

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

**Maria Eduarda Cavini Garbossa**

**O observável  $R(s)$  na QCD perturbativa**

**São Carlos  
2025**

**Maria Eduarda Cavini Garbossa**

**O observável  $R(s)$  na QCD perturbativa**

Trabalho de Conclusão de Curso - Monografia  
apresentado ao Programa de Graduação em Física  
Computacional do Instituto de Física de São Carlos,  
da Universidade de São Paulo, para a obtenção  
do título de Bacharel em Física Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Diogo Rodrigues Boito

**São Carlos**  
**2025**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

## Resumo

O observável  $R(s)$  construído a partir da seção de choque inclusiva para o processo de espalhamento  $e^+e^- \rightarrow (\text{hadrons})$ , tem um papel central na Cromodinâmica Quântica (QCD). Ele oferece um campo de provas crucial para propriedades fundamentais da teoria, como o número de cargas de cor, a natureza fracionária da carga elétrica dos quarks e o fenômeno da liberdade assintótica. Neste trabalho, desenvolvemos a descrição de  $R(s)$  no regime da QCD perturbativa em ordens mais baixas, aplicável a altas energias, e, em seguida, confrontamos os resultados teóricos obtidos com dados experimentais, a fim de validar a precisão do modelo.

**Palavras-chave:** Espalhamento  $e^+e^-$ . Cromodinâmica Quântica. QCD perturbativa.  $R(s)$ .

## 1 Introdução

A física de partículas estuda os constituintes fundamentais da matéria, as partículas elementares e as interações entre elas. No século XX, esse ramo foi impulsionado pela unificação da Mecânica Quântica e da Relatividade Especial, ao combinar a *equação de Dirac*, que descreve partículas de spin-1/2, com a Teoria Clássica de Campos, um formalismo que culminou na Teoria Quântica de Campos (TQC). Nessa teoria, os quanta dos campos são interpretados como partículas, e as interações podem ser entendidas como uma troca de partículas chamadas virtuais.

O primeiro triunfo deste formalismo foi a Eletrodinâmica Quântica (QED) [1], que descreve a interação entre férnioms carregados, como os elétrons, e o campo eletromagnético quantizado, mediado por fôtons. O sucesso desta teoria foi consolidado pelo programa de renormalização. Desenvolvido por Feynman, Schwinger, Tomonaga, Dyson e outros, este formalismo forneceu um método para lidar com os infinitos que surgiam nos cálculos. Ao possibilitar previsões teóricas finitas e de maior precisão, o programa de renormalização levou a QED a um acordo surpreendente com os experimentos [2].

Paralelamente ao sucesso da QED, o novo formalismo foi utilizado para descrever um problema da época, a estabilidade dos núcleos atômicos. A força nuclear forte, teorizada pela primeira vez por Yukawa, é a interação responsável por compensar a repulsão Coulombiana entre os prótons e garantir a estabilidade atômica. Diferentemente dos elétrons, os prótons e nêutrons não são partículas elementares, eles são *hádrons*. Os *hádrons* são formados por *quarks*, partículas elementares de spin 1/2 e carga elétrica fracionária. As tentativas de descrição da força entre os quarks por meio de uma teoria de calibre (ou *gauge*, em inglês) levaram ao desenvolvimento da Cromodinâmica Quântica (QCD). Existem seis quarks diferentes, que se distinguem pelos sabores: *up*, *down*, *strange*, *charm*, *bottom* e *top*, que se organizam em "gerações" com massas muito diferentes entre si, por exemplo a massa do quark *top* é cerca de 78 mil vezes maior que a massa do quark *up*. Os hádrons são classificados em dois tipos; os *mésons*, formados por um par quark-antiquark; e os *bárions*, formados por três quarks distintos. Os prótons e nêutrons são exemplos de bárions, formados por dois quarks *u*

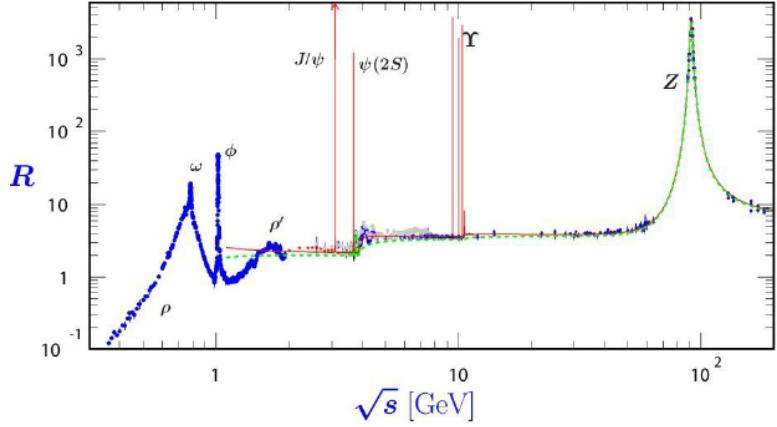


Figura 1: Compilação geral dos dados experimentais para  $R(s)$  fornecidos pelo PDG [5]. A linha tracejada verde indica a correção em ordem dominante,  $\alpha_s^0$ , e a linha vermelha indica a correção da QCD perturbativa.

e um  $d$  e dois quarks  $d$  e um  $u$ , respectivamente.

Uma característica fundamental da interação na QCD é estar associada a três tipos de cargas, e não a duas (positiva ou negativa), como na QED. As cargas dessa teoria são chamadas de carga de cor, em analogia com as cores primárias vermelho, verde e azul, do inglês *RGB*. A interação entre as partículas com carga de cor é mediada pela troca de glúons. Outra característica que a difere da QED é que os glúons possuem carga de cor, ao contrário dos fótons, que não possuem carga elétrica. Portanto, os glúons interagem entre si.

A auto-interação do glúon é a principal responsável por gerar um comportamento peculiar na evolução da constante de acoplamento forte  $\alpha_s$  — análoga a constante de estrutura fina  $\alpha_{em} = e^2/4\pi\hbar c \approx 1/137$ . Observa-se que a interação forte cresce com o aumento da distância, o que é equivalente a regimes de baixa energia, e tende a zero em distâncias curtas, regime de altas energias. Essa propriedade é a celebrada *liberdade assintótica* [3, 4]. O comportamento é compatível com o efeito de *confinamento de cor*, que postula que partículas com carga de cor não se propagam livremente, ficando confinadas em hadrons, estados singletos de cor. E também justifica o tratamento perturbativo da QCD em altas energias.

Um bom laboratório de testes para a teoria da Cromodinâmica Quântica é o observável  $R(s)$ , construído a partir da seção de choque inclusiva da aniquilação elétron-pósitron em hadrons, que é uma quantidade mensurável e muito bem conhecida experimentalmente, como visto na Fig. 1. Ele é definido como

$$R(s) \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|_{\text{LO}, m_\mu=0}}, \quad (1)$$

em que a seção de choque de normalização é referente à produção muônica calculada em ordem árvore [6] e no limite sem massa. Em altas energias e longe de ressonâncias, o confinamento de cor impõe que o processo de hadronização tem probabilidade um, logo a *dualidade quark-hádron* é válida, e a seção de choque inclusiva pode ser calculada considerando somente quarks e glúons no

estado final. Assim, a expressão teórica para o observável  $R(s)$  é obtida, neste regime, como uma expansão perturbativa em potências da constante de acoplamento forte,  $\alpha_s$ .

A partir da comparação entre a descrição teórica de  $R(s)$  com os dados experimentais, é possível realizar diferentes testes da QCD, como o número de cargas de cor ( $N_c = 3$ ), a carga elétrica fracionária dos quarks e também promover discussões sobre o confinamento de cor e a propriedade da liberdade assintótica. O presente trabalho tem como objetivo desenvolver a expressão teórica para o observável  $R(s)$  no contexto da QCD perturbativa. Na Seç. 2 será estabelecido o formalismo da Eletrodinâmica Quântica para os cálculos de diagramas de Feynman em ordem árvore. Então, na Seç. 3 será desenvolvido o cálculo de  $R(s)$  em ordem  $\alpha_s^0$ , incluindo também correções de massa dos quarks. Em seguida, será discutida de forma qualitativa a correção de ordem  $\alpha_s$  para o  $R(s)$ , juntamente com o estudo da evolução de  $\alpha_s$  com a energia a um loop.

## 2 Eletrodinâmica Quântica (QED)

Em energias longe da escala eletrofraca, a produção de múons e a de quarks e glúons no estado final do espalhamento  $e^+e^-$  é dominada pela troca de um fóton virtual ( $\gamma^*$ ). Portanto, para a compreensão destes processos é necessária a descrição da interação eletromagnética entre férmions. O formalismo adequado para tratar os processos de criação e aniquilação de partículas é a Teoria Quântica de Campos (TQC). A Eletrodinâmica Quântica (QED) é a teoria que aplica os princípios da TQC à interação eletromagnética, descrevendo a dinâmica de campos fermiônicos ( $\psi$ ) e do campo de fótons ( $A_\mu$ ) por meio de uma densidade lagrangiana.

As lagrangianas em TQC se decompõem em termos cinéticos e termos de interação. Diante disso, na QED a lagrangeana que descreve o campo livre das partículas de spin 1/2, no sistema natural de unidades ( $\hbar = c = 1$ )<sup>1</sup>, é [6]

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (2)$$

onde  $\psi$  e  $\bar{\psi} = \psi\gamma^0$  representam o campo e o campo adjunto de Dirac e  $\gamma^\mu$  são matrizes de Dirac, com  $\mu = 0, 1, 2, 3$  cujas expressões são dadas por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

em que  $I$  é a matriz identidade e  $\boldsymbol{\sigma}$  as matrizes de Pauli. Cada componente das matrizes da Eq. (3) são blocos  $2 \times 2$  e , portanto,  $\gamma^\mu$  são matrizes  $4 \times 4$ . Essas matrizes respeitam a álgebra de Dirac,  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ , na qual  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Utilizando a equação de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\psi}, \quad (4)$$

---

<sup>1</sup>Utilizaremos esse sistema de unidades durante todo o trabalho.

aplicada na lagrangiana da Eq. (2), obtemos a expressão

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0. \quad (5)$$

Esta é precisamente a equação de Dirac para um férnion livre de spin 1/2, onde  $\psi$  é o spinor de Dirac. Contudo, falta descrever a interação eletromagnética. Dentro do formalismo da QED, a introdução de interações é realizada através da invariância de *gauge* (ou calibre) local.

Nesse contexto, partimos de uma simetria global já existente na lagrangiana livre  $\mathcal{L}_0$ , descrita na Eq. (2), que é invariante sob transformações de fase  $U(1)$  globais, ou seja, sob a substituição

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) \equiv e^{iq\theta} \psi(x), \quad (6)$$

onde  $\theta$  é uma fase real e constante. No entanto, se  $\theta$  depender das coordenadas de espaço-tempo, a lagrangiana  $\mathcal{L}_0$  não será invariante, pois ela não é invariante por transformação  $U(1)$  local já que sua derivada modifica-se para

$$\partial_\mu \psi'(x) \rightarrow (\partial_\mu \psi)'(x) \equiv [\partial_\mu + ie\partial_\mu \theta(x)]e^{ie\theta(x)}\psi(x). \quad (7)$$

A estratégia para construir o termo de interação na lagrangiana da QED consiste em promover a invariância global para uma invariância local [7]. Portanto, é necessário introduzir um campo vetorial auxiliar, o campo de *gauge*  $A_\mu(x)$ , correspondente a uma partícula de spin 1. Este campo deve se transformar de forma a cancelar o termo  $\partial_\mu \theta(x)$  problemático. A regra de transformação necessária para  $A_\mu(x)$  é, portanto,

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) \equiv A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x), \quad (8)$$

e define-se também uma derivada covariante,

$$D_\mu \psi(x) \equiv (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi(x), \quad (9)$$

que se transforma igual ao campo  $\psi$  na Eq. (6). Agora, podemos reescrever a lagrangiana da Eq. (2) como

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu D_\mu \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) = \mathcal{L}_0 - q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi, \quad (10)$$

que possui simetria  $U(1)$  local e inclui o termo de interação do elétron com o campo  $A_\mu$ ,

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi. \quad (11)$$

O campo  $A_\mu$ , sendo um campo de uma partícula de spin 1 sem massa que interage com férnions de spin 1/2, é identificado com o campo do fóton. Entretanto, para que o fóton seja um campo dinâmico,

a lagrangiana total deve incluir também um termo cinético para  $A_\mu$ ,

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (12)$$

onde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor eletromagnético de Faraday.

A soma das expressões estabelecidas nas Eq. (10) e Eq. (12) constitui a lagrangiana completa que rege a QED,

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu D_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (13)$$

A partir da lagrangiana da QED, é possível derivar dois ingredientes fundamentais para as regras de Feynman: propagadores e fatores de vértice. As regras de Feynman são um mecanismo utilizado para calcular a amplitude de transição para um processo na QED, através de desenhos esquemáticos das interações, chamados de diagramas de Feynman, a eles são aplicadas um conjunto de regras que associam expressões matemáticas a cada linha e vértice do diagrama. Segundo as regras, que incluem a integração sobre momentos internos e a imposição da conservação do quadrimomento, é possível calcular a amplitude de espalhamento  $\mathcal{M}$ . As regras de Feynman para a QED são:

1. A cada linha externa associar um quadrimomento  $p_i$  com sentido definido, e para cada linha interna um quadrimomento  $q_i$  também com um sentido estabelecido.

2. As linhas externas contribuem com os fatores:

$$\text{férmion} \begin{cases} \text{inicial: } u(p) \\ \text{final: } \bar{u}(p') \end{cases}, \quad \text{antiférmion} \begin{cases} \text{inicial: } \bar{v}(p) \\ \text{final: } v(p') \end{cases}, \quad \text{fótons} \begin{cases} \text{inicial: } \epsilon_\mu(p) \\ \text{final: } \epsilon_\mu^*(p') \end{cases},$$

em que  $u(p)$  e  $v(p)$  são os espinores de Dirac para partícula e antipartícula, respectivamente, e  $\epsilon_\mu$  representa o vetor de polarização do fóton.

3. A cada vértice adicionar o fator  $i g_e \gamma^\mu$ , chamado de fator de vértice da QED.

4. Para linhas internas de quadrimomento  $q_i$  incluir os fatores que representam os propagadores livres da teoria,

$$\text{férmion: } \frac{i(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^2 - m^2}, \quad \text{fóton: } -i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}, \quad (14)$$

5. Para cada vértice incluir uma função delta

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3),$$

onde  $k_i$  são os três quadrimomentos desse vértice. O sinal positivo significa que a partícula está indo em direção ao vértice e o negativo que está saindo do vértice.

6. Para cada momento interno  $q_i$ , multiplicar pelo fator

$$\frac{d^4 q}{(2\pi)^4},$$

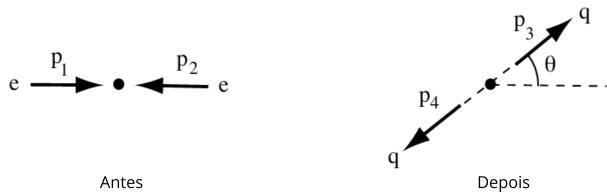


Figura 2: Espalhamento de dois corpos no referencial do centro de massa. [6]

e integrar.

7. Cancelar o termo  $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots - p_n)$ , correspondente a conservação total de energia e momento, e o remanescente corresponde a  $i\mathcal{M}$ , em que  $\mathcal{M}$  é a amplitude do processo.

A correta aplicação das regras de Feynman exige atenção à ordem dos passos acima. Para evitar erros na amplitude, é necessário ler cada linha fermiônica no sentido oposto ao fluxo da partícula [6]. Definidas as regras de Feynman, temos as ferramentas para calcular amplitudes de espalhamento na QED. Portanto, aplicaremos estas regras na próxima seção para calcular as amplitudes dos processos  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  e  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ , que formam, respectivamente, o denominador e o numerador de  $R(s)$  em ordem dominante.

### 3 Cálculo de $R(s)$ em ordem árvore

Na Eletrodinâmica Quântica, os diagramas de Feynman que têm maior contribuição para o cálculo de uma seção de choque são aqueles que possuem o menor número de vértices de interação. Esses diagramas de ordem mais baixa, do inglês *leading order* (LO), também são conhecidos como diagramas de ordem árvore. Nesse contexto, a produção muônica e a de um par quark-antiquark a partir da aniquilação elétron-pósitron são ambas descritas por um único diagrama de ordem árvore. Portanto, a primeira aproximação para a razão  $R(s)$  será calculada considerando exclusivamente esses diagramas.

#### 3.1 Seção de choque diferencial para o espalhamento de dois corpos

A seção de choque diferencial é uma medida de probabilidade, expressa como área efetiva, que descreve a distribuição angular das partículas após a colisão. Em nosso caso, para os dois processos que estamos interessados,  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  e  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ , tem-se um espalhamento do tipo:  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ , em que a colisão de 1 e 2 produz as partículas 3 e 4. Neste caso, a expressão geral para a seção de choque total, derivada da Regra de Ouro de Fermi, é dada por

$$\sigma = \frac{S}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \times \prod_{j=3}^4 \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p}_j^2 + m_j^2}} \frac{d^3 \mathbf{p}_j}{(2\pi)^3}, \quad (15)$$

e tem-se que  $p_j^0 = \sqrt{\mathbf{p}_j^2 + m_j^2}$ , pois as partículas estão na camada de massa. Nesta equação,  $p_i$  corresponde ao quadrimomento da partícula  $i$ , de massa  $m_i$  e  $S$  é um fator estatístico para partículas idênticas no estado final. Como no nosso caso não há produção de partículas idênticas no estado final,  $S = 1$ . A dinâmica do processo está contida na amplitude invariante  $\mathcal{M}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ , que é uma função dos quadrimomentos, e é calculada pelos diagramas de Feynman apropriados. Já a expressão da segunda linha representa o espaço de fase. Como a seção de choque total,  $\sigma$ , é um invariante de Lorentz, ela pode ser calculada em qualquer referencial inercial. Nesse caso, a escolha mais conveniente é o referencial do centro de massa (CM), como visto na Fig. 2, em que  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ . Neste referencial tem-se a seguinte relação

$$\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2} = (E_1 + E_2) |\mathbf{p}_1|. \quad (16)$$

Utilizando a expressão acima, a Eq. (15) se reduz a

$$\sigma = \frac{1}{64\pi^2(E_1 + E_2)|\mathbf{p}_1|} \int d^3\mathbf{p}_3 d^3\mathbf{p}_4 |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{\sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2} \sqrt{\mathbf{p}_4^2 + m_4^2}}. \quad (17)$$

A delta quadridimensional,  $\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$ , pode ser reescrita como um produto entre as partes temporal e espacial da seguinte forma:

$$\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \delta(E_1 + E_2 - p_3^0 - p_4^0) \delta^3(\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4). \quad (18)$$

Dessa maneira, realizando a integral em  $\mathbf{p}_4$ , tem-se  $\mathbf{p}_4 = -\mathbf{p}_3$ . Substituindo isso na Eq. (17) a seção de choque torna-se uma integral apenas sobre  $\mathbf{p}_3$

$$\sigma = \left(\frac{1}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{(E_1 + E_2)|\mathbf{p}_1|} \int d^3\mathbf{p}_3 |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta((E_1 + E_2) - \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2} - \sqrt{(-\mathbf{p}_3)^2 + m_4^2})}{\sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2} \sqrt{(-\mathbf{p}_3)^2 + m_4^2}}. \quad (19)$$

Para isolar a dependência angular, reescrevemos o elemento de volume  $d^3\mathbf{p}_3$  em coordenadas esféricas:  $d^3\mathbf{p}_3 = |\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_3| d\Omega$ . A seção de choque total é, portanto,  $\sigma = \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) d\Omega$ . Identificando o integrando de  $d\Omega$ , a seção de choque diferencial é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{(E_1 + E_2)|\mathbf{p}_1|} \int_0^\infty d\rho \rho^2 |\mathcal{M}(r)|^2 \frac{\delta((E_1 + E_2) - \sqrt{\rho^2 + m_3^2} - \sqrt{\rho^2 + m_4^2})}{\sqrt{\rho^2 + m_3^2} \sqrt{\rho^2 + m_4^2}}. \quad (20)$$

Realizando a substituição  $E_i = \sqrt{\rho^2 + m_i^2}$  referente a energia da partícula  $i$ , a integral sobre a variável  $\rho \equiv |\mathbf{p}_3|$  é resolvida pela identidade da função delta de Dirac. Esta propriedade filtra a expressão, avaliando-a no momento final  $|\mathbf{p}_f|$  ditado pela conservação de energia, e a expressão final da seção

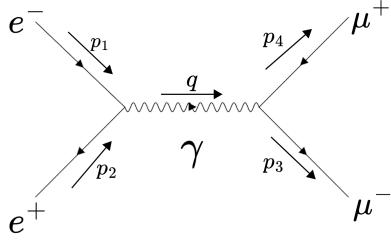


Figura 3: Diagrama de Feynman para o espalhamento  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  em ordem árvore.

de choque diferencial no referencial do centro de massa é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{8\pi}\right)^2 \frac{|\mathcal{M}|^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|}, \quad (21)$$

em que  $|\mathbf{p}_i|$  é a magnitude das componentes espaciais dos quadrimomentos iniciais. E ambos,  $|\mathbf{p}_i|$  e  $|\mathbf{p}_f|$ , estão no referencial do centro de massa.

### 3.2 Cálculo da seção de choque $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Neste primeiro cálculo, iremos determinar a seção de choque para o processo de espalhamento  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , representado pelo diagrama da Fig. 3. Para isso, foi utilizada a seção de choque diferencial definida na seção anterior. Então, para a determinação da amplitude,  $\mathcal{M}$ , são aplicadas as regras de Feynman para a QED no diagrama, obtendo-se a seguinte expressão

$$(2\pi)^4 \int d^4q [\bar{u}(3)(ig_e\gamma^\mu)v(4)] \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right) [\bar{v}(2)(ig_e\gamma^\nu)u(1)] \delta^4(q - p_3 - p_4)\delta^4(p_1 + p_2 - q), \quad (22)$$

em que definimos uma simplificação para os espinores;  $u^{sj}(p_j) = u(j)$ , tal que  $s_j$  é o spin e  $p_j$  o quadrimomento da partícula  $j$ . Logo, ao integrar a função delta sobre o momento interno  $d^4q$  o termo no propagador do fóton,  $q^2$ , é substituído por  $(p_1 + p_2)^2$  devido à conservação de momento nos vértices. Após a contração dos índices de Lorentz ( $\nu$  com  $\mu$ ), tem-se a expressão para a amplitude invariante no espaço de momento

$$\mathcal{M} = \frac{g_e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu v(4)] [\bar{v}(2)\gamma_\mu u(1)]. \quad (23)$$

A seção de choque, no entanto, depende do módulo da amplitude ao quadrado,  $|\mathcal{M}|^2$ , como mostrado na Eq. (21). Diante disso, precisamos do complexo conjugado da amplitude acima, utilizando a propriedade  $\bar{\gamma}^\nu = \gamma^\nu$ , teremos

$$\mathcal{M}^\dagger = \frac{g_e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{u}(1)\gamma_\nu v(2)] [\bar{v}(4)\gamma^\nu u(3)], \quad (24)$$

e concluímos que o módulo da amplitude ao quadrado é,

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g_e^4}{(p_1 + p_2)^4} [\bar{u}(1)\gamma_\nu v(2)][\bar{v}(4)\gamma^\nu u(3)][\bar{u}(3)\gamma^\mu v(4)][\bar{v}(2)\gamma_\mu u(1)]. \quad (25)$$

Como os experimentos normalmente não utilizam feixes polarizados e não medem os spins das partículas finais, é necessário calcular a média dos spins iniciais, multiplicando por um fator de 1/4, uma vez que há duas partículas no estado inicial com duas possibilidades de orientação, e também somar todas as possíveis configurações dos spins finais. Portanto, ficamos com

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \frac{g_e^4}{(p_1 + p_2)^4} [\bar{u}(1)\gamma_\nu v(2)][\bar{v}(2)\gamma_\mu u(1)][\bar{u}(3)\gamma^\mu v(4)][\bar{v}(4)\gamma^\nu u(3)], \quad (26)$$

e usando a relação de completude para partículas e antipartículas,

$$\begin{aligned} \sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) &= \not{p} + m, \\ \sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) &= \not{p} - m, \end{aligned} \quad (27)$$

em que  $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ , é possível simplificar a soma sobre os produtos dos termos entre colchetes, em um traço do produto de matrizes gama,

$$\sum_{\text{spins}} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)] [\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* = \text{Tr}[\Gamma_1(\not{p}_b + m_b)\bar{\Gamma}_2(\not{p}_a + m_a)]. \quad (28)$$

Essa simplificação para obter a média final de spins para  $|\mathcal{M}|^2$  é chamada de truque de Casimir [6]. Diante disso, a média do módulo da amplitude ao quadrado é reescrita como um produto de dois traços, um para cada linha fermiônica,

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \frac{g_e^4}{(p_1 + p_2)^4} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \not{p}_4 \gamma^\nu \not{p}_3 \right] \text{Tr} \left[ \gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_2 \right]. \quad (29)$$

O cálculo subsequente dos traços, através de identidades da álgebra de Dirac, por exemplo  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ , e da contração dos índices de Lorentz, permite expressar a amplitude em função dos quadrímomentos,

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{8g_e^4}{(p_1 + p_2)^4} [(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4)]. \quad (30)$$

Supondo o regime de altas energias, onde todas as partículas podem ser tratadas como não massivas, e empregando o referencial de centro de massa, ilustrado na Fig. 2, a energia das partículas  $E_i$ , o quadrado da energia disponível no centro de massa,  $(p_1 + p_2)^2$ , e os produtos escalares requeridos

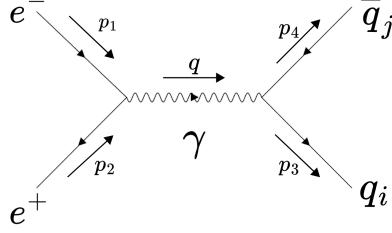


Figura 4: Diagrama de Feynman para o espalhamento  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ .

pela Eq. (30) resultam em

$$\begin{aligned} E_i &= |\mathbf{p}_i|, & (p_1 + p_2)^2 &= 2p_1 \cdot p_2 = 4E_i^2, \\ p_1 \cdot p_3 &= p_2 \cdot p_4 = E_i^2(1 - \cos\theta), & p_1 \cdot p_4 &= p_2 \cdot p_3 = E_i^2(1 + \cos\theta), \end{aligned} \quad (31)$$

em que  $\theta$  é o ângulo de espalhamento mostrado na Fig. 2.

A inserção destas relações cinemáticas na Eq. (30) permite explicitar a dependência angular da amplitude ao quadrado média através de

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = g_e^4(1 + \cos^2\theta). \quad (32)$$

Finalmente, é possível obter a seção de choque, inserindo a expressão final obtida na Eq. (32) na seção de choque diferencial Eq. (21) e integrando sobre o ângulo sólido,  $d\Omega$ . Diante disso, a expressão final obtida para a seção de choque de normalização é

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|_{\text{LO}, m_\mu=0} = \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{3s}, \quad (33)$$

em que  $\alpha_{em}$  é a constante de estrutura fina em termos da constante de acoplamento eletromagnética,  $g_e$ , definida como  $\alpha_{em} = g_e^2/4\pi$ , em unidades naturais. A cinemática do processo é regida pela variável de Mandelstam  $s = (p_1 + p_2)^2$ , que corresponde ao quadrado da energia disponível no referencial do centro de massa.

### 3.3 Cálculo da seção de choque para $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ com $m_q = 0$

O cálculo da seção de choque para o processo de espalhamento  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$  é análogo ao caso do espalhamento em muon-antimuon, discutido na seção anterior. Ambos os processos são descritos por um diagrama de Feynman de ordem árvore, conforme ilustrado na Fig. 4. Adotando a mesma aproximação de partículas sem massa e o mesmo referencial de centro de massa, a amplitude de espalhamento assume uma forma semelhante à da Eq. (23):

$$\mathcal{M}_{i,j} = Q_q \frac{g_e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu v(4)] [\bar{v}(2)\gamma_\mu u(1)] \delta_{ij}. \quad (34)$$

Esta expressão difere da anterior em dois aspectos fundamentais. Primeiramente, o fator  $Q_q$  representa a carga elétrica fracionária do quark em unidades da carga elementar  $e$ . Em segundo lugar, a delta de Kronecker,  $\delta_{ij}$ , é introduzida para garantir a conservação da carga de cor. Uma vez que o fóton mediador é neutro em cor, o quark  $i$  e o antiquark  $j$  produzidos devem possuir a mesma cor e anticor, respectivamente. Em seguida, é aplicado novamente o truque de Casimir descrito na Eq. (28) e a mesma composição dos quadrimomentos da Eq. (31). Chegando à seguinte expressão

$$\langle |\mathcal{M}_{i,j}|^2 \rangle = (g_e^2 Q_q)^2 (1 + \cos^2 \theta) \delta_{ij}^2. \quad (35)$$

No entanto, devemos somar todas as possíveis combinações de cor para o par quark-antiquark final. Essa soma atua sobre o termo  $(\delta_{ij})^2$

$$\sum_{i,j=1}^{N_c} (\delta_{ij})^2 = N_c = 3, \quad (36)$$

em que  $N_c$ , corresponde ao número de cargas de cor na QCD.

Combinando todos os elementos, o módulo da amplitude ao quadrado final, com média sobre os spins iniciais e soma sobre os spins e cores finais, é

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = N_c (Q_q g_e^2)^2 (1 + \cos^2 \theta). \quad (37)$$

Logo, seguindo o mesmo procedimento de integração da seção de choque diferencial da Sec. 3.2, obtemos a seção de choque total para a produção de um par quark-antiquark de um sabor  $f$  específico

$$\sigma(e^+ e^- \rightarrow q\bar{q})|_{\text{LO}, m_q=0} = \left( \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{3s} \right) N_c Q_f^2. \quad (38)$$

Finalmente, para obter a seção de choque hadrônica total em ordem dominante, devemos somar as contribuições de todos os sabores de quarks  $f$  que são energeticamente acessíveis a uma dada energia  $s$ ,

$$\sigma(e^+ e^- \rightarrow q\bar{q})|_{\text{LO}, m_q=0} = \left( \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{3s} \right) N_C \sum_{f=u,d,s...} Q_f^2. \quad (39)$$

Com o desenvolvimento dos cálculos para as seções de choque, tanto hadrônica quanto muônica, a derivação teórica em ordem árvore está completa. Agora, pode-se unir esses resultados para se obter a previsão em ordem dominante para a razão  $R(s)$ , o resultado obtido e suas implicações serão discutidas na próxima seção.

### 3.4 $R(s)$ em ordem dominante

Após realizar os cálculos das duas seções de choque em ordem dominante para os processos de espalhamento  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  e  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$  é possível obter uma primeira aproximação para o observável  $R(s)$ , resultando na seguinte expressão,

$$R(s) \approx \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})|_{\text{LO},m_q=0}}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|_{\text{LO},m_\mu=0}} = N_c \sum_{f=u,d,s\dots} Q_f^2. \quad (40)$$

Os sabores  $f$  sobre os quais se faz a soma são determinados pelo regime de energia, de modo que, a baixas energias, apenas os quarks leves ( $u, d, s$ ) contribuem para  $R(s)$ , porém, à medida que a energia aumenta, ela ultrapassa os limiares de produção para os quarks mais pesados, como o *charm* e o *bottom*. Devido ao confinamento dos quarks da QCD, os quarks não são observados livremente; o limiar físico para um novo sabor  $f$  corresponde, portanto, à energia necessária para criar um par do méson mais leve que o contém, por exemplo para o quark *charm* o limiar é a energia de produção de um par  $D\bar{D}$ , pois o méson  $D$  é composto por um quark *charm* e um antiquark leve,  $\sqrt{s} = 2m_D \approx 3,74 \text{ GeV}$ . Já para o quark *b* o limiar físico é  $\sqrt{s} = 2m_B \approx 10,56 \text{ GeV}$  [5]. A adição da contribuição de cada novo sabor resulta em descontinuidades em  $R(s)$  com aumentos sucessivos em seu valor. Portanto, o resultado numérico para  $R(s)$  em ordem dominante (LO) é

$$R(s) \approx \begin{cases} R_{uds} = N_c \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \right] = 2, & \sqrt{s} < 2 \times 1.87 \text{ GeV } (u, d, s) \\ R_{udsc} = R_{uds} + N_c \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{3}, & 2 \times 1.87 < \sqrt{s} < 2 \times 5.28 \text{ GeV } (u, d, s, c) \\ R_{udscb} = R_{udsc} + N_c \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{3}, & \sqrt{s} > 2 \times 5.28 \text{ GeV } (u, d, s, c, b) \end{cases}$$

É importante observar que esse resultado é sensível ao número de cargas de cor da teoria,  $N_c = 3$ , e às cargas elétricas fracionárias dos quarks, portanto a comparação com os dados experimentais é um bom teste desses aspectos quantitativos da Cromodinâmica Quântica.

Nesse contexto, a previsão teórica foi comparada, na Fig. 5, com os dados experimentais de 18 experimentos no intervalo de  $1,8 \text{ GeV} \lesssim \sqrt{s} \lesssim 10,5 \text{ GeV}$ , que abrange desde o regime dos quarks leves, chamado de regime *uds*, e inclui também o regime *udsc*, para energias que superam o limiar do quark *charm*. As incertezas dos dados experimentais foram obtidas por meio da soma quadrática dos erros sistemáticos e estatísticos disponibilizados.

A previsão teórica em ordem dominante mostra maior concordância com os dados experimentais para energias superiores a  $3,7 \text{ GeV}$ . Contudo, em energias inferiores (entre  $1,8 \text{ GeV}$  e  $3,7 \text{ GeV}$ ), a discrepância é significativamente maior, da ordem de 10%. Essa diferença de precisão ocorre por conta da liberdade assintótica de  $\alpha_s$ , a constante de acoplamento da QCD, que torna a correção de

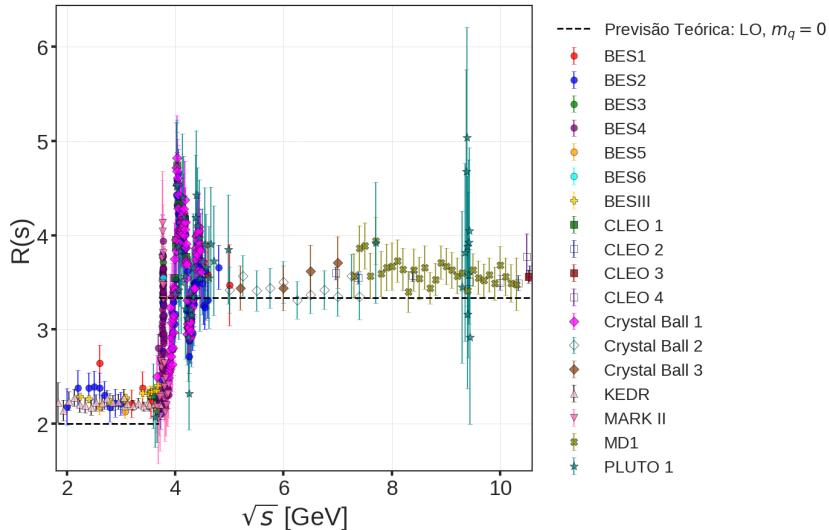


Figura 5: Gráfico comparativo entre  $R(s)$  teórico em ordem dominante com os dados experimentais. As referências originais dos experimentos podem ser encontradas na Ref. [8].

primeira ordem de  $R(s)$  mais significativa em regime de menor energia.

### 3.5 Caso massivo

Nesta subseção, iremos calcular a seção de choque hadrônica total em ordem árvore, adicionando os termos de massas dos quarks. Dessa forma, temos a mesma amplitude  $\mathcal{M}$ , da Eq. (34), e é aplicado o truque de Casimir descrito na Eq. (28), para obter a média do módulo da amplitude ao quadrado,  $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ . Também foi incluída a soma das possíveis combinações de cores; diante disso, obteve-se o primeiro termo de massa,

$$\langle |\mathcal{M}^2| \rangle = 8N_c \left[ \frac{Qg_e^2}{(p_1 + p_2)^2} \right]^2 [(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + m_q^2(p_1 \cdot p_2)]. \quad (41)$$

Pelo fato de estarmos considerando quarks massivos, a energia das partículas massivas,  $E_i$ , e os produtos escalares de quadrimomentos requeridos na Eq. (41) são

$$\begin{aligned} E_i &= \sqrt{m_i^2 + |\mathbf{p}_i|^2}, \\ p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4 &= E_i^2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{m_i^2}{E_i^2} \cos \theta} \right), \\ p_2 \cdot p_3 = p_1 \cdot p_4 &= E_i^2 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{m_i^2}{E_i^2} \cos \theta} \right). \end{aligned} \quad (42)$$

O produto escalar dos quadrimomentos iniciais  $p_1$  e  $p_2$  não sofre alterações, uma vez que não estão sendo consideradas as massas das partículas iniciais. Então, considerando as relações cinemáticas

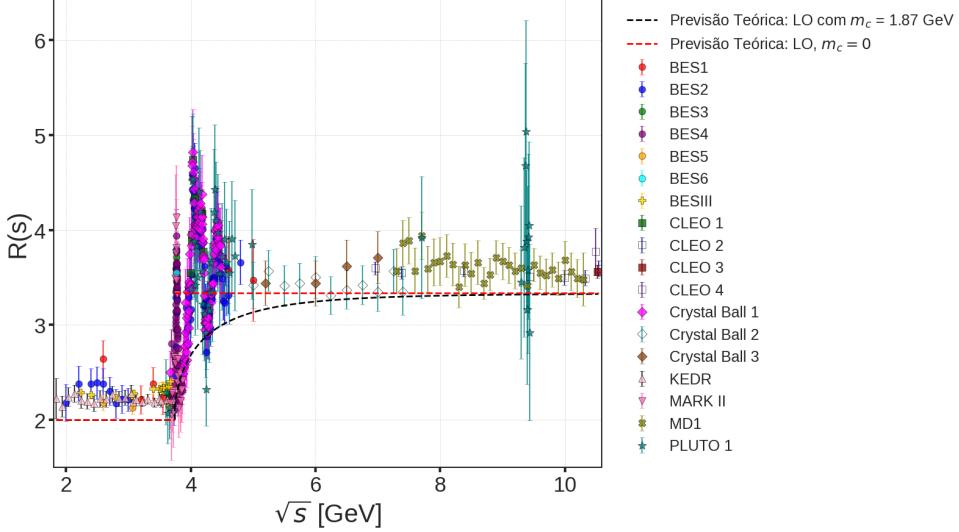


Figura 6: Gráfico comparativo de  $R(s)$  teórico com correção da massa do quark charm e os dados experimentais. As referências originais dos experimentos podem ser encontradas na Ref. [8].

estabelecidas na Eq. (42), é explicitada a dependência angular de  $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = N_c Q^2 g_e^4 \left[ 1 + \left( \frac{m_q}{E} \right)^2 + \left( 1 - \left( \frac{m_q}{E} \right)^2 \right) \cos^2 \theta \right]. \quad (43)$$

Portanto, seguindo o mesmo procedimento dos cálculos anteriores, foi utilizada novamente a expressão da seção de choque diferencial do espalhamento de dois corpos no referencial do centro de massa, descrita na Eq. (21). A expressão resultante é então integrada sobre o ângulo sólido,  $d\Omega$ , e somada às contribuições de todos os sabores de quarks,  $f$ , energeticamente acessíveis, resultando em

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})|_{\text{LO}} = \left( \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{3s} \right) N_C \sum_{f=u,d,s,\dots} Q_f^2 \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{s}} \left( 1 + \frac{2m_f^2}{s} \right). \quad (44)$$

A partir deste resultado, podemos construir uma nova expressão para  $R(s)$ , normalizando a seção de choque hadrônica total com a Eq. (33). Agora, considerando as massas dos quarks, obtém-se um novo resultado para  $R(s)$ ,

$$R(s) = N_C \sum_{f=u,d,s,\dots} Q_f^2 \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{s}} \left( 1 + \frac{2m_f^2}{s} \right), \quad (45)$$

que também pode ser reescrito em termos da velocidade relativística  $\beta_f \equiv \sqrt{1 - 4m_f^2/s}$ , que representa a velocidade do quark  $f$  no CM, dessa forma tem-se

$$R(s) = N_C \sum_{f=u,d,s,\dots} Q_f^2 \beta_f \left( \frac{3 - \beta_f^2}{2} \right). \quad (46)$$

O comportamento de  $R(s)$  com essa correção é ditado pelo termo da velocidade relativística,  $\beta_f$ . No limiar de produção,  $\sqrt{s} = 2m_f$ , a velocidade  $\beta_f$  é nula. Para energias ligeiramente acima do limiar,  $\sqrt{s} > 2m_f$ , o  $R(s)$  cresce linearmente com a velocidade  $\propto \beta_f$ . Finalmente, no limite de altas energias,  $s \gg 4m_f^2$ ,  $\beta_f \rightarrow 1$  e a expressão converge para o resultado do caso não massivo dado na Eq. (40). Conclui-se, portanto, que as correções de massa são relevantes na região de transição próxima ao limiar, e garantem uma descrição contínua de  $R(s)$ , que deixa de apresentar saltos em cada limiar de produção como visto no gráfico da Fig. 5. Este comportamento é confirmado pelo gráfico da Fig. 6, que mostra o resultado da Eq. (46) em comparação com os dados experimentais.

Nesse gráfico, utilizaram-se os mesmos dados experimentais e o cálculo das incertezas do gráfico anterior, exibido na Fig. 5. Na curva teórica, foi considerada apenas a correção de massa para o quark *charm*, tratando os quarks leves como não massivos. Esta simplificação é justificada quantitativamente. Em uma energia de  $\sqrt{s} = 4$  GeV, o fator de correção  $C_f = \beta_f(3 - \beta_f^2)/2$  para o quark *strange*, com  $m_s(2\text{GeV}) = 92,7 \pm 0,5$  MeV<sup>2</sup> [5], introduz uma modificação desprezível de aproximadamente 0,0002%. Na mesma energia, no entanto, a correção do *charm*, com  $m_c(m_c) = 1,275 \pm 0,009$  GeV [5], é significativa,  $\approx 7,2\%$ . Destaca-se também que, para descrever o limiar físico da produção de hadrons com *charm*, o modelo utiliza uma massa efetiva de 1,87 GeV (próxima à massa do méson *D*), em vez da massa de quark livre determinada pelo PDG.

Nesta seção, realizamos os cálculos do observável  $R(s)$  em ordem dominante, utilizando o formalismo da Eletrodinâmica Quântica, abordado na Sec. 2 deste trabalho. Também foram discutidas algumas características da Cromodinâmica Quântica, como o número de carga de cor, a carga elétrica fracionária e o confinamento dos quarks. Até o momento, obtivemos o primeiro termo da expansão perturbativa, de ordem  $\alpha_s^0$ , para o nosso observável. Na próxima seção, exploraremos alguns aspectos do processo de renormalização para encontrar a dependência explícita da energia para  $\alpha_s(s)$  a um loop e, depois, adicionaremos as correções de ordem superior em  $R(s)$ .

## 4 Correções de $\mathcal{O}(\alpha_s)$ para o $R(s)$

A correção que considera os efeitos da Cromodinâmica Quântica no observável  $R(s)$  é de ordem  $\alpha_s$ , sendo de ordem superior, em inglês *next leading order* (NLO). Ela considera duas classes de diagramas, a emissão de glúons reais pelo par quark-antiquark, e a troca de um glúon virtual entre eles, ilustrados na Fig. 7. No entanto, para considerar essas contribuições, primeiro é necessário entender o comportamento da própria constante de acoplamento  $\alpha_s$ .

---

<sup>2</sup>A massa dos quarks não é uma quantidade física; ela é um parâmetro definido em um esquema de renormalização, que depende da energia. Por convenção,  $m_s$  é dada em uma escala de 2 GeV, enquanto  $m_c$ , em  $m_c(m_\mu) = m_\mu$  GeV.

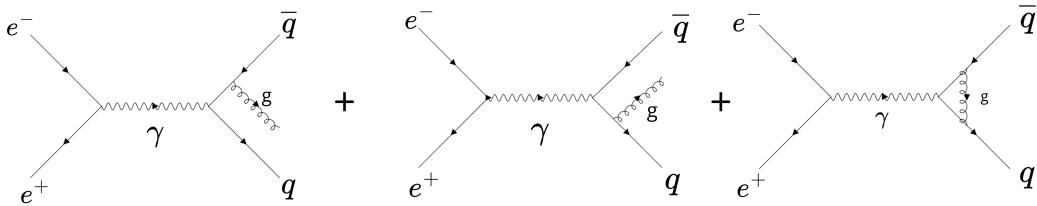


Figura 7: Diagramas NLO para  $R(s)$ : emissão real (os dois primeiros) e virtual (o último).

#### 4.1 A evolução de $\alpha_s$ a um loop

A constante de acoplamento forte da QCD,  $\alpha_s$ , não é constante, e seu valor depende da faixa de energia que está sendo considerada. Em baixas energias, a constante de acoplamento é grande,  $\alpha_s \sim \mathcal{O}(1)$ , e nesse regime não se pode utilizar a teoria perturbativa. Felizmente, em altas energias,  $\alpha_s$  torna-se suficientemente pequena e o tratamento perturbativo é válido. A evolução de  $\alpha_s$  com a energia está intimamente relacionada ao processo de renormalização [9].

A renormalização da QCD é mais complexa que a da QED, principalmente devido à autointeração dos glúons. Para a constante de acoplamento forte,  $\alpha_s$ , existem 3 classes de diagramas a um loop: polarização do vácuo (4 diagramas), correção dos vértices (3 diagramas) e auto-energia dos quarks (1 diagrama) [10]. Os cálculos desses diagramas nos levam a integrais divergentes, por isso é adotado um processo de renormalização que produzirá resultados finitos. No entanto, é necessário que as quantidades físicas sejam independentes do processo de renormalização adotado, sendo essa exigência explicitada pela *equação do grupo de renormalização* (RGE). Então considerando uma quantidade física  $R(q, a_s, m)$ , em que  $q$  é o momento externo,  $a_s \equiv \alpha_s(s)/\pi$  é a constante de acoplamento da QCD e  $m$  é a massa do quark renormalizada por um parâmetro de escala de renormalização arbitrário  $\mu$ , sabe-se que a quantidade física é independente de  $\mu$ , logo tem-se a RGE para  $R(q, a_s, m)$  [11] :

$$\mu \frac{d}{d\mu} R(q, a_s, m) = \left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{da_s}{d\mu} \frac{\partial}{\partial a_s} + \mu \frac{dm}{d\mu} \frac{\partial}{\partial m} \right\} R(q, a_s, m) = 0, \quad (47)$$

em que  $a_s(\mu)$  e  $m(\mu)$ , e dessa equação são definidas<sup>3</sup> as *funções do grupo de renormalização*  $\beta$  e  $\gamma$

$$\begin{aligned} \beta(a_s) &\equiv -\mu \frac{da_s}{d\mu} = \beta_1 a_s^2 + \beta_2 a_s^3 + \dots \\ \gamma(a_s) &\equiv -\frac{\mu}{m} \frac{dm}{d\mu} = \gamma_1 a_s + \gamma_2 a_s^2 + \dots \end{aligned}$$

Como estamos considerando somente correções de um loop em  $\alpha_s$ , é necessário conhecer apenas o coeficiente  $\beta_1$  [11],

$$\beta_1 = \frac{1}{6}(11N_c - 2N_f). \quad (48)$$

---

<sup>3</sup>Existem várias definições para essas funções na literatura. O sinal de nossa função  $\beta$  é oposto a definição tradicional, de modo que em nossa definição  $\beta_1 > 0$ .

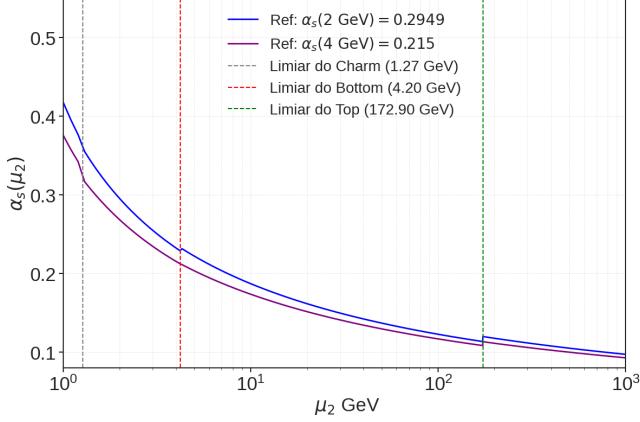


Figura 8: Evolução de  $\alpha_s(s)$  a um loop, para diferentes valores de entrada  $\alpha_s(\mu_1)$ , conforme prevista pela Eq. (51)

Note que  $\beta_1$  dependerá do número de cor,  $N_c = 3$  e do número de sabores ativos,  $N_f \leq 6$ , logo  $\beta_1 > 0$ . Dessa forma, a função  $\beta$ , em primeira ordem, se reduz a

$$\beta_1 a_s^2 = -\mu \frac{da_s}{d\mu}. \quad (49)$$

Diante disso, pode-se resolver a equação diferencial ordinária da Eq. (49),

$$\frac{1}{\beta_1} \int_{a_s(\mu_1)}^{a_s(\mu_2)} \frac{da_s}{a_s^2} = - \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\mu} = \ln \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad (50)$$

e ao realizar as integrais, encontramos a evolução da constante de acoplamento a um loop, supondo conhecido  $\alpha_s(\mu_1)$  em uma escala de energia  $\mu_1$ , tem-se

$$\alpha_s(\mu_2) = \frac{\alpha_s(\mu_1)}{1 - \frac{\alpha_s(\mu_1)}{\pi} \beta_1 \ln(\mu_1/\mu_2)}. \quad (51)$$

Como visto anteriormente,  $\beta_1 > 0$ , logo  $\alpha_s(\mu_2)$  decresce com o aumento da energia  $\mu_2$ , e quando  $\mu_2 \rightarrow \infty$ , tem-se  $\alpha_s \rightarrow 0$  conforme ilustrado no gráfico da Fig. 8. Esse comportamento é a célebre *liberdade assintótica* da QCD. Ela significa que a interação forte fica mais fraca em altas energias,  $\mu$ , o que equivale, pela relação  $r \sim \hbar c / \mu$ , a curtas distâncias. É essa propriedade que valida o uso da teoria de perturbação nesse regime. E em baixas energias, longas distâncias,  $\alpha_s \sim \mathcal{O}(1)$ , indicando um colapso da abordagem perturbativa. No gráfico, também é explicitado como a escolha do seu valor de entrada para  $\alpha_s(\mu_1)$  influencia na evolução de  $\alpha_s(\mu_2)$  a um loop. A presença do termo logarítmico  $\ln(\mu_1/\mu_2)$ , que aparece na Eq. (51), introduz um acúmulo de erro significativo se as escalas forem muito distintas, diante disso, é preferível escolher a escala de referência  $\mu_1$  próxima as escalas de energia de  $\mu_2$  de interesse. Essa influência da escolha da escala de referência,  $\alpha(\mu_1)$ , diminui drasticamente quando se consideram as correções da função  $\beta$  a 5 loops.

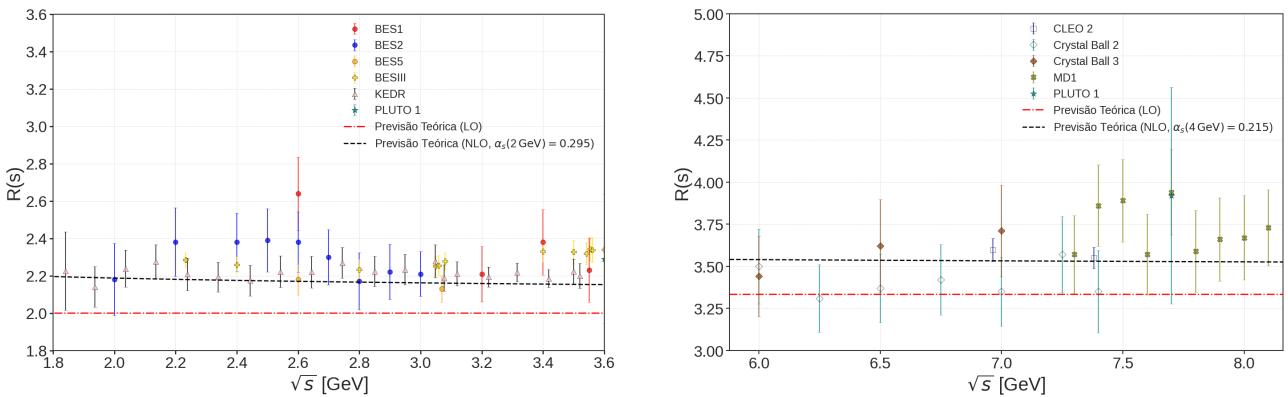


Figura 9: Correções de  $R(s)$  em NLO nos regimes  $uds$  (gráfico a esquerda) e  $udsc$  (gráfico da direita). As referências originais dos experimentos podem ser encontradas na Ref. [8].

## 4.2 $R(s)$ em NLO

Com a compreensão da evolução de  $\alpha_s(s)$  a um loop, pode-se considerar a primeira correção da QCD ao observável  $R(s)$ . Embora o cálculo explícito das contribuições dos diagramas da Fig. 7 esteja além do escopo deste trabalho, o resultado final incorpora uma modificação crucial na expressão de  $R(s)$  [8],

$$R(s) = N_C \sum_{f=u,d,s\dots} Q_f^2 \left( 1 + \frac{\alpha_s(s)}{\pi} \right). \quad (52)$$

Esta correção permite uma análise quantitativa do impacto da QCD. Por exemplo, em uma escala de energia de 2 GeV, no regime  $uds$ , onde  $\alpha_s(2 \text{ GeV}) \approx 0.295$ , o que resulta em  $R(s) = 2(1 + 0.094) \approx 2.19$ , uma correção de aproximadamente 10% sobre o valor de ordem dominante. Em contraste a 4 GeV, no regime  $udsc$ , a constante de acoplamento é menor,  $\alpha_s(4 \text{ GeV}) \approx 0.215$ , e a correção NLO cai para 6,84%. Esta diminuição na magnitude da correção com o aumento da energia é uma manifestação da liberdade assintótica, como discutido na subseção anterior.

A previsão teórica para  $R(s)$  da Eq. (52) foi comparada com os mesmos dados experimentais utilizados anteriormente. Os gráficos, apresentados na Fig. 9 realizam a comparação em dois regimes distintos de energia, os regimes  $uds$  e  $udsc$ , respectivamente. As curvas teóricas nesses gráficos foram geradas utilizando o valor de  $\alpha_s(s)$  para cada ponto de energia obtido através da evolução a um loop descrita pela Eq. (51) e usando como valor de referência  $\alpha_s(2 \text{ GeV}) = 0,295$  [8], para o regime  $uds$  e  $\alpha_s(4 \text{ GeV}) = 0,215$  [5], para o regime  $udsc$ . É importante notar que, para gerar as curvas teóricas em cada um dos regimes de energia plotados, utilizou-se um valor de referência  $\alpha_s(\mu_1)$  diferente para iniciar a evolução. Conforme discutido na seção anterior, esta escolha visa minimizar a magnitude do termo logarítmico na Eq. (51), otimizando assim a precisão da previsão perturbativa baseada na evolução de  $\alpha_s$  a um loop. Observa-se nos gráficos uma melhora significativa na concordância entre a teoria e os dados experimentais ao se incluir a correção de primeira ordem da QCD. Portanto, além de  $R(s)$  testar o número de cargas de cor,  $N_c = 3$ , e a carga elétrica fracionária dos quarks, ele nos mostra

que a dinâmica da QCD leva a correções significativas e está em bom acordo com o experimento.

## 5 Conclusão

Neste trabalho, estudamos o observável  $R(s)$  construído a partir da seção de choque inclusiva para o processo de espalhamento  $e^+e^- \rightarrow$  hadrons, no regime da QCD perturbativa, com o objetivo de comparar as previsões do modelo com dados experimentais.

Primeiramente, foi desenvolvida a sua expressão teórica em ordem dominante (LO), de ordem  $\alpha_s^0$ , utilizando o formalismo da Eletrodinâmica Quântica para diagramas de Feynman em ordem árvore. Esta primeira aproximação demonstrou a sensibilidade fundamental de  $R(s)$  à carga elétrica fracionária dos quarks e o número de cargas de cor,  $N_c = 3$ , permitindo a verificação experimental dessas quantidades. A análise dos limiares de energia também permitiu uma discussão qualitativa do confinamento de cor da QCD, justificando que o limiar físico para um novo sabor corresponde à energia de produção de um par de mésons, por exemplo para o quark *charm*, tem-se  $\sqrt{s} \approx 2m_D$ . Em seguida, ainda com o formalismo da QED, foi calculada a correção de massa para os quarks do estado final, com o objetivo de obter uma função contínua para  $R(s)$ , tratando as descontinuidades nos limiares da energia de produção.

Posteriormente, foi estudada a primeira correção da QCD a  $R(s)$  (NLO), que corrige o resultado em LO por um termo de ordem  $\alpha_s$ . Nesse estudo, foram explorados alguns aspectos do processo de renormalização para encontrar a dependência explícita da energia para  $\alpha_s(s)$  a um loop. Depois, foi discutida a evolução de  $\alpha_s(s)$  a um loop, e foi levada em conta na correção de ordem superior a  $R(s)$ . A correção NLO sobre o valor dominante é de aproximadamente 10% em  $\sqrt{s} = 2$  GeV, mas cai para  $\approx 6,84\%$  em  $\sqrt{s} = 4$  GeV. Dessa forma, nossa expressão teórica indica que a interação forte se torna mais fraca em energias mais altas, validando o uso da teoria de perturbação. Observou-se que essa correção melhorou significativamente a concordância entre a teoria e os dados. Com isso, foi mostrado que, ao considerar a dinâmica da QCD no cálculo de  $R(s)$  houve um bom acordo com o experimento.

Em suma, este trabalho demonstrou como o observável  $R(s)$ , analisado através da QCD perturbativa, serve como uma ferramenta robusta para sondar e quantificar as propriedades fundamentais da interação forte.

## Referências

- [1] FEYNMAN, R. P. Space-time approach to quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, v. 76, p. 769, 1949. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRev.76.769>>.

- [2] SCHWINGER, J. S. On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron. *Phys. Rev.*, v. 73, p. 416, 1948. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRev.73.416>>.
- [3] GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Phys. Rev. Lett.*, v. 30, p. 1343, 1973. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.30.1343>>.
- [4] POLITZER, H. D. Reliable perturbative results for strong interactions. *Phys. Rev. Lett.*, v. 30, p. 1346, 1973. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.30.1346>>.
- [5] PARTICLE DATA GROUP collaboration. Review of particle physics. *Phys. Rev. D*, v. 110, p. 030001, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.110.030001>>.
- [6] GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Elementary Particles*. New York: John Wiley & Sons, 1987.
- [7] PICH, A. *The standard model of electroweak interactions*. 2012. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1201.0537.pdf>>.
- [8] BOITO, D.; CARAM, M. Perturbative QCD below charm threshold: theory and tensions with  $e^+e^-$  data. ArXiv:2509.12956 [hep-ph]. 2025. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/2509.12956>>.
- [9] THOMSON, M. *Modern particle physics*. New York: Cambridge University Press, 2013.
- [10] GREINER, W.; SCHRAMM, S.; STEIN, E. *Quantum Chromodynamics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.
- [11] JAMIN, M. *QCD and renormalisation group methods*. Barcelona, 2006.