{d_2} \mathbb{R}^{n_1} \xrightarrow{d_1} \mathbb{R}^{n_0} \xrightarrow{d_0} 0$$

e define-se:

$$H_i(M) = \ker(d_i) / \text{Im}(d_{i+1})$$

Através de tais espaços vetoriais, podemos definir os *números de Betti* b_i (sobre \mathbb{R})³ como a dimensão de tais espaços, isto é, $b_i = \dim(H_i(M))$. Com isso, é possível provar que a característica de Euler de uma superfície coincide com a soma alternada de seus números de Betti. De fato, temos que

$$\begin{aligned} b_i &= \dim(\ker(d_i)) - \dim(\text{Im}(d_{i+1})) \\ n_i &= \dim(\ker(d_i)) + \dim(\text{Im}(d_i)) \end{aligned}$$

Assim, pode-se deduzir que $\chi(P) = \sum_i (-1)^i n_i = \sum_i (-1)^i b_i$.

Desse modo, a prova é finalizada ao utilizar que os grupos de homologia são invariantes por isomorfismos topológicos.

Para mais detalhes sobre os grupos de homologia, consulte o capítulo 2 do livro de Hatcher [Hat01]. \square

Histórico da demonstração. H. Poincaré [Poi93] mostrou que a característica de Euler é igual à soma alternada dos números de Betti e, provavelmente, tomava por garantido que eles seriam invariantes topológicos. Na exigência de maior rigor, J. W. Alexander [Ale15] forneceu uma prova para esse fato.

O resultado acima permite definir a característica de Euler de superfícies em geral:

Definição 1.2.7. Uma *poligonização* de uma superfície M é um poliedro que é isomorfo a M . A *característica de Euler* (ou de *Euler-Poincaré*) $\chi(M)$ é definida como a característica de Euler de (alguma de) suas poligonizações.

Vale ressaltar que a definição acima não é muito usual, pois, geralmente, considera-se a característica de Euler de uma triangulação ou, mais geralmente, de uma estrutura de complexo CW associada à superfície. Assim, podemos dizer que nossa definição se encontra num meio termo, pois uma triangulação é um caso particular de uma poligonização, a qual é, por sua vez, um tipo de complexo CW. Mesmo assim, vale notar que pode-se facilmente encontrar uma triangulação a partir de uma poligonização: basta adicionar algumas arestas para as faces se tornarem triângulos. O mesmo não ocorre para o caso de um complexo CW, pois nem sempre podemos fornecer-lhe uma poligonização.

Desse modo, podemos dizer, por exemplo, que a característica de Euler da esfera é igual a 2 e que a do toro é igual a 0. Tendo essa ideia em mente, obtemos assim a versão definitiva da fórmula de Euler:

Corolário 1.2.8. *Todo poliedro isomorfo à esfera satisfaz a igualdade $V - A + F = 2$.*

Uma prova alternativa para o resultado acima também pode ser deduzida a partir da demonstração de Cauchy, como pode ser conferido no artigo de Elon L. Lima [Lim85b], no qual a hipótese de o poliedro ser isomorfo à esfera é substituída por outras condições equivalentes.

O leitor poderia ainda se perguntar se não poderíamos generalizar ainda mais a hipótese desse teorema. A resposta para tal questão é negativa, pois o teorema de classificação de superfícies (veja o apêndice A) nos diz que há apenas três tipos de superfícies a menos de isomorfismos:

²Com efeito, esse nome é utilizado, pois tais funções são definidas através da borda de cada figura. Por exemplo, aplicando d_1 sobre uma face do poliedro nos devolve uma "soma" de seus lados.

³Aqui, vale notar que os números de Betti são considerados usualmente com coeficientes sobre \mathbb{Z} (ao invés de sobre \mathbb{R}), mas pode-se mostrar que eles são iguais em ambos os casos

- a esfera, cuja característica de Euler é igual a 2;
- uma soma conexa de $g \geq 1$ toros, cuja característica é igual a $2 - 2g$;
- uma soma conexa de $m \geq 1$ planos projetivos, cuja característica é igual $2 - m$.

Lembre que estamos assumindo aqui que todo poliedro é uma superfície topológica. No entanto, se permitíssemos os poliedros de possuírem certas singularidades, como arestas adjacentes a mais de duas faces, ainda poderíamos encontrar outros casos em que a igualdade $V - A + F = 2$ é válida.

1.3 Consequências da fórmula de Euler

Nessa seção, buscaremos ver como a fórmula de Euler é capaz de ser aplicada em alguns contextos. Basicamente, iremos utilizá-la para obter os seguintes:

- uma caracterização dos sólidos platônicos
- algumas formas de construir poliedros com algumas faces hexagonais
- o teorema das seis cores
- uma fórmula para o cálculo da área de polígonos

Em Matemática, é comum que os objetos de foco de estudo sejam aqueles que possuem maior simetria. O estudo dos poliedros não é exceção. De fato, pode-se dizer que os sólidos que mais chamaram a atenção dos matemáticos gregos são o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Por exemplo, eles estão presentes em alguns dos diálogos de Platão, nos quais o filósofo os associa a elementos da natureza. Todos eles são extremamente simétricos: é possível perceber um mesmo padrão reaparecer em diversos modos de olhá-los. Assim, uma pergunta que surge naturalmente é: será que há outros poliedros que sejam simétricos do mesmo modo?

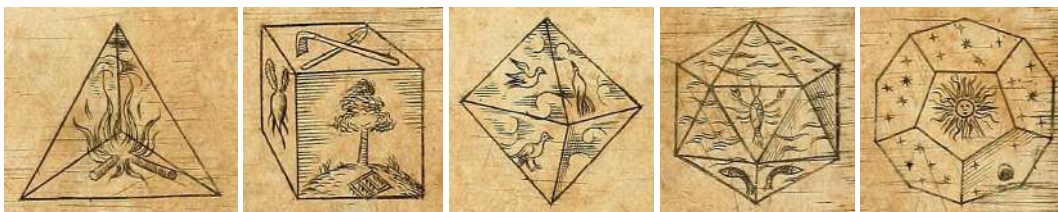


Figura 1.3: Os cinco sólidos platônicos representando elementos da natureza, da obra *Harmonices Mundi* de J. Kepler.

Para responder a essa pergunta, começemos com uma clarificação da terminologia a ser usada.

Definição 1.3.1. Um poliedro é chamado de *sólido platônico* ou de *regular* se satisfizer às três condições seguintes: ser convexo; todas as suas faces serem polígonos regulares com mesmo número de lados; em cada vértice, sempre encontrarem-se a mesma quantidade de faces.

A classificação dos sólidos platônicos é um dos grandes teoremas presentes n'Os Elementos de Euclides, no livro XIII. Um resultado fundamental usado na demonstração (provado na proposição 21 do livro XI) é o de que a soma dos ângulos planos adjacentes a um certo vértice é sempre menor do que 360° quando o poliedro é convexo. Assim, lembrando que cada vértice possui, pelo menos, 3 faces adjacentes, pode-se notar que ele não poderia ser formado por hexágonos, já que seus ângulos internos são iguais a 120° . Do mesmo modo, quatro quadrados não poderiam se encontrar em um mesmo vértice nem mais do que cinco triângulos.

Agora, veremos um modo de deduzir isso através da fórmula de Euler. Assuma que um sólido platônico é formado por polígonos de n lados e que se encontram m vezes em cada vértice. Assim, as suas quantidades de vértices e arestas são dadas por

$$V = \frac{nF}{m} \quad A = \frac{nF}{2}$$

Usando que $V - A + F = 2$, pode-se concluir após alguns cálculos que

$$F = \frac{4m}{2n - mn + 2m}$$

Sabemos que o denominador deve ser positivo e vale que $n \geq 3$ e $m \geq 3$. Agora, supondo que $n \geq 6$, temos que:

$$\begin{aligned} 2n - mn + 2m &= (2 - m)n + 2m \leq (2 - m) \cdot 6 + 2m \\ \Rightarrow 0 &< (2 - m) \cdot 6 + 2m = 12 - 4m \\ \Rightarrow m &< 3 \end{aligned}$$

Com tal contradição, concluímos que $n \leq 5$ e, sem perda de generalidade, que o mesmo vale para m . Com mais alguns cálculos, pode-se concluir que os únicos pares possíveis para (m, n) são $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(3, 5)$ e $(5, 3)$. Assim, com as fórmulas acima, obtemos a seguinte síntese:

Proposição 1.3.2. *Para um sólido platônico, os únicos valores possíveis para (m, n) e (V, A, F) são:*

- $(3, 3)$ e $(4, 6, 4)$ (tetraedro)
- $(3, 4)$ e $(6, 12, 8)$ (cubo)
- $(4, 3)$ e $(8, 12, 6)$ (octaedro)
- $(3, 5)$ e $(20, 30, 12)$ (dodecaedro)
- $(5, 3)$ e $(12, 30, 20)$ (icosaedro)

Vale ressaltar que Descartes, em seu manuscrito, também notou que sua fórmula podia ser utilizada para deduzir o número de faces e vértices dos sólidos platônicos, veja [Fed82, p.50].

Uma consequência particular da discussão acima é que não é possível formar um sólido platônico usando apenas hexágonos. Na verdade, também podemos ver que nenhum poliedro que satisfaz a fórmula de Euler pode ser construído apenas usando hexágonos. De fato, se um poliedro possuir apenas faces hexagonais, teremos que $A = \frac{6F}{2} = 3F$. Além disso, o número de ângulos planos adjacentes em cada vértice é, no mínimo, 3, o que nos diz que $V \leq \frac{6F}{3} = 2F$. Desse modo, obtemos que

$$V - A + F \leq 2F - 3F + F = 0$$

Ou seja, sua característica de Euler deve ser, no máximo, zero. Assim, é natural perguntar se é possível a construção de um poliedro isomorfo ao toro apenas com faces hexagonais. A resposta é afirmativa: um exemplo é o *poliedro de Szilassi*, que é formado por sete faces hexagonais todas adjacentes entre si, veja [Gar78]. Esse poliedro também é um importante exemplo para o teorema das cores aplicado sobre o toro, como será explicado adiante.

A seguir, notaremos quantas faces e de quais tipo são necessárias para se construir um poliedro convexo com faces hexagonais.

Proposição 1.3.3. *Tome um poliedro cuja característica de Euler seja 2 e que possua, pelo menos, uma face hexagonal.*

- Se suas outras faces são triângulos, então há, pelo menos, 4 faces triangulares.
- Se suas outras faces são quadradas, então há, pelo menos, 6 faces quadradas.
- Se suas outras faces são pentagonais, então há, pelo menos, 12 faces pentagonais.

Tais quantidades mínimas são atingidas se assumirmos que todo vértice é adjacente a somente três arestas.

Demonstração. Para o primeiro caso, assuma que há H faces hexagonais e T faces triangulares. Desse modo, pelos mesmos argumentos utilizados acima, temos que:

$$F = T + H \quad A = \frac{3T + 6H}{2} = \frac{3T}{2} + 3H \quad V \leq \frac{3T + 6H}{3} = T + 2H$$

Com isso:

$$2 = V - A + F \leq (T - \frac{3T}{2} + T) + (2H - 3H + H) = \frac{T}{2}$$

Logo, $T \geq 4$. No caso em que todo vértice é adjacente a somente três arestas, temos a igualdade em ambas as desigualdades acima.

Os outros casos podem ser provados de forma análoga. \square

O caso acima dos doze pentágonos é especialmente notável, pois podemos visualizá-lo através de objetos físicos, como as bolas de golfe e de futebol (em sua versão clássica), ou através de moléculas químicas, como os fulerenos.

Utilizando a técnica acima, pode-se ver também que todo poliedro (com característica de Euler igual a 2) possui, pelo menos, quatro faces dadas por polígonos com menos de 6 lados. Além disso, pode-se analisar diversas outras possíveis configurações para as faces de um poliedro, como de quadrados e pentágonos, triângulos e pentágonos, etc.

Outro famoso teorema em Matemática é o Teorema das Quatro Cores. Ele diz que é necessário, no máximo, quatro cores para colorir um mapa plano de modo que dois territórios vizinhos possuam cores distintas. Um fator que o torna notável é que, apesar de seu enunciado ser bastante simples, a sua demonstração é consideravelmente complexa e até hoje só pode ser cumprida através do uso de computadores. Aqui, mostraremos que uma versão mais fraca do teorema pode ser deduzida utilizando alguns dos fatos que foram mostrados acima através da fórmula de Euler.

Proposição 1.3.4. *Todo mapa pode ser colorido com seis cores ou menos.*

Esboço da demonstração. Dado um mapa com alguns territórios, podemos realizar uma deformação contínua para que cada um de seus territórios sejam polígonos satisfazendo que dois territórios vizinhos tenham um, e somente um, lado em comum. Além disso, se um território estiver na borda do mapa (por exemplo, um país que é banhado pelo oceano), então podemos assumir que um, e somente um, dos lados desse território estará nessa borda. Em outras palavras, não há dois lados adjacentes de um mesmo território banhados por um mesmo oceano. Para uma ilustração, veja a figura 1.4. Levando em conta também a face exterior desse mapa poligonal, ele nos fornece uma poligonização da esfera e, portanto, pela última proposição, deve haver pelo menos duas faces poligonais com 5 lados ou menos. Em outras palavras, há sempre um território que é vizinho de, no máximo, outros 5 territórios. Diremos que tal território é *notável*.

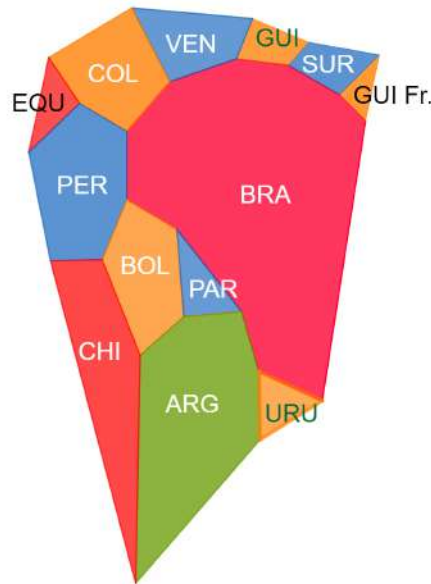


Figura 1.4: Representação poligonal do mapa da América do Sul. Repare, por exemplo, que o Paraguai é um triângulo, pois ele possui apenas 3 vizinhos e não é banhado pelo oceano.

Agora, assumamos que a proposição seja falsa e tome um contraexemplo minimal, isto é, um mapa que não pode ser colorido com seis cores e com o menor número de territórios possível. Assim, se retirarmos desse mapa um território notável, sabemos que o mapa restante pode ser colorido com seis cores. Isso nos gera uma contradição: como esse território tem, no máximo cinco vizinhos, pode-se reinseri-lo de modo que o mapa-contraxemplo seja colorido com seis cores; de fato, basta colorir o território notável com uma cor que seja diferente das cores dos seus cinco vizinhos. \square

Para aprimorar o teorema acima para o caso de cinco cores, é necessária a introdução de algumas técnicas do estudo de grafos, o que foi feito, por exemplo, por A. Kempe em 1879. Já a prova do caso das quatro cores se mostrou muito mais complicada e só veio a ser cumprida com a assistência de computadores em 1976. Para mais detalhes, veja [Ric08, Chapter 14].

Teoremas análogos a esse podem ser estudados para mapas sobre outras superfícies (que não são isomorfas à esfera). Por exemplo, se considerarmos mapas sobre um toro, pode-se provar que é necessário sete cores ou menos para colori-lo e, de fato, sete cores são necessárias para colorir, por exemplo, o poliedro de Szilassi.

Por fim, enunciaremos mais um interessante resultado que pode ser deduzido através da fórmula de Euler. Ele fornece um simples modo de calcular a área de certos polígonos, que possivelmente podem ser bastante complicados.

Proposição 1.3.5 (Teorema de Pick). *Tome um polígono sobre o plano cartesiano cujos vértices tenham coordenadas inteiras. Sendo I e B as quantidades de pontos com coordenadas inteiras, respectivamente, no interior do polígono e na sua borda, então a área do polígono é igual a $I + B/2 - 1$*

Demonstração. Consulte [Ric08, pp. 126-127]. \square

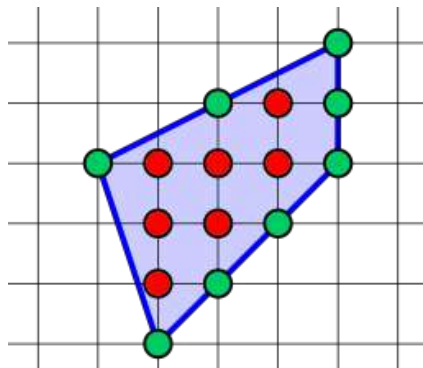


Figura 1.5: Com o teorema de Pick, podemos calcular rapidamente a área do polígono acima. *Fonte: Wikimedia Commons (sob a licença CC BY-SA 4.0 DEED).*

1.4 Teoremas sobre a característica de Euler

Nesta seção, que tem como base o artigo de Elon Lima [Lim85a], descreveremos como a característica de Euler aparece em diversos contextos dentro da Matemática. Começaremos mostrando qual a sua relação com a presença de campos vetoriais — ou, de modo mais pitoresco, fios de cabelos — sobre uma superfície.

Teorema 1.4.1 (Poincaré-Hopf). *Tome um campo vetorial contínuo $v: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ tangente sobre uma variedade M (de dimensão m e compacta) de modo que v seja zero apenas em um número finito de pontos P_1, \dots, P_n de M . A soma dos índices dos zeros⁴ de v é igual à característica de Euler de M , isto é*

$$\sum_{j=1}^n i(v; P_j) = \chi(M)$$

⁴Intuitivamente, o índice de um zero $p \in M$ de v é dado pelo número de voltas dadas por $v(q)$ quando pontos $q \in M$ descrevem uma pequena curva em torno de p , veja [Lim85a, p.53]

Histórico do teorema. Em 1881, Poincaré o demonstrou para a esfera S^2 , de dimensão 2, enquanto que Brower generalizou, em 1911, para o caso das esferas de qualquer dimensão. Em 1925, Hopf provou que o resultado é válido para qualquer variedade. Veja [Ric08, pp. 212-214].

Demonstração. Pode-se consultar Milnor [Mil65, §6] ou as notas de aula de Haffka [Hafa]. Na primeira referência, é utilizada como ferramenta a aplicação normal de Gauss enquanto que, na segunda, a demonstração é feita através da teoria de pontos fixos de Lefschetz. \square

Definição 1.4.2. Dizemos que uma superfície *pode ser penteada* se existe um campo vetorial contínuo sobre ela que seja não-nulo em todos os pontos.

Como consequência direta do Teorema de Poincaré-Hopf, vemos que a característica de Euler nos fornece uma condição necessária para que possamos pentear uma superfície. Em mais detalhes, temos o seguinte:

Corolário 1.4.3 (Teorema das Superfícies Cabeludas). *Se uma superfície M pode ser penteada, então sua característica de Euler $\chi(M)$ é igual a 0.*

Também pode-se provar que a recíproca do corolário acima é verdadeira. Por exemplo, no caso de um toro cabeludo, podemos pentear todos os seus fios no sentido anti-horário, veja a figura 1.6.

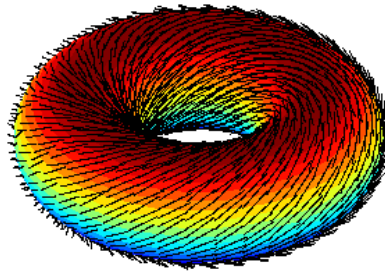


Figura 1.6: O toro é uma superfície que pode ser penteada. Fonte: *Wikimedia Commons*.

Como a característica da esfera é igual a 2, obtemos a seguinte imediata conclusão.

Corolário 1.4.4 (Teorema da Bola Cabeluda). *A esfera S^2 não pode ser penteada.*

Demonstração alternativa. Um modo mais direto de provar esse resultado é notando que a existência de um campo vetorial não-nulo em S^2 nos fornece uma homotopia entre as funções identidade e antípoda em S^2 (isto é, a função que leva um ponto ao seu diametralmente oposto). Através do uso de ferramentas da teoria de homologia, pode-se mostrar que isso é um absurdo, veja [Hat01, pp.134-135]. \square

Outra forma de interpretar o teorema acima é dizendo que sempre há, pelo menos, um ponto da superfície da Terra no qual nenhum vento é soprado horizontalmente.

Agora, apresentaremos um importante teorema de Geometria Diferencial, o teorema de Gauss-Bonnet. Essencialmente, ele nos diz que a característica de Euler é uma medida para a curvatura global de uma superfície. Antes de enunciá-lo, precisamos esclarecer o conceito de *curvatura gaussiana*. Intuitivamente, ela nos fornece uma medida (dada por um número real) do quanto uma superfície se curva em cada um de seus pontos e é dada pelo produto da menor e da maior curvatura (com sinal) ao varrer todas as direções. Além disso, seu sinal nos dá algumas informações: quando a curvatura é positiva em um certo ponto x , a superfície fica (localmente) em apenas de um do plano tangente em x ; nesse caso, o ponto é chamado *elíptico*. Tal propriedade não ocorre no caso de a curvatura ser negativa e, assim, o ponto é chamado de *hiperbólico*.

Exemplo 1.4.5. Abaixo, apresentamos a curvatura gaussiana de algumas superfícies conhecidas:

1. A curvatura de qualquer ponto do plano é igual a zero. O mesmo vale para o cilindro, pois suas seções verticais são retas.

2. A curvatura de uma esfera de raio r é igual a $1/r^2$ em todo ponto.
3. A sela dada pelo gráfico $z = xy$ possui curvatura igual a -4 no ponto 0.
4. Como pode ser visto na figura 1.7 do toro, sua região próxima ao anel interno possui curvatura negativa e sua região próxima ao anel externo possui curvatura positiva.

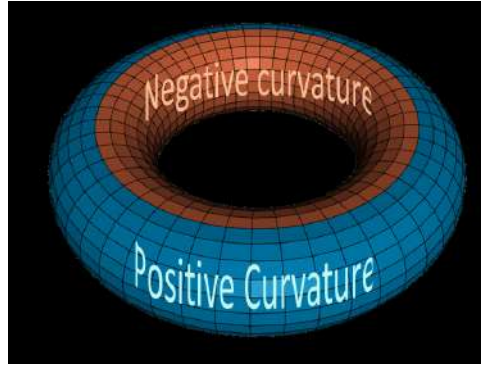


Figura 1.7: Metade do toro possui curvatura positiva e metade possui curvatura negativa. Fonte: Wikimedia Commons (sob a licença CC BY-SA 3.0 DEED).

Teorema 1.4.6 (Gauss-Bonnet). *Sendo M uma superfície compacta (sem bordo) e $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ sua curvatura gaussiana, temos que*

$$\int_M K dA = 2\pi\chi(M),$$

onde dA representa que a integração é feita sobre a área da superfície.

O leitor é convidado a notar a validade da igualdade acima para os casos da esfera e do toro.

Tal resultado é extraordinário: ele nos diz que a curvatura total de uma superfície é determinada pela sua topologia. Em outras palavras, não importa o quanto uma esfera seja entortada, sua curvatura total será sempre igual a 4π . Isso mostra um dos modos como a topologia de uma superfície pode controlar sua geometria. Repare que esse mesmo paralelo pode ser traçado se pensarmos, por exemplo, na fórmula de Descartes. De fato, ela pode ser vista como uma versão particular, para poliedros, do teorema de Gauss-Bonnet.

Outro ambiente em que a característica de Euler também está presente é na Teoria de Morse, cujo foco reside no estudo de funções diferenciáveis da forma $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Pode-se mostrar que há uma relação entre a característica de Euler e o tipo e a quantidade de pontos críticos de tais funções. Para mais detalhes, consulte [Lim85a, §5].

Capítulo 2

Construindo uma bola cabeluda

O teorema da bola cabeluda é um dos mais pictóricos teoremas de Matemática: não é possível pentear uma bola cabeluda sem que haja pontos carecas, fios em pé ou descontinuidades. Assim, é bastante sugestiva a proposição de uma peça física que possa servir como uma verificação visual e palpável do teorema, de modo que possa ser utilizada para a divulgação matemática, especialmente em ambientes como o da Matemateca do IME-USP. No entanto, encontramos apenas um modo de construção de superfície cabeludas documentada na literatura, a qual foi realizada para o caso da garrafa de Klein [CG19]. Aqui, apresentamos a construção de uma bola cabeluda a partir da colagem de tapete sobre uma bola de isopor.



Figura 2.1: Bola cabeluda cuja construção é descrita neste capítulo.

2.1 Proposta e Material utilizado

Diversas foram as ideias que tivemos para a confecção de uma bola cabeluda. Algumas eram pouco práticas, como a costura de uma infinidade de fios sobre uma bola previamente coberta por um tecido; já outras eram, digamos pouco ortodoxas: por exemplo, envolviam a decapitação de bonecos cabeludos e, posteriormente, a colagens de suas meia-cabeças. Outras ainda passavam pelo uso de limalha de ferro que pudessem ser “penteadas” com um ímã. De qualquer modo, uma das grandes preocupações iniciais estava no formato dos fios: eles deveriam ser compridos e finos o suficiente para serem penteadas, mas também curtos a ponto de não esconder descontinuidades.

Após a visita a certas lojas de tapetes, pude descobrir a existência de certos tapetes peludos que podem transmitir, após alisá-lo com as mãos por exemplo, a sensação de pentear. Desse modo, pensamos que não haveria mais a necessidade de realizar o árduo trabalho de costurar fios, todos eles já estavam posicionados sobre o tecido de base do tapete. Apenas um problema se tornava evidente: tapetes são planos e, portanto, não possuem geometria esférica. Assim, a questão central posta foi: qual a melhor maneira de cortar uma figura plana a fim de preencher totalmente uma esfera e sem que haja sobreposições? Ou, visto de modo inverso, qual é a melhor maneira de planificar uma esfera?

A resposta matemática para tal questão é simples: não existe tal maneira. De fato, uma planificação perfeita da esfera nos forneceria uma isometria local entre o plano e a esfera e chegaríamos a uma contradição, pois a curvatura do plano é diferente da da esfera. Assim, naturalmente, devemos pensar numa planificação aproximada da esfera. Para tanto, diversos modelos puderam ser encontrados, os quais são especialmente usados para a construção de globos terrestres; acesse, por exemplo, o site www.3dgeography.co.uk/make-a-globe. Para um embasamento geométrico sobre o modo de construir tais planificações, consulte a página de M. B. Barison [Bar].

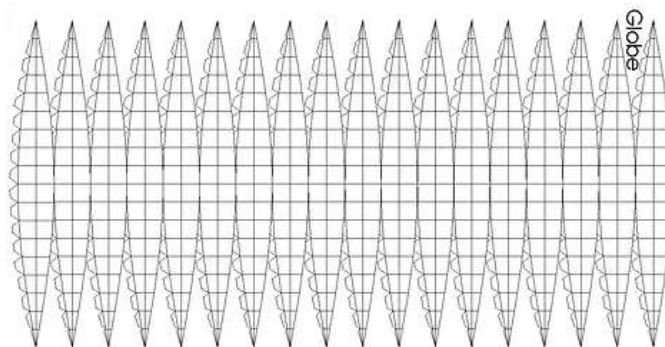


Figura 2.2: Planificação de esfera a partir de seus fusos. Fonte: 3D Geography.

A planificação utilizada se baseia em definir uma quantidade de meridianos e planificar, separadamente, cada um dos fusos determinados por eles. Desse modo, os pontos mais problemáticos dessa construção são aqueles onde todos os fusos se encontram, ou seja, os polos da esfera. É bastante comum que ocorram imprecisões, como sobreposições ou buracos, nos lugares próximo a esses pontos. Tendo isso em mente, tivemos como objetivo recortar a ponta de cada fuso planificado antes da colagem na esfera e, ao final, o buraco gerado nos polos da esfera poderia ser preenchido com um círculo, de modo semelhante ao feito numa bola de praia (figura 2.3).



Figura 2.3: A bola de praia nos fornece uma visualização do modo pelo qual buscamos realizar a colagem do tapete sobre a esfera. Fonte: Wikimedia Commons.

Em essência, os materiais utilizados para a construção foram:

- uma bola de isopor oca de 350mm de diâmetro.
- um tapete retangular de pele de poliéster, com dimensões de 60cm x 120cm e fios medindo 2cm.
- um molde da planificação de um fuso correspondente a $1/18$ da bola, ou seja, um fuso de 20° .
- cola multiuso.

Não houve grandes dificuldades de se obter tais materiais, bastando a ida a lojas especializadas em isopor e em tapetes.

2.2 Confeção

Antes de iniciar, de fato, a construção da bola cabeluda, realizei um modelo inicial de teste com uma bola menor (de 20 cm de diâmetro) e usando folhas de EVA no lugar do tapete. Com isso, pode-se, além de adquirir algumas habilidades manuais, ter uma noção das principais dificuldades e dos pontos que necessitam de maior cuidado. Em especial, verificou-se que as regiões próximas aos polos da esfera acabaram por apresentar brechas, nas quais o isopor se tornava visível. Assim, tornou-se mais evidente a necessidade da realização de cortes das pontas dos fusos seguida da colagem de círculos para preencherem os polos.



Figura 2.4: As pontas dos fusos foram cortadas a fim de minimizar as brechas encontradas entre os fusos.

Após o teste com EVA, passamos para a utilização da tapete. O primeiro passo foi a utilização do molde de um meio-fuso planificado para ser demarcado sobre o verso do tapete — no qual, por sorte, podia-se escrever até mesmo com canetas esferográficas. Para tanto, nas primeiras reproduções, eu fixava um molde de papel sobre o verso do tapete e o delineava utilizando uma caneta. Em seguida, recortava os pedaços de tapete tendo como linha ideal de corte a linha gerada pela borda interna da caneta — mesmo assim, a diferença era provavelmente desprezível dado que ponta da caneta era consideravelmente fina. Pensando em tornar o processo mais ágil, utilizei uma segunda técnica para a demarcação do molde. Dessa vez utilizando um molde mais rígido, feito de cartolina, passei a utilizá-lo como um carimbo: espalhava tinta sobre sua borda e, em seguida, pressionava-o contra o verso do tapete. Nesse caso, o devido corte do tapete era feito considerando a borda externa gerada pelo molde.



Figura 2.5: Visualização das duas técnicas utilizadas para a reprodução do molde sobre o tapete.

Durante o corte das partes do tapete, pudemos perceber que seria bastante importante ordená-los do mesmo em que eram cortados. Desse modo, dois fusos que fossem adjacentes no tapete (antes de ser cortado), de fato, seriam colados um ao lado do outro.

Em seguida, foi realizada a colagem dos fusos sobre a bola. Para isso, dois cuidados precisaram ser tomados. O primeiro deles é referente à identificação do equador da esfera com a linha central de



Figura 2.6: Fusos de tapete cortados e alinhados logo antes da colagem sobre a bola.

cada fuso. Isso pode ser usado como referência para que os fusos fossem posicionados de maneira adequada. Além disso, visto que os polos da bola podiam ser permutados de maneira despercebida durante o seu manejo, se mostrou útil o desenho de símbolos sobre a bola de isopor para que se tornasse claro a orientação escolhida para a colagem dos fusos.



Figura 2.7: Alguns dos cuidados tomados durante a colagem dos fusos sobre a bola.

Após a colagem de 17 fusos sobre a bola, notou-se que a lacuna faltante era consideravelmente distinta do que, em teoria, deveria ser o formato de apenas mais um fuso de 20° (figura 2.8). Para se ter uma noção, o comprimento da lacuna (sobre o equador) era de, aproximadamente, 13cm, o que corresponde a um ângulo de mais de 40° . Isso deve ter ocorrido devido a uma soma das imprecisões realizadas durante os cortes e as colagens. Além disso, tal lacuna não era simétrica em relação ao seu meridiano central. Desse modo, o décimo oitavo fuso foi feito à parte: busquei reproduzir o seu formato em uma folha de papel sobreposta sobre o espaço para, em seguida, demarcá-la no tapete.



Figura 2.8: A lacuna para colagem do último fuso era irregular e maior do que o esperado.

Finalmente, após todos os fusos serem fixados, a última etapa realizada foi a colagem das “tampas” da bola, isto é, os círculos de preenchimento dos polos. Novamente, os espaços faltantes se mostraram consideravelmente distintos do formato ideal proposto inicialmente, de círculos. Assim, a seguinte estratégia foi adotada: cortou-se um pedaço circular do tapete que fosse maior do que a lacuna; em seguida, ele era sobreposto sobre a lacuna para notar-se as partes que necessitavam ser reduzidas; assim, se procedia até obter o formato ideal para ser encaixado. Veja a figura 2.9.



Figura 2.9: À esquerda, espaços vazios produzidos nos polos da bola. À direita, recortes dos pedaços de tapete usados para preenchê-los.

2.3 Discussão

Antes de finalizarmos este capítulo, será apresentada aqui uma avaliação sobre o processo de confecção da bola e seu resultado final. Em especial, buscaremos apresentar alguns pontos em que a confecção apresentou sucessos ou falhas. Em outras palavras, apresentaremos alguns dos aprendizados obtidos durante a construção da bola.



Figura 2.10: Visualização do resultado final da bola cabeluda na qual é possível notar suas divisões como numa bola de praia.

Primeiramente, devemos dizer que, diferentemente da bola feita com EVA, a bola com tapete não apresentou buracos em que o isopor ficasse visível. Acredito que isso se deu, principalmente, pela

maior flexibilidade que o tapete possuía em comparação com o EVA, o que permitia a justaposição dos fusos através de pequenas movimentações. Além disso, outros fatores que contribuíram nesse sentido foram a presença dos fios do tapete, que possibilitam esconder os buracos, e a melhoria das técnicas de colagem e corte utilizadas — isto é, os pequenos aprendizados manuais obtidos com a confecção da bola-teste puderam ser usados na bola final.

Por outro lado, um dos pontos negativos que se tornaram evidentes foram as divisões entre os pedaços colados. Essa é uma das principais características a serem evitadas, pois ela dificulta a visualização de um penteado contínuo dos fios, e que é tão fundamental para o entendimento do teorema. Vale notar que essas divisões se tornavam menos claras próximas ao equador e entre dois fusos que já eram adjacentes antes do tapete ser cortado. Desse modo, a ordem em que os fusos colados sobre o tapete devem respeitar tacitamente a ordem com que eles surgem no tapete. Do mesmo modo, deve-se evitar o corte de fusos como os encontrados no topo da figura 2.5 à direita.

Outra possibilidade para mitigar o efeito negativo acima está em reduzir o número de fusos utilizados na planificação da esfera. Além de diminuir o número de divisões, isso também simplifica o trabalho de modo geral. No entanto, isso deve ser feito levando em conta que a redução do número de fusos leva a uma maior imprecisão da planificação, exigindo mais da plasticidade do material. Além disso, foi possível notar que o último fuso colado sobre a bola, que representava um ângulo de 40° , se mostrou maleável o bastante para ser devidamente colado. Desse modo, pensamos que um bom número de fusos a ser considerado na planificação seria em torno de 9 — ao invés do utilizado 18.

As técnicas mencionadas acima também podem ajudar a atenuar outra limitação do uso do tapete, a ausência de flexibilidade total de seus pelos. Com efeito, mesmo no tapete original, não era possível mover de maneira ordenada cada um de seus fios em qualquer direção desejada. Por exemplo, a sensação de pentear os pelos do tapete era mais clara apenas quando o fazíamos horizontalmente. Isso nos motiva às seguintes questões: haveria outros modelos de tapetes que permitissem maior liberdade dos fios? O uso de pelos um pouco mais compridos (do que 2cm) auxiliariam nesse sentido?

Finalmente, devemos lembrar que a Matemática é criada independentemente da sua existência na realidade. Assim, não podemos pensar que a construção de um objeto que venha a ilustrar um teorema matemático seja isento de falhas. Ainda assim, há casos em que objetos matemáticos (um cubo, por exemplo) podem ser construídos de modo que suas imprecisões sejam menores do que as que nossa percepção visual permite notar. Tendo isso em mente, acredito que a bola cabeluda construída possa ser usada, além de um objeto que desperta a curiosidade das pessoas, para tornar evidente o significado de pentear continuamente uma superfície, ainda mais quando forem explicadas as limitações do objeto.

Além disso, o presente trabalho, talvez, possa servir como protótipo inicial para a realização de outros trabalhos no sentido da divulgação dos teoremas das superfícies cabeludas. Em especial, pode ser proveitoso analisar se as técnicas apresentadas aqui também poderiam ser utilizadas para a criação de um toro cabeludo¹, o que mostraria um exemplo de superfície que pode ser penteada.

¹Vale notar que toros podem ser vendidos em lojas de isopor com os nomes de “guirlandas”, “boias” ou “argolas”.

Capítulo 3

Oficinas de Topologia para o Ensino Básico

Neste capítulo, apresentaremos abordagens de ensino, configuradas através de oficinas, que buscam tratar de tópicos de Topologia a partir da fórmula de Euler. Na primeira seção, encontram-se as propostas de oficinas assim como a descrição, por exemplo, dos materiais necessários para realizá-las. Na seção seguinte, será apresentado como se deu a aplicação de tais oficinas em algumas turmas de uma escola estadual de São Paulo.

Acredito ser fundamental que os alunos sejam incentivados à ação, ao questionamento e à formulação de hipóteses. Com isso em mente, as atividades foram elaboradas e aplicadas com o intuito de levar os alunos a uma participação ativa, como com a construção de poliedros em papel e com discussões que levem à reflexão de problemas.

3.1 Descrição das oficinas

A seguir, serão apresentadas propostas de quatro oficinas tendo como público-alvo alunos de Ensino Fundamental II e Médio. Mesmo assim, não há nenhum impeditivo para aplicá-las com estudantes de Ensino Superior, por exemplo. Na verdade, isso pode ser bastante proveitoso, visto que alguns temas da oficina são desconhecidos até mesmo por professores de Matemática, pois geralmente são apresentados apenas em cursos de Matemática “avançados”.

Elas foram pensadas para serem realizadas de modo sequencial e são iniciadas com um problema elementar: a análise dos vértices, arestas e faces de poliedros. A partir disso, busca-se guiar os alunos até o enunciado da fórmula de Euler. Na segunda oficina, busca-se traçar um paralelo com a fórmula de Descartes, mostrando a conexão que a fórmula de Euler possui com os ângulos planos dos poliedros. Em seguida, visa-se chegar na formulação definitiva da fórmula de Euler, de que todo poliedro isomorfo à esfera satisfaz $V - A + F = 2$. Já na última oficina, é tratado do tema de (não-)orientabilidade de superfícies a fim de observar que toda superfície pode ser caracterizada simplesmente pela sua característica de Euler e sua orientabilidade.

Nota-se que tal sequência didática é similar ao caminho histórico percorrido durante o nascimento da Topologia. Assim, pode ser bastante proveitosa a realização ao longo das oficinas de comentários históricos, como os presentes na seção 1.2.

Ainda que a sequência das oficinas formem um todo coerente, também acreditamos que elas podem ser encurtadas caso o interesse seja de apresentar certos tópicos de maneira mais direta. Por exemplo, a realização da oficina 2 não é necessária para o cumprimento das seguintes. Além disso, as partes iniciais das oficinas 3 e 4 também podem ser realizadas de maneira independente das demais.

Oficina 1: Característica de Euler de Poliedros

Objetivos: Calcular a característica de Euler de alguns poliedros e compará-las.

Conhecimentos prévios desejáveis: algum contato com poliedros; reconhecimento de vértices, arestas e faces; alguma prática com colagens.

Materiais necessários: uma planificação de um poliedro isomorfo à esfera (e.g. poliedros convexos ou poliedros em formato de “L” [figura 3.1]) e uma de um poliedro isomorfo ao toro (veja o apêndice B) para cada aluna/o; cola ou fita adesiva.

Roteiro:

1. Começar a aula introduzindo (ou relembrando) o conceito de poliedro e focar em suas três principais características: faces (F), arestas (A) e vértices (V). Perguntar quais poliedros eles conhecem e se eles conhecem a fórmula de Euler. Notar, também, que cada aresta é adjacente a só 2 faces e cada vértice a pelo menos três faces.
2. Entregar para cada aluno as 2 planificações e pedir para eles montarem colando com cola ou com fita adesiva disponibilizada em pedaços pela/o professor/a.
3. Pedir para eles contarem as faces, arestas e vértices e realizarem a conta $V+F-A$.
4. Após fazerem as contas colocarem na frente da sala em duas categorias: os poliedros que satisfazem $V+F-A=0$ e os que satisfazem $V+F-A=2$.
5. Incentivar uma discussão: vocês esperavam isso? Os poliedros de cada grupo são parecidos? O que fazem eles serem agrupados desse jeito?
6. Finalizar dizendo que $V+F-A=2$ para poliedros convexos é conhecida como fórmula de Euler (e traçar alguns comentários históricos) e que o valor $V+F-A$ é conhecido como característica de Euler.

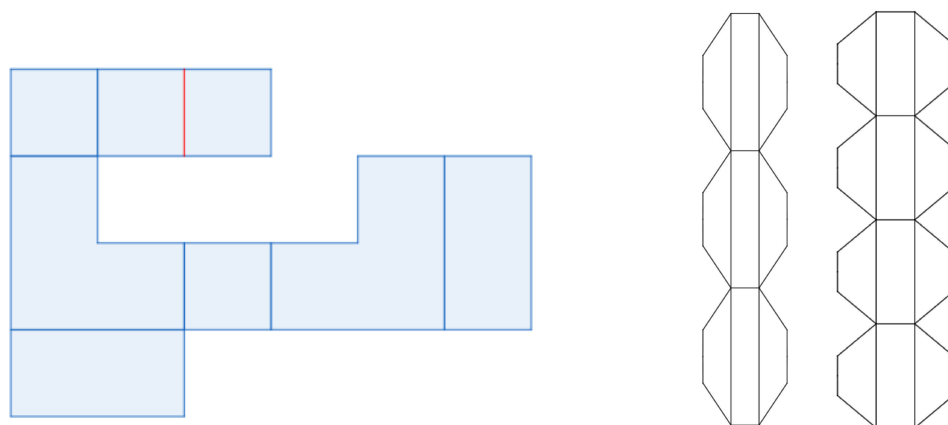


Figura 3.1: À esquerda, uma planificação de um poliedro que possui a forma de um “L”, sendo não-convexo e isomorfo à esfera. O segmento vermelho indica que a região deve ser dobrada de modo a formar uma concavidade. À direita, planificações de poliedros isomorfos ao toro.

Oficina 2: Fórmula de Descartes

Objetivos: Calcular a deficiência angular de alguns poliedros, compará-las e traçar um paralelo com a característica de Euler.

Conhecimentos prévios desejáveis: noções de ângulos (e.g. $360^\circ=1$ volta; 180° =meia-volta); é interessante o conhecimento de números negativos, mas a proposta pode ser adaptada para que não haja suas ocorrência.

Materiais necessários: 1 poliedro do tipo esfera e 1 do tipo toro para cada aluno/a (e.g. da oficina anterior).

Roteiro:

1. Começar a oficina introduzindo o conceito de deficiência angular de um vértice. Para tanto, é útil usar um poliedro como exemplo. Também, pode ser necessário relembrar/introduzir

medidas de ângulos internos de polígonos (em especial, de triângulos equiláteros, quadrados e trapézios) e a soma de seus ângulos externos.

2. Entregar para cada aluno os dois poliedros e pedir para calcularem a deficiência angular de cada vértice e, então, somá-las para obter a deficiência angular total dos poliedros.
3. Após fazerem as contas, colocarem na frente da sala em duas categorias: os poliedros que possuem deficiência igual a 0° e os de igual a 720° .
4. Iniciar a discussão: vocês esperavam isso? Essa organização de poliedros é parecida com a da atividade anterior?
5. Finalizar dizendo que a deficiência angular ser igual a 720° é chamada de fórmula de Descartes (traçando alguns comentários históricos) e evidenciar a relação, por meio de uma tabela, entre os dois conceitos: $(\text{deficiência angular}) = 720^\circ \times (\text{característica de Euler})$.

Oficina 3: Isomorfismo de Superfícies

Objetivos: Introduzir o conceito de isomorfismo topológico de superfícies e sua relação com a característica de Euler.

Materiais necessários: folhas de atividade sobre identificação de figuras isomorfas para cada aluno (veja a figura 3.2); projetor de vídeo ou TV; 1 bola de isopor (opcional).

Roteiro: Essa aula será consideravelmente expositiva e focada principalmente na introdução de conceitos e terminologia.

1. Introduzir o conceito de superfícies como um papel deformado e apresentar por vídeo ou imagem diversos exemplos visuais para os alunos: esfera oca, poliedros, toro oco ou rosquinha, garrafa de Klein, superfícies quadráticas, como elipsoides, paraboloides, hiperboloides e selas (como a usual e a do macaco), entre outras.
2. Introduzir através de exemplos a noção de superfície fechada (como superfícies “limitadas” e sem bordo).
3. Apresentar as transformações de encolher, entortar, esticar ou inflar uma superfície (ou partes dela) e dizer que elas são chamadas de isomorfismos.
4. Apresentar a seguinte terminologia: duas superfícies são ditas isomorfas quando podemos obter uma a partir da outra através de um isomorfismo. Ilustrar com exemplos visuais e vídeos (como o isomorfismo entre o cubo e a esfera ou entre o toro e a xícara¹). Se possível, contrastar com as noções de figuras congruentes e semelhantes.
5. Entregar e pedir para os alunos realizarem uma atividade de identificação de superfícies isomorfas.
6. Enunciar a fórmula de Euler da seguinte maneira: todo poliedro isomorfo à esfera satisfaz $V+F-A=2$. O mesmo acontece para a rosquinha e explicar que a característica de Euler não muda para superfícies isomorfas.
7. (Opcional) O acima pode ser equivalentemente formulado como: toda poligonização da esfera satisfaz $V+F-A=2$. Por exemplo, isso pode ser ilustrado apresentando algumas poligonizações da esfera desenhando sobre uma bola de isopor.
8. Finalizar com a pergunta: se duas superfícies têm a mesma característica de Euler, será que elas são isomorfas?

Oficina 4: Orientabilidade

¹Nesse caso, uma boa visualização pode ser acessada em https://en.wikipedia.org/wiki/File:Mug_and_Torus_morph.gif

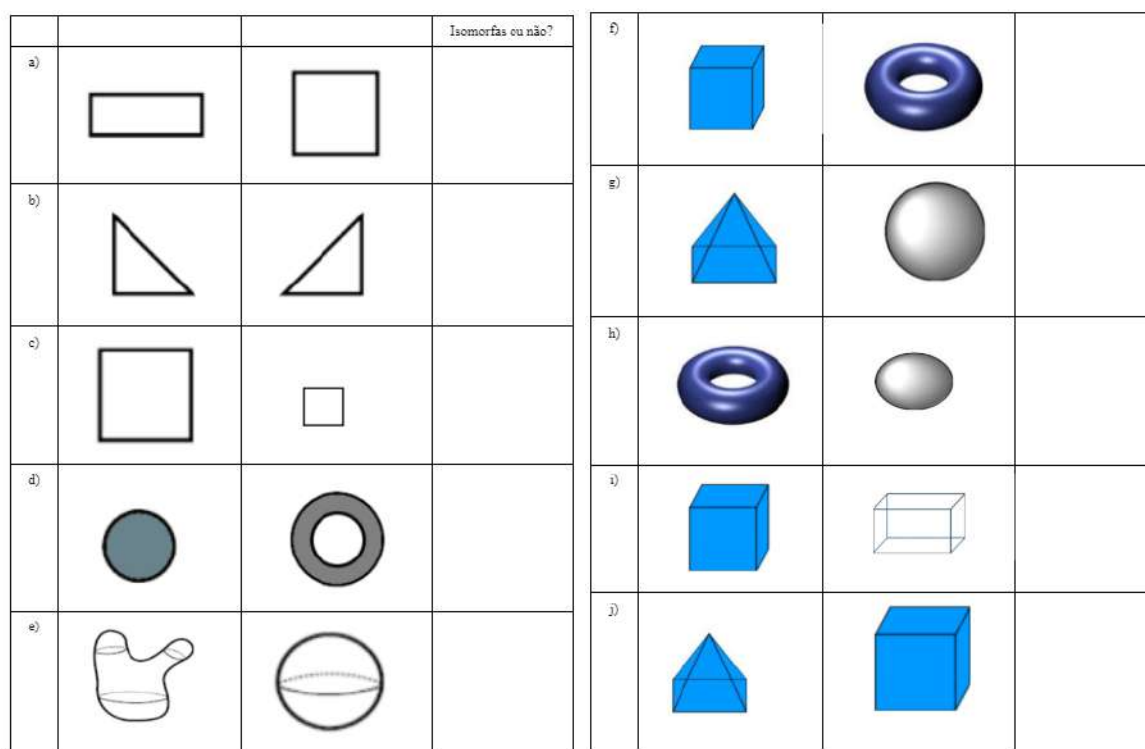


Figura 3.2: Exemplo de atividade de reconhecimento de figuras isomorfas.

Objetivos: Introduzir o conceito de (não-)orientabilidade de superfícies; observar que a característica de Euler vista junto à orientabilidade caracteriza as superfícies fechadas.

Materiais necessários: faixas de papel vegetal (com pelo menos 4cm de altura); fita crepe ou adesiva; modelos polidrais da garrafa de Klein.

Roteiro:

1. Começar dando as faixas de papel para cada aluno e pedir para desenharem sobre ela um *pac-man* se movimentando em uma direção. Com o uso do papel vegetal, deve ficar claro que o *pac-man* pode ser visualizado em ambos os lados da faixa. Em seguida, pedir para formarem a faixa de Möbius.
2. Notar algumas características da faixa: ela inverte a posição do *pacman* após 1 volta; se o seu dedo (ou uma formiga) andar pela faixa, ele também vai ficar de ponta-cabeça (pode-se mostrar o desenho de Escher de formigas andando sobre uma faixa de Möbius); a faixa possui apenas um lado (isto é, não é possível colori-la com duas cores sem que as cores se cruzem).
3. Com o anterior, dizer que superfícies que satisfazem as características acima são ditas não-orientáveis e, se necessário, explicar em mais detalhes, ao contrastar com exemplos de superfícies orientáveis.
4. Apresentar, em seguida, a garrafa de Klein com o modelo físico usual e mostrar duas possíveis construções matemáticas dela: tomando um cilindro e colando suas duas bases com orientação invertida ou através de duas faixa de Möbius².
5. (Opcional) Mostrar vídeos de outras superfícies não-orientáveis, como os três modelos do plano projetivo: calota cruzada (em inglês, *cross-cap*), superfície romana e superfície de Boy³.

²Ambas podem ser visualizadas na excelente página online de Marianne Freiberger: plus.maths.org/content/introducing-klein-bottle.

³Para tanto, recomendamos os vídeos disponíveis em: youtu.be/W-sKLN0VBkk; youtu.be/Op2TSnlgkuY; youtu.be/uiq-EcQz_uU.

6. Em seguida, usar o modelo poliedral da garrafa de Klein para que os alunos calculem a sua característica de Euler, concluindo que sua característica de Euler é igual à do toro.
7. Enunciar o resultado de que duas superfícies fechadas são isomorfas se (e somente se) possuem mesma orientação e mesma característica de Euler.

Comentários sobre a aplicação: A realização da oficina depende do uso de um modelo poliedral da garrafa de Klein. Uma possibilidade é dada pela “caixa de Klein”, apresentada na figura 3.3 abaixo, cuja planificação pode ser acessada através do seguinte link:

www.cs.cmu.edu/~kmcraane/Projects/ModelRepository/KleinBoxPattern.pdf

Assim, seria interessante que cada aluno (ou dupla de alunos) construísse tal poliedro e realizasse o cálculo da característica. Nesse ponto, é necessário que o professor alerte que as faces de um poliedro não podem possuir buracos, de modo que a parte superior do paralelepípedo que forma a caixa de Klein não pode ser contado simplesmente como uma face. Para tanto, é necessário criar novas arestas (e.g. que ligam o vértice do retângulo a um dos vértices do buraco) para formar faces simplesmente conexas (i.e. sem buracos).

Uma maneira para evitar a inserção de tais arestas “artificiais” é utilizando outro modelo da garrafa de Klein, como o apresentado anteriormente na figura 1.1. Nesse caso, cada aresta é adjacente a duas faces que pertencem a planos concorrentes entre si. Infelizmente, não fornecemos aqui uma planificação de tal modelo.

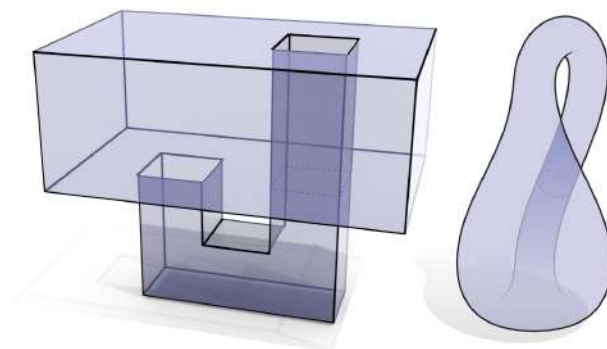


Figura 3.3: Modelo poliedral da garrafa de Klein. Fonte: Keenan's 3D Model Repository.

3.2 Aplicação das oficinas

Apliquei algumas das oficinas acima em três diferentes turmas da Escola Estadual Dr. Octávio Mendes, escola de tempo integral localizada na Zona Norte de São Paulo, no bairro de Santana. Em uma turma de 3ª série do Ensino Médio, foram realizadas as oficinas 1 e 3. A oficina 1 também foi feita com uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental e a parte inicial da oficina 4 foi realizada com uma turma de 8º ano. Durante todas as aulas, busquei construir o conhecimento junto aos alunos, incentivando-os ao questionamento e à formulação de hipóteses. Abaixo, será relatado como se deu a aplicação em cada uma das turmas, apontando algumas dos problemas encontrados e de como os alunos reagiram às atividades.

Apliação na 3ª série (oficinas 1 e 3)

Na turma de Ensino Médio, realizou-se as oficinas 1 e 3 em dois dias distintos, ambas durante um período de 1h30 e que comprometia o tempo de duas aulas do “Itinerário Formativo de Exatas”. A turma era consideravelmente pequena, composta por 7 alunos.

Primeiramente, foi realizada a oficina 1, que trata do cálculo da característica de Euler de diferentes poliedros a partir da sua construção com papel e da contagem de seus vértices, arestas e faces. Inicialmente, dado que não era certo se os alunos lembravam de temas relacionados a poliedros, busquei começar a aula contrastando os conceitos de polígonos e poliedros e pedindo para os alunos

fornecerem alguns exemplos de cada. Também, evidenciei os três elementos dos poliedros que seriam nosso foco: os vértices, as arestas e as faces.

Em seguida, forneci aos alunos quatro planificações (previamente recortadas) de poliedros isomorfos ao toro, sendo dois com seção triangular e dois com seção quadrangular, e quatro de isomorfos à esfera, sendo um tetraedro, um cubo, um prisma hexagonal e um poliedro em forma de “L” (o único não-convexo). Assim, cada aluno ficou responsável pela montagem de um poliedro, enquanto que o oitavo poliedro poderia ser construído espontaneamente por algum aluno que desejasse.

Enquanto os alunos dobravam as planificações, eu passava em cada mesa recortando e entregando pedaços de fita adesiva para que os poliedros fossem fixados. Além disso, eu buscava fornecer algumas orientações para as montagens, visto que eu não lhes forneci previamente nenhuma visualização do resultado final dos poliedros do tipo toro. A facilidade na montagem foi variável: uma aluna, por exemplo, montou rapidamente um poliedro toroidal triangular, enquanto outro aluno teve dificuldades de construir o tetraedro. Durante esse tempo, também surgiram alguns questionamentos sobre o nome dos poliedros. Por exemplo, eles não lembravam o nome do prisma hexagonal, de modo que pude relembrar alguns conceitos que lhes foram apresentados no ano anterior, e também queriam saber os nomes dos poliedros do tipo toro, os quais decidi chamar de “rosquinhas” triangulares e quadradas (a depender da sua seção horizontal).

Após a montagem, pedi para que cada um dos alunos contasse e registrasse as quantidades de vértices, arestas e faces de seu poliedro. À medida que eles finalizavam, eles me forneciam suas respostas, eu as registrava na lousa e dizia se estavam corretas ou não. Em muitos casos, os alunos erraram a contagem na primeira tentativa, especialmente da quantidade de arestas. Por exemplo, o aluno responsável pelo cubo disse, inicialmente, que havia 16 arestas; mas, logo após apontar seu erro, conseguiu fornecer a resposta correta. Para outros casos, como do prisma hexagonal ou de alguns toroidais, foi necessário uma maior intervenção para chegarmos nas quantidades adequadas.

Vale notar que, em ambas as etapas acima, para que ninguém ficasse para trás, alguns alunos que já tinham finalizado suas tarefas passaram a auxiliar os que ainda estavam precisavam cumpri-las.

Com o intuito de chegar na fórmula de Euler, após o registro de todas as quantidades na lousa, lhes questionei se eles poderiam reconhecer algum padrão que fosse comum a todos os poliedros. Inicialmente, uma das respostas foi a de que os números eram pares, o que realmente era válido para todos com exceção dos vértices e faces dos poliedros toroidais com seção triangular. Após mais algumas observações, pudemos perceber que, ao realizar o cálculo de $V - A + F$, havia alguns que nos davam o valor 2 e outros que davam o valor 0. Rapidamente, eles observaram que o valor 0 só era obtido pelos poliedros que tinham buraco, enquanto os outros nos forneciam o valor 2.

Na sequência, tracei alguns comentários sobre Euler e de que ele havia descoberto que a relação $V - A + F = 2$ era válida para qualquer poliedro convexo. Após isso, um questionamento interessante foi formulada por uma aluna: “Essa relação também vale para o cone? Como contamos vértices, arestas e faces de um cone?” Tal pergunta me tomou de surpresa e lhes disse que seria mais fácil de eu responder tal pergunta se eu possuísse fisicamente um cone naquele momento — o que eu não tinha. Assim, de modo totalmente espontâneo, os alunos começaram a fazer um cone com as folhas de seus cadernos — uma aluna até tentou iniciar um trabalho em equipe dizendo algo como: “enquanto eu faço a parte de cima, corta um círculo para fazer a base”. Em conclusão, com o cone feito pelos alunos pude lhes explicar que, apesar de ele ser formado por curvas, poderíamos marcar alguns pontos na sua base para serem vértices e, após traçar segmentos até o vértice superior, poderíamos enxergar suas arestas e notar que a fórmula de Euler também é válida para o cone.

Ao final da aula, outras duas questões interessantes foram formulada por um aluno: “O valor de $V-A+F$ é sempre igual a 2 ou 0? Qual seria o valor se houvesse dois buracos?” Nesse ponto, decidi não dar a resposta para os alunos para que se mantivessem curiosos e tentassem encontrar a resposta sozinhos. Assim, eles puderam notar que, para responder tais questões, bastava colar dois poliedros do tipo toro e realizar as devidas contagens. No entanto, não chegaram a fazê-lo: já estavam cansados o bastante e a aula, que era a última do dia, já iria acabar.

A oficina 3 pôde ser aplicada com a mesma turma somente após um intervalo de três semanas. Desse modo, foi necessário a realização de uma revisão da aula anterior. Tal momento, também, foi bastante proveitoso para tornar claros alguns conceitos e nomenclaturas, como a de poliedros convexos e de característica de Euler. Em seguida, comecei a introduzir o conceito de superfície perguntando-lhes se poderiam fornecer alguns exemplos. Eles puderam dar algumas respostas, mas todas se restringiam a superfícies planas, como a superfície de uma mesa ou de uma parede. Então,



Figura 3.4: Poliedros (e cone) construídos pela turma da 3ª série.

apresentei diversos outros exemplos a partir de imagens que foram previamente organizadas através de uma apresentação por *slides*.

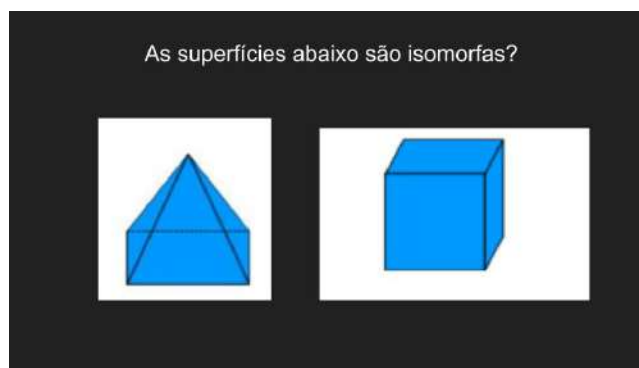


Figura 3.5: Exemplo de um dos exercícios discutidos com a turma da 3ª série.

Para introduzir o conceito de isomorfismos, assim como descrito anteriormente, foquei no uso de quatro palavras-chaves: esticar, inflar, encolher e entortar. Em seguida, isso foi ilustrado a partir do exemplo de um cubo e uma esfera e do clássico exemplo do toro e da xícara. Mesmo assim, acredito que a efetiva aprendizagem só se deu no momento dos exercícios. Ao invés de lhes entregar atividades a serem resolvidas em papel, decidi realizar as perguntas para serem respondidas oralmente a todos da sala. Assim, procedia da seguinte maneira: eu expunha duas superfícies na TV da sala, escolhia um(a) aluno/a e lhe perguntava se elas seriam isomorfas; após sua resposta, eu abria uma discussão com o resto da sala para ver se os outros concordavam ou não com a/o colega. Na maioria dos casos, eles puderam acertar, mesmo não fornecendo justificativas; também acredito que as ocorrências de erros puderam ser bastante aproveitadas: por exemplo, um aluno disse que a esfera poderia ser isomorfa a um toro caso seus dois polos fossem pressionados um contra ao outro. Assim, em seguida, mencionei sobre a impossibilidade de criar um buraco dessa maneira, visto que os dois polos se tocariam quando pressionados ao máximo.

Ao final, busquei propor que os alunos fornecessem o enunciado definitivo para a fórmula de Euler — e tinha a expectativa de que o fariam. No entanto, eles não responderam como gostaria, de modo que o fato de que, por exemplo, todo poliedro isomorfo à esfera satisfaz $V - A + F = 2$ só se tornou claro após eu dar seu enunciado. Mesmo assim, durante a discussão, uma aluna pôde com sucesso reparar que o poliedro em forma de “L” é isomorfo a um cubo, dizendo que basta elevar a parte inferior do “L” até ele encontrar a parte superior.

Aplicação no 9º ano (oficina 1)

Como a aplicação da oficina 1 já foi descrita acima, buscarei apresentar aqui quais foram os principais contrastes quando ela foi realizada na turma de 9º ano. O primeiro ponto a se levar em consideração é que essa turma necessitava de maior articulação por parte do professor, visto que ela era

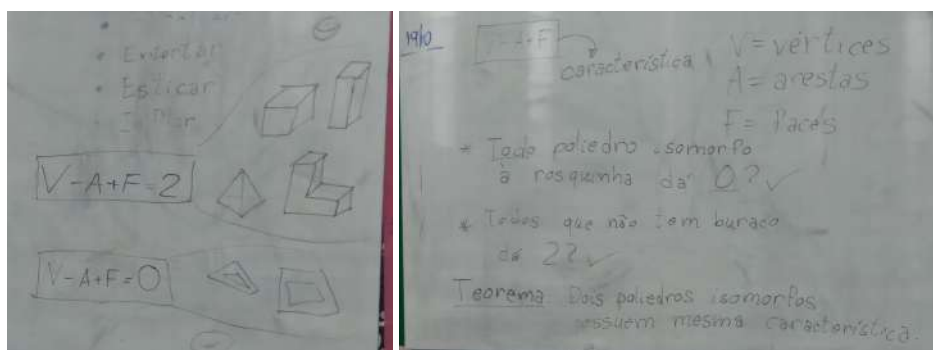


Figura 3.6: Lousa da sala de aula após a realização da oficina 3 na 3ª série.

consideravelmente maior: havia pouco menos de 30 alunos presentes. Assim, a parte introdutória da oficina, que tem o intuito de evidenciar o conceito de poliedro e seus elementos, foi realizada com uma sessão de perguntas que elaborei através da plataforma *Kahoot*. A realização de tal atividade foi motivada pela professora da turma, que gostaria de experimentar a plataforma, mas não sabia exatamente como utilizá-la. Com isso, após serem organizados em duplas, diversas perguntas eram apresentadas na TV aos alunos, os quais usavam o celular para responderem. Dependendo de suas respostas e de sua rapidez, eles recebiam pontuações e, em seguida, a plataforma fornecia um ranqueamento dos participantes, dando uma sensação de jogo para a atividade.



Figura 3.7: Uma das perguntas feitas durante o momento inicial da aula no 9º ano.

Ainda em duplas, entreguei para cada uma delas duas planificações, sendo uma de um poliedro convexo e uma de um isomorfo ao toro. Durante a montagem, dois pontos interessantes puderam ser observados. O primeiro deles é que, dado o tamanho da turma, um problema de ordem prática naturalmente surgiu: era necessário muito tempo para que eu recortasse e entregasse fita adesiva para todos os alunos. Com isso, tentei incentivá-los a usar a menor quantidade de fita possível realizando uma questão que, também, é interessante do ponto de vista matemático: quantas fitas são necessárias para montar uma planificação? Enquanto alguns não souberam responder, outros analisavam a planificação e davam uma resposta baseado no número de lados que eram colados.

Outro ponto notável é que essa turma tinha menos conhecimento sobre os nomes matemáticos dos poliedros; assim, alguns passaram a registrá-los de maneiras alternativas. Por exemplo, alguns diziam que um tetraedro é poliedro em forma de triângulo, enquanto outros diferenciavam os poliedros através do nome do integrante da dupla. Por exemplo, um seria o poliedro que Fulano fez enquanto o outro seria o que Sicrano fez. De qualquer modo, também adotamos a convenção, que foi bastante aceita, de chamar os poliedros toroidais de rosquinhas.

Durante a contagem de vértices, arestas e faces, foi notável que os alunos dessa turma possuíam mais dificuldade do que os da 3ª série do Ensino Médio. De fato, uma quantidade considerável de duplas não conseguiu chegar nos valores corretos para o caso dos poliedros convexas e apenas uma dupla obteve a resposta correta para o caso das rosquinhas. Desse modo, tentei realizar algumas revisões das contagens de maneira individual com os alunos, sendo infactível de atender apropriadamente a todos os alunos. Ao final da aula, mesmo sem poder garantir o claro entendimento por todos



Figura 3.8: Alguns poliedros construídos pela turma do 9º ano.

os alunos, respondi quais valores deveriam ser obtidos no cálculo de $V - A + F$.

A fim de facilitar o problema da contagem, uma possível abordagem poderia se basear na planificação dos poliedros. De fato, é muito mais fácil contar as faces de um poliedro quando vemos a sua planificação. O mesmo também pode ser verdade para as arestas caso estejam claras para o aluno as regiões de colagem, de modo que a quantidade de arestas na borda da planificação deve ser dividida pela metade. Desse modo, ao invés de pedir, em primeiro lugar, que os alunos montassem os poliedros para, em seguida, contar suas faces, arestas e vértices, poderia se tratar das duas tarefas de maneira simultânea. Por exemplo, poderia ser sugerido aos alunos que montassem os poliedros, mas sem fixá-los com fita adesiva, de modo que eles tivessem uma noção de seu formato e das arestas identificadas, mas que ainda fosse possível recuperar facilmente sua planificação. Ou, ainda, poderiam ser fornecidas duas planificações de um mesmo poliedro para cada aluno, sendo uma utilizada para a montagem e a outra para o auxílio na contagem.

Por fim, também vale comentar que um dos alunos da turma apresentou dificuldade no cálculo com números negativos, o que poderia ser remediado caso eu apresentasse o cálculo da característica dos poliedros como $V + F - A$ ao invés de $V - A + F$.

Aplicação no 8º ano (oficina 4)

Em uma turma de 8º ano, que possuía mais de 30 alunos, foi realizada a parte inicial da oficina 4, o que envolve a introdução do conceito de não-orientabilidade através da construção de uma faixa de Möbius. Desse modo, temas relacionados à característica de Euler estiveram totalmente ausentes na aplicação da atividade com essa turma.

Comecei a aula fornecendo uma pequena introdução ao conceito de superfícies e, em seguida, entregando uma faixa de papel sulfite⁴ previamente recortada para cada aluno. De maneira natural, as faixas acabaram por apresentar diferenças de tamanho e de formato — algumas delas possuíam pontas de maneira a formar uma espécie de coroa quando enroladas para formar um cilindro. Esse fenômeno se torna útil para evidenciar a natureza dos objetos topológicos, que são considerados equivalentes ao serem ampliados ou reduzidos, e nem sempre é óbvia: por exemplo, durante a aula, um aluno me questionou sobre os tamanhos possíveis de uma faixa de Möbius.

Em seguida, apresentei à sala como a faixa poderia ser formada, com uma rotação de 180° de sua borda e posterior colagem, em contraste com o modo de colagem do cilindro. Em seguida, pude conferir que, enquanto alguns realizaram imediatamente a montagem, outros, em especial aqueles que tinham faixas com “pontas”, só conseguiram com um maior auxílio meu ou dos colegas. Na sequência, propus um desafio: “você conseguem colorir o lado de fora da faixa de uma cor e o lado de dentro de outra?” Assim, a grande maioria dos alunos retornou a faixa à sua posição plana e pintou cada um de seus lados retangulares de uma cor. Com isso, alguns alunos puderam notar que as duas cores se tocavam no momento da colagem da faixa de Möbius. Um aluno, especificamente, observou mais ainda: “quando realizamos um número ímpar de rotações [de 180°], as duas cores diferentes são coladas juntas; enquanto isso, no caso de um número par, as cores iguais são coladas.”

⁴Por questões práticas, não utilizei papel vegetal. Na verdade, as faixas usadas foram fruto dos restos de papel gerados após o recorte das planificações de poliedros usadas nas outras oficinas.



Figura 3.9: Faixa colorida por uma das alunas da turma do 8º ano.

Após algumas considerações, uma segunda atividade foi proposta: desenhar um boneco como o do *Pac-man* se locomovendo pela faixa e descobrir para onde ele deve seguir após uma volta. Idealmente, eu deveria ter lhes dito para desenharem o mesmo desenho na frente e no verso da folha, visto que o conceito de orientação trata da análise de caminhos realizados por, digamos, “seres bidimensionais”, que estão “dentro” da superfície e não “sobre” ela. Essa falta de especificação da atividade permitiu que os alunos desenhassem o caminho do boneco de diversas maneiras. Mesmo assim, o fato de que o boneco estaria invertido após uma volta pôde ser percebido de diferentes formas.

Por fim, vale citar que alguns alunos experimentaram outros modos de colagem da faixa. Um deles (o mesmo que realizou a observação do penúltimo parágrafo) buscou testar o máximo de rotações que ele poderia realizar antes de colar as duas bordas; outro tentou reproduzir algumas das imagens de caráter artístico que expus na TV; outro ainda produziu uma figura, de certo modo, em forma de “8”, mas que é isomorfa a um cilindro.

Discussão final

Além dos tópicos de Topologia apresentados aqui, muitos outros poderiam ser analisados a fim de torná-los passíveis de serem ensinados ou divulgados para um público mais abrangente. Entre eles, está o plano projetivo, que possui três diferentes modelos de visualização tridimensional (veja [Mar19, Capítulo 6]): a calota cruzada (em inglês *cross-cap*), a superfície romana e a superfície de Boy. Apesar de todas poderem ser realizadas de maneira poliedral — inclusive, uma planificação da calota cruzada pode ser conferida em [Ric08, p. 282] —, apenas a superfície de Boy não apresenta singularidades. Desse modo, ela é a única que torna evidente, no nosso entendimento, o cálculo da característica de Euler do plano projetivo através de sua visualização global tridimensional. No entanto, algum esforço é necessário para apresentar de forma didática a construção de um modelo poliedral da superfície de Boy. Com esse intuito, pode-se consultar os trabalhos de Brehm [Bre90] e de Laura Gay [Gay].

Um modo alternativo para resolver o problema do cálculo da característica de Euler do plano projetivo está em tratar as superfícies através de suas apresentações poligonais. Com isso, uma poligonização das superfícies é obtida através de uma poligonização adequada de tais apresentações bidimensionais. Esse tipo de visualização das superfícies é apresentado nas atividades de ensino de Topologia propostas por Ferron [Fer17] e, também, pode ser tratado através de jogos interativos, como os *Torus Games* de Jeff Weeks, que podem ser acessados via www.geometrygames.org/TorusGames/index.html.

Outra noção topológica importante que foi deixada de lado neste trabalho foi a de isomorfismos topológicos dados por corte e (re)colagem de superfícies. O tratamento desse tópico pode ser bastante proveitoso, visto que, quando aliado às apresentações poligonais, permite mostrar isomorfismos interessantes, como o entre a garrafa de Klein e uma soma de dois planos projetivos ou o entre uma soma de planos projetivos e uma soma de um toro com um plano projetivo (veja o lema A.0.7).

Ainda, outros famosos teoremas podem ser aproveitados para o ensino e a divulgação científica, como é o caso dos resultados apresentados nas duas últimas seções do capítulo 1, mas também do teorema do ponto fixo de Brouwer e do teorema de Borsuk-Ulam, o qual por sua vez é utilizado para provar o teorema do Sanduíche de Presunto. Além disso, vale considerar o tratamento da conjectura de Poincaré, cuja demonstração levou cerca de cem anos para ser finalizada e é apresentada de modo instigante e palatável, por exemplo, no livro de O'Shea [O'S07].

Por fim, outra tema ligado à Topologia e que pode ser bastante estimulante para a divulgação científica é dado pelos estudos acerca da topologia do Universo, veja [Wee02, Chapter 19]. Por exemplo, há quem afirme que o universo possua a topologia do espaço dodecaédrico de Poincaré [Wee04]. Nesse contexto, torna-se relevante a apresentação da noção de uma quarta dimensão e de variedades de dimensão 3. Sobre esse tema, ainda pode ser proveitoso o uso do conto “A torre da Babilônia”, de Ted Chiang [Chi16], no qual é apresentado um mundo que “estava enrolado de algum modo fantástico”, em que céu e terra se tocavam.

Apêndice A

Teorema de Classificação de Superfícies

A seguir, será apresentado um trabalho realizado pelo aluno durante uma disciplina de Topologia Algébrica, cursada em 2019 no IME-USP e ministrada pelo prof. Ivan Struchiner.

O objetivo do trabalho é mostrar que toda superfície conexa compacta sem bordo triangulada é isomorfa exatamente a uma destas superfícies: a esfera, uma soma conexa de toros ou uma soma conexa de planos projetivos. Aqui, superfície se refere a uma variedade topológica de dimensão 2. Como principais referências, foram utilizados o livro de John M. Lee [Lee00] e as notas de aula de Marius Drainic e Ivan Struchiner, *Topologie en Meetkunde 2011*.

A demonstração realizada aqui se baseia na aplicação de diversas transformações (que preservam a topologia) sobre apresentações poligonais de superfícies. Uma demonstração alternativa para o teorema é dada pela “prova ZIP” [FW99], que, segundo os autores do artigo, possui uma abordagem “mais leve, sem gorduras e que mantém o gosto clássico da topologia elementar”. Outra possível demonstração pode ser conferida no livro de Armstrong [Arm83, Chapter 7], que se baseia na aplicação de “cirurgias” sobre as superfícies que aumentam o valor de sua característica de Euler. Alguns comentários históricos sobre as primeiras matemáticas a obterem este teorema podem ser encontrados em [Ric08, pp. 183-184].

Primeiramente, vamos dar um pequeno esclarecimento quanto às hipóteses escolhidas para a superfície. Escolhemos que ela seja triangulada e compacta, porque a prova do teorema é totalmente baseada na existência de uma apresentação poligonal da superfície e sabe-se que tais superfícies possuem tal apresentação, induzida pela triangulação. Além disso, estamos considerando que ela seja conexa, pois, desse modo, sua apresentação provém de apenas um polígono. O propósito de ser uma superfície sem bordo é que sua apresentação seja própria (diremos o que isso significa). Por exemplo, se retirássemos a hipótese sobre o bordo, o teorema não valeria, já que o cilindro com bordo de altura e raio unitários é uma superfície compacta conexa triangulada não isomorfa a nenhuma das citadas acima: de fato, o cilindro é homotópico à esfera S^1 e, portanto, seu grupo fundamental é \mathbb{Z} , que é diferente dos grupos fundamentais das superfícies citadas.

A fim de facilitar apresentações de algumas superfícies, assumimos aqui que um polígono com 2 lados é uma circunferência em que um vértice é um ponto fixado na circunferência e o outro vértice é o diametralmente oposto e, assim, cada aresta é uma semicircunferência.

Definição A.0.1. Seja $P \subset \mathbb{R}^2$ um polígono convexo com n arestas orientadas, $n \geq 2$, e n vértices ordenados, i.e., fixa-se um vértice como v_0 e, recursivamente, nomeiamos o vértice mais próximo de v_{i-1} no sentido anti-horário por v_i , de modo que $v_0 = v_n$. Além disso, associe para cada aresta de P um símbolo, que chamaremos de **rótulo** (em geral, vamos utilizar letras minúsculas como a, b, \dots) e associe, também, ao seu rótulo a orientação:

- se uma aresta a tem sentido anti-horário (i.e., vai de um vértice v_k para um v_{k+1}), temos uma orientação positiva (+1) e rotulamos a aresta simplesmente por a ;
- se uma aresta a tem sentido horário (i.e., vai de um vértice v_{k+1} para um v_k), temos uma orientação negativa (-1) e rotulamos a aresta por a^{-1} .

Rotuladas todas arestas, iremos denotar essa rotulação do polígono por $W = [a_1^{e_1} \dots a_n^{e_n}]$, onde a_i é o rótulo da aresta com vértices v_{i-1} e v_i e e_i denota a sua respectiva orientação. Repare que pode-se utilizar o mesmo rótulo (com uma possível troca de orientação) para duas arestas diferentes. Fazemos isso com o intuito de representar uma certa colagem dessas arestas na orientação indicada e é desse modo que produziremos nossas superfícies.

Explicitamente, a colagem será dada com auxílio de um isomorfismo: dada uma aresta c que vai de um vértice v_1 para um w_1 e outra d que vai de v_2 para um w_2 , temos que a função $h : c \rightarrow d$ que, para cada $x = (1-t)v_1 + tw_1 \in c$, associa a $h(x) = (1-t)v_2 + tw_2 \in d$ é um isomorfismo. Assim, sendo R a região poligonal de P (i.e., a reunião de P com seu interior), podemos construir um espaço $X = R/\sim$, com \sim sendo a seguinte relação de equivalência:

- se $p \in R$ está no interior de R , então p é equivalente somente a p ;
- sejam b_i, b_j duas arestas de P que possuem o mesmo rótulo, então $b_i \ni x \sim h(x) \in b_j$.

Desse modo, através das rotulações do polígono P , obtivemos o espaço X e diremos que **X foi obtido através da rotulação W (de P)** e que W é uma **apresentação poligonal de X**. Também, vamos incluir aqui espaços que são obtidos a partir da rotulação de um número finito de polígonos com rótulos $W_1 \dots W_m$ e denotaremos a apresentação de X por $[W_1, W_2, \dots, W_m]$.

Exemplo A.0.2. Para nossos exemplos básicos de superfícies, temos as seguintes apresentações poligonais, que serão nossos padrões:

1. A esfera \mathbb{S}^2 é dada por $[aa^{-1}]$;
2. O toro \mathbb{T}^2 por $[aba^{-1}b^{-1}]$;
3. O plano projetivo \mathbb{P}^2 por $[aa]$.

Tão importante quanto entender como a superfície é dada é saber como poderemos transformá-la em outras de modo que elas continuem isomorfas. Assim, vejamos algumas transformações desse tipo, a que chamaremos de *transformações elementares*:

- Corte: Dada uma rotulação w e um rótulo b não presente em w , então chamamos de *corte ao longo de b* a transformação: $w = [a_1 \dots a_k a_{k+1} \dots a_n] \rightarrow [a_1 \dots a_k b, b^{-1} a_{k+1} \dots a_n]$
- Colagem: É a transformação inversa ao corte, isto é, uma rotulação da forma $[a_1 \dots a_k b, b^{-1} a_{k+1} \dots a_n]$ é levada à rotulação $[a_1 \dots a_k a_{k+1} \dots a_n]$. E dizemos que ocorreu uma *colagem ao longo de b* .
- Rotação: Esta baseia-se simplesmente em mudar onde foi definido o vértice v_0 do polígono: $[a_1 \dots a_k \dots a_n] \rightarrow [a_k \dots a_n a_1 \dots a_{k-1}]$
- Rerrotulação: Essa transformação é dada simplesmente através da mudança do símbolo de algum rótulo. Por exemplo, se a é o rótulo de uma certa aresta e b é um símbolo não usado na rotulação, podemos trocar todas as ocorrências de a por b .
- Reflexão: Esta baseia-se em, fixado o vértice v_0 , refletir o polígono de modo que cada vértice v_k passe a ser o vértice v_{n-k} , lembrando que fixamos a ordem no sentido anti-horário. Assim, a orientação de cada rótulo é trocada e o rótulo que aparecia na k -ésima posição vai para a $(n+1-k)$ -ésima posição: $[a_1^{e_1} \dots a_n^{e_n}] \rightarrow [a_n^{-e_n} \dots a_1^{-e_1}]$
- Dobradura: Nesse caso, quando temos uma rotulação da forma $[Vee^{-1}W]$, onde V e W são pedaços não-vazios da rotulação e a não aparece em V ou em W , podemos simplificá-la por $[VW]$. Pode-se visualizá-la melhor na figura abaixo.

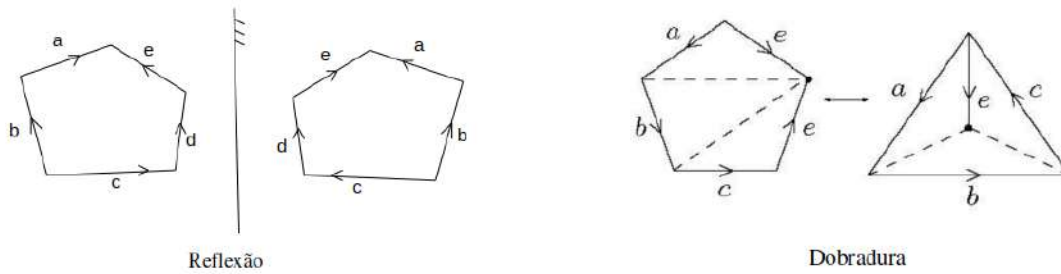


Figura A.1

Proposição A.0.3. Dado um espaço X que possui uma apresentação poligonal W , se aplicarmos as transformações de corte ou colagem sobre W , então o espaço obtido através dessa nova apresentação será isomorfo a X .

Demonstração. Seja X o espaço dado pela apresentação poligonal $W = [V_1 V_2]$ e Y o dado pela apresentação após um corte, isto é, por $[V_1 b, b^{-1} V_2]$. Assim, como na figura abaixo, sendo P a região poligonal em que ocorreu a rotulação W e sendo Q_1 e Q_2 os dois polígonos gerados após o corte de P e rotulados por $V_1 b$ e por $b^{-1} V_2$, temos que $X = P/\sim$ e $Y = (Q_1 \amalg Q_2)/\sim$.

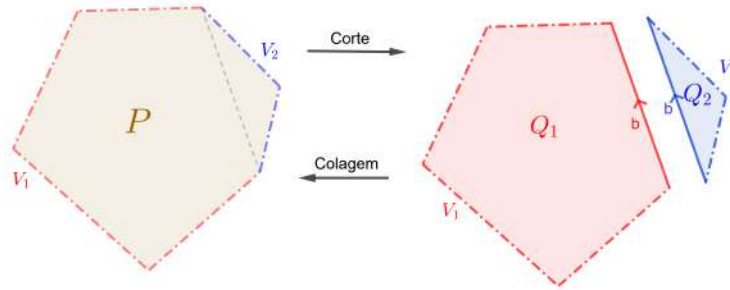


Figura A.2

Defina $\phi: Q_1 \amalg Q_2 \rightarrow P$ a função que, restrita a Q_1 ou a Q_2 , é a inclusão deles em P . Repare que essa função é sobrejetora e só não é injetora nos pontos da aresta comum a Q_1 e Q_2 , a rotulada por b . Agora, vejamos que a relação seguinte é um isomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi: Y &\rightarrow X \\ [q] &\mapsto [\phi(q)]. \end{aligned}$$

1. φ é, de fato, uma função: seja $p, q \in Q_1 \amalg Q_2$ tal que $[p] = [q]$ (i.e. $p \sim q$), se p está no interior de Q_1 ou de Q_2 , vale que $p = q$; se $p \in Q_1$ não é um vértice e está na aresta rotulada por b , então $q = p$ ou $q \in Q_2$ é o único outro ponto que está identificado com p e vale que $\phi(p) = \phi(q)$ (para $p \in Q_2$ é análogo); agora, levando em conta que as rotulações nas arestas, que não a rotulada por b , de $Q_1 \amalg Q_2$ são as mesmas que as em P , se p está em uma aresta que não a b , então vale que $\phi(p) \sim \phi(q)$. Assim, de qualquer modo, temos $[\phi(p)] = [\phi(q)]$.
2. φ é injetora: como as rotulações de $Q_1 \amalg Q_2$ e P só diferem pelas duas arestas com rótulo b e ϕ só não é injetora nessas arestas, basta ver a injetividade aí: isto é, sendo $p \in Q_1$ ponto da aresta b e q tal que $\phi(q) \sim \phi(p)$, vale que $\phi(p)$ está no interior de P , então $\phi(p) = \phi(q)$ e, assim p e q estão identificados pelo rótulo b , isto é, $[p] = [q]$.
3. φ é sobrejetora: isso segue da sobrejetividade da função ϕ .
4. φ é contínua: Sendo $\pi_1: P \rightarrow X$ e $\pi_2: Q_1 \amalg Q_2 \rightarrow Y$ as aplicações quocientes, é de se reparar que $\forall q \in Q_1 \amalg Q_2$, $(\varphi \circ \pi_2)(q) = [\phi(q)] = (\pi_1 \circ \phi)(q)$. Além disso, pela propriedade da topologia

quociente, vale que: φ é contínua $\Leftrightarrow \varphi \circ \pi_2$ é contínua. Assim, o resultado segue, pois $\varphi \circ \pi_2 = \pi_1 \circ \phi$ e $(\pi_1 \circ \phi)$ é contínua, já que é composta de contínuas.

5. φ é isomorfismo: isso provém dos itens acima e do fato de que Y é compacto e X é Hausdorff.

Repare que, assim, provamos que, se Y é obtido de uma apresentação de X que sofreu um corte, então X e Y são isomorfos. Mas, também, podemos pensar que X e Y são isomorfos quando X é obtido de uma apresentação de Y que sofreu uma colagem. \square

Definição A.0.4. Duas rotulações V e W são ditas **equivalentes** se podemos obter W através da aplicação sobre V de uma sequência de transformações elementares.

Dando coerência a essa definição, pode-se provar, generalizando a proposição, que dois espaços obtidos através de apresentações poligonais equivalentes são isomorfos. É fácil de se notar isso para as transformações de rotação e reflexão, já que são movimentos rígidos no plano euclidiano, e para a de rerrotulação, pois é uma simples troca de nomes.

Em seguida, valendo do fato de que nossa superfície não tem bordo, veremos que a sua apresentação poligonal não pode ter rótulos solitários, isto é, todas as arestas do polígono possuem uma aresta companheira para se identificar. Também, por conta de certa regularidade das variedades, veremos que essa companheira é única. Primeiro, daremos um nome para quando isso acontece:

Definição A.0.5. Dizemos que uma rotulação de um polígono é **própria** se cada um de seus rótulos aparece exatamente duas vezes.

Proposição A.0.6. Dada uma superfície S compacta triangulada sem bordo, a apresentação poligonal induzida por sua triangulação é própria.

Demonstração. Escreva como $\{T_1, \dots, T_n\}$ o conjunto dos triângulos dos quais, através da rotulação de suas arestas, obtemos a superfície S . Como abuso de notação, os T_i também vão ser usados para se referir às suas cópias isomorfas em S , dadas pela sua triangulação.

Começamos vendo que cada rótulo aparece pelo menos duas vezes na apresentação: de fato, se um rótulo aparecer apenas uma vez, então há uma aresta de algum triângulo T_i que não é identificada com nenhuma outra; assim, tome x um ponto pertencente a essa aresta, afirmo que qualquer vizinhança de x não será isomorfa a um aberto de \mathbb{R}^2 .

Como ilustrado na figura 3, isso acontece, porque, sendo U vizinhança de $x \in S$ e $B \subseteq U$ uma subvizinhança aberta isomorfa a um semidisco (ou a um setor de disco se x for um vértice) que contém x , temos que x está no bordo de B e, assim, $B \setminus \{x\}$ é espaço simplesmente conexo (isso acontece, pois $B \setminus \{x\}$ é um espaço contrátil: uma homotopia pode ser dada através de uma rotação dos pontos até um mesmo segmento de raio, que pode ser contraído a um ponto). Enquanto que, se tomarmos um aberto A de \mathbb{R}^2 e $a \in A$, vale que $A \setminus \{a\}$ não é simplesmente conexo (pois os laços que contornam a não são triviais). Assim, $B \setminus \{x\} \not\cong A \setminus \{a\} \Rightarrow B \not\cong A$ e, portanto, U não pode ser isomorfo a um aberto de \mathbb{R}^2 , senão a restrição do isomorfismo a B contradiria que $B \cong A$. Desse modo, a superfície não satisfaria a condição de variedade sem bordo.

Agora, vejamos que o rótulo deve aparecer, no máximo, duas vezes. Suponha que um rótulo apareça um número $m \geq 3$ de vezes, então há m arestas de triângulos T_{i_1}, \dots, T_{i_m} sendo identificadas. Escolha $y \in S$ um não-vértice pertencente a uma dessas arestas após serem identificadas, e seja $V \subseteq S$ vizinhança de y , temos, também, que V não é isomorfa a nenhum aberto de \mathbb{R}^2 .

A razão desse fato está que, tomando p/ todo i_k um subespaço $C_{i_k} \subset V \cap T_{i_k}$ isomorfo a um semidisco, temos que $C = \cup \{C_{i_k} : k = 1, \dots, m\} \subseteq V$ é vizinhança aberta de y isomorfa a k semidiscos colados pelo diâmetro (a figura abaixo ilustra o caso $k = 3$). Assim, $C \setminus \{y\}$ é homotópico a um buquê de $(m - 1)$ 1-esferas, já que, retirando o ponto y , temos uma equivalência de homotopia com o espaço dado por m semiesferas de dimensão 1 coladas pela bordas do diâmetro, o que é isomorfo a uma esfera (de dim. 1) com $(m - 2)$ cordas coladas entre os polos, sendo que cada corda pode ser continuamente deformada até formarem um S^1 colado por um ponto com a esfera; isto é, é gerado o buquê de $(m - 1)$ 1-esferas.

Com isso, computado através do Teorema de Seifert-van Kampem, temos que $\pi_1(C \setminus \{y\}, c)$ é isomorfo ao grupo livre de $m - 1 \geq 2$ geradores. Por outro lado, todo aberto de \mathbb{R}^2 contém um disco aberto D , de modo que $D \setminus \{d\}$ é homotópico a S^1 e $\pi_1(S^1, x)$ é o grupo livre de 1 gerador, portanto

$C \setminus \{y\} \not\cong D \setminus \{d\} \Rightarrow C \not\cong D$; do mesmo modo, toda subvizinhança $C' \subseteq C$ de y é não-isomorfa a um disco. Isso conclui a nossa prova, porque se V fosse isomorfa a um aberto de \mathbb{R}^2 , C seria isomorfa a um aberto de \mathbb{R}^2 . \square

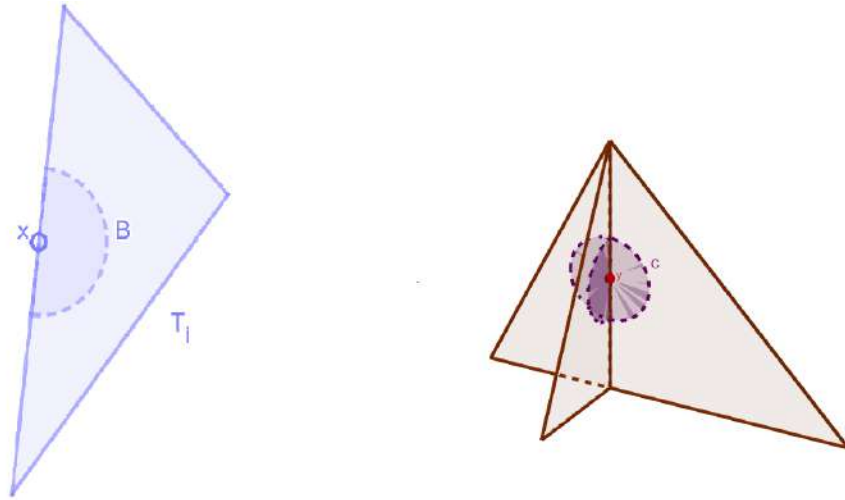


Figura A.3: As vizinhanças B e C não são isomorfas a abertos de \mathbb{R}^2 .

Com esse arcabouço, enfim, podemos desenvolver uma prova para o teorema através de transformações elementares da apresentação poligonal da nossa superfície levemente arbitrária. Mas, primeiro, façamos um lema que, além de ser útil para a demonstração do teorema, exemplifica bem como podemos usar essas ferramentas para concluir que duas superfícies são isomorfas.

Lema A.0.7. A soma conexa $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ é isomorfa à $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2$.

Demonstração. Temos que uma apresentação de $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ é $[aabbcc]$. Façamos algumas transformações:

$$\begin{aligned} [aabbcc] &\approx [abbcca] \text{ (rotação) } \approx [abd, d^{-1}bcc] \text{ (corte ao longo de d) } \\ &\approx [dab, ad^{-1}bcc] \text{ (rotação) } \approx [dab, b^{-1}da^{-1}c^{-1}c^{-1}] \text{ (reflexão e rotação do 2º polígono) } \\ &\approx [dada^{-1}c^{-1}c^{-1}] \text{ (colagem ao longo de b) } \end{aligned}$$

É de se notar que esta última é uma apresentação (mais clara) da soma $K \# \mathbb{P}^2$, onde K é a garrafa de Klein. Agora, rerotulando c^{-1} por c , continuemos, para chegar em uma apresentação de $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2$ (algo, a menos de rerotulação, da forma $[aba^{-1}b^{-1}cc]$):

$$\begin{aligned} [dada^{-1}cc] &\approx [cdae^{-1}, eda^{-1}c] \text{ (rotação e corte ao longo de e) } \\ &\approx [dae^{-1}c, c^{-1}ad^{-1}e^{-1}] \text{ (rotação do 1º e reflexão do 2º) } \\ &\approx [dae^{-1}ad^{-1}e^{-1}] \text{ (colagem ao longo de c) } \approx [d^{-1}e^{-1}dae^{-1}a] \text{ (rotação) } \\ &\approx [d^{-1}e^{-1}daf, f^{-1}e^{-1}a] \text{ (corte ao longo de f) } \\ &\approx [fd^{-1}e^{-1}da, a^{-1}ef] \text{ (rotação do 1º e reflexão do 2º) } \\ &\approx [d^{-1}e^{-1}def] \text{ (colagem ao longo de a e rotação) } \end{aligned}$$

Assim, chegamos em uma apresentação de $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2$ a partir de uma de $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$. \square

Teorema A.0.8. Toda superfície M compacta triangulada sem bordo conexa é isomorfa a uma das seguintes superfícies (com suas respectivas apresentações poligonais):

1. a esfera \mathbb{S}^2 : $[aa^{-1}]$;

2. uma soma conexa de m toros $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2 : [b_1 c_1 b_1^{-1} c_1^{-1} \dots b_m c_m b_m^{-1} c_m^{-1}]$;
3. uma soma conexa de k planos projetivos $\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2 : [a_1 a_1 \dots a_k a_k]$.

Demonstração. Sabendo que M é triangulada e compacta, temos que ela possui uma apresentação poligonal induzida pela triangulação e que essa apresentação é própria, pela proposição 2. Assim, quando um par de rótulos aparecer na apresentação com orientação trocada, isto é, na forma a, \dots, a^{-1} , chamaremos o par de *circular* e, quando ele aparecer com a mesma orientação, isto é, a, \dots, a ou a^{-1}, \dots, a^{-1} , o chamaremos de *projetivo*. Além disso, se uma apresentação, ou um pedaço da apresentação, é formada somente de pares circulares, diremos que ela é *do tipo toro*.

A fim de provar o teorema, vamos transformar em alguns passos a apresentação de M em alguma das três apresentações padrões: de \mathbb{S}^2 ou de soma de \mathbb{T}^2 ou de soma de \mathbb{P}^2 .

PASSO 1: *M admite uma apresentação poligonal proveniente de apenas um polígono.* Lembrando que M é conexa, se a apresentação é dada através da rotulação de dois ou mais polígonos, então alguma aresta de cada polígono deve estar identificada (através da rotulação) com uma aresta de um polígono diferente; senão, teríamos pelo menos um polígono que não identifica suas arestas com os outros e, ao fazer a colagem das arestas, a superfície gerada por esse polígono estaria desconexa das outras e estaríamos portanto separando a superfície em, pelo menos, duas componentes conexas. Sabendo isso, podemos aplicar transformações de colagem dessas arestas identificadas (junto com rotações e reflexões se necessário) para reduzir nossa apresentação poligonal até que seja dada através de um único polígono.

PASSO 2: *Se M não é isomorfo à esfera, então M admite uma apresentação sem pares circulares adjacentes.* Todo par circular da apresentação de M pode ser eliminado através de uma dobradura, a não ser que ele seja o único par da apresentação, que é o caso da apresentação padrão da esfera $[aa^{-1}]$ e poderia ser o caso da superfície se ela fosse isomorfa à esfera.

A partir de agora, assumiremos que M não é isomorfo à esfera e que o passo 2 foi aplicado.

PASSO 3: *M admite uma apresentação em que todos os pares projetivos são adjacentes e estão todos concatenados, isto é, a apresentação será da forma $[a_1 a_1 \dots a_k a_k V]$, sendo V do tipo toro.* Se a apresentação possui um par projetivo, então ela é da forma $[UaVaW]$. Podemos assumir que U, V e W são não vazios, façamos algumas transformações:

$$\begin{aligned}
[UaVaW] &\approx [Uab, b^{-1}VaW] \text{ (corte ao longo de } b) \\
&\approx [U^{-1}b^{-1}a^{-1}, aWb^{-1}V] \text{ (reflexão do } 1^\circ \text{ e rotação do } 2^\circ) \\
&\approx [b^{-1}Wb^{-1}VU^{-1}] \text{ (colagem ao longo de } a \text{ e rotação)} \\
&\approx [b^{-1}Wc, c^{-1}b^{-1}VU^{-1}] \text{ (corte ao longo de } c) \\
&\approx [Wcb^{-1}, bcUV^{-1}] \text{ (rotação do } 1^\circ \text{ e reflexão e rotação do } 2^\circ) \\
&\approx [WccUV^{-1}] \text{ (colagem ao longo de } b) \\
&\approx [c^{-1}c^{-1}W^{-1}VU^{-1}] \text{ (reflexão e rotação)} \approx [UV^{-1}Wcc] \text{ (reflexão)} \\
&\approx [aaUV^{-1}W] \text{ (rotação e rerotulação de } c)
\end{aligned}$$

Repare que, se havia outros pares de rótulos adjacentes no início, eles estariam ambos em U ou em V ou em W e, portanto, continuam adjacentes na última apresentação. Assim, apesar de possivelmente terem sido criados outros pares projetivos por causa da reflexão de V , o número de pares não adjacentes diminuiu por pelo menos um. Logo, após um número finito de operações dessa chegaremos na forma desejada: suponha que $UV^{-1}W$ não é do tipo toro, i.e., existe b tal que $w = [aaUV^{-1}W] = [aaUbV^{-1}bW]$, aplicando novamente as transformações acima, obtemos $w \approx [bbaaUV^{-1}W]$; agora, basta repetir esse processo até que $UV^{-1}W$ seja do tipo toro. Perceba, ainda, que poderiam ter sido criados novos pares circulares adjacentes na reflexão de V , mas eles podem ser eliminados aplicando o Passo 2.

PASSO 4: *Se a apresentação de M possuir pares circulares, então há pelo menos dois deles e eles ocorrem intercalados, i.e. ela é da forma $[UaVbWa^{-1}Xb^{-1}]$.* Pelo passo 3, sabemos que ela tem a forma $w = [a_1 a_1 \dots a_k a_k V]$, V do tipo toro, então, todos os pares circulares de w estão em V . Assim, escolha a, a^{-1} o par cujas ocorrências estão o mais perto possível, isto é, com a menor quantidade de rótulos entre eles, e assumiremos, s.p.g., que a ocorre primeiro, senão basta fazer uma simples rerotulação. Desse modo, sendo b algum rótulo entre a e a^{-1} (lembrando que o passo 2 foi aplicado), temos que

b forma um par circular, pois V é do tipo toro, e b^{-1} ocorre antes de a ou depois de a^{-1} , senão a, a^{-1} não seria o par mais próximo possível. Assim, com uma eventual rerotulação, temos w exatamente como enunciado.

PASSO 5: M admite uma apresentação em que, havendo dois pares circulares intercalados, eles ocorrem juntos sem outros rótulos entre eles: $aba^{-1}b^{-1}$; e mais: todos esses blocos podem ocorrer concatenados. Temos que, dado o passo 4, a apresentação é dada, a menos de rotação, por $[W a X b Y a^{-1} Z b^{-1}]$. Transformemó-la:

$$\begin{aligned}
 [W a X b Y a^{-1} Z b^{-1}] &\approx [W a X c, c^{-1} b Y a^{-1} Z b^{-1}] \text{ (corte ao longo de } c) \\
 &\approx [X c W a, a^{-1} Z b^{-1} c^{-1} b Y] \text{ (rotação do } 1^\circ \text{ e } 2^\circ) \\
 &\approx [W Z b^{-1} c^{-1} b Y X c] \text{ (colagem ao longo de } a \text{ e rotação)} \\
 &\approx [W Z b^{-1} d^{-1}, d c^{-1} b Y X c] \text{ (corte ao longo de } d) \\
 &\approx [d^{-1} W Z b^{-1}, b Y X c d c^{-1}] \text{ (rotação do } 1^\circ \text{ do } 2^\circ) \\
 &\approx [a b a^{-1} b^{-1} W Z Y X] \text{ (colagem ao longo de } b, \text{ rotação e rerotulação)}
 \end{aligned}$$

Assim, os pares que estavam adjacentes anteriormente foram mantidos assim e juntamos os pares que estavam intercalados. Agora, repita isso para todos os pares circulares e teremos uma apresentação da forma $w = [b_1 c_1 b_1^{-1} c_1^{-1} \dots b_m c_m b_m^{-1} c_m^{-1} W]$, onde W só possui pares projetivos: suponha que existe c, d tal que $w = [a b a^{-1} b^{-1} W]$ é da forma $[a b a^{-1} b^{-1} W c Z d Y c X d^{-1}]$, fazendo como acima, obtemos $[c d c^{-1} d^{-1} a b a^{-1} b^{-1} W Z Y X]$ e repita isso até que $W X Y Z$ só tenha pares projetivos. Para terminar, façamos uma rotação: $w \approx [W b_1 c_1 b_1^{-1} c_1^{-1} \dots b_m c_m b_m^{-1} c_m^{-1}]$. (Observe que, pelo passo 3, W é dado por concatenação de pares projetivos adjacentes).

PASSO 6: M é isomorfa a uma soma conexa de toros ou a uma soma conexa de planos projetivos. Pelo passo 3, a apresentação é dada de modo que todos os pares projetivos estão adjacentes e, pelos passos 4 e 5, todos os pares circulares ocorrem em grupos intercalados como $aba^{-1}b^{-1}$. Assim, se a apresentação não possuir pares circulares, então ela é sequência de pares projetivos $[a_1 a_1 \dots a_n a_n]$ e, portanto, a superfície é isomorfa a uma soma conexa de pares projetivos. Se ela não possuir pares projetivos, então ela é da forma $[a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_m b_m a_m^{-1} b_m^{-1}]$ e, portanto, é isomorfa a uma soma conexa de toros.

Agora, se a apresentação possui tanto pares projetivos como pares circulares, temos que, dados os passos anteriores, a apresentação é da forma $[a_1 a_1 \dots a_k a_k b_1 c_1 b_1^{-1} c_1^{-1} \dots b_m c_m b_m^{-1} c_m^{-1}]$, isto é, uma soma conexa de planos projetivos somado a uma soma conexa de toros: $\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$. Aqui podemos aplicar o lema sucessivamente para substituir cada ocorrência de $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{T}^2$ por $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ e obter assim uma soma conexa de $k + 2m$ planos projetivos (para cada toro, colocamos 2 planos projetivos). Então, nesse caso, a superfície seria isomorfa a uma soma de planos projetivos. Finalizamos, assim, a prova. \square

Uma das consequências do teorema é que uma superfície é orientável somente quando for uma esfera ou soma conexa de toros; caso contrário, ela é isomorfa a uma soma de planos projetivos.

Agora, para mostrar que a lista de superfícies do enunciado não é redundante (isto é, não tem repetições), é geralmente necessário a utilização de algum invariante topológico, como o grupo fundamental ou a característica de Euler. Este pode ser obtido de algumas triangulações das apresentações poligonais das superfícies, nos fornecendo os seguintes valores:

- a característica de Euler da esfera é igual a 2;
- a característica de uma soma conexa de $g \geq 1$ toros é igual a $2 - 2g$;
- a característica de uma soma conexa de $m \geq 1$ planos projetivos é igual $2 - m$.

Em síntese, obtemos a seguinte caracterização de isomorfismo entre superfícies:

Corolário A.0.9. *Duas superfícies (compactas sem bordo) são isomorfas se, e somente se, possuem mesma característica de Euler e mesma orientabilidade (i.e. são ambas orientáveis ou ambas não-orientáveis.)*

Para o caso de superfícies com bordo, o resultado acima pode ser reformulado se considerarmos também o número de componentes de bordo da superfície.

Apêndice B

Planificação de toros poliedrais

Para a aplicação das oficinas, foram utilizados quatro tipos de poliedros isomorfos ao toro, sendo que as seções horizontais de dois deles são triângulos e dos outros dois são quadrados. As planificações de dois desses poliedros, sendo uma triangular e uma quadrada, foram retiradas do *site* “Wolfram Demonstrations Project” [Hafb], enquanto que as outras duas foram construídas usando o Geogebra e disponibilizadas através do link <https://www.geogebra.org/m/bdu4gxph>. Na página abaixo, ambas as planificações podem ser encontradas em formato pronto para impressão.

Sobre as planificações construídas, o ponto crucial para realizá-las está em encontrar o ângulo na base da face trapezoidal, que na figura B.1 abaixo está representado por β .

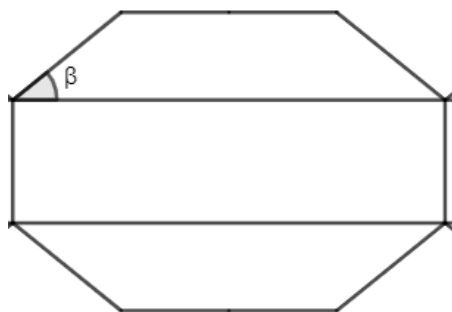


Figura B.1: Células básicas que compõem a planificação de um toro poliedral.

Seja a a altura do face retangular e b a altura da face em forma de trapézio. Se quisermos que a seção horizontal do poliedro seja um n -ágono regular, então o ângulo β é determinado pela seguinte igualdade:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_n}{2} \right),$$

onde α_n representa a medida do ângulo interno de um n -ágono regular, que é igual a $\frac{\pi(n-2)}{n}$. Em particular, notamos que uma condição necessária para sua construção é que $b > a/2$. De fato, isso é fundamental para que as faces trapezoidais se juntem após serem dobradas.

Usando tal informação, podemos construir, assim, a planificação de um toro poliedral a partir dos seguintes quatro parâmetros: a altura do trapézio, o comprimento e a altura do retângulo e a quantidade n de lados da seção horizontal do poliedro.

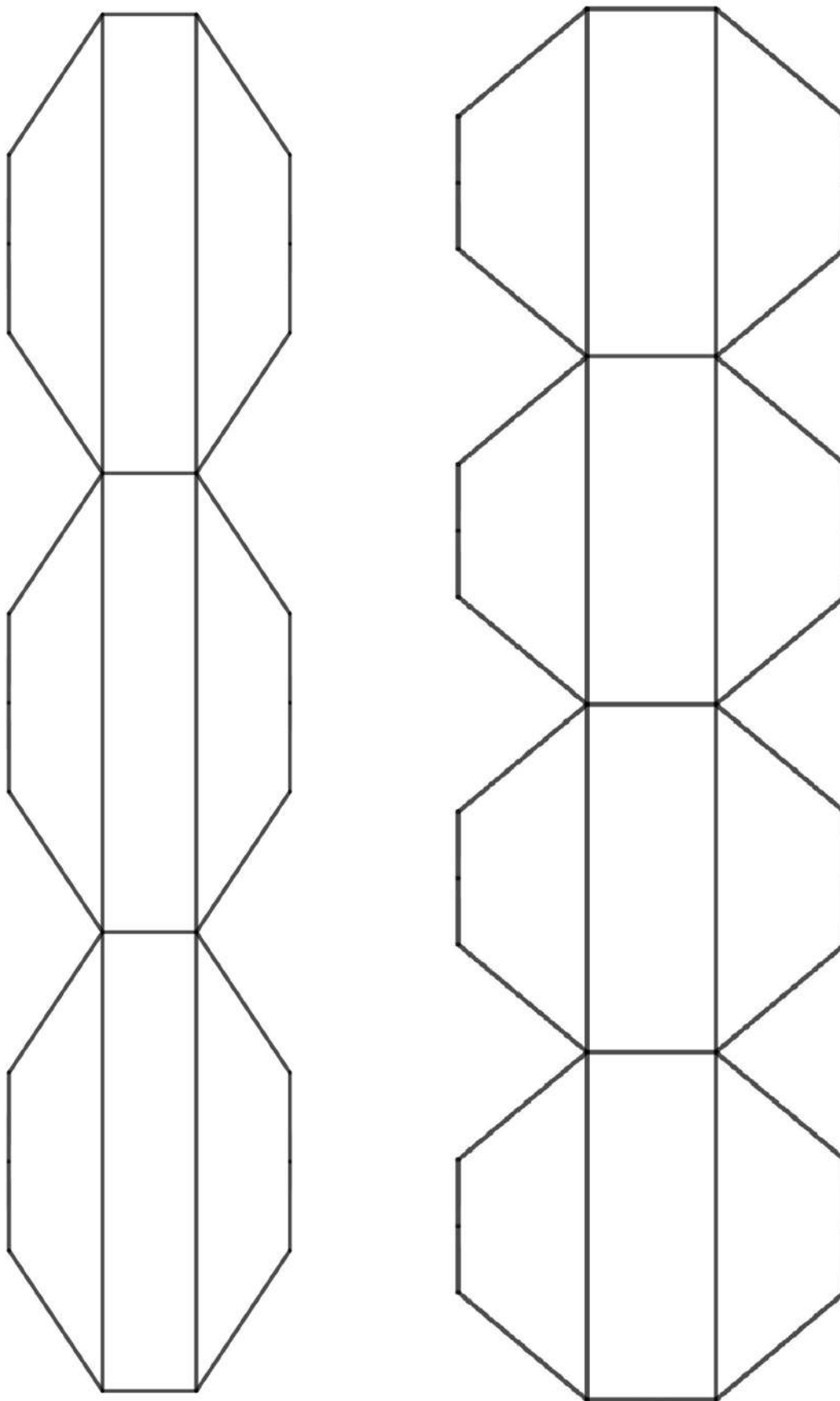


Figura B.2: Planificação de dois poliedros isomorfos ao toro. À esquerda, um com seção triangular e, à direita, um com seção quadrada.

Bibliografia

- [Ale15] J. W. Alexander. A proof of the invariance of certain constants of analysis situs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 16(2):148–154, 1915. <http://www.jstor.org/stable/1988715>.
- [Arm83] M. A. Armstrong. *Basic Topology*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 1983.
- [Bar] Maria Bernadete Barison. *Geometria Descritiva: Aula 15T*. Disponível em: http://www.mat.uel.br/geometrica/php/gd_t/gd_15t.php (acessado em 15/11/2023).
- [Bre90] U. Brehm. How to build minimal polyhedral models to the boy surface. *The Mathematical Intelligencer*, 12:51–56, 9 1990. <https://doi.org/10.1007/BF03024033>.
- [Cau09] Augustin-Louis Cauchy. *Recherches sur les polyèdres (Premier Mémoire)*, volume 1 of *Cambridge Library Collection - Mathematics*, page 7–25. Cambridge University Press, 2009.
- [CG19] Daniel Cohen and Shai Gul. The hairy klein bottle. In *Proceedings of Bridges 2019: Mathematics, Art, Music, Architecture, Education, Culture*, pages 391–394, 2019.
- [Chi16] Ted Chiang. *A História da sua vida e outros contos*. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016. Tradução de Edmundo Barreiros.
- [Eul58a] Leonhard Euler. Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida he-drus planis inclusa sunt praedita. *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 4 (1752/3):140–160, 1758.
- [Eul58b] Leonhard Euler. Elementa doctrinae solidorum. *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 4 (1752/3):109–140, 1758.
- [Fed82] P.J. Federico. *Descartes on Polyhedra: A Study of the De Solidorum Elementis*. Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer, 1982.
- [Fer17] Nathaniel Ferron. *An Introduction to Topology for the High School Student*. *Masters Essays*, 76, 2017. <https://collected.jcu.edu/mastersessays/76>.
- [Fio20] Sophia Lopes Ribeiro Fiorotto. *O uso da Topologia na produção de experiências no ensino de Matemática*, 2020. Trabalho do IME-USP de MAT0451 - Projeto de Ensino de Matemática.
- [FS08] Larry Frazier and Doris Schattschneider. Möbius bands of wood and alabaster. *Journal of Mathematics and the Arts*, 2(3):107–122, 2008.
- [FW99] George K. Francis and Jeffrey R. Weeks. Conway’s zip proof. *The American Mathematical Monthly*, 106(5):393–399, 1999. <https://doi.org/10.1080/00029890.1999.12005061>.
- [Gar78] Martin Gardner. Mathematical games. *Scientific American*, 239(5):22–34, 1978. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/24955839>.
- [Gay] Laura Gay. *Surface de Boy et polyèdre de Brehm*. Rapport de stage en Institut Camille Jordan. Disponível em: <http://math.univ-lyon1.fr/~borrelli/Jeunes.html> (acessado em 20/11/2023).

- [Hafa] Ariel Hafftk. *Differential Topology and the Poincaré-Hopf theorem*. Lecture Notes, 2009. Disponível em: <https://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2009/REUPapers/Hafftk.pdf> (acessado em 21/11/2023).
- [Hafb] Izidor Hafner. *Five Toroidal Polyhedra and Their Nets*. Wolfram Demonstrations Project. Published: September 10 2014. Disponível em: <http://demonstrations.wolfram.com/FiveToroidalPolyhedraAndTheirNets/> (acessado em 15/11/2023).
- [Hat01] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge Unieversity Press, 2001. Diponível em: <https://pi.math.cornell.edu/hatcher/AT/ATpage.html>.
- [Lee00] John M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, NY, 2000.
- [Leg94] A.-M. Legendre. *Éléments de géométrie*. Paris: Firmin Didot, 1794.
- [Lim85a] Elon Lages Lima. A característica de euler-poincaré. *Matemática Universitária*, 1:47–62, 6 1985.
- [Lim85b] Elon Lages Lima. O teorema de euler sobre poliedros. *Matemática Universitária*, 2:57–74, 12 1985.
- [Mar19] Ton Marar. *Topologia Geométrica para Inquietos*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2019.
- [Mil65] John W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. The University Press of Virginia, 1965.
- [O'S07] Donal O'Shea. *The Poincaré Conjecture: In Search of the Shape of the Universe*. Walker Books, 2007.
- [Poi93] Henri Poincaré. Sur la généralisation d'un théorème d'euler relatif aux polyèdres. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 117:144–145, 1893.
- [Ric08] David S. Richeson. *Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*. Princeton University Press, 2008.
- [Sug14] Carling Sugarman. *Using Topology to Explore Mathematics Education Reform*. HMC Senior Theses, 54, 2014. https://scholarship.claremont.edu/hmc_theses/54.
- [vS47] K. G. C. von Staudt. *Geometrie der Lage*. Nürnberg: Bauer und Raspe, 1847.
- [Wee02] J.R. Weeks. *The Shape of Space (2nd edition)*. New York, NY: Marcel Dekker, 2002.
- [Wee04] Jeffrey Weeks. *The Poincaré Dodecahedral Space and the Mystery of the Missing Fluctuations*. *Notices of the AMS*, 51(6), 2004. Disponível em: <https://www.ams.org/journals/notices/200406/fea-weeks.pdf>.
- [Wik23] Wikipedia contributors. Schoenflies problem — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Schoenflies_problem&oldid=1136098524, 2023. [Online; acessado em 28/11/2023].