



**RUPERTO FARTO PEREIRA**

**APLICAÇÃO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA À  
ESTRUTURA DE UMA PINÇA PARA SOLDADA A PONTO**

Projeto de Conclusão de Curso  
apresentado à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo.

Área de Concentração  
Engenharia Mecatrônica

Orientador  
Emílio C. Nelli Silva

São Paulo  
2003

*Nota final  
8,5 (oitos e cinco)  
[Assinatura]*

Métodos Topológicos

Elementos Finitos (Otimização)

Pereira, Ruperto Farto

Aplicação de Otimização Topológica à Estrutura de uma Pinça para Solda a Ponto. São Paulo, 2003.

000p.

Projeto de Conclusão de Curso - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica.

1. Otimização Topológica A. Elementos Finitos I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica II. t

Às três mulheres da minha vida:

Ruth, que esteve sempre presente, dos primeiros passos as últimas conquistas, passando pelos grandes tombos e pelas pequenas vitórias.

Rutilene, que mesmo partilhando comigo dos mesmos pais, ideais e valores, foi capaz de me criticar com isenção e de me aconselhar com sabedoria sempre que necessário.

Cris, a dentista que cuida do meu coração, porque dividiu os meus problemas, multiplicou os meus sonhos, subtraiu as minhas angústias e adicionou poesia a minha vida.

## AGRADECIMENTOS

Aos professores e funcionários da Escola Politécnica, não só porque a tornam possível, mas porque com sua dedicação e entusiasmo fazem dela a melhor escola de engenharia do Brasil.

Ao meu orientador Prof.º Dr. Emílio Carlos Nelli Silva, por me apresentar e por me guiar numa das mais promissoras e interessantes ramificações da engenharia atual: a Otimização Topológica.

Ao Engº João Batista Scarparo, sócio e diretor da Gespi Aeronáutica, pela oportunidade oferecida e por compartilhar comigo das dificuldades e da magia de ser engenheiro neste país.

## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação .....	1
1.2	Problematização e Objetivo .....	3
1.3	Escopo do Trabalho.....	6
<b>2.</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA .....</b>	<b>7</b>
2.1	Visão Geral .....	7
2.2	Formulação matemática para o problema da otimização .....	16
2.2.1	Variáveis de projeto.....	17
2.2.2	Função objetivo ou função custo.....	17
2.2.3	Restrições e domínio viável e inviável .....	19
2.3	Otimização Topológica.....	19
2.3.1	Histórico da Otimização Topológica.....	20
2.3.2	Modelos de material .....	21
2.3.2.1	SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization).....	22
2.3.2.2	Método da homogeneização .....	23
2.3.3	implementação do Método de Otimização Topológica (MOT).....	23
2.3.5	Problemas numéricos.....	24
2.3.5.1	Instabilidade de Tabuleiro .....	24
2.3.5.2	Dependência de malha .....	25
2.3.5.3	Não-unicidade de solução .....	26
2.3.5.4	Escalas de cinza.....	26
2.3.6	Soluções para os problemas numéricos .....	26
<b>3</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS.....</b>	<b>28</b>
3.1	Configuração do Hardware utilizado .....	28
3.2	Softwares Utilizados.....	28
3.2.1	Mechanical Desktop 6.0 .....	29
3.2.2	ANSYS .....	30
3.3	Exemplo de aplicação usando MD / ANSYS .....	35
3.3.1	1º Passo – Modelagem física/matemática.....	36
3.3.2	2º Passo – Construção do modelo de sólido e exportação para o ansys. ....	37

3.3.3	3º Passo - Pré-processamento.....	37
3.3.4	4º Passo – Processamento .....	45
3.3	Modelamento .....	48
3.3.1	Caracterização da Estrutura Original.....	49
3.3.2	Condições de contorno e carregamento.....	50
3.3.3	Domínio Fixo Extendido .....	51
3.3.4	Simetria.....	51
3.3.5	Processo de Síntese.....	52
<b>4</b>	<b>RESULTADOS .....</b>	<b>53</b>
4.1	Avaliação da Estrutura Original.....	53
4.2	Processo de Otimização.....	55
4.2.1	As três primeiras etapas .....	55
4.2.2	A 4ª Etapa .....	60
4.3	Avaliação da Estrutura Otimizada .....	63
<b>5</b>	<b>DISCUSSÃO .....</b>	<b>67</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>75</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>76</b>
	<b>ANEXO I.....</b>	<b>79</b>
A.1	História do Método de Elementos Finitos .....	79
A.2	Realidade física, modelo matemático e solução numérica .....	80
A.3	Princípio elementar do Método dos Elementos Finitos.....	84
A.4	Etapas básicas para aplicação do MEF.....	85
A.5	Arquitetura geral dos Sistemas CAE baseados no MEF .....	85
A.5.1	Funções do módulo de entrada.....	86
A.5.2	Funções do módulo de cálculo.....	88
A.5.3	Funções do módulo de saída .....	89
A.6	Fundamentos Matemáticos do MEF .....	90
A.6.1	Principais métodos numéricos e suas formulações .....	91
A.6.1.1	Formulação Direta.....	92
A.6.1.2	Formulação Energética .....	102
A.6.1.2	Métodos de Resíduos Ponderados.....	107
A.6.1.A.1	Collocation Method .....	110

A.6.1.A.2	Subdomain Method.....	111
A.6.1.A.3	Galerkin's Method.....	112
A.6.1.A.4	Método dos Mínimos Quadrados .....	113
A.6.2	Shape Functions .....	114
Shape functions são as funções interpoladoras que tem a propriedade de apresentar valor 1 em seu próprio nó e zero nos demais nós. ....		114
A.6.3	Coordenadas locais, globais e naturais .....	114
A.6.3.1	Elementos unidimensionais .....	115
A.6.3.1.1	Coordenadas globais e locais para <i>shape function</i> lineares.....	115
A.6.3.1.2	Coordenadas naturais para <i>shape function</i> lineares .....	116
A.6.3.1.3	<i>Shape functions</i> lineares quadráticas.....	117

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Pinça para solda a ponto .....	4
Figura 2 – Esquema da compressão .....	5
Figura 3 – Fluxograma básico de um processo de otimização.....	8
Figura 4 – Esquema de um pontilhão feito com duas vigas.....	11
Figura 5 – Diagrama de forças após aplicação de hipóteses simplificadoras ...	12
Figura 6 – Otimização Paramétrica.....	15
Figura 7 – Otimização de forma .....	15
Figura 8 – Otimização Topológica .....	15
Figura 9 – Estrutura obtida por Michell.....	21
Figura 10 – Modelo de material para o Método da Homogenização.....	23
Figura 11 – Esquema de implementação do MOT.....	24
Figura 12 – Instabilidade de tabuleiro.....	25
Figura 13 - Área de Trabalho do ANSYS .....	32
Figura 14– Esquema de um suporte.....	35
Figura 15– Esquema tridimensional do suporte .....	36
Figura 16 – Selecionando as linhas que se deseja formatar .....	41
Figura 17– Elemento malhado com comando VSWEEP .....	42
Figura 18 – Sólido com a malha completa .....	43
Figura 19 – Selecionando a área engastada .....	44
Figura 20 – Tela da otimização topológica.....	46
Figura 21 – Plotando as densidades .....	47
Figura 22 – Filtro para densidades maiores que 0.9.....	48
Figura 23 – Visão interna da Pinça Original.....	49
Figura 24 - Pinça para solda a ponto (reprodução da Figura 1) .....	50
Figura 25 – Malhamento da estrutura original .....	53
Figura 26 – Detalhe do malhamento.....	54
Figura 27 – Deformação da pinça original. Valores em mm .....	55
Figura 28 – Detalhe do resultado da otimização para a 1ª Etapa .....	56
Figura 29 – Detalhe do resultado da otimização para a 1ª Etapa .....	56
Figura 30 – Detalhe do resultado da otimização para a 2ª Etapa .....	57
Figura 31 – Detalhe do resultado da otimização para a 2ª Etapa .....	57



Figura 32 – Detalhe do resultado da otimização para a 2ª Etapa .....	58
Figura 33 – Detalhe do resultado da otimização para a 3ª Etapa .....	58
Figura 34 – Detalhe do resultado da otimização para a 3ª Etapa .....	59
Figura 35 – Detalhe do resultado da otimização para a 3ª Etapa .....	59
Figura 36 – Detalhe do resultado da otimização para a 3ª Etapa .....	60
Figura 37 – Detalhe do resultado da otimização para a 4ª Etapa .....	61
Figura 38 – Detalhe do resultado da otimização para a 4ª Etapa .....	61
Figura 39 – Detalhe do resultado da otimização para a 4ª Etapa .....	62
Figura 40 – Detalhe do resultado da otimização para a 4ª Etapa .....	62
Figura 41 – Detalhe do resultado da otimização para a 4ª Etapa .....	63
Figura 42 – Malhamento da estrutura otimizada após adequação para a fabricação.....	64
Figura 43 – Detalhe do Malhamento.....	64
Figura 44 - Deformação da Estrutura Otimizada – valores em m.....	65
Figura 45 – Tensão pelo Critério de Von Mises – Valores em Pa.....	65
Figura 46 – Detalhe da região com maiores tensões .....	66
Figura 47 - Densidades no suporte otimizado com tol de 0.0001.....	70
Figura 48 - Suporte otimizado com tol 0.0001. Densidades maiores que 0.9... 70	
Figura 49 - Densidades no suporte otimizado com tol de 0.001.....	71
Figura 50 - Suporte otimizado com tol 0.001. Densidades maiores que 0.9..... 71	
Figura 51 – O processo de análise por elementos finitos.....	82
Figura 52 – Barra sob carregamento axial.....	92
Figura 53 – Dividindo a barra em elementos e nós.....	93
Figura 54 – Modelamento dos elementos .....	94
Figura 55 – Modelo para um elemento.....	96
Figura 56 – Estrutura modelada.....	96
Figura 57 – Forças internas.....	98
Figura 58 – Comportamento elástico de um elemento sob esforço axial .....	103
Figura 59 – Barra biapoiada .....	109
Figura 60 – Coordenadas globais e locais.....	116
Figura 61 – Coordenadas locais e naturais .....	117

## RESUMO

O propósito deste trabalho é a aplicação do Método de Otimização Topológica (MOT) a uma estrutura real, segundo o critério da máxima rigidez e mínima massa.

Escolheu-se como objeto de estudo uma pinça para solda a ponto e realizou-se a modelagem de sólidos e a aplicação do MOT às peças susceptíveis de serem melhoradas. Após obtenção da solução ótima esta foi interpretada e traduzida na forma um projeto de estrutura que pudesse ser facilmente confeccionada pelos processos tradicionais de produção mecânica, ou seja, por fresagem, torneamento e/ou soldagem. Após esta adequação para a fabricação, realizou-se uma nova análise para que ficasse comprovada a optimalidade da solução final, que devia conciliar desempenho e manufaturabilidade.

Com relação à metodologia adotada, gerou-se os modelos de sólido com o software Mechanical Desktop® (da Autodesk) enquanto que a geração de malha, a aplicação do Método dos Elementos Finitos e a otimização propriamente dita foram realizadas com o ANSYS® (da ANSYS Inc Corporate).

## **ABSTRACT**

The main purpose of this work is the application of the Topological Optimization Method (TOM) to a real structure observing the maximum stiffness and minimum mass criteria.

A point welding pincer was chosen as study object and the parts that could be improved were passed through a solid modeling process and MOT application. After the achievement of the excellent solution such result was interpreted and translated in the form of a structure project that could be easily worked out by traditional processes of mechanic production, like lathing, milling and/or welding. After this adequacy to manufacture, a new analysis was performed to confirm that the final solution was the optimum one and conciliates performance and manufacturability.

In relation to the adopted methodology, the solid models were generated with Mechanical Desktop® (from AutoDesk) software while the generation of mesh, the application of the Finite Elements Method and the optimization process had been carried out with ANSYS® (from ANSYS Inc Corporate).

# **1 INTRODUÇÃO**

## **1.1 Motivação**

As próximas décadas devem assistir a uma grande mudança na relação do Homem com o mundo e com a tecnologia. Esta transformação será uma consequência direta ou do esgotamento, ou da diminuição da produção, ou ainda do encarecimento de diversos recursos não-renováveis (petróleo, minérios) e também da escassez e/ou da menor disponibilidade per capita de outros fatores como energia e água. O binômio Eficácia/Eficiência, que é usado para explicar o sucesso de empresas, organizações e até de governos, passará a ser o monômio Eficiência já que será impossível algum empreendimento ou instituição sobreviver ou alcançar um resultado satisfatório sendo apenas eficaz, ou seja, a competitividade será tão grande e os recursos tão mínimos que a exigência de eficiência será astronômica.

Neste cenário será obrigatório que se faça um uso mais racional e otimizado dos recursos disponíveis, o que equivale a dizer que aumentará a importância da ciência e da tecnologia e da aplicação de ambas na resolução dos problemas que a humanidade enfrentará no futuro.

O papel da Engenharia, que é o principal agente desenvolvedor e aplicador do progresso tecnológico, será amplo e ao mesmo tempo intenso. Como exemplos de suas principais responsabilidades pode-se citar o desenvolvimento de

equipamentos com melhor rendimento, menor consumo e mais duráveis e também o desenvolvimento de matérias-primas renováveis e aumento das práticas e possibilidades de reciclagem.

No âmbito da Engenharia Mecânica, muito pode-se e poder-se-á fazer. Chama a atenção a possibilidade/necessidade de se fabricar peças, conjuntos e/ou estruturas mais leves e com menos material. A redução de massa num equipamento, além de representar uma economia de recursos (matéria-prima, e provavelmente tempo de usinagem e energia) também significa uma menor inércia e conseqüentemente uma menor potência consumida se o item em questão for parte móvel de um equipamento ou pertencer a um sistema que se movimenta.

Apesar da preocupação de economizar recursos ser antiga ela está se intensificando e será fundamental num futuro próximo. Atualmente alguns ramos da indústria já manifestam grande preocupação com a necessidade de se produzir itens mais leves. Como exemplo pode-se citar o setor aeronáutico, em que o peso é sinônimo de maior gasto com combustível e maior dificuldade de sustentação da aeronave, e a indústria automobilística onde além da necessidade do veículo ser leve para diminuir o consumo, também existe a preocupação de se economizar matérias-primas, pois o volume de produção é muito elevado e uma pequena redução na massa de um componente pode representar uma grande redução de custo quando se considera a produção de milhares ou milhões de automóveis.

Atualmente, a principal ferramenta para se tentar reduzir a massa de um componente mecânico é o computador, pois através dele pode-se criar e testar peças virtuais com grande facilidade e precisão, o que reduz grandemente o custo e o tempo de desenvolvimento do novo componente e ao mesmo tempo se aumenta sua confiabilidade. Para que se pudesse fazer uso desta ferramenta com segurança, eficácia e eficiência foi necessário o desenvolvimento de softwares de Modelagem de Sólidos e de softwares de Cálculo Estrutural. E foi o refinamento de ambos que propiciou o aparecimento do Método de Elementos Finitos (MEF), poderosa ferramenta de cálculo estrutural que é muito utilizada nos dias de hoje.

O direcionamento do MEF para ajudar a resolver problemas de redução de massa levou ao surgimento de uma nova técnica: O Método de Otimização Topológica (MOT). E é da aplicação deste processo de busca da solução estrutural ideal que se falará neste trabalho, que tem como objeto de estudo uma Pinça para Solda a Ponto.

## 1.2 Problematização e Objetivo

A estrutura esquematizada abaixo (Figura 1.1) foi projetada para a soldagem a ponto de chapas de aço de grandes dimensões. Como a mesma deve movimentar-se nas direções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , ela é fixada num sistema rolante que também tem movimento nos três eixos cartesianos. O processo de soldagem envolve o posicionamento preciso dos extremos da Pinça (Cilindro Hidráulico e

Eletrodo Inferior), a compressão adequada das chapas e o ajuste correto do valor de corrente que flui de um eletrodo para o outro.

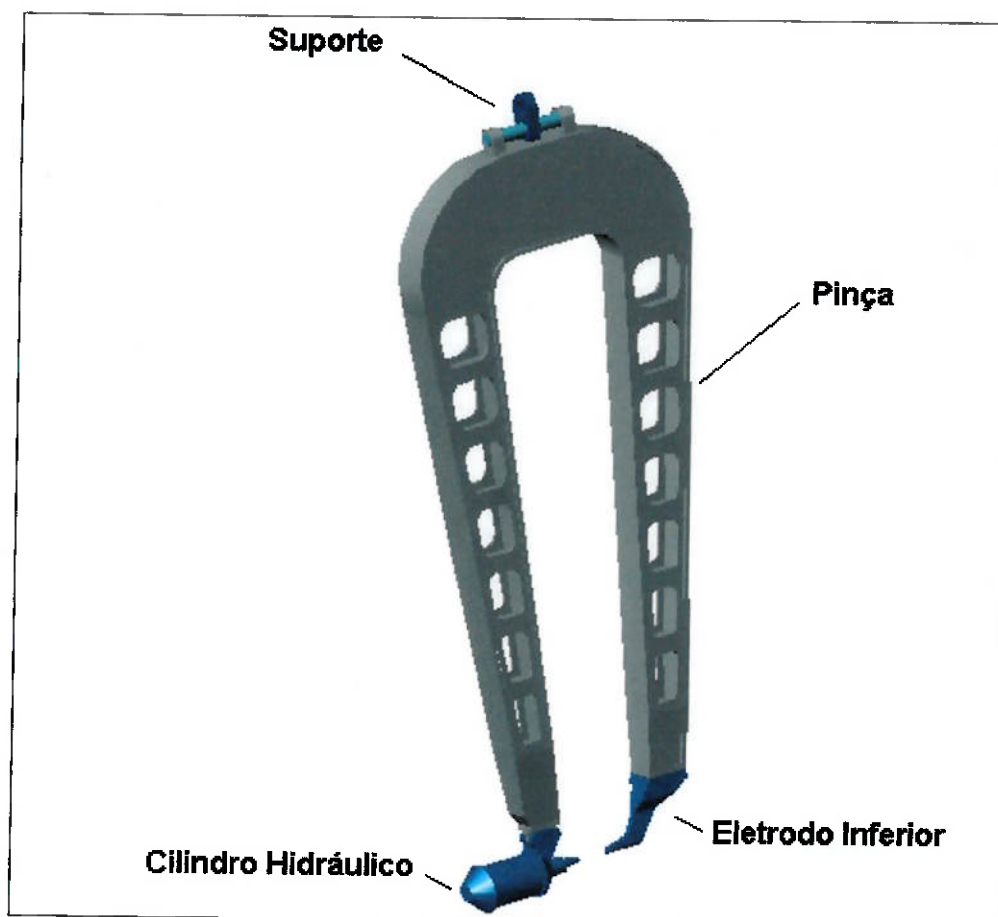


Figura 1 – Pinça para solda a ponto

Para o objetivo deste trabalho apenas o tópico que envolve a compressão das chapas tem importância, pois é esta ação que gerará os esforços que agem sobre a estrutura a ser estudada. O cilindro hidráulico pode aplicar uma força de até 2400 lbf sobre as chapas e é a reação a este esforço (Força  $F$ ) que age sobre a Pinça, conforme ilustrado na Figura 1.

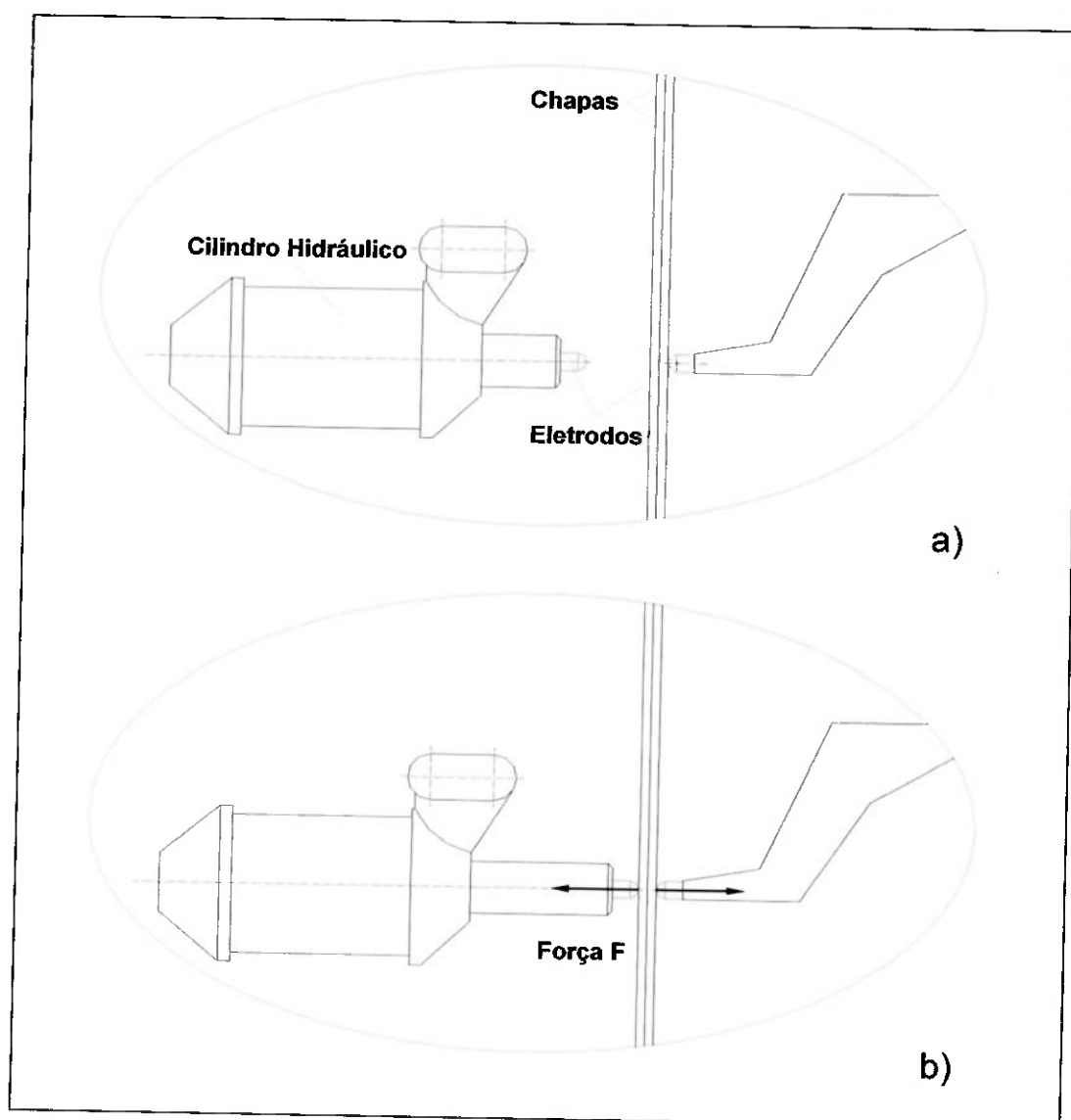


Figura 2 – Esquema da compressão



Em termos quantitativos, pode-se dizer que o objetivo deste trabalho é a redução da massa da pinça em 50% enquanto que se limita sua deformação máxima (medida na ponta do eletrodo e na direção da Força  $F$ ) em 8.0 mm.

### **1.3 Escopo do Trabalho**

Pretende-se realizar uma modelagem de sólidos (com o software Mechanical Desktop® da Autodesk) e aplicar o Método de Otimização Topológica às peças da pinça susceptíveis de serem melhoradas. A aplicação do MOT, bem como a geração das malhas será feita com o ANSYS® (da ANSYS Inc Corporate). Após obtenção da solução ótima esta será interpretada e traduzida na forma de projeto de uma estrutura que possa ser facilmente confeccionado pelos processos tradicionais de produção mecânica, ou seja, por fresagem, torneamento e/ou soldagem. Após esta adequação para a fabricação, realizar-se-á uma nova análise para que comprove a optimalidade da solução final, que deve conciliar desempenho e manufaturabilidade.

## **2. REVISÃO DE LITERATURA**

O foco deste trabalho é a otimização topológica e este capítulo será dedicado a sua contextualização, conceituação e fundamentação matemática. Tópicos relacionados ao MEF (Métodos dos Elementos Finitos) não serão aqui discutidos, para que não haja nenhum desvio em relação ao objetivo principal do trabalho, mas devido a sua importância e proximidade com tema tratado os mesmos serão incluídos no Anexo I.

### **2.1 Visão Geral**

Otimização é o processo de se obter o melhor resultado para uma dada operação ou projeto ao mesmo tempo em que se assegura que certas restrições sejam respeitadas e que certos recursos sejam economizados. No âmbito do projeto de estruturas, a otimização seria a busca racional pela estrutura que apresente a melhor resposta quando se considera o objetivo a ser alcançado e as restrições impostas. Deve-se salientar que as restrições podem ter caráter multidisciplinar, obrigando a solução a conciliar funcionalidade, manufaturabilidade e custo.

Nas últimas décadas a otimização estrutural ganhou o status de ciência, com pesquisadores de todo o mundo fundamentando e consolidando sua base matemática e computacional. Foram estes que desenvolveram ferramentas e técnicas para a aplicação da otimização estrutural de forma sistemática e

coerente, em oposição ao método tradicional ou clássico que se baseia em num processo de tentativa e erro. O método tradicional parte de um design inicial, que é geralmente resultado da experiência, criatividade, conhecimento e/ou intuição do projetista, para então aplicar um processo de análise e é somente após a avaliação desta que se verifica a possibilidade de se efetuar uma melhoria. Se for concluído que é possível se melhorar o design este é então modificado e repete-se o ciclo até que se conclua pela impossibilidade de novos aprimoramentos, conforme está ilustrado na Figura 3.

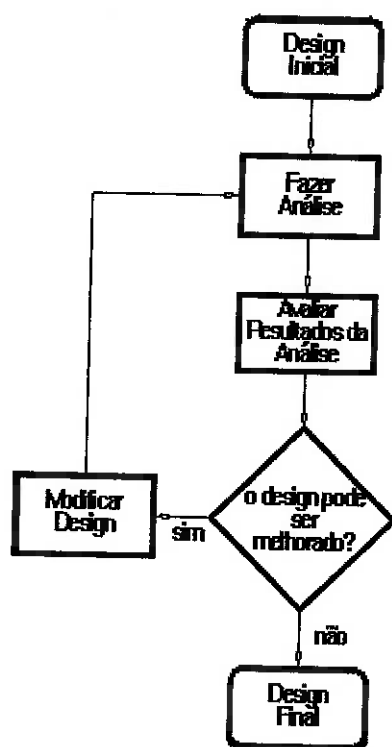


Figura 3 – Fluxograma básico de um processo de otimização

O esquema da Figura 3 é bem simples, mas os blocos que o compõem podem exigir algoritmos de cálculo e decisão bastante complexos, principalmente se o

processo de busca pela solução ótima for automatizado e houver pouca ou nenhuma interface humana nas ações que ocorrem internamente e na interface entre os blocos, que é o que ocorre nos métodos mais modernos de otimização. Para melhor explicar este fluxograma e os principais conceitos associados a um processo de otimização se fará uso de um exemplo. Considerar o projeto de uma passagem para pedestres sobre o Tejo<sup>1</sup> Politécnico. Suas exigências de projeto e desempenho poderiam ser:

- Suportar com segurança uma massa de 300 Kg.
- Vão de cerca de 5,0 m.
- Largura de 90,0 cm
- Altura máxima da estrutura de 20,0 cm
- Deformação máxima de 2,5 cm
- Peso máximo de 1000 Kg
- Custo de matéria-prima limitado a US\$ 1000,00

As características ou restrições especificadas permitem infinitos projetos diferentes e todos eles satisfazendo ao que foi solicitado. Imagine-se uma estrutura de madeira que satisfizesse as condições de tamanho, resistência e deformação especificadas. Esta estrutura, independentemente de sua forma, peso ou custo, seria um design funcional, pois atende a todos as exigências de projeto. Mas ela pode não ser um design otimizado, já que talvez se possa melhorá-la segundo algum ou alguns critérios. Deve-se então fazer uma diferenciação entre design funcional e otimizado. O primeiro é aquele que

---

<sup>1</sup> Tejo é o nome carinhoso dado pelos alunos ao córrego que passa em frente a Poli Mecânica.

atende a todas as exigências prévias e de desempenho, mas ainda permite que certas melhorias sejam implementadas em algumas áreas do projeto. O segundo é aquele que passou pelo processo da Figura 3 para que seu desempenho segundo um critério pré-estabelecido fosse aprimorado. São exemplos destes critérios, que são costumeiramente chamados de objetivos, a diminuição de custo, a diminuição de massa, o aumento da resistência mecânica, o aumento da durabilidade, o aumento da frequência natural etc.

Retomando-se o exemplo do pontilhão sobre o Tejo, e acrescentando-se a necessidade de que o mesmo seja móvel, desejar-se-ia que ele fosse o mais leve possível. Neste caso, poder-se-ia otimizar seu design de modo que o objetivo ou critério utilizado seja o da minimização do peso. Para um melhor detalhamento do problema, considerar as seguintes hipóteses:

- O pontilhão é bi-apoiado, sendo articulado numa extremidade e simplesmente apoiado na outra.
- Desprezar o peso do corrimão e da grade lateral.

Assim sendo, um possível design seria aquele composto por duas vigas e uma placa, que serviria de piso, conforme esquematizado na Figura B. Esta é a solução clássica para este tipo de problema.

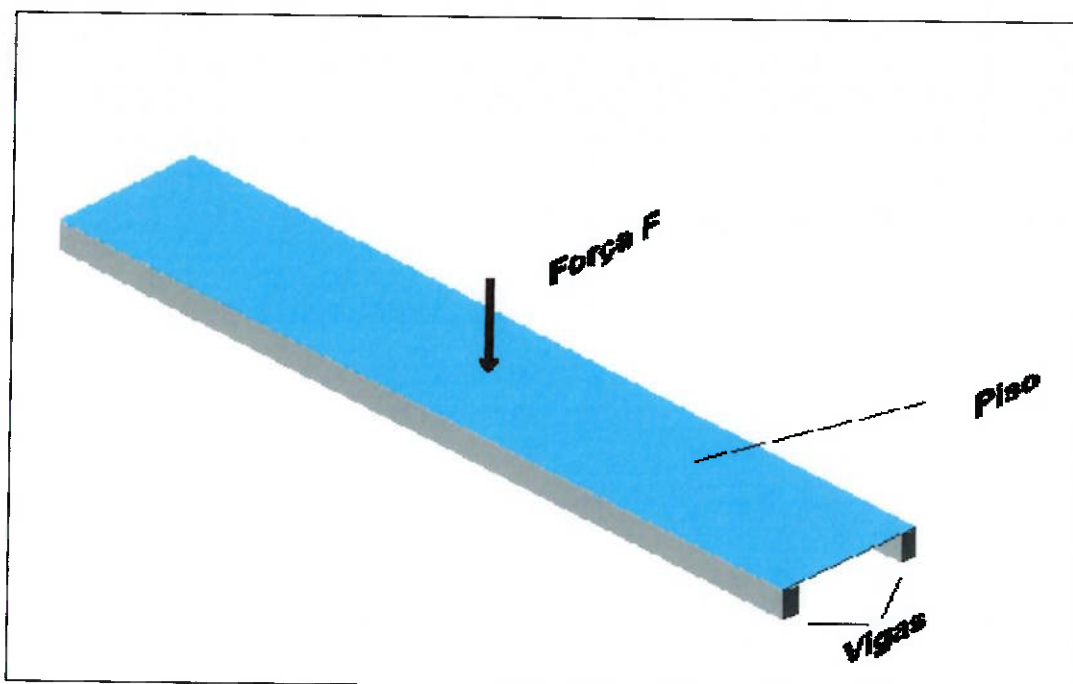


Figura 4 – Esquema de um pontilhão feito com duas vigas

Para o caso esquematizado na Figura 4 pode-se realizar uma análise preliminar adotando-se as seguintes hipóteses simplificadoras:

- Desprezar o peso próprio das vigas
- Desprezar o momento torçor gerado pela força  $F$  e pelo peso da placa
- Força  $F$  aplicada na distância média entre as vigas

Nestas condições, devido a simetria da estrutura, o problema pode ser aproximado pelo caso de uma única viga carregada com  $F/2$  conforme ilustrado na Figura 5.

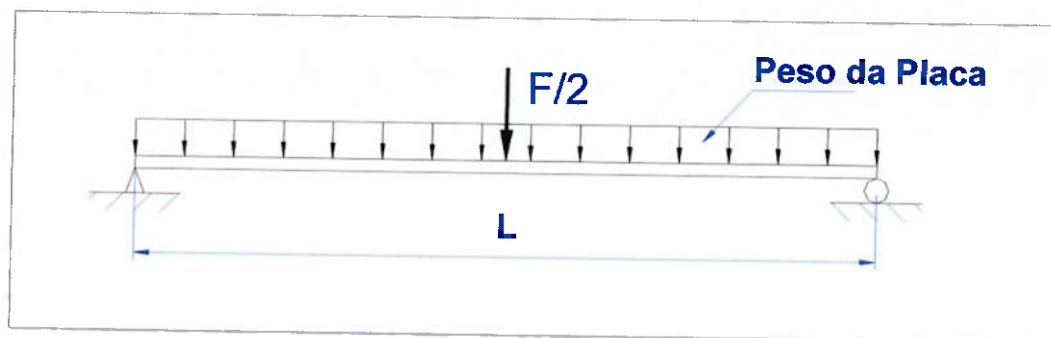


Figura 5 – Diagrama de forças após aplicação de hipóteses simplificadoras

Para problemas estruturais como este, em que se busca uma solução de compromisso entre a rigidez e o peso, alumínio e aço apresentam desempenhos equivalentes, o primeiro sendo estruturalmente um pouco superior e o segundo sendo mais barato e fácil de soldar. Como o custo também é uma restrição, optar-se-á pelo aço. Para a definição da forma da viga, buscar-se-á entre os perfis existentes comercialmente aquele que além de atender a restrição de deformação máxima também apresente uma baixa densidade linear. Para esta seleção pode-se fazer uso da expressão analítica da deflexão máxima, que para as condições da Figura 5 é dada por:

$$f_{\max} = \frac{(F/2) \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} + \frac{5 \cdot w \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I} \quad (2.1)$$

onde:

$f_{\max}$  : deflexão máxima

$(F/2)$  : carga concentrada

- L : comprimento total da viga
- W : carga distribuída (em unidade de força/comprimento)
- E : módulo de elasticidade
- I : momento de inércia

Após a escolha do perfil mais adequado um refinamento desta solução poderia ser obtido analisando-se a estrutura resultante pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Observar-se-ia então quais as regiões menos solicitadas e retirar-se-ia material das mesmas, num processo do tipo **design - análise - novo design** até que se conclua pela impossibilidade de novas melhorias conforme fluxograma da Figura 3. Este exemplo ilustra o método tradicional de otimização, e os métodos mais modernos realizam mais ou menos as mesmas operações só que algoritmos de decisão e análise substituem a interface humana.

Deve-se ressaltar que na Análise Estrutural a geometria e as dimensões do objeto em estudo são conhecidas e o que se quer determinar é o comportamento e a resposta da estrutura, ou seja, deseja-se saber as tensões, deformações e/ou as frequências naturais da mesma. Já na otimização, as dimensões, a geometria e até mesmo as propriedades mecânicas do material podem ser desconhecidas. O objetivo é achar o mínimo (ou máximo) de alguma função objetivo pré-definida ao mesmo tempo em que certas restrições e limitações são respeitadas. Esta função objetivo pode ser a redução de peso, a maximização da rigidez, o aumento do valor da frequência de ressonância, a



diminuição de custo de material, etc. As restrições podem ser geométricas, como limitações na largura ou na altura da estrutura, ou comportamentais, como limitações na tensão máxima ou deformação máxima permitidas.

As várias técnicas de otimização podem ser classificadas como **Intuitivas**, como baseadas num **Critério de Optimalidade** ou como baseadas em **Programação Matemática**. Exemplos do Método Intuitivo são aqueles baseados na condição de saturação de tensão e na falha simultânea. O Método do Critério de Optimalidade consiste de dois estágios: o primeiro que identifica o conjunto de condições necessárias e que devem ser satisfeitas na situação de ótimo design e o segundo que cria um procedimento iterativo de reprojeção para que se possa alcançar aquele ponto de ótimo. O Método de Programação Matemática envolve a determinação de um extremante da função objetivo, num espaço multidimensional de variáveis de projeto, onde as restrições são funções comportamentais ou limitações geométricas.

Existem três possibilidades distintas para o problema da otimização: a abordagem paramétrica, a de forma e a topológica. A primeira controla valores paramétricos no modelo tais como espessuras, raios de concordância, áreas e outros. A segunda está associada a variações geométricas do domínio de definição da peça através da modificação das superfícies (3D) ou contornos (2D) que a definem. A terceira procura estabelecer completamente a definição geométrica ótima da peça mecânica a partir do conhecimento da ação externa a ser suportada pela mesma, do tipo de desempenho ótimo a ser atingido e das

restrições mecânicas e geométricas impostas. As três próximas figuras ilustram estas diferentes abordagens. No exemplo considerado, tem-se uma viga engastada de comprimento " $L$ " sobre a qual esta aplicada uma força " $F$ " na extremidade oposta ao apoio. Deseja-se minimizar o peso desta viga, ao mesmo tempo em que se limita sua deformação, sua largura e sua altura a valores máximos. As Figuras de 6 a 8 exemplificam os três tipos de otimização.

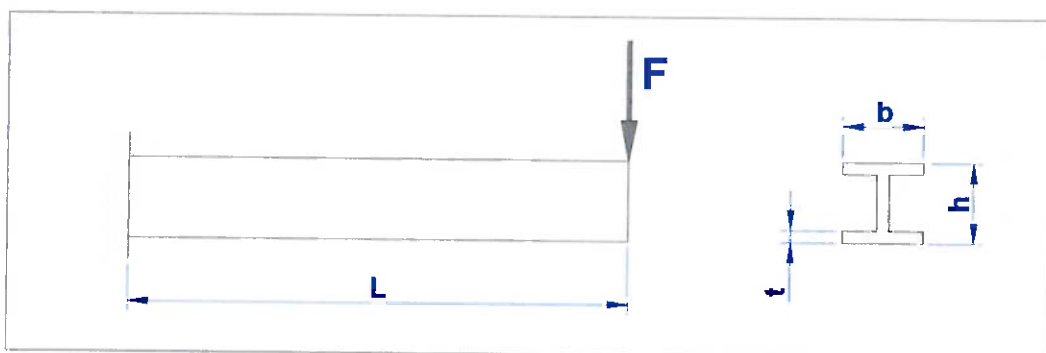


Figura 6 – Otimização Paramétrica

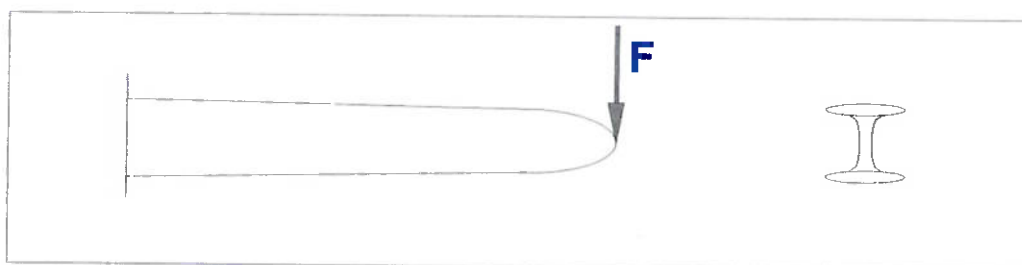


Figura 7 – Otimização de forma

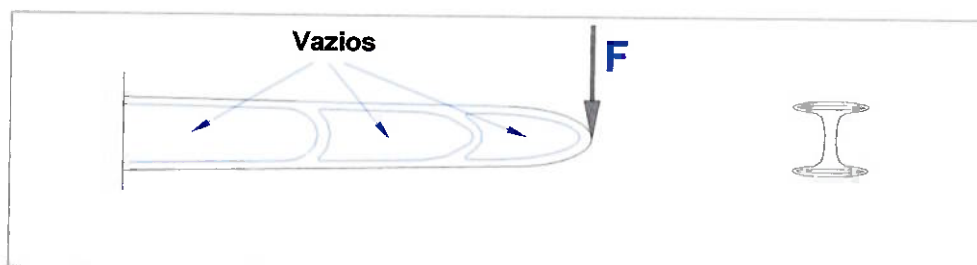


Figura 8 – Otimização Topológica

## 2.2 Formulação matemática para o problema da otimização

Matematicamente falando o objetivo da otimização é achar um máximo (ou um mínimo) da função  $C(\mathbf{x})$ , que tem como variáveis independentes as componentes do vetor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n$ .  $C(\mathbf{x})$  é chamada de função objetivo ou função custo e as quantidades  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  são as variáveis do processo de otimização e são conhecidas como variáveis de projeto, enquanto que o espaço n-dimensional  $\mathcal{R}^n$  é o domínio da função. Qualquer vetor  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$  representa um dos design possíveis no universo considerado. Normalmente as variáveis de projeto não são totalmente livres e estão sujeitas a algumas restrições. Se alguma destas for uma restrição de igualdade isto significa que as variáveis de projeto não são totalmente independentes e que o domínio de projeto é um sub-conjunto de  $\mathcal{R}^n$ , que tem seu número de graus de liberdade reduzido pelo quantidade de restrições de igualdade. Já as restrições de inigualdade impõem limitações nos valores que as variáveis podem assumir. Na sua forma mais geral o problema de otimização pode ser assim expresso:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar ou Maximizar} & C(\mathbf{x}) \\ \\ \text{Sujeito a} & \begin{cases} h_j(\mathbf{x}) = 0 & j = 1, 2, \dots, n_h \\ g_k(\mathbf{x}) \leq 0 & k = 1, 2, \dots, n_g \\ x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max} & i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{array}$$

$$\text{Onde} \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n$$

Nesta formulação  $n_h$ ,  $n_h$  e  $n$  são, respectivamente, o número de restrições de igualdade, de desigualdade e o número de variáveis de projeto. Os valores  $x_i^{\min}$  e  $x_i^{\max}$  são os limites inferior e superior em  $\Re$  para a variável de projeto  $x_i$ . Nestas condições pode-se discutir os conceitos básicos que envolvem qualquer processo de otimização:

### 2.2.1 Variáveis de projeto

As variáveis de projeto são os parâmetros usados para descrever um sistema ou estrutura, sendo normalmente expressos na forma de um vetor:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

É pela variação das mesmas que se altera o valor da função objetivo. Elas podem representar uma espessura, um comprimento, as densidades dos elementos que compõem uma discretização da estrutura, etc. Elas podem ter natureza discreta (assumem apenas valores isolados dentro de um conjunto na forma  $\{x \in X \mid x = (k_1, k_2, \dots, k_n)\}$ ) ou contínuas (as variáveis podem assumir qualquer valor dentro de um subconjunto na forma  $\{x \in X \mid x^{\min} \leq x \leq x^{\max}\}$ ).

### 2.2.2 Função objetivo ou função custo

Num processo de otimização existem inúmeros ou até mesmo infinitos designs funcionais. Cabe estabelecer um critério para se escolher entre eles qual seria o melhor. Este critério deve ser quantitativo e deve ser calculado a partir das

variáveis de projeto. A qualidade do resultado do processo de otimização depende da formulação adequada deste critério que é chamado de função objetivo ou de função custo e é denotado por  $C(\mathbf{x})$ .

A função objetivo é dita simples quando existe um único objetivo e é chamada de multi-objetivo para os problemas de otimização que envolvem vários objetivos simultaneamente. No segundo caso existe a dificuldade adicional de se definir um funcional representativo para o processo. As soluções mais comuns para esta situação são escolher qual o objetivo mais importante e transformar os demais em restrições ou criar um funcional que seja a combinação linear dos diversos objetivos, avaliando-se a importância relativa de cada objetivo por uma função peso. Para esta segunda forma ter-se-ia o seguinte funcional:

$$C(\mathbf{x}) = P_1 \cdot C_1(\mathbf{x}) + P_2 \cdot C_2(\mathbf{x}) + \dots + P_n \cdot C_n(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

onde:

$C(\mathbf{x})$  : é a função multi-objetivo

$C_i \quad i = 1, 2, \dots, n$  : representa um único objetivo

$P_i \quad i=1,2,\dots,n$  : é o peso atribuído a cada objetivo

### 2.2.3 Restrições e domínio viável e inviável

As restrições são o conjunto de limitações e/ou de condições impostas as variáveis de projeto. Podem ser de três tipos distintos:

- Igualdade  $h_j(\vec{x}) = 0$
- Inigualdade  $g_k(\vec{x}) \leq 0$
- Laterais  $x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max}$

O conjunto de restrições do processo de otimização divide o espaço  $n$ -dimensional caracterizado pelas variáveis de projeto em duas regiões distintas: aquela em que todos os  $x_i$  atendem as restrições e aquele em que pelo menos um deles não atende. O primeiro espaço se chama domínio viável e o segundo domínio inviável.

## 2.3 Otimização Topológica

Basicamente o Método de Otimização Topológica (MOT) distribui o material no interior de um domínio fixo, de forma que seja atendida uma função objetivo

previamente especificada. A densidade de material nos pontos do domínio pode variar de 0 (ponto sem material) a 1 (ponto com material) sendo que os valores intermediários seriam uma abstração matemática que depende do modelo de material escolhido.

### **2.3.1 Histórico da Otimização Topológica**

Maxwell em 1872 e Michell em 1904 calcularam analiticamente, a partir da Teoria da Elasticidade, o campo de tensões mecânicas principais para uma força aplicada num ponto de um domínio infinito que está sujeito a restrições de deslocamento em outros pontos. Usaram então este resultado para criar uma estrutura de barras (treliças) que estivessem alinhadas com as direções de tensão obtidas. Nesta situação as barras estariam sujeitas apenas a esforços de tensão e compressão o que permitiria que a estrutura resultante tivesse o melhor desempenho, avaliado segundo o critério de maior rigidez com menor peso. A Figura 9 ilustra esta situação.

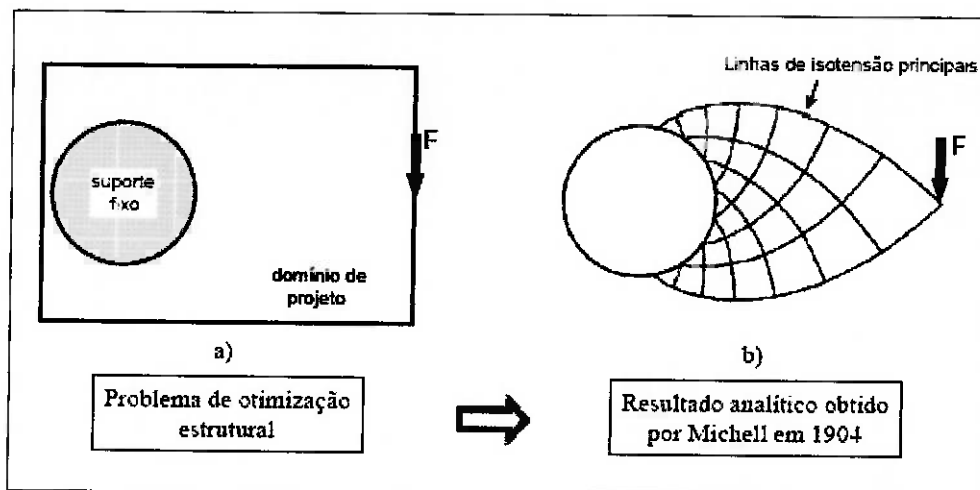


Figura 9 – Estrutura obtida por Michell

Estes resultados, considerados sem importância na época, são a base para a teoria da otimização topológica e são usados até hoje como padrão para a aferição e verificação da correção de diversos softwares comerciais de OT. Pode-se esperar para otimizações com grande redução de massa, estruturas similares as de Michell, ou seja, formadas por treliças.

### 2.3.2 Modelos de material

A Otimização Topológica utiliza como variáveis de projeto as densidades dos elementos que compõem o domínio viável. Como já foi dito, estas densidades deveriam assumir apenas dois valores: 0 (ponto sem material) e 1 (ponto com material), mas as formulações que usavam este modelo discreto não foram bem sucedidas e criou-se modelos de material que permitiam que a variáveis assumissem valores entre 0 e 1. Os modelos mais utilizados são o SIMP e o Método da Homogeneização.



### 2.3.2.1 SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization)

Neste método o valor da propriedade  $E$  é função da densidade  $\rho$  do material conforme descrito pela equação que se segue:

$$E_{(x)} = \rho_{(x)}^p \cdot E_0 \quad (2.3)$$

onde:

$E_0$  : propriedade básica do material a ser distribuído

$\rho_{(x)}$  : densidade no ponto  $x$

$p$  : função peso

$E_{(x)}$  : propriedade no ponto  $x$

Para o problema discretizado ter-se-ia:

$$E_i = \rho_i^p \cdot E_0 \quad (2.4)$$

Este método é fácil de implementar e apresenta baixa custo computacional, tendo a desvantagem de apresentar na solução final regiões com valores de densidade entre 0 e 1. Para corrigir-se este problema pode-se aumentar o valor da função peso ( $p$ ) ou utilizar-se de filtros numéricos no algoritmo de otimização.

### 2.3.2.2 Método da homogeneização

Neste modelo cada ponto do domínio é entendido como sendo feito por um material composto formado pela repetição periódica de uma microestrutura, conforme ilustrado na Figura 10. Para este modelo um ponto com material tem  $(a=b=0)$  e um ponto sem material é dado por  $(a=b=1)$ .

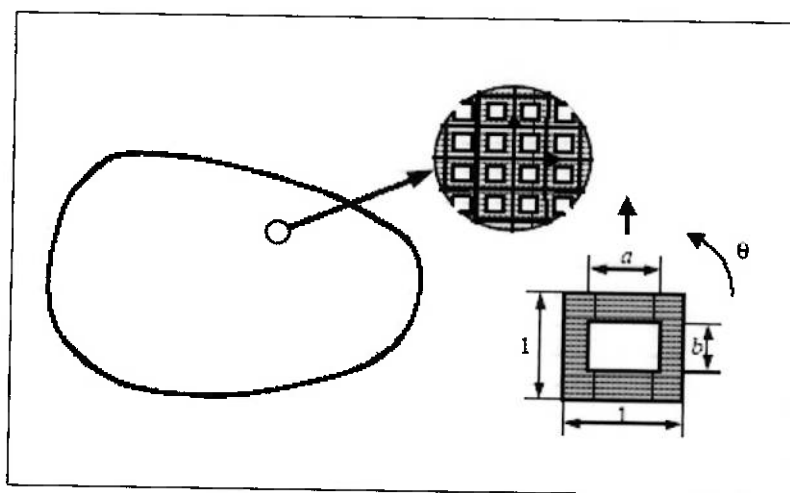


Figura 10 – Modelo de material para o Método da Homogeneização

Este método é mais robusto que o anterior, mas apresenta a desvantagem de exigir um maior custo computacional já que tem mais variáveis de projeto ( $a$ ,  $b$  e  $\theta$ ).

### 2.3.3 implementação do Método de Otimização Topológica (MOT)

O MOT é uma combinação do Método de Elementos finitos com um algoritmo de otimização como ilustrado na Figura 11.

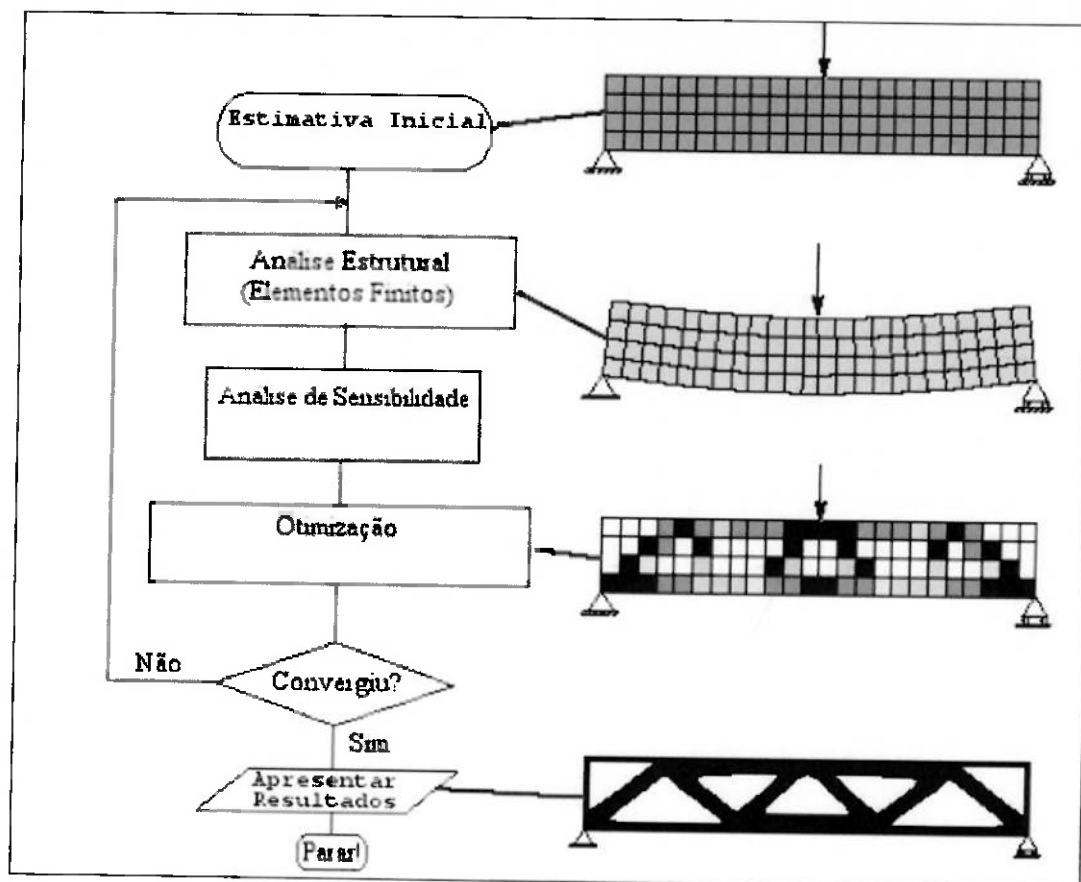


Figura 11 – Esquema de implementação do MOT

### 2.3.5 Problemas numéricos

Os problemas numéricos ocorrem durante a otimização e são consequência da modificação do modelo binário (densidade 0 ou 1) para o modelo de material que permite densidades intermediárias.

#### 2.3.5.1 Instabilidade de Tabuleiro

É caracterizado pelo surgimento de regiões onde ocorre alternância de elementos sólidos e vazio, num padrão similar a um tabuleiro de xadrez, conforme ilustrado na Figura 12

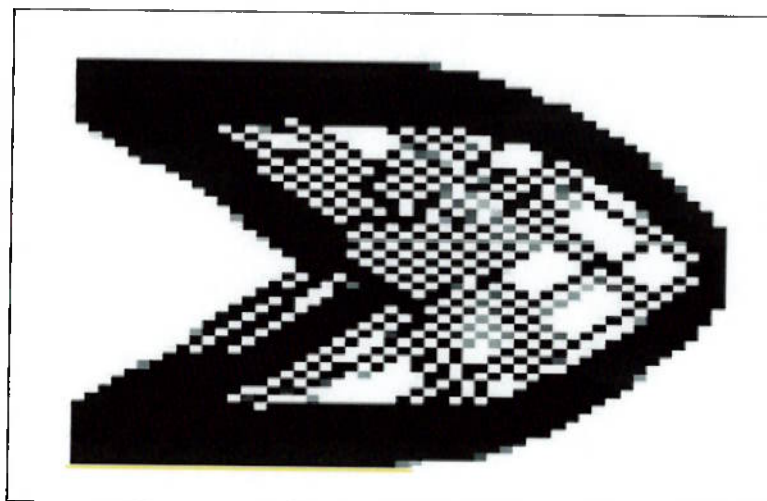


Figura 12 – Instabilidade de tabuleiro

. O aparecimento deste padrão é consequência de uma modelagem fraca (interpolação linear das funções de estado) que causam uma rigidez artificialmente grande. Sua prevenção pode se dar pelo uso de elementos de ordem mais alta ou pelo uso de filtros numéricos.

#### **2.3.5.2 Dependência de malha**

Este problema está relacionado com a obtenção de soluções qualitativamente diferentes para diferentes discretizações e tamanhos de malha. O refinamento

e a melhoria da disposição da malha de elementos finitos deveria resultar em uma melhor aproximação do problema real e não numa estrutura diferente.

#### **2.3.5.3 Não-unicidade de solução**

Os problemas de otimização topológica tem, na maioria das vezes, caráter não-convexo, o que faz com que muitas vezes o ponto de ótimo encontrado não seja um máximo (ou mínimo) global. A existência de extremos locais faz com que o algoritmo seja conduzido a pontos ótimos diferentes dependendo do ponto de partida, da discretização do domínio, dos parâmetros do filtro utilizado ou ainda do algoritmo de otimização escolhido.

#### **2.3.5.4 Escalas de cinza**

Este problema é caracterizado pela presença na solução final de elementos com densidades intermediárias. Para resolvê-lo pode-se aumentar o valor da função peso (ver potência  $p$  das equações 2.3 e 2.4), o que penalizaria as densidades intermediárias.

#### **2.3.6 Soluções para os problemas numéricos**

Alguns dos problemas numéricos citados podem ser resolvidos pela mudança do modelo de material, pelo aumento do valor da função peso ou pela adoção de elementos com maior número de nós. Uma outra solução é a utilização de filtros. Este método pode ser aplicado diretamente sobre a variável de projeto, ou durante o cálculo da sensibilidade ou ainda sobre os limites móveis e baseia-se na avaliação da propriedade estudada em toda vizinhança do elemento considerado, de modo que uma média ponderada seja calculada e se impeça variações muito bruscas.

### **3 MATERIAIS E MÉTODOS**

#### **3.1 Configuração do Hardware utilizado**

Processador	: ATHLON XP 2000 (1,67 GHz)
Memória RAM	: 512 (SDRAM de 133 MHz)
Placa de Vídeo	: 64 MB
Hard Disk	: 40GB e velocidade de 7200 rpm
Sist. Operacional	: Windows XP Professional

#### **3.2 Softwares Utilizados**

Conforme mencionado no Capítulo 1 (Introdução) escolheu-se para a modelagem de sólidos o Mechanical Desktop® (da Autodesk). Para a geração da malha, para aplicação do Método dos Elementos Finitos e a para realização da otimização topológica optou-se pelo ANSYS® (da ANSYS Inc Corporate).

O critério de seleção dos softwares não foi puramente técnico, pois apesar da existência de programas dedicados, que apresentam facilidades e recursos voltados a otimização topológica, entendeu-se que seria interessante a escolha de ferramentas mais comerciais que já tivessem grande aceitação e fossem largamente utilizadas na indústria atual. A opção pelo ANSYS® deve-se ao fato de que o mesmo é simultaneamente um melhores e um dos mais usados softwares de elementos finitos no mundo atual. Além das tarefas anteriores este programa também oferece inúmeras ferramentas de construção e edição

3D que permitiriam que ele também se realizasse a modelagem de sólidos. A escolha do Mechanical Desktop® se deve não apenas a sua própria popularidade, mas também a do Autocad®, que é um outro software da Autodesk de quem o MD empresta a maioria de seus comandos 2D. Foi a familiaridade com o Autocad, que é inclusive a principal ferramenta de CAD da maioria das escolas de engenharia, que levou a opção pelo MD.

### **3.2.1 Mechanical Desktop 6.0**

O Mechanical Desktop 6.0 é uma solução de CAD para projeto mecânico, que integra toda a capacidade 2D da plataforma AutoCAD 2002 com o poder da modelação paramétrica a 3D.

O Mechanical Desktop reúne sob a mesma interface, funcionalidade para desenho e projeto a 2D, modelação a 3D de sólidos paramétricos e de superfícies complexas, e modelação de montagens. O conjunto das suas capacidades permite-lhe suportar virtualmente todas as tarefas de projeto, verificação e preparação para a produção que constituem o processo que vai desde o desenvolvimento de um produto até à sua produção e colocação no mercado.

O Mechanical Desktop 6.0 possui uma vasta biblioteca de componentes normalizados 2D e 3D, além de possuir ferramentas para modelação de componentes de órgãos de máquinas (parafusos, porcas, rolamentos, etc). O software também oferece diversas ferramentas de cálculo, que permitem o cálculo de áreas, volumes, massas, além possuir um pacote FEA capaz de



gerar malhas, aplicar esforços e calcular deformações e tensões em estruturas mais simples.

### **3.2.2 ANSYS**

#### **3.2.2.1 Visão geral**

O ANSYS é um programa de elementos finitos de uso geral que tem a capacidade de resolver numericamente uma ampla gama de problemas de engenharia. Estes problemas incluem estática e dinâmica de corpos rígidos e deformáveis, análise estrutural de situações com ou sem linearidade, transferências de calor e massa, eletromagnetismo e acústica. Dentre as aplicações na área estrutural pode-se citar:

- Estática: usada para se determinar deformações e tensões em situações de carregamento estático.
- Análise Modal: usada para calcular as freqüência naturais e os modos de vibrar das estruturas.
- Análise Harmônica: usada para determinar a resposta harmônica quando a estrutura é submetida a cargas cíclicas.
- Dinâmica Transiente: usada para se determinar a resposta da estrutura a carregamentos que variam com o tempo.
- Análise Espectral: usado para calcular as tensões e os esforços que aparecem na estrutura com resultado de um impacto ou vibração aleatória.

- **Vibrações Aleatórias:** é um tipo de análise espectral, usada pra determinar-se a resposta da estrutura a excitações aleatórias.

### **3.2.2.2 Interface Gráfica**

O jeito mais fácil de um usuário se comunicar com o programa é através do sistema de menus do ANSYS chamado de GUI (Graphical User Interface). O GUI consiste de janelas, menus, caixas de diálogo e outros componentes que permitem que se entre dados e se execute funções simplesmente clicando botões com o mouse ou digitando respostas nos prompts dos comandos. A figura que se segue, mostra a área de trabalho do ANSYS que é dividida em 7 regiões:

- **Utility Menu:** onde se encontram as funções que podem ser acessadas a qualquer momento de uma sessão. Funcionam através de menus pull-down que levam diretamente a uma ação ou caixa de diálogo.
- **Main Menu:** onde estão as principais funções do ANSYS
- **Input Window:** permite a entrada direta de comandos digitados via teclado. **Graphic Window:** janela onde são mostrados os elementos gráficos, como modelos ou resultados de análises.
- **Output Window:** registra as respostas do programa aos comandos e funções.
- **Toolbar:** permite ao usuário colocar funções e comandos na forma de botões de acesso instantâneo.

- Dialog Boxes: são as janelas que apresentam opções para completar operações ou especificar parâmetros.

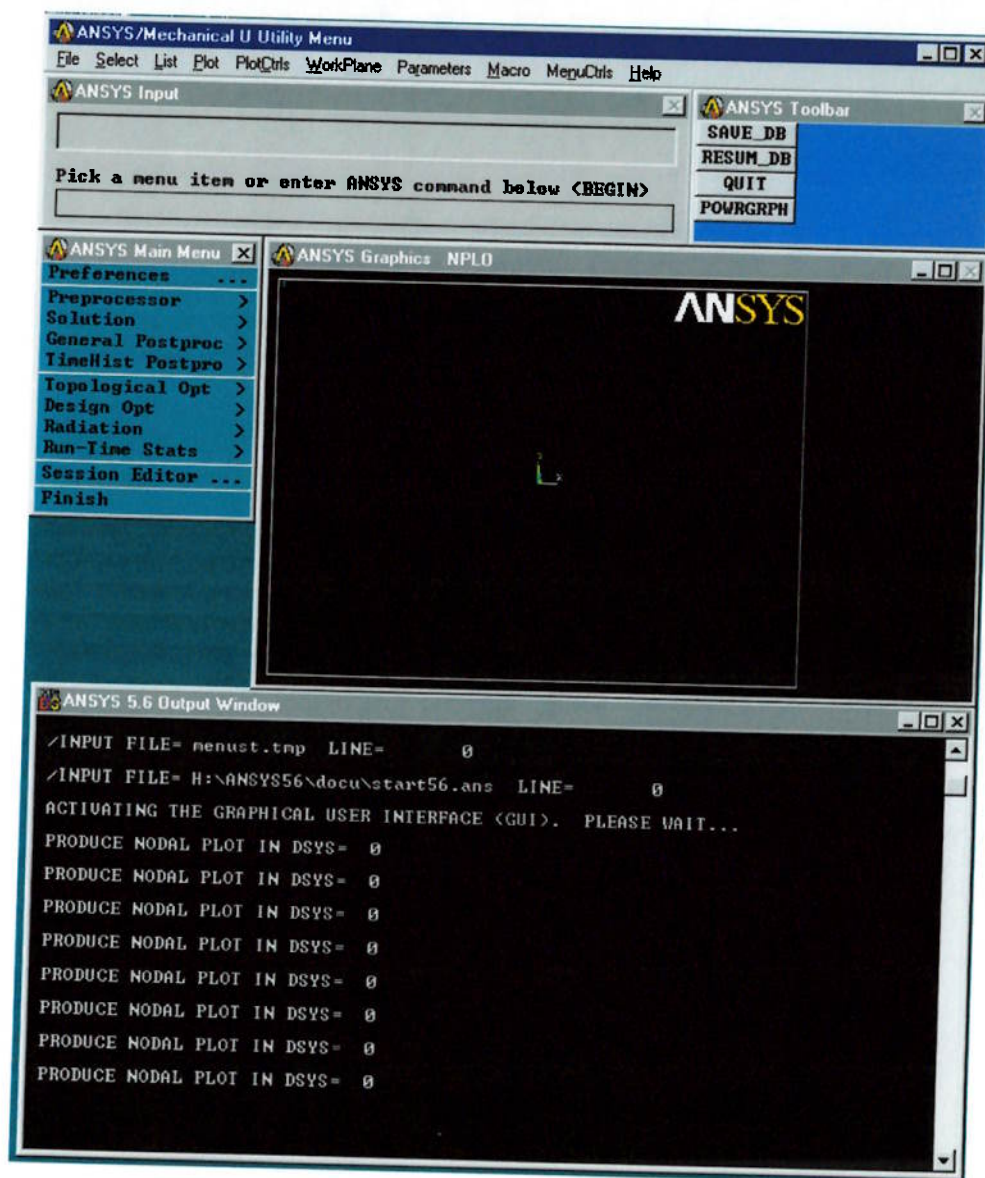


Figura 13 - Área de Trabalho do ANSYS

### 3.2.2.3 Programabilidade

O ANSYS possui uma linguagem de programação própria chamada de APDL – ANSYS Parametric Design Language, que é usada para se automatizar tarefas

repetitivas ou até mesmo para construir um modelo em termos de parâmetros variáveis, ou seja, é possíveis criar-se um tubo de diâmetro variável e testar-se qual é o valor de diâmetro que maximiza um determinado resultado de interesse. A APDL envolve também outros tipos de tarefa como a criação de macros, comandos repetitivos, condições if-then-else, loops e operações com escalares, vetores e matrizes.

#### **3.2.2.4 Comunicabilidade**

##### **3.2.2.4.1 Conexões de CAD para o ANSYS**

Pode-se importar modelos em CAD gerados nas seguintes programas e ou formatos:

- CATIA 4.X
- Parasolid 13.0
- Pro/ENGINEER V22 (proe200i<sup>2</sup>)
- SAT (ACIS 6.1)
- Unigraphics V17.0

Além disso alguns pacotes especiais permitem que modelos de outros softwares sejam importados para o ANSYS.

O ANSYS AutoFEA 3D permite que modelos gerados pelos softwares da Autodesk (Autocad, Mechanical Desktop) sejam entendidos pelo ANSYS. O

mesmo acontece com o ANSYS ProFEA que permite que os modelos do Pro/Engineer sejam lidos.

#### **3.2.2.4.2 Importação de modelos de outros softwares de FEA**

Os códigos dos programas abaixo podem ser instantaneamente convertidos:

- ABAQUS
- ALGOR
- COSMOS
- I-DEAS
- NASTRAN
- PATRAN
- STARDYNE
- WECAN

#### **3.2.2.5 Gerador de Malhas de Elementos Finitos**

O ANSYS® possui um eficiente gerador de malhas, que pode criar modelos segundo os seguintes métodos:

- Mapped meshing: malha mapeada, requer do usuário que a geometria do modelo seja decomposta em partes simples e os atributos do elementos sejam selecionadas apropriadamente.

- Free meshing: utiliza-se de um algoritmo inteligente que define as dimensões dos elementos de acordo com a geometria resultando em uma malha de alta qualidade.
- Extrusion meshing: realiza a "extrusão" de uma malha 2D em uma malha 3D composta de elementos tipo tijolo (brick) ou cunha (wedge).
- Adaptive meshing: a malha adaptativa gera a malha automaticamente, realiza uma análise, avalia o erro de discretização e reescala a malha até que o erro seja menor que o definido pelo usuário. Assim o usuário pode definir regiões que não são importantes em que os erros podem ser maiores, por pouco afetarem o resultado da análise.

### 3.3 Exemplo de aplicação usando MD / ANSYS

Pretende-se através de um exemplo simples mostrar os principais procedimentos e comandos que foram utilizados neste trabalho para se implementar a otimização. O exemplo a ser considerado é o projeto do suporte esquematizado na Figura 14:

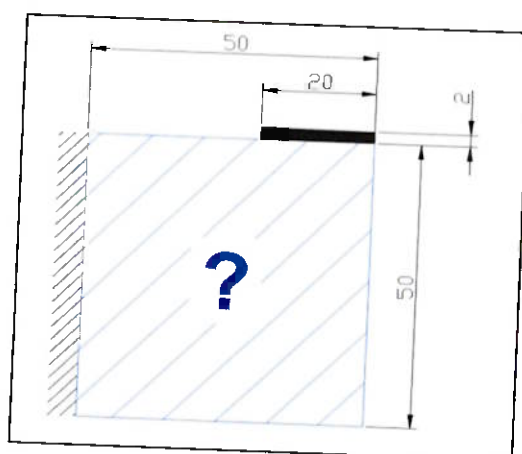


Figura 14– Esquema de um suporte

A região em negro, no desenho da Figura 14, representa um dos quatro mancais de deslizamento de uma máquina. Estes tem 15 mm de largura e 20 x 2 mm de seção transversal. Deseja-se projetar um suporte de largura máxima 25 mm, que esteja contido na região azulada da Figura 15 e que tenha volume menor que 31250 mm<sup>3</sup> (50% do volume em azul) e que apresente nestas condições uma deformação mínima. Considerar que a pressão aplicada no mancal de deslizamento é distribuída uniformemente pelo mesmo e que ambas as peças serão feitas de aço com módulo de elasticidade de 210 GPa e coeficiente de Poisson de 0,3.

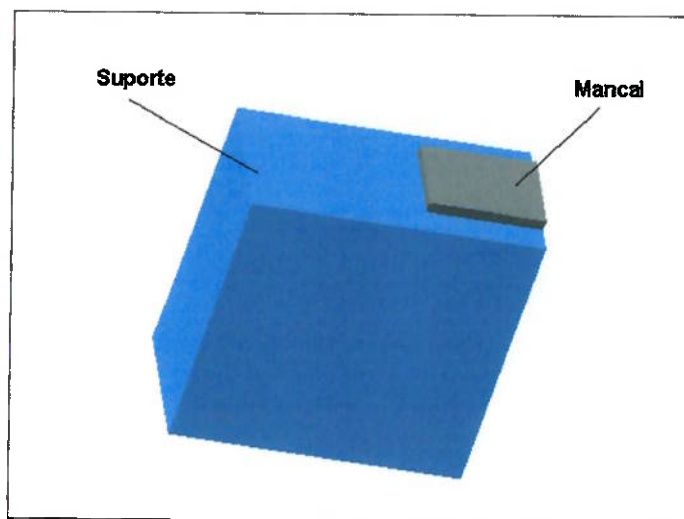


Figura 15– Esquema tridimensional do suporte

### 3.3.1 1º Passo – Modelagem física/matemática

No Anexo I discute-se a transformação de uma realidade física num modelo matemático e sua posterior passagem para o MEF. No caso deste exemplo a

proposta de problema já incluiu as hipóteses necessárias para esta conversão e apenas se está focando o procedimento adotado durante este trabalho.

### **3.3.2 2º Passo – Construção do modelo de sólido e exportação para o ansys**

Neste trabalho usou-se o MDT para as operações de CAD. O modelo necessário para o processamento deste exemplo é o da Figura 15. Para exportá-lo para o ANSYS deve-se gerar uma extensão .sat que pode ser conseguida através do comando AMACISOUT. Este comando permite que se exporte algumas entidades específicas (*parts, subassemblies ou 3D solids*) que serão salvas com o nome escolhido mais a extensão .sat no diretório definido no momento da exportação.

### **3.3.3 3º Passo - Pré-processamento**

As operações que se seguem são realizados dentro do ANSYS e maioria delas através da GUI (Graphic User Interface)

#### **➤ Importação do modelo de sólido**

É feita através do seguinte caminho localizado no Utility Menu:  
*File→Import→sat...*

#### **➤ Unindo os volumes**



O modelo criado no Mechanical Desktop é formado por dois volumes independentes, pois o processo de otimização deverá atuar apenas sobre o sólido que corresponde ao suporte e a inclusão do mancal deve-se apenas ao fato de que é nele que é aplicado o carregamento. O ANSYS possui várias ferramentas de modelagem de interface, mas para o resultado de interesse (otimização da topologia do suporte) pode-se considerar que ambos os volumes pertencem a um único sólido. A maneira de preservar a independência entre as partes mas fazê-las atuar como se fossem uma única peça é através do comando GLUE, que é acionado pela GUI através do seguinte caminho, localizado no Main Menu:

*Preprocessor → Modeling → Operate → Boolean → Glue → Volume,*

A partir da caixa de seleção pode-se escolher os volumes que serão unidos. Como só existem dois volumes pode-se clicar diretamente no botão "Pick All". Deve-se ressaltar que o comando GLUE só irá unir as peças que tiverem por intersecção uma superfície.

#### ➤ Seleção dos tipos de elementos

Para a otimização topológica de sólidos 3D o ANSYS oferece dois tipos de elementos diferentes: o SOLID92 e o SOLID95. O primeiro é um elemento tetraédrico de 10 nós que apresenta três graus de liberdade (UX, UY e UZ) e o segundo é um elemento prismático de 20 nós e com os mesmos graus de liberdade. Deve-se ressaltar que o ANSYS só irá otimizar as regiões do sólido

que forem formadas pelos elementos identificados como TYPE 1 (primeiro tipo a ser definido). Ou seja, para criar regiões não otimizáveis basta malhar estes espaços com elementos de ordem TYPE 2 ou maior. Deve ressaltar que em alguns casos a única diferença entre um elemento TYPE 1 e um TYPE 2 é o índice, já que ambos poderiam ser, por exemplo, tipo SOLID95. Isto é importante pois se poderia desejar malhar toda a estrutura com SOLID95 e a única maneira de criar regiões não-otimizáveis neste caso é usando-se este recurso. No suporte usar-se-á SOLID95 para a região otimizável e SOLID92 para a não-otimizável. A seleção se faz através do seguinte caminho, localizado no Main Menu:

*Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete*

Quando o formulário intitulado *Element Types* se abrir clicar *Add* e depois selecionar no formulário *Library of Element Types* a opção *Structural Mass Solid* e posteriormente na caixa mais a esquerda a opção 20node 95. Repetir o processo para acrescentar como TYPE 2 o elemento do tipo SOLID92.

#### ➤ Seleção das propriedades do material

Foi especificado que o material é aço com  $E = 210GPa = 210000 \frac{N}{mm^2}$  e  $\nu = 0.3$ .

O valor do módulo de elasticidade será dado em  $N/mm^2$  porque o desenho foi feito em milímetros. A entrada das propriedades do material se dá pelo seguinte caminho:

*Preprocessor* → *Material Props* → *Material Models* que abrirá o formulário *Define Material Model Behavior*. Neste formulário deve-se selecionar *Structural* → *Linear* → *Elastic* → *Isotropic* e preencher os campos EX (módulo de elasticidade) e PRXY (coeficiente de Poisson) com os valores já mencionados. Deve-se ressaltar que estas propriedades valerão para ambos os elementos selecionados (o TYPE 1 SOLID95 e o TYPE 2 SOLID92).

➤ Criando a Malha

Planejou-se criar a malha da região otimizável com elementos prismáticos. Assim sendo optou-se por gerá-la através do comando VSWEEP. Para isto é interessante estabelecer a quantidade de divisões que as linhas chaves do sólido devem conter. Faz-se isto porque desta forma se tem um controle preciso do tamanho e formato dos elementos. Para poder fazer a seleção de linhas e áreas com eficiência e precisão é interessante que se visualize a numeração que o ANSYS atribuiu a cada entidade. Isto pode ser feito através do Menu Utility, pelo seguinte caminho:

*PlotCtrl* → *Numbering* que abrirá o formulário *Plot Numbering Controls*. Ativar *Line numbers* e *Área numbers* clicando nos seus respectivos boxes.

Agora pode-se identificar mais facilmente as linhas e as áreas. A importância de se identificar as entidades reside no fato de que muitas vezes é necessário

verificar-se se a seleção foi feita corretamente. Com um zoom pode-se checar a identificação da entidade e no formulário de seleção aparece qual foi o último pick up. Assim tem-se certeza de que a seleção é mesmo a desejada. No *Utility Menu* tem-se a opção List que permite que se liste os parâmetros associados a todas as entidades do modelo MEF. É mais uma opção de checagem.

Para estabelecer-se a quantidade de divisões por linha, pode-se usar a ferramenta *MeshTool* que aparece no seguinte caminho do *Main Menu*:

*Preprocessor* → *Meshing* → *MeshTool*. No formulário *MeshTool* clicar no botão *Set* da opção *Lines*. Isto abrirá o formulário de seleção de linhas mostrado na Figura 16.

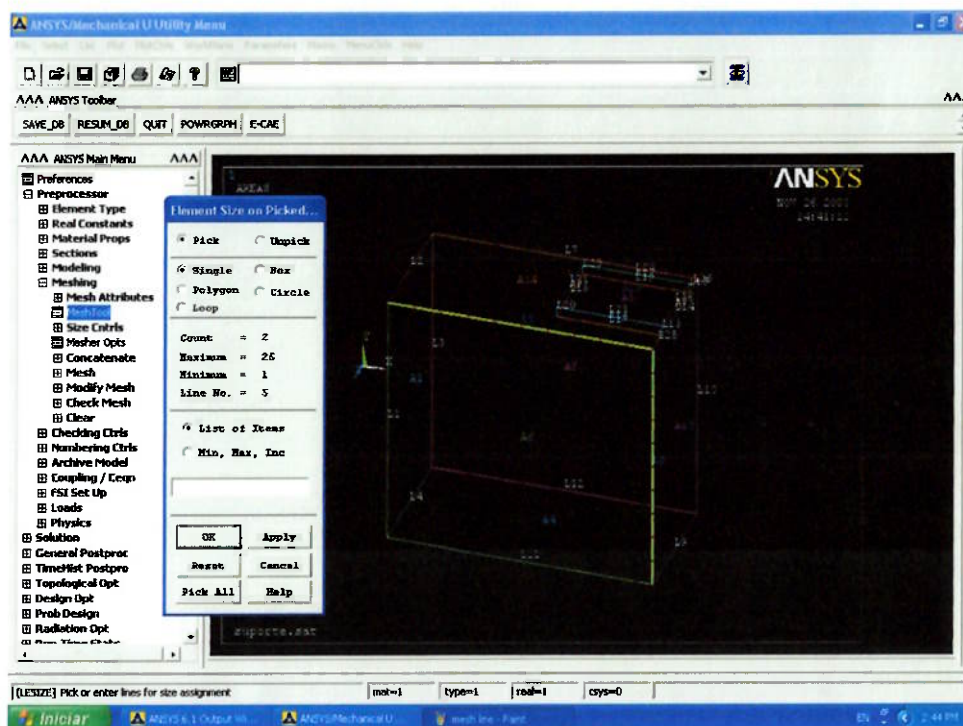


Figura 16 – Selecionando as linhas que se deseja formatar

Selecionar as linhas que se deseje dividir e clicar Apply. O software abrirá uma outra janela perguntando quantas divisões ou o tamanho máximo de cada divisão. Entrar formatação desejada.

Não é necessário estabelecer a quantidade de divisões para todas as linhas do sólido, pois o comando VSWEEP assumirá que linhas paralelas tem o mesmo número de divisões. Porém a presença do mancal de deslizamento pode provocar distorções que podem ser minimizadas se as linhas que o compõem forem devidamente formatadas. O VSWEEP também é acionado a partir da ferramenta MeshTool. Para a aplicação do comando VSWEEP deve-se setar as opções Hex e Sweep e clicar no botão Sweep, selecionar o volume que será malhado e clicar OK. O resultado pode ser visto na figura que se segue.

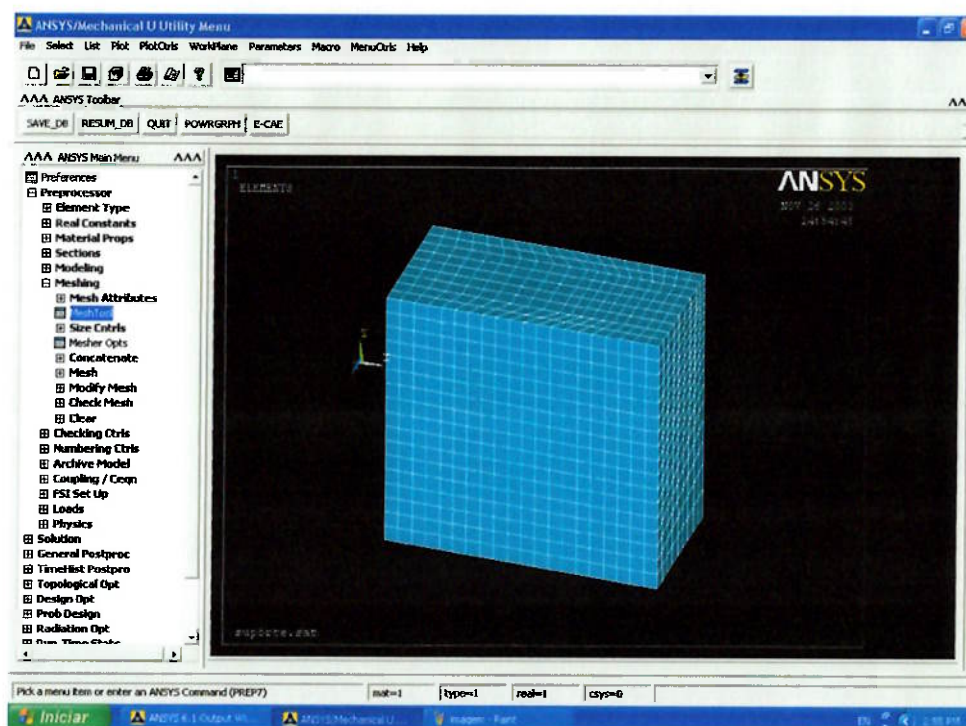


Figura 17– Elemento malhado com comando VSWEEP

Para criar-se a malha do mancal deve-se antes selecionar o *Element Type Number* correto, no caso o 2. Isto também é feito através da ferramenta *MeshTool* no botão Set da área *Element Attributes*.

Após selecionar o tipo, ativar *Smartzing* e selecionar o refinamento desejado, clicar no botão *Mesh* para criar a malha do Mancal. A malha completa pode ser vista na figura que se segue.

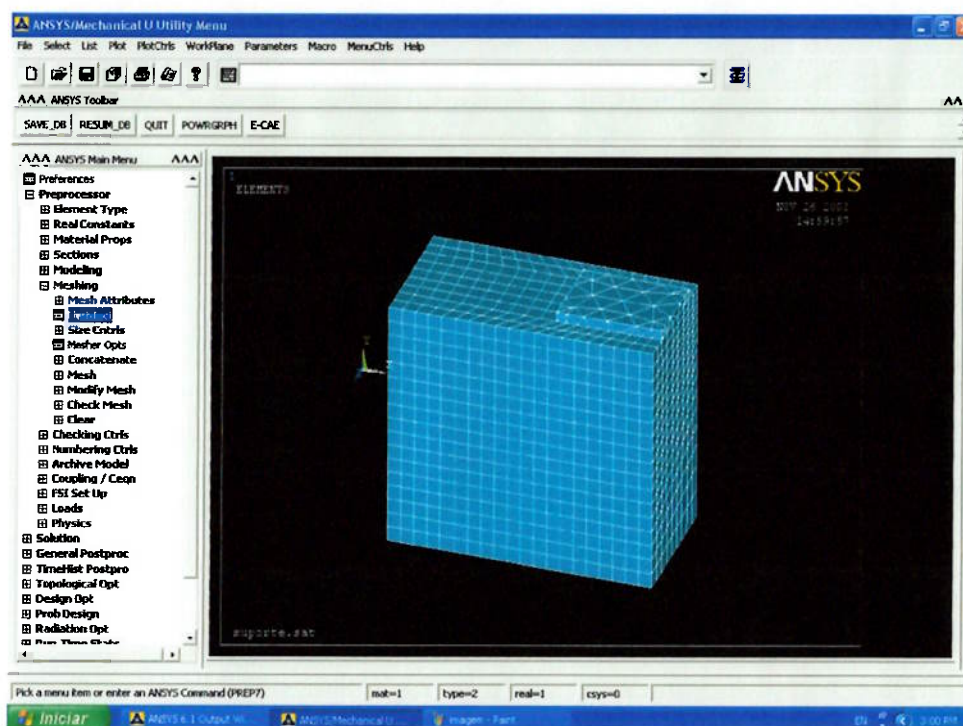


Figura 18 – Sólido com a malha completa

#### ➤ Condições de suporte e carga

Para concluir-se o pré-processamento é necessário definir-se as condições de suporte e as cargas que atuam sobre a estrutura. No caso tem-se que a

mesma é engastada pelo seu lado esquerdo e tem uma pressão aplicada sobre seu mancal. A aplicação do engastamento (condição em que todos os pontos tem deslocamento nulo) é feita através do Main Menu pelo seguinte path:

*Preprocessor → Loads → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On areas.* Conforme ilustrado na figura que se segue. Após a seleção da área deve-se selecionar quais os movimentos serão restritos e qual o valor da restrição. No presente caso todos as restrições tem valor igual a zero.

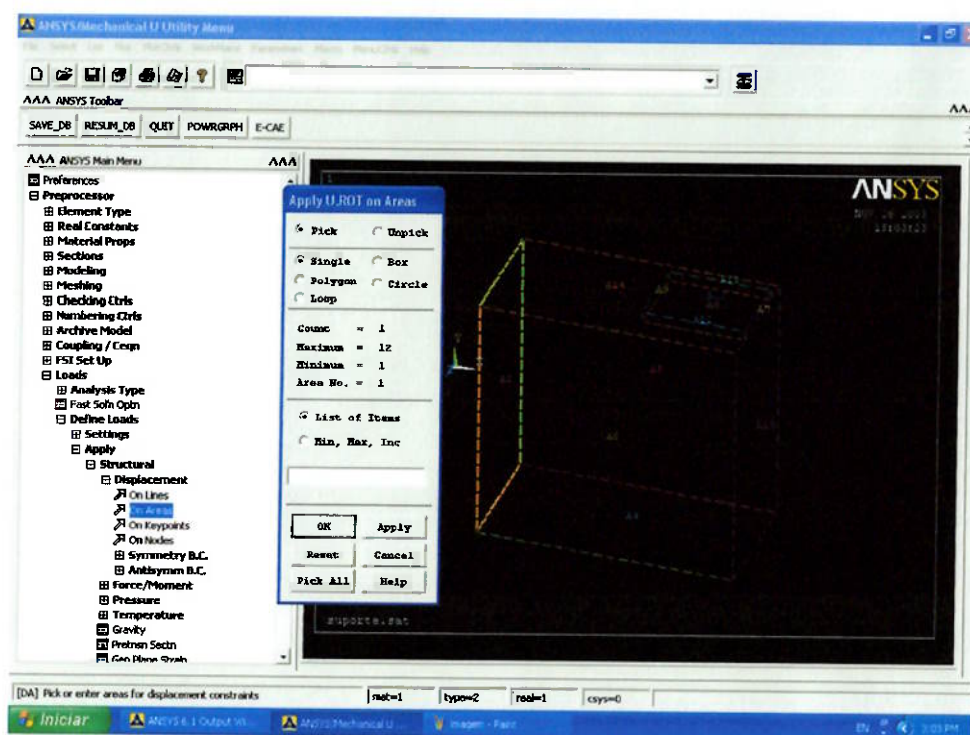


Figura 19 – Selecionando a área engastada

Para a aplicação da carga o procedimento é análogo. Muda-se um pouco o path:



*Preprocessor → Loads → Define Loads → Apply → Strutural → Pressure → On areas.* Neste caso selecionar o valor correto da carga que é de 1 N/mm<sup>2</sup>. Com esta operação encerra-se o pré-processamento

### **3.3.4 4º Passo – Processamento**

Para o tipo de otimização pretendido, máxima rigidez/menor peso, precisa-se apenas selecionar a porcentagem de volume que se quer reduzir, a quantidade máxima de interações e a tolerância de convergência. Isto é feito através dos paths:

*Topological Opt → Set Up → Basic Opt*

e

*Topological Opt → Set Up → Run*

No primeiro caminho se seleciona a porcentagem de redução de volume e no segundo os outros parâmetros, conforme ilustrado na figura que se segue. Após o Ok o software inicia o processo de otimização.



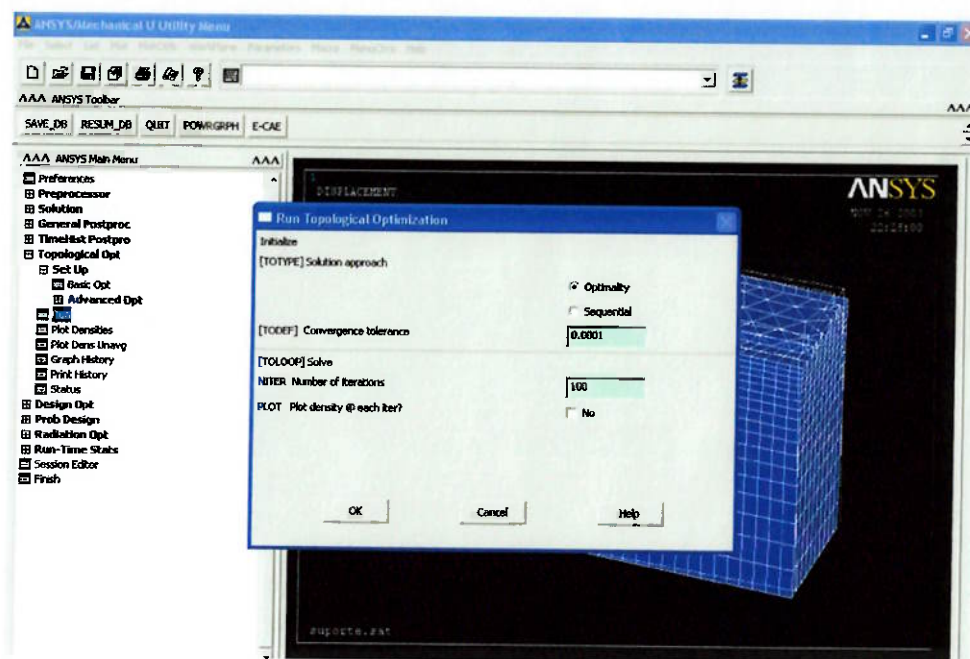


Figura 20 – Tela da otimização topológica

### 3.3.5 5º Passo – Pós-processamento

O ANSYS possui inúmeras rotinas e possibilidades de pós-processamento. As mais interessantes são os filtros e seções. Os primeiros permitem que se escolha só os valores de interesse, como por exemplo, mostrar os elementoses que apresentem densidades maiores que 0.9. O segundo tipo permite que se corte a peça segundo um plano pré-definido e que se veja sua seção. Através do seguinte path pode se visualizar as densidades da solução final:

*Topological Opt → Set Up → Plot Densities*

O resultado pode ser visualizado na figura que se segue.

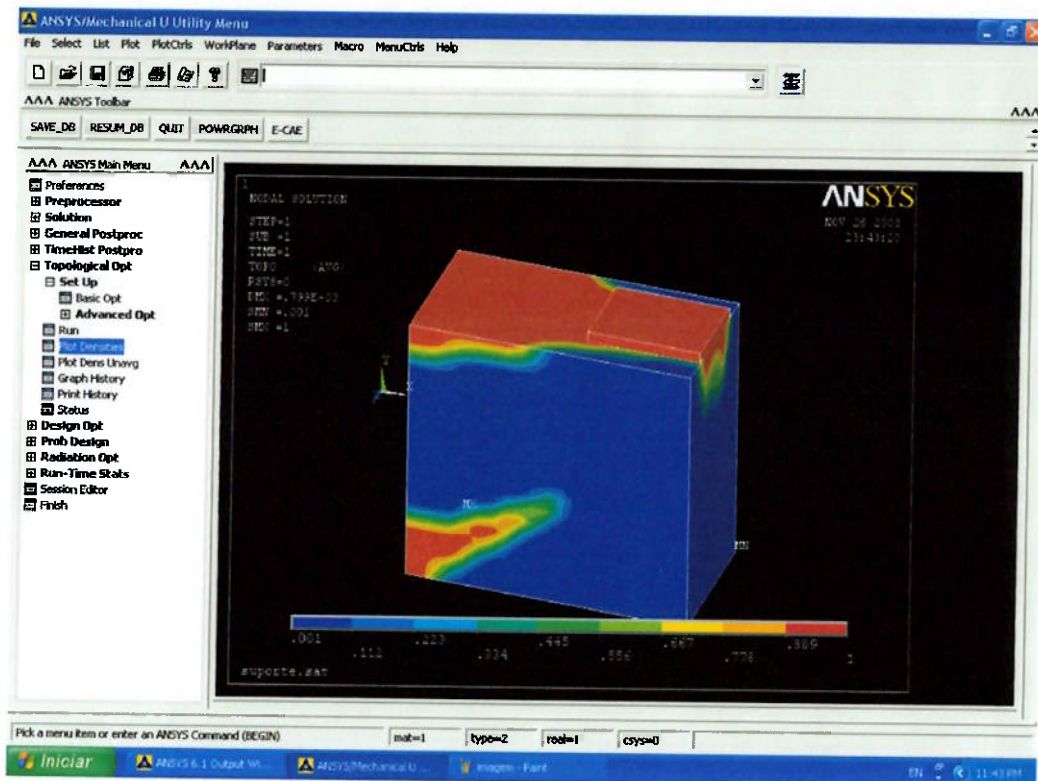


Figura 21 – Plotando as densidades

Na Figura 21 não se consegue extrair as informações de interesse. Através do uso de um filtro pode-se visualizar apenas as densidades maiores do que 0.9. O filtro pode ser criado a partir do prompt de comando digitando-se as seguintes operações:

ETABLE, EDENS, TOPO

ESEL, S, ETAB, EDENS, 0.9, 1.0

EPLLOT

O resultado destes comandos pode ser visualizado na figura que se segue.

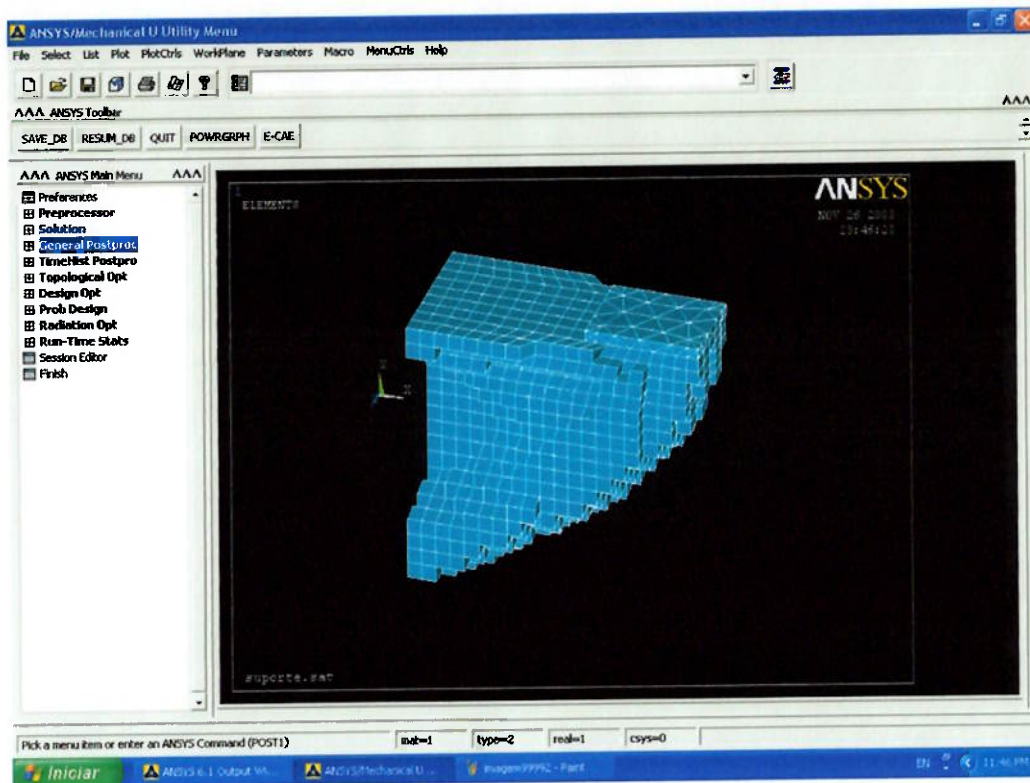


Figura 22 – Filtro para densidades maiores que 0.9

Os resultados para esta simulação podem ser assim resumidos:

Nº de elementos:

Solid95 : 3060

Solid92 : 250

Nº de equações : 42549

Nº de interações : 32

Deformação máxima : 0,799  $\mu\text{m}$

Tempo de simulação : aproximadamente 64 minutos

### 3.3 Modelamento

### 3.3.1 Caracterização da Estrutura Original

Internamente a pinça original possui uma serie de reforços como pode ser visto na Figura. Solda-se ao esqueleto que é mostrado nesta figura duas placas de aço de 10 mm de espessura e o design resultante é aquele que pode ser visto na Figura.

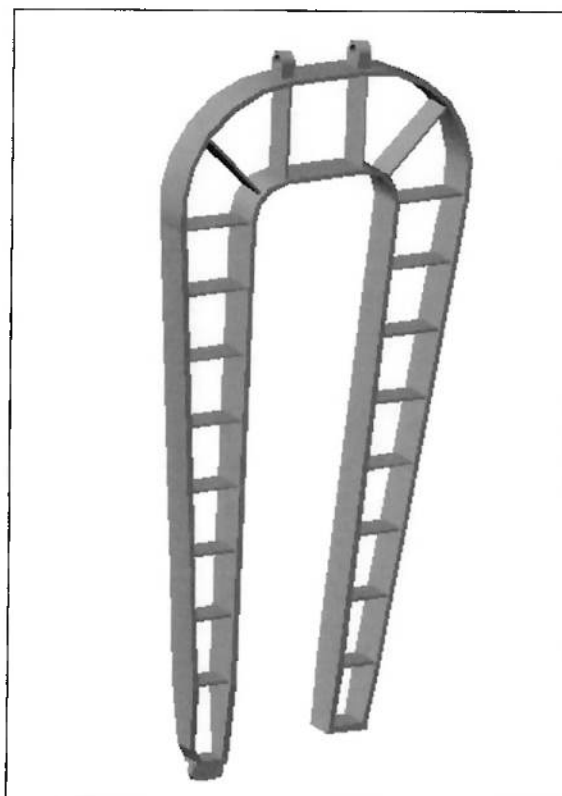


Figura 23 – Visão interna da Pinça Original

As placas laterais aonde são soldados os reforços possuem 19 mm de espessura, valor que é mantido constante em todas as seções da peça. Para a redução de peso foram feitos vários alívios na placa de 10mm que também tem espessura constante.

### 3.3.2 Condições de contorno e carregamento

Para a transformação deste modelo de CAD num modelo de MEF é importante conhecer e modelar corretamente as condições de contorno e de carregamento. Como pode ser observado na Figura a pinça é suportada por um eixo ligado a dois mancais e somente inércia e atrito impedem que pinça gire ou se desloque sobre o eixo. Ou seja, pode-se modelar a ação do suporte como simplesmente impedindo o movimento na direção do eixo y, que está alinhado com a direção da gravidade.

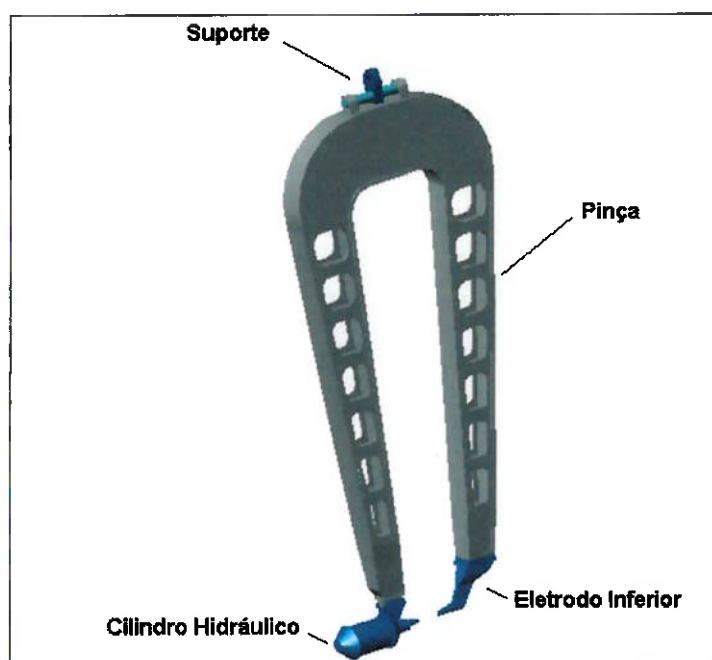


Figura 24 - Pinça para solda a ponto (reprodução da Figura 1)

Com relação ao carregamento, existe uma única força que tem direção do eixo do cilindro hidráulico e sentido oposto ao de avanço do pistão, ou seja, tenta abrir a pinça.

Para se considerar essas condições de contorno e carregamento, ou se criar o modelo MEF para a pinça fez-se as seguintes adaptações:

- Retirou-se o cilindro e prolongou-se a estrutura da pinça, criando um “aplicador de carga” de modo que a transmissão de esforços para a estrutura fossem preservados.
- Modelou-se o ação do suporte como sendo uma linha que apresenta  $U_Y=0$  (apoio simples).

### **3.3.3 Domínio Fixo Extendido**

Como domínio inicial, escolheu-se o menor volume convexo que poderia envolver toda a peça. Um aumento do DFE poderia propiciar um resultado melhor, mas optou-se por um projeto mais conservador, já que não se sabia o quanto se poderia aumentar o DFE.

### **3.3.4 Simetria**

Ao se modelar a estrutura considerou-se dois planos de simetria, pois assim pode-se aplicar o MOT a um volume que é apenas 25% do original, obtendo-se assim uma grande economia de custo computacional.

### **3.3.5 Processo de Síntese**

A massa inicial da pinça era de 102,9 Kg, a do DFE era de 375,4 Kg e o objetivo era se chegar numa estrutura final com cerca de 50 Kg, o que representaria uma redução de volume 87%. Sabendo-se que reduções nesta faixa levam a estruturas treliçadas e que o modelo em MEF teria que ter um número muito grande de elementos para que os mesmos fossem representativos do problema, optou-se por fazer a otimização em etapas.

## 4 RESULTADOS

A não ser que haja menção em contrário, os resultados mostrados neste capítulo se referem a 25% da estrutura, pois os modelos foram criados considerando-se dois planos de simetria (ver explicação no capítulo anterior).

### 4.1 Avaliação da Estrutura Original

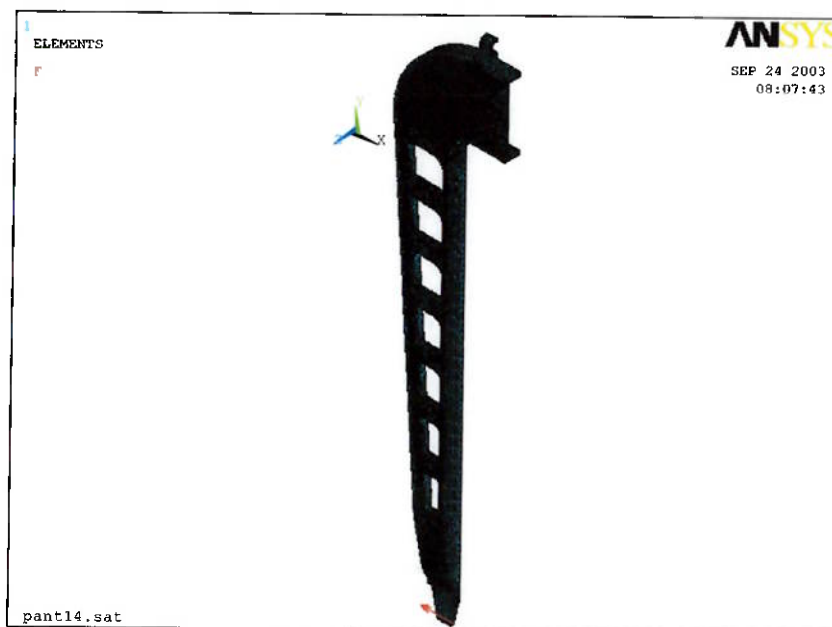
Massa inicial : 102,9 Kg

Objetivo da simulação : verificar qual a deformação máxima na direção  $x$

Quantidade de partições : uma única

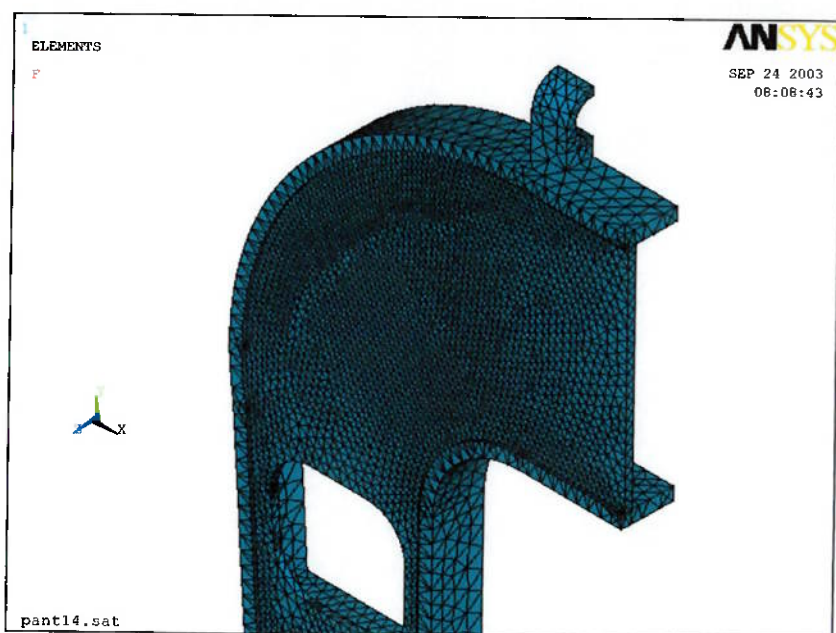
Elemento(s) utilizado(s) : solid95

Malha : free mesh com smart size tamanho 4 (ver Figuras 18 e 19).



**Figura 25** – Malhamento da estrutura original





**Figura 26** – Detalhe do malhamento

Quantidade de elementos : 48649 SOLID95

Quantidade de nós : 96994

Quantidade de equações : 286930

Deformação máxima : 3,4 mm (ver Figura 20)

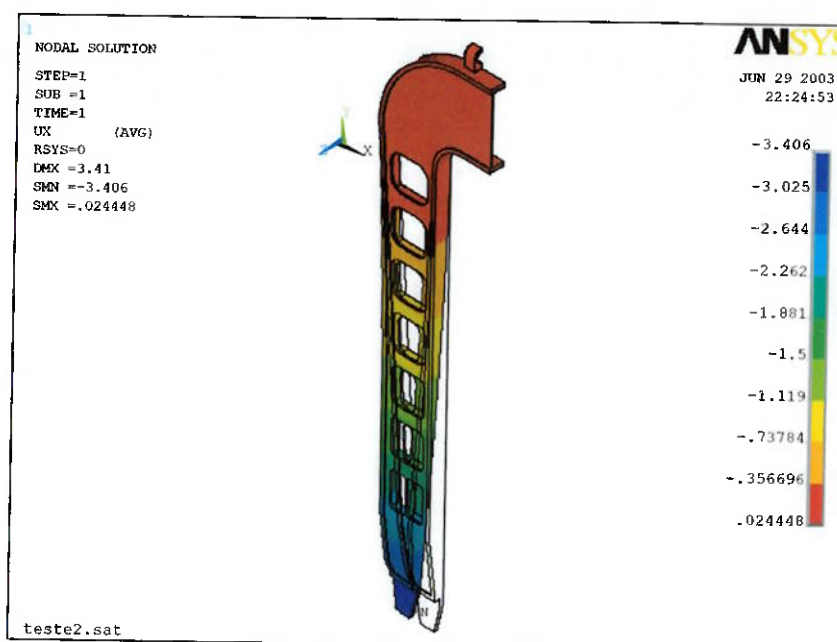


Figura 27 – Deformação da pinça original. Valores em mm

## 4.2 Processo de Otimização

Como já foi mencionado a otimização foi feita em etapas. Pode-se dizer que as três primeiras etapas tiveram um papel mais qualitativo e a 4ª e última etapa foi a que realmente definiu a topologia da estrutura. Isto ocorreu porque as otimizações iniciais tiveram o papel de definir qual seria o domínio DFE da última interação. Assim sendo, a grande preocupação nos estágios iniciais era de que se pudesse retirar material de alguma região que criasse um para a próxima etapa. Ou seja, somente na 4ª interação é que se ousou alterar drasticamente a topologia da estrutura.

### 4.2.1 As três primeiras etapas

## 1º Etapa

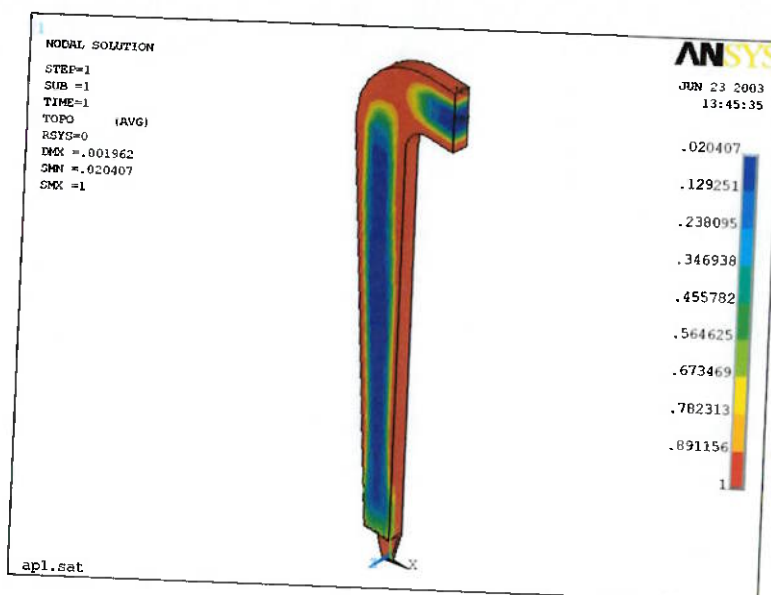


Figura 28 – Detalhe do resultados da otimização para a 1ª Etapa

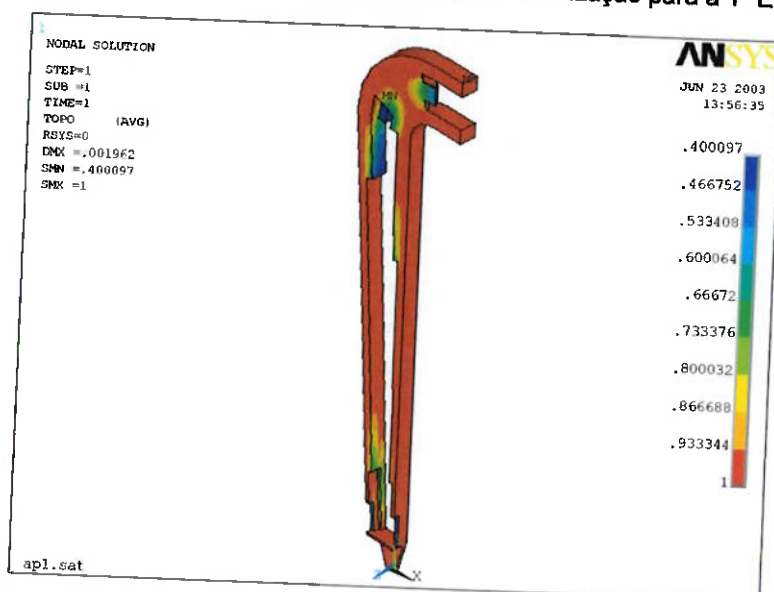


Figura 29 – Detalhe do resultados da otimização para a 1ª Etapa

Esta aproximação mostrou que o material do centro do sólido era o mais dispensável. Por entender-se que faltava uma conexão entre as chapas laterais, fez-se a próxima interação mantendo material ligando as abas.

## 2ª Etapa

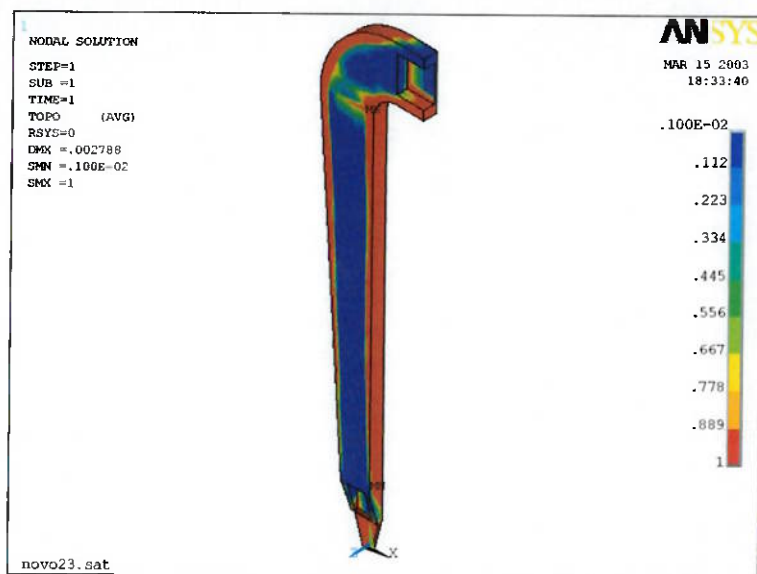


Figura 30 – Detalhe do resultados da otimização para a 2ª Etapa

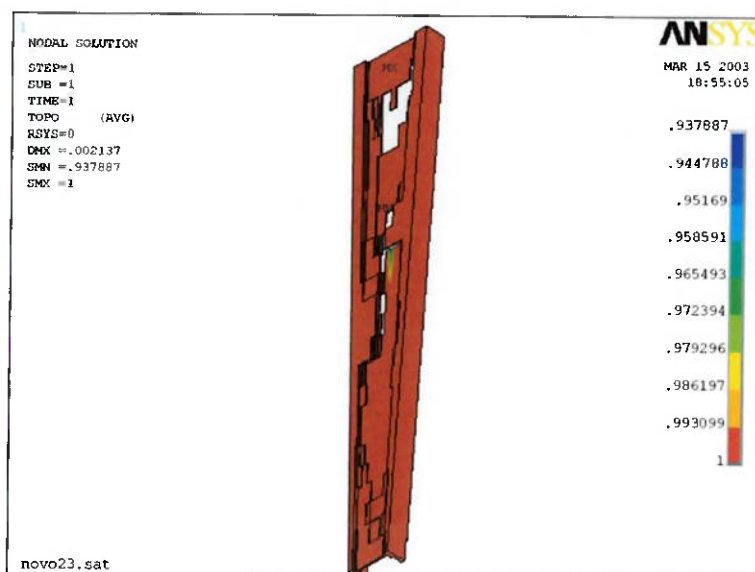


Figura 31 – Detalhe do resultados da otimização para a 2ª Etapa

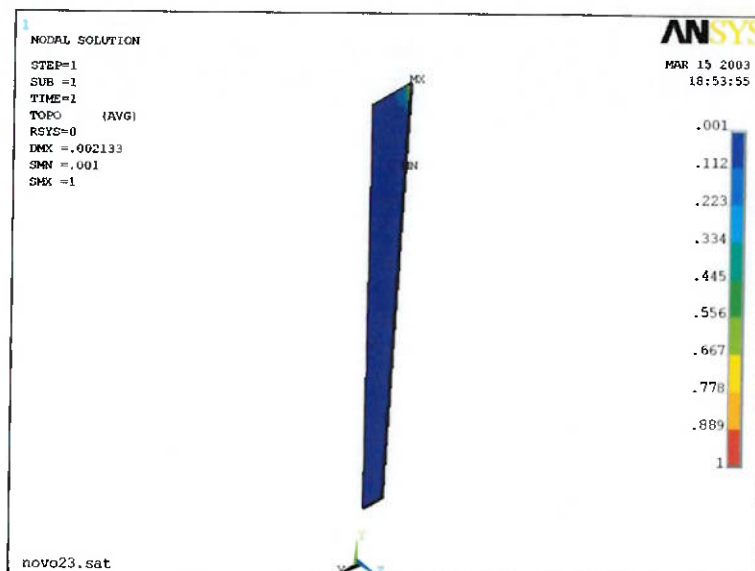


Figura 32 – Detalhe do resultados da otimização para a 2ª Etapa

Esta etapa afinou um pouco as paredes laterais e serviu para definir que era mais importante manter o material no plano de simetria. A chapa azul (densidade muito baixa) na Figura mostra isso claramente. Agora faltou definir se deve-se ter mais material na curva. Este problema foi resolvido pela terceira etapa.

### 3ª Etapa

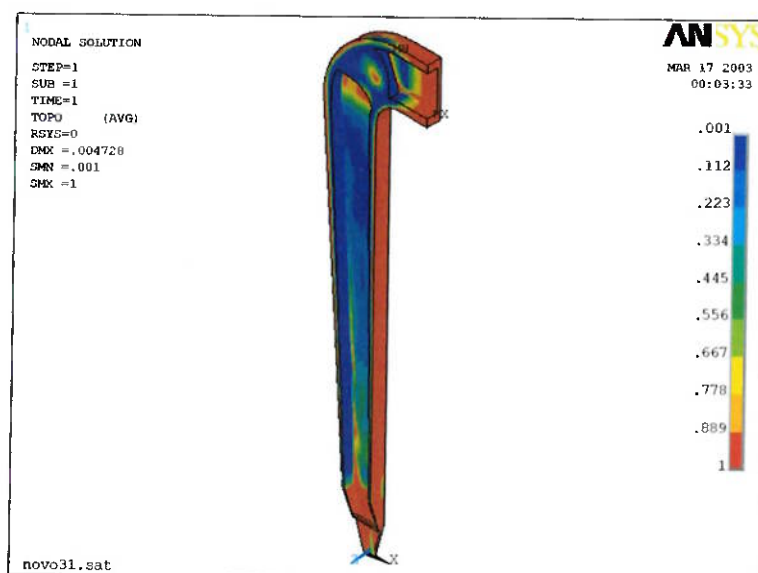


Figura 33 – Detalhe do resultados da otimização para a 3ª Etapa

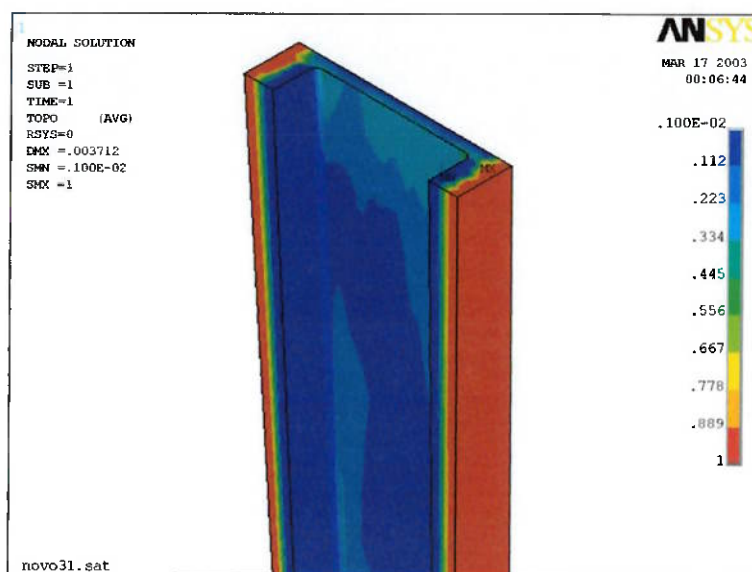


Figura 34 – Detalhe do resultados da otimização para a 3ª Etapa

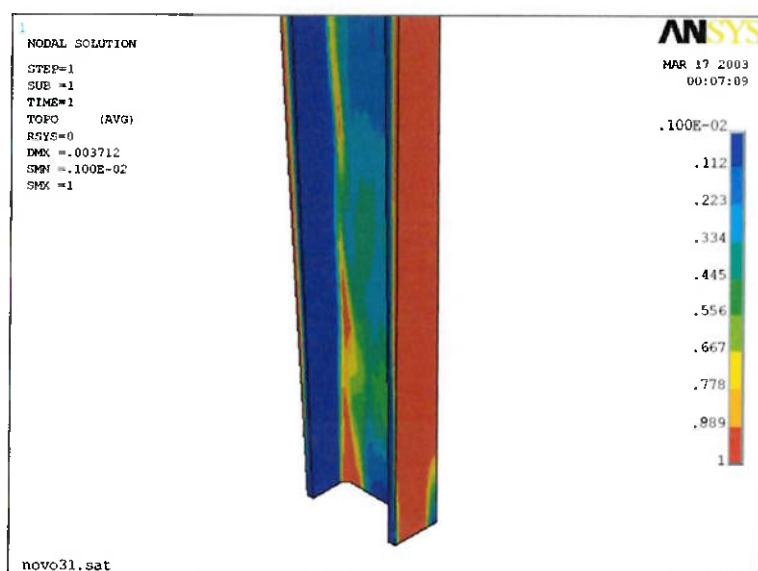


Figura 35 – Detalhe do resultados da otimização para a 3ª Etapa

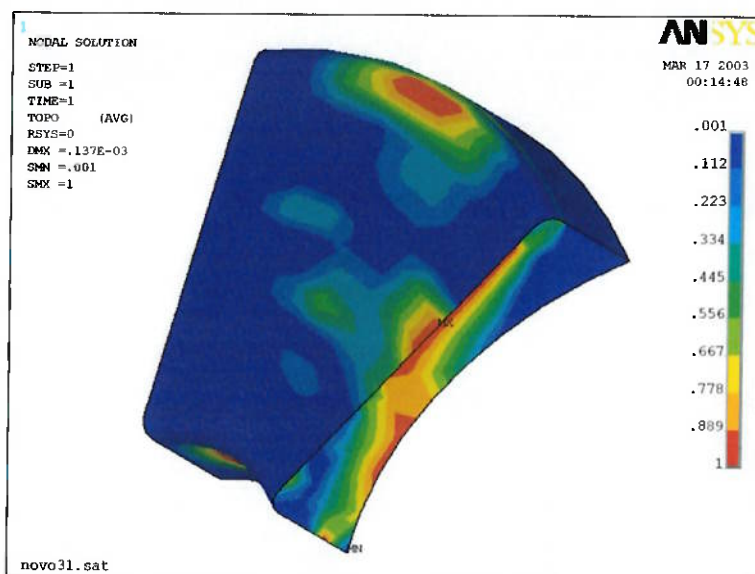


Figura 36 – Detalhe do resultados da otimização para a 3ª Etapa

#### 4.2.2 A 4ª Etapa

Massa inicial : 84,6 Kg

Objetivo da simulação : otimizar a estrutura

Quantidade de partições : duas

Elemento(s) utilizado(s) : SOLID95 e SOLID92

Quantidade de elementos : 51308 (48649 SOLID95 e 2659 SOLID92)

Quantidade de nós : 101735

Quantidade de equações : 297430

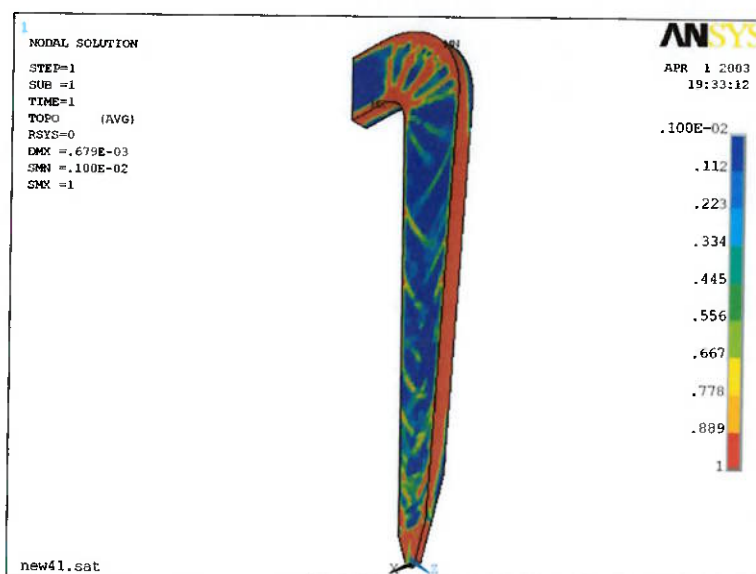


Figura 37 – Detalhe do resultados da otimização para a 4ª Etapa

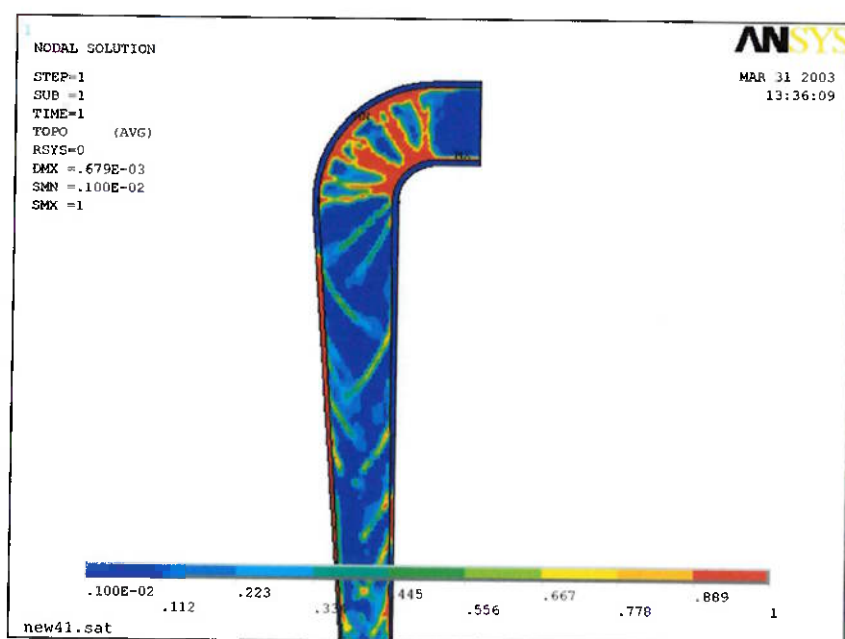


Figura 38 – Detalhe do resultados da otimização para a 4ª Etapa



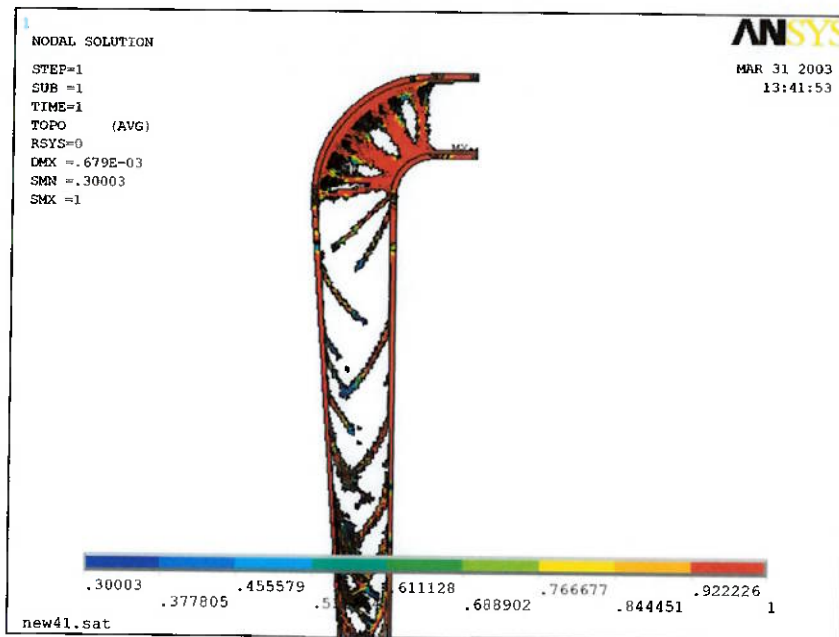


Figura 39 – Detalhe do resultados da otimização para a 4ª Etapa

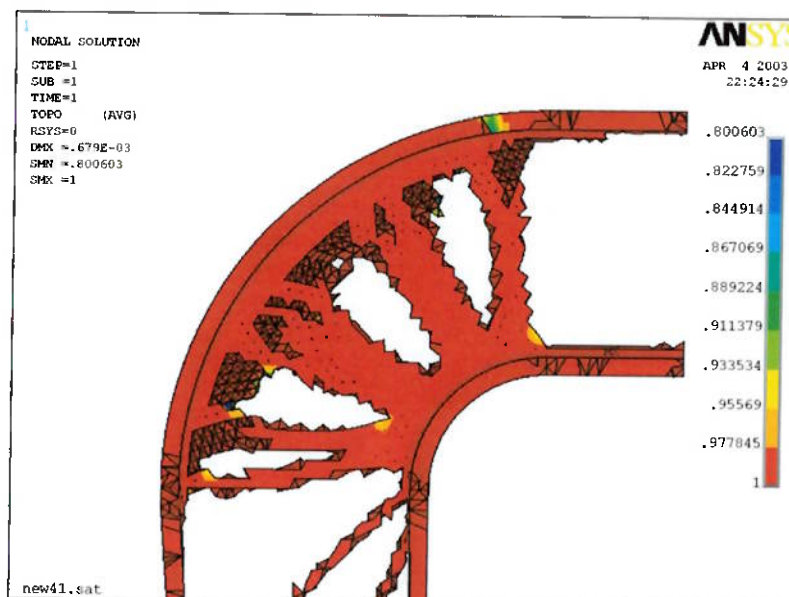


Figura 40 – Detalhe do resultados da otimização para a 4ª Etapa

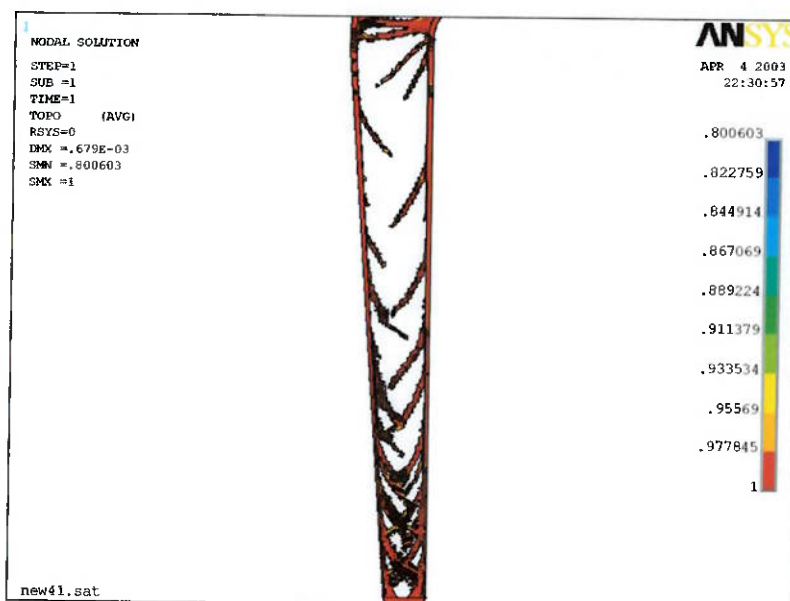


Figura 41 – Detalhe do resultados da otimização para a 4ª Etapa

### 4.3 Avaliação da Estrutura Otimizada

Massa inicial : 55,6 Kg

Objetivo da simulação : verificar qual a deformação máxima na direção  $x$  e qual a máxima tensão pelo critério de Von Mises

Quantidade de partições : uma única

Elemento(s) utilizado(s) : SOLID95

Malha : free mesh com smart size tamanho 4 (ver Figuras a e b).

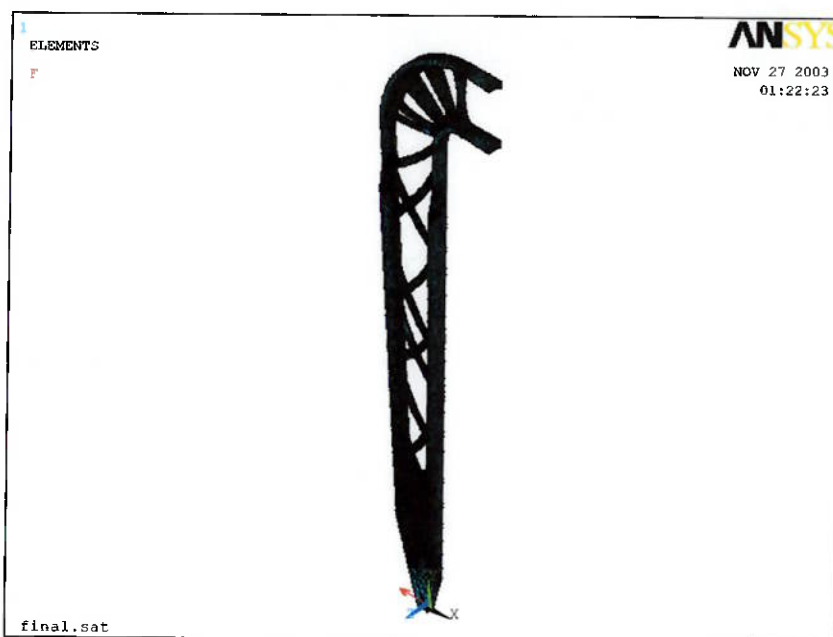


Figura 42 – Malhamento da estrutura otimizada após adequação para a fabricação

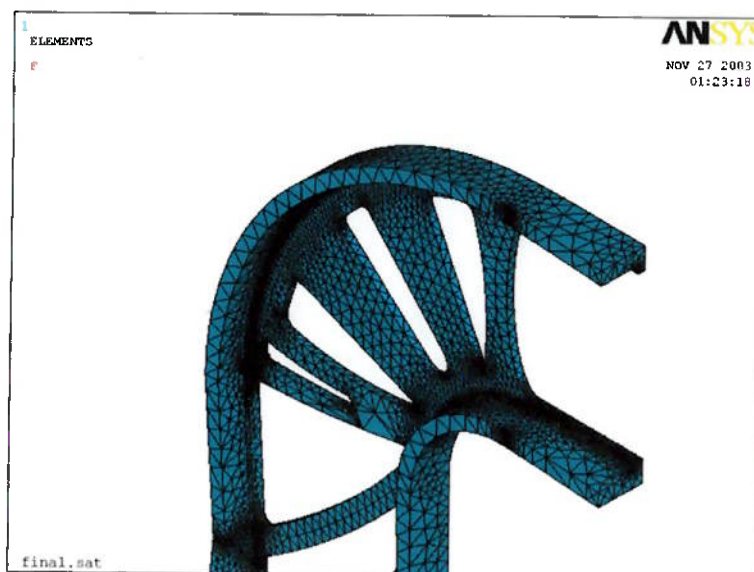


Figura 43 – Detalhe do Malhamento

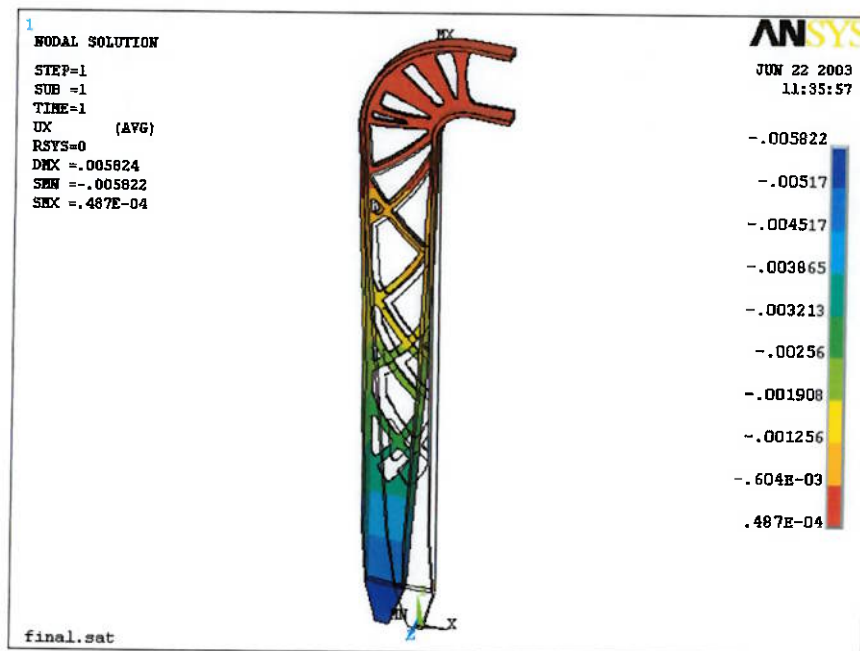


Figura 44 - Deformação da Estrutura Otimizada – valores em m

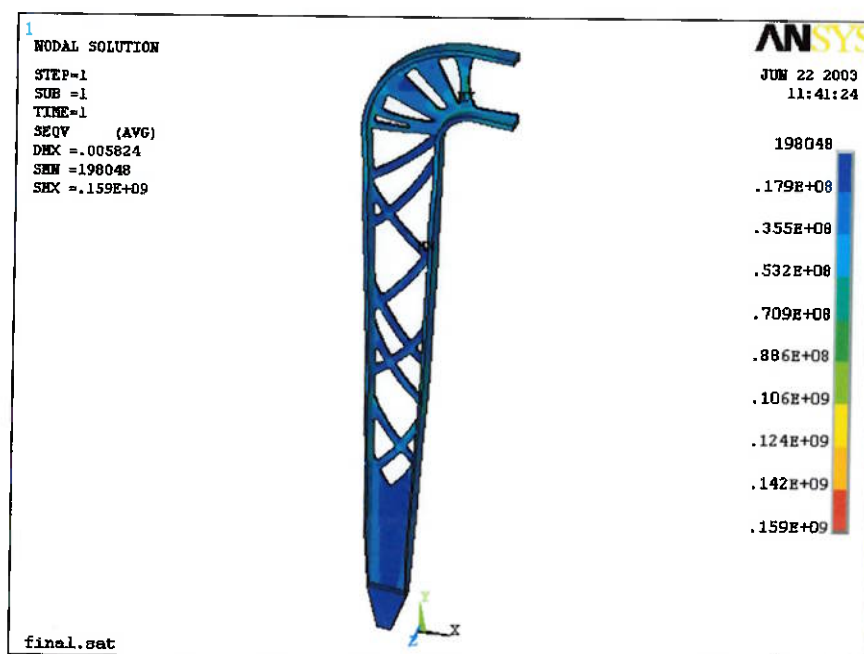


Figura 45 – Tensão pelo Critério de Von Mises – Valores em Pa

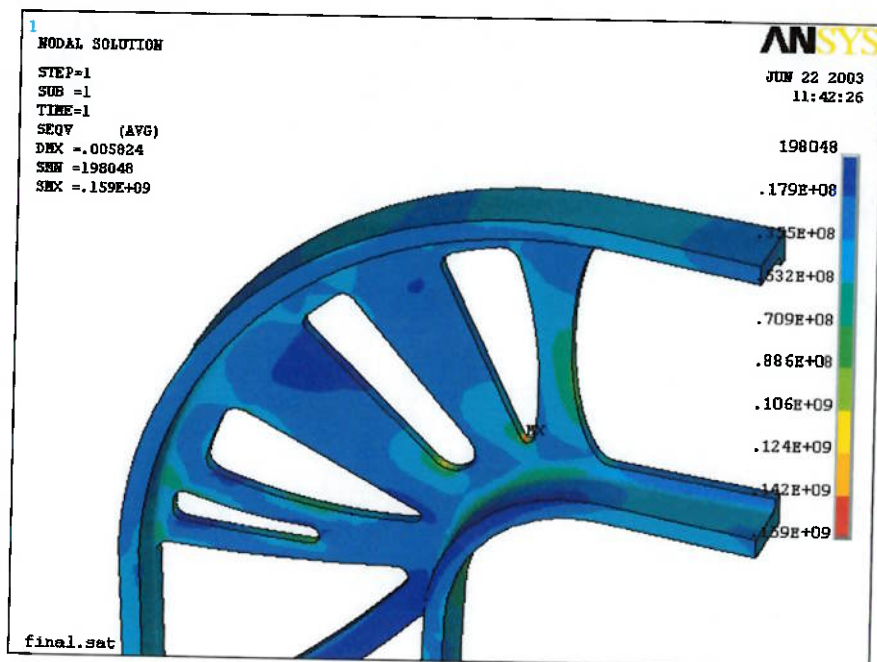


Figura 46 – Detalhe da região com maiores tensões

## **5 DISCUSSÃO**

### **5.1 Limitações de hardware**

Todas as otimizações demoraram mais de 10 horas para serem concluídas, sendo que a quarta e última, demorou cerca de 27 horas. Entende-se que uma substituição no hardware poderia reduzir bastante os tempos de processamento, o que também viabilizaria o uso de malhas com maior quantidade de elementos propiciando resultados mais precisos. Entre as principais melhorias de baixo custo que poderiam ser feitas pode-se citar:

- a troca do processador ATHLON XP por um Pentium IV de maior ou até mesmo igual clock, pois as CPUs da Intel costumam apresentar um desempenho superior neste tipo de aplicação.
- Uso de memória RAM com mais qualidade e em maior quantidade, ou seja, substituição de 512 MB de pentes SDRAM 133 MHz pó, pelo menos 256 MB de memória DDR com maior frequência (266, 333 ou 400).
- Uso de um HD adicional unicamente para se fazer swap de memória. Este HD deveria estar vazio e seria usado apenas como região de swap, pois neste caso a escrita e a leitura seriam mais rápidas.

### **5.2 Particularidades do software**

A ANSYS Inc, assim como outras empresas fortes no mercado de softwares de elementos finitos, criou o pacote de Otimização Topológica muito mais para não perder clientes do que para conquistar novos. Assim sendo, o pacote da ANSYS é uma adaptação que aproveitou muito do que já existia sendo pouco ousada e bastante limitada em relação aos solvers, modelos de material e recursos para OT disponibilizados. Como exemplo destas limitações pode-se citar:

- Pouca variedade de tipos de elementos. Além disso, para resolver o problema de instabilidade de tabuleiro o software se utiliza de elementos com muitos nós, o que aumenta o custo computacional das simulações. Os elementos que foram usados neste trabalho, Solid92 e Solid95, tinham, respectivamente, 10 e 20 nós.
- Impossibilidade de se escolher o modelo de material
- Para o modelo de material que o software usa (SIMP) não existe a possibilidade de se escolher o valor da função peso (parâmetro  $p$ , conforme visto no item 2.3.3). Sabe-se que valores pequenos de  $p$  permitem o aparecimento das escalas de cinza enquanto que valores muito grandes podem induzir a uma convergência rápida, e esta tem grande probabilidade de ocorrer para um mínimo local.

Além destas limitações, outra dificuldade que se teve que enfrentar foram os travamentos. Ainda que estes possam ocorrer por fatores externos ao ANSYS, podendo ser causados pelo hardware ou pelo sistema operacional (no caso o Windows XP Pro), acredita-se que os mesmos tenham origem na não-

homogeneidade do malhamento, em imperfeições ou limitações do algoritmo de otimização, no mal-condicionamento do problema ou em singularidades surgidas entre uma interação e outra. Para algumas das simulações em que houve travamento, tentou-se rodar novamente a otimização sem que nada fosse alterado e observou-se que a parada ocorria na mesma interação. Isso mostra que a falha não é aleatória e está relacionada com a formulação ou técnica de resolução do problema. Quando havia um travamento uma, duas ou combinação das seguintes técnicas era utilizada:

- Diminuição da restrição de volume
- Refinamento do malhamento
- Alteração do sólido, de modo a suavizar as mudanças de seção.
- Relaxação da tolerância de convergência.

Deve-se ressaltar que a diminuição tolerância de convergência influência no aparecimento de escalas de cinza e também reduz a quantidade de interações necessárias para se chegar a solução. Diminuir neste caso significa relaxar, pois na verdade o valor cresce, ou seja, poderia passar de 0.0001 para 0.001. Nas figuras que se seguem ilustra-se esta situação, onde para uma tolerância de 0.0001 obteve-se resultado após 32 interação e para 0.001 após 8 interações. Observar que os resultados são ligeiramente diferentes. Assim sendo é necessário que se use este recurso criteriosamente.



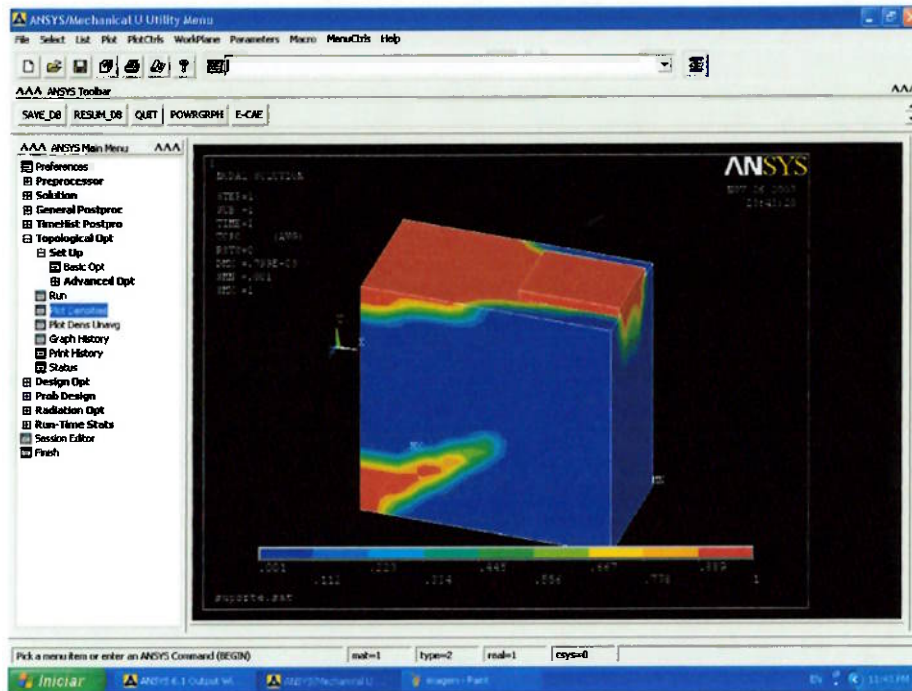


Figura 47 - Densidades no suporte otimizado com tol de 0.0001



Figura 48 - Suporte otimizado com tol 0.0001. Densidades maiores que 0.9

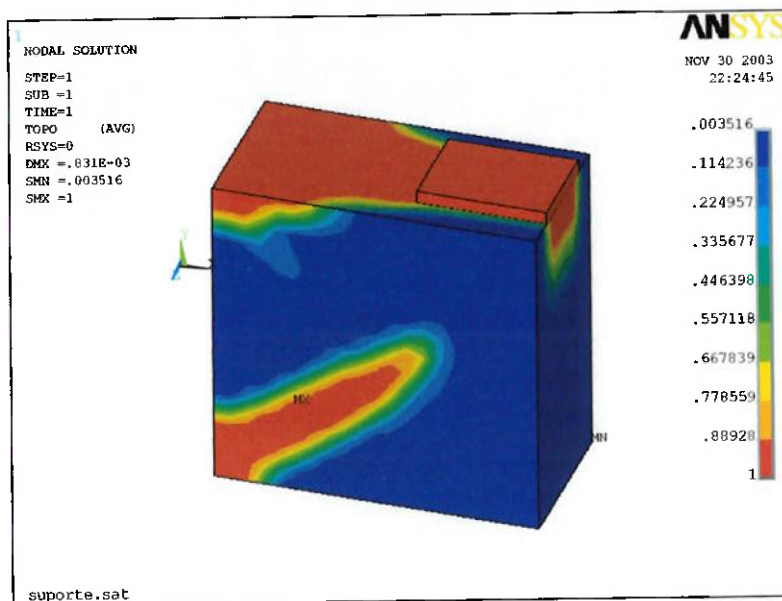


Figura 49 - Densidades no suporte otimizado com tol de 0.001

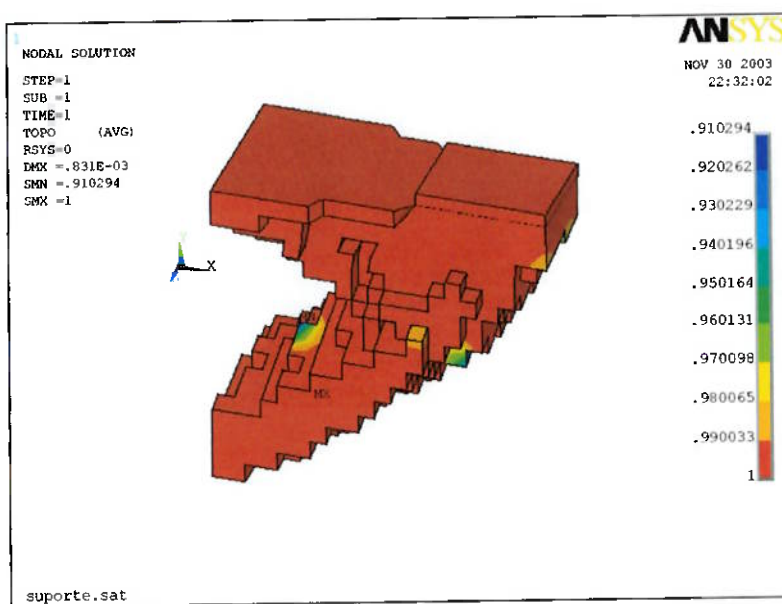


Figura 50 - Suporte otimizado com tol 0.001. Densidades maiores que 0.9

Usou-se este recurso nas primeiras otimizações que tinham a função de determinar o domínio da simulação final. É por este motivo que se foi muito conservador nas regiões em que se retirava material nestas etapas.

### 5.3 Dificuldades de malhamento

É recomendável que malha seja o mais homogênea possível, pois assim diminui-se a possibilidade de tratamentos e facilita-se o processo cálculo computacional. Mas para o caso de estudado, devido ao tamanho da estrutura, para se obter uma malha homogênea que seja representativa, ter-se-ia que escolher elementos com volumes tão pequenos que a quantidade dos mesmos tornaria o processo de otimização inviável. Além disso, para as duas etapas finais, em que a estrutura tem seção com forma de "U" ("I" se considerar toda estrutura e não apenas  $\frac{1}{4}$  como explicado no item 3.3) desejar-se-ia um malhamento diferente para as abas e para o corpo. Nas abas o que se deseja é que os elementos facilitem a determinação da espessura ideal e neste caso eles deveriam ser quase laminares, ou seja, seria desejável que tivessem comprimento maior que a largura e ambos bem maiores que a espessura. Já para a região central, em que se espera obter vazios, elementos com formato prismático ou tetraédrico seriam recomendados. Uma dificuldade adicional é a relação entre as dimensões que definem a estrutura, ou seja, um raio de 10 mm numa estrutura de 2500 mm, é proporcionalmente muito pequeno e sua caracterização obriga a adoção de elementos menores nas regiões que os contém. E os raios de concordância são uma obrigatoriedade porque senão a possibilidade de travamento aumenta muito. Para se evitar o problema da heterogeneidade do malhamento realizou-se a terceira etapa com elementos laminares, para determinar-se as espessuras, e a quarta com elemento tetraédricos, para checar-se aos vazios, conforme ilustrado no capítulo 4.

#### **5.4 Fabricalidade da estrutura final e da sintetizada**

A estrutura original, conforme ilustrado no item 3.3, é composta por dezenas de peças. São muitos reforços e todos eles de tamanhos diferentes. Após a soldagem deste nas abas laterais, monta-se as placas centrais que possuem vários alívios trapezoidais, conforme pode ser visto no Capítulo 3. A grande quantidade de peças deve ser fabricada e unida com precisão, já que dependendo dos erros envolvidos pode-se gerar uma estrutura irregular com regiões onde pode haver grande concentração de tensão. A estrutura sintetizada é composta por duas abas e uma placa central. Apesar destas peças terem seção variável, e forma complexa a fabricação do conjunto como um todo é muito mais fácil, rápida e precisa que a da pinça original. Os vazios da placa central não são tão precisos que se faça necessário o uso de uma máquina CNC. Pode-se desenhar os rasgos sobre a placa e usina-los numa fresadora convencional, ajustando conforme a marcação. Neste caso estima-se que uma precisão de mais ou menos 1 mm seja suficiente. Assim sendo, a estrutura otimizada pode ser facilmente fabricada por fresagem e soldagem em máquina convencionais.

#### **5.5 Tempo de simulação**

Gastou-se com as quatro etapas de otimização aproximadamente 60 horas. Já o tempo gasto gerando sólidos, criando as malhas, testando, refazendo e reprojetando a soma, se considerar-se também o tempo perdido com aquelas simulações que travaram, cerca de 200 horas! Ou seja, gastou-se muito mais tempo com a preparação do que com a otimização propriamente dita. Isto mostra que a OT exige, além de recursos computacionais, experiência com elementos finitos e conhecimentos sobre o método e sobre o software utilizado, pois só assim poderia minimizar ou até mesmo evitar os tempos perdidos com travamentos e com simulações que geraram resultados de pouca utilidade.

## 6 CONCLUSÕES

Qualitativamente falando o objetivo deste trabalho era o de melhorar uma estrutura já existente: a da pinça para solda a ponto. Quantitativamente esperava-se uma redução de massa da ordem de 50% e a manutenção da deformação máxima em valores inferiores a 8,0 mm. Paralelamente se esperava que esta nova estrutura fosse fabricável pelos processos tradicionais de confecção mecânica. A diminuição de peso foi de 46% e ainda que este valor tenha ficado um pouco abaixo da meta estabelecida, o resultado como um todo foi além das expectativas iniciais, pois a estrutura otimizada é muito mais fácil de ser usinada e soldada, uma vez que é mais simples, tem menos peças e pode ser manufaturada com maior tolerância de dimensional que a estrutura da pinça original. Resumindo, conseguiu-se obter uma estrutura que pode ser fabricada mais rapidamente, com custo mais baixo e com desempenho superior ao do projeto original. Assim sendo, pode-se afirmar que qualitativa e quantitativamente os objetivos deste trabalho foram atingidos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Jean-Claude Sabonnadière e Jean-Louis Coulomb  
Elementos Finitos e CAE – Aplicações em Engenharia Elétrica  
Editora Aleph, 1993
  
- [2] Klaus-Jürgen Bathe  
Finite Element Procedures  
Prentice Hall, 1996
  
- [3] Larry J. Segerlind  
Applied Finite Element Analysis  
John Wiley & Sons, 1984
  
- [4] ANSYS®  
Advanced Analysis Techniques Guide - ANSYS Release 5.7  
ANSYS®, 2000
  
- [5] Saeed Moaveni  
Finite Element Analysis  
Prentice Hall, 1999

## Diversos Sites

GRANTE - Grupo de Análise e Projeto Mecânico

Universidade Federal de Santa Catarina - Depto de Engenharia Mecânica

URL.: <http://ns.grante.ufsc.br>

[http://www.mat.dtu.dk/persons/Bendsoee\\_Martin\\_P/topology.html](http://www.mat.dtu.dk/persons/Bendsoee_Martin_P/topology.html)

<http://www.topopt.dtu.dk/>



## **ANEXOS**

## ANEXO I

### A.1 História do Método de Elementos Finitos

O método dos elementos finitos é conhecido, no que se refere aos seus princípios, a mais de 60 anos e só veio a ser utilizado com o aparecimento de modernas ferramentas computacionais. De fato, apesar das formulações integrais serem conhecidas a longo tempo, suas aplicações não puderam se generalizar de imediato pela dificuldade em se resolver facilmente os sistemas algébricos lineares e não-lineares de grandes dimensões.

Atualmente é comum resolver, com a ajuda de computadores, problemas algébricos não lineares de milhares e/ou milhões de equações. Além disso, os métodos numéricos correspondentes e as técnicas de programação para os referidos cálculos, são parte integrante dos cursos na maioria das escolas de engenharia. E foram os engenheiros mecânicos que, enfrentando problemas complexos de cálculo estrutural, começaram a tirar proveito do desenvolvimento da informática e das linguagens de programação de alto nível (na época o FORTRAN) para expressar em termos de equações algébricas os modelos de desempenho das estruturas mecânicas (1956).

Na sequência (1960), o método dos elementos finitos foi dotado de uma formulação rigorosa, desenvolvida pelos matemáticos, tornando-se um meio de estudo geral para os problemas a derivadas parciais, suplantando pouco a pouco, por sua flexibilidade de emprego e facilidade de programação, o método

das diferenças finitas, que na época de seu apogeu era considerada uma ferramenta universal para a resolução destes tipos de problemas.

A partir de 1970, sob o impulso de numerosos engenheiros, pesquisadores e matemáticos, este método tornou-se realmente popular entre os engenheiros de todas as especialidades e sua utilização implicou no aparecimento de vários softwares comerciais utilizados na mecânica (NASTRAN, ASKA), em problemas de temperatura (TITUS), eletromagnetismo (FLUX, MAGNET11, PE2D), para citar apenas as aplicações mais desenvolvidas.

## **A.2 Realidade física, modelo matemático e solução numérica**

O método de elementos finitos é usado para resolver problemas físicos ou reais. Tipicamente estes problemas envolvem uma estrutura ou componente que está sujeito a um certo carregamento. A transformação deste problema físico num modelo matemático requer a adoção de algumas hipóteses e simplificações que levam a um conjunto de equações diferenciais. O MEF encontra uma solução numérica para este modelo matemático. Assim sendo é necessário avaliar a acurácia da solução encontrada: se esta não for satisfatória, o procedimento numérico, entenda-se Métodos dos Elementos Finitos, deve ser reaplicado com o uso de parâmetros mais refinados (uma melhor malha, por exemplo) até que uma solução adequada seja encontrada. É evidente que o MEF apenas resolverá o modelo matemático criado e todas as hipótese e simplificações adotadas, terão influência na resposta encontrada.

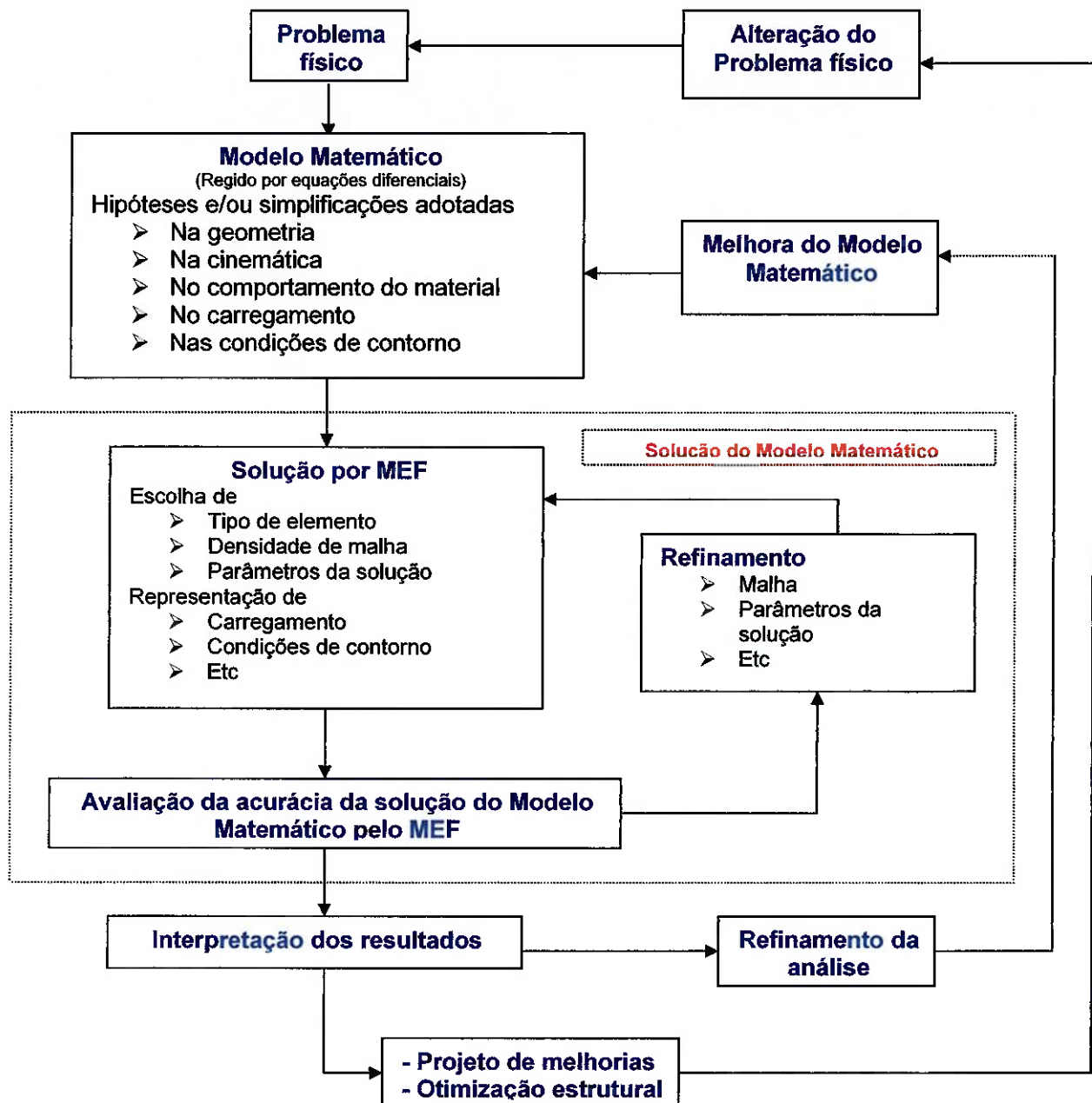
Ou seja, não se pode esperar qualquer informação além daquelas resultantes do modelo criado.

Deve-se ressaltar que a análise numérica pode fornecer apenas uma aproximação do comportamento do sistema, já que é impossível reproduzir com exatidão num modelo matemático, por mais refinado que o mesmo seja, todas as informações presentes no problema real.

Uma vez que o modelo matemático tenha sido resolvido com a acurácia necessária e os resultados tenham sido interpretados, deve-se avaliar a necessidade de se refinar mais o modelo, com o objetivo de se obter um conhecimento ainda mais profundo e preciso do problema. Pode-se também concluir pela mudança do problema físico (alteração na forma ou dimensão de uma peça, por exemplo), o que levará a nova modelagem e uma nova aplicação do MEF. A figura 1 (página seguinte) resume o que se discutiu neste parágrafo e nos anteriores.

A escolha do modelo matemático apropriado é uma etapa chave no processo de análise. Esta escolha depende do fenômeno que se está estudando e também das informações que se quer obter, sendo muito importante que o modelo escolhido seja confiável e efetivo na previsão dos valores de interesse.

Para avaliar-se a confiabilidade e efetividade do modelo escolhido é necessário compará-lo com um outro modelo do mesmo problema que seja muito mais abrangente e preciso.



**Figura 51** – O processo de análise por elementos finitos

Assim sendo, pode-se definir:

- Efetividade do modelo matemático

O modelo mais efetivo é aquele que obtém a resposta com acurácia satisfatória com o menor custo possível.

- Confiabilidade do modelo matemático

O modelo é confiável se sua resposta apresenta uma diferença pequena em relação àquela que seria obtida pelo modelo mais abrangente e preciso.

Com relação à modelagem matemática, pode-se resumir os pontos mais importantes da seguinte maneira:

1. A seleção do modelo mais adequado depende do que se quer saber do problema físico, ou seja, para um mesmo problema se o que se deseja são grandezas diferentes (deformação, tensão, temperatura) os modelos também podem ser diferentes.
2. O modelo mais efetivo é aquele que chega a resposta dentro de um erro aceitável demandando a menor quantidade de trabalho.
3. O MEF pode resolver acuradamente apenas o modelo matemático e não pode fornecer informações que não estejam contidas no modelo.
4. A noção de confiabilidade do modelo matemático depende da avaliação da acurácia dos resultados obtidos em relação aqueles que seriam obtidos no modelo mais abrangente e preciso. Na prática, porém, este modelo mais preciso não é resolvido ou conhecido e experiência e prática de engenharia são usados para a avaliação dos resultados.

### A.3 Princípio elementar do Método dos Elementos Finitos

O princípio fundamental do Método dos Elementos Finitos - MEF, ou em inglês FEA – Finite Element Analysis, reside na discretização do domínio em estudo em domínios elementares de dimensão finita. Em cada um destes elementos denominados elementos finitos, a função pesquisada é aproximada por um polinômio<sup>1</sup> cujo grau pode variar de uma aplicação para outra. Em geral este grau varia de 1 a 6. Os elementos triangulares ou quadriláteros, retilíneos ou curvilíneos, lineares, planos ou espaciais, devem realizar uma partição do domínio em estudo (os elementos são disjuntos e sua união deve recobrir o domínio por inteiro). Esta partição, que geralmente é denominada de discretização do domínio, deve respeitar um certo número de regras que permitem assegurar um bom desenvolvimento do cálculo. Sobre cada elemento da discretização o polinômio de aproximação é determinado por seus coeficientes. Estes últimos podem ser determinados pelos valores da função em pontos particulares que são chamados de nós. Se for conhecido o valor da função em cada nó do elemento, pode-se determinar a aproximação para todo o domínio. Pode-se então dizer que a função pesquisada  $A(x,y,z,t)$  depende de NN parâmetros  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{NN}$ , que são os valores procurados da variável em cada nó de cada elemento da discretização. A determinação dos parâmetros  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{NN}$ , será então a chave para a solução do problema de cálculo de  $A(x,y,z,t)$ .

---

<sup>1</sup> Outras classes de funções, por exemplos as harmônicas, também costumam ser usadas, mas as polinomiais são as mais comuns.

#### **A.4 Etapas básicas para aplicação do MEF**

- 1º Passo: Discretização do domínio em estudo – divisão da estrutura em elementos e nós.
- 2º Passo: Adoção de uma função para representar o comportamento do elemento.
- 3º Passo: Desenvolver as equações para um elemento.
- 4º Passo: Fazer a montagem dos elementos de modo que fique caracterizado o problema como um todo, ou seja, montagem da matriz global de rigidez.
- 5º Passo: Aplicar as condições iniciais, de contorno e de carregamento.
- 6º Passo: Resolver o sistema simultâneo de equações lineares ou não lineares de modo a se obter os valores nodais.
- 7º Passo: Obter os resultados de interesse.

#### **A.5 Arquitetura geral dos Sistemas CAE baseados no MEF**

Na prática, o processo de cálculo por MEF envolve a montagem e resolução de um sistema de equações a derivadas parciais e a interpretação do resultado obtido. Este processo pode ser destrinchado em três etapas diversas:

1. descrição da geometria, das propriedades físicas e a geração de malhas
2. implementação do método dos elementos finitos
3. visualização e interpretação dos resultados da simulação



Estas três etapas, bem distintas entre si, são normalmente separadas pela maioria dos softwares e são respectivamente realizadas pelos seguintes módulos:

1. módulos de entrada de dados
2. módulo de cálculo
3. módulo de saída dos resultados

#### **A.5.1 Funções do módulo de entrada**

O módulo de entrada tem por função a aquisição e o tratamento de todas as informações necessárias à implementação do problema pelo método dos elementos finitos. Os dados a serem criados concernem à discretização do domínio e à representação de seu comportamento físico. O módulo de entrada deve então realizar as três funções abaixo:

- descrição da geometria do objeto
- geração da malha
- definição das regiões e das fronteiras

A discretização do domínio consiste em encontrar um conjunto de nós e um conjunto de elementos finitos que formem uma discretização aceitável do domínio. Tal discretização deve respeitar os limites do domínio e as interfaces

entre as diferentes regiões. Em outras palavras, os elementos finitos não devem ter formas muito diferentes das formas regulares dos elementos de referência (triângulos ou tetraedros equiláteros, quadrados ou cubos, etc).

Os nós são definidos por suas coordenadas, ao passo que os elementos são caracterizados por seu tipo e a lista de seus nós. Certas formulações implicam no aparecimento de integrais sobre as fronteiras. Nestes casos, utilizamos elementos finitos bidimensionais para discretizar as fronteiras dos problemas 3D e elementos finitos unidimensionais para discretizar as fronteiras dos problemas 2D.

A operação de definição das regiões permite definir o comportamento físico, como por exemplo:

- descrição das características físicas dos materiais
- descrição das fontes (ex: fontes de calor)
- descrição das condições iniciais para um problema variável no tempo.

Geralmente estas informações, idênticas por trechos, são introduzidas região por região e fronteira por fronteira. As ligações entre regiões e elementos finitos do domínio e nós, permitem propagá-las no momento da discretização.

A descrição da geometria é algumas vezes implicitamente realizada na operação de discretização. Entretanto, a tendência atual é a sua separação. A descrição da geometria é realizada de início, depois a geração da malha é

efetuada, utilizando esta geometria. O caso extremo é a utilização de dois softwares especializados: um modelador de sólido para a parte geométrica um gerador de malhas para a discretização.

#### **A.5.2 Funções do módulo de cálculo**

O módulo de cálculo é o módulo mais importante na implementação do método dos elementos finitos, pois é nesta etapa que é implementada a resolução do sistema de equações ou dos sistemas de equações lineares ou não lineares, que resultam da formulação variacional ou do método dos resíduos ponderados.

Ele recebe com entrada a discretização do domínio, as características físicas e as condições de contorno. Na saída, ele fornece os valores das grandezas procuradas em cada nó da malha.

Duas famílias de métodos são utilizadas para resolver os sistemas de equações: os métodos pontuais ou por blocos seguidos por relaxação e os métodos matriciais globais. Dentre estes últimos, os mais correntemente utilizados compreendem várias etapas:

- construção das matrizes e vetores locais próprios a cada elemento finito
- montagem destas matrizes e vetores para formar a matriz e o segundo membro

- consideração das condições de contorno
- resolução do sistema linear

A resolução dos sistemas lineares é realizada de várias formas possíveis:

- métodos diretos (Gauss, Choleski)
- métodos semi-diretos (ICCG)
- métodos iterativos por blocos (Gauss-Seidel)

Desde que o sistema de equações seja não linear, estas operações são repetidas seguindo um procedimento iterativo.

Na hipótese de um problema variável no tempo, estes procedimentos devem ser repetidos a cada passo de tempo (método da diferença finita): explícito, implícito, Crank-Nicholson, predição-correção.

### **A.5.3 Funções do módulo de saída**

O módulo de entrada permite descrever o problema, que é em seguida resolvido pelo módulo de cálculo. Entretanto, a solução obtida não é diretamente explorável pelas seguintes razões:

1. a variável de estado calculada nos nós da malha descreve de forma matemática o estado do fenómeno, mas não tem sempre um significado

físico palpável (exemplo: o vetor potencial magnético para os problema eletromagnéticos)

2. a massa de informações numéricas oriundas dos cálculos (que podem atingir alguns milhões de valores nodais) é muito grande para ser compreendida por um ser humano.

A função do módulo de saída é então dupla:

1. Extração de informações significativas. Estas informações podem ser atreladas às grandezas locais (exemplo: indução magnética, densidade de perdas por efeito Joule, esforços mecânicos, tensões, deformações) ou globais (fluxo de calor, forças eletromagnéticas).
2. A interpretação sintética das informações numéricas sob a forma gráfica para facilitar sua interpretação (carta de isotérmicas, carta de isoesforços, curvas de evolução da temperatura ou do campo magnético ao longo de uma linha).

## **A.6 Fundamentos Matemáticos do MEF**

A melhor maneira de se resolver um problema físico governado por uma equação diferencial seria encontrar a solução analítica para a mesma. Na maioria das situações práticas isso é muito difícil de se conseguir, pois as equações podem não ser lineares, as condições de contorno podem ser matematicamente impossíveis de serem descritas, os materiais podem ser

anisotrópicos ou compostos, etc. Assim sendo, um método numérico pode ser usado para obter uma solução aproximada do problema, conforme discutido no tópico 1.A.

#### **A.6.1 Principais métodos numéricos e suas formulações**

São duas as classes de métodos mais usadas :

1 – Método das diferenças finitas

2 – Método dos elementos finitos

Pelo método das diferenças finitas, as equações diferenciais são escritas para cada nó e as derivadas são substituídas por equações de diferenças. Esta abordagem resulta num sistema de equações lineares simultâneas. Ainda que este método seja simples de entender e empregar em problemas simples, ele se torna difícil de aplicar quando a geometria ou condições de contorno são mais complexas. Dificuldades também surgem nas situações com materiais de comportamento não-isotrópico. Já o método dos elementos finitos se utiliza de uma formulação integral para a criação do sistema de equações diferenciais. Além disso, uma função aproximadora contínua é usada para representar a solução em cada elemento. A solução completa é gerada pela conexão das soluções individuais de modo que se garanta a continuidade através das fronteiras dos elementos.

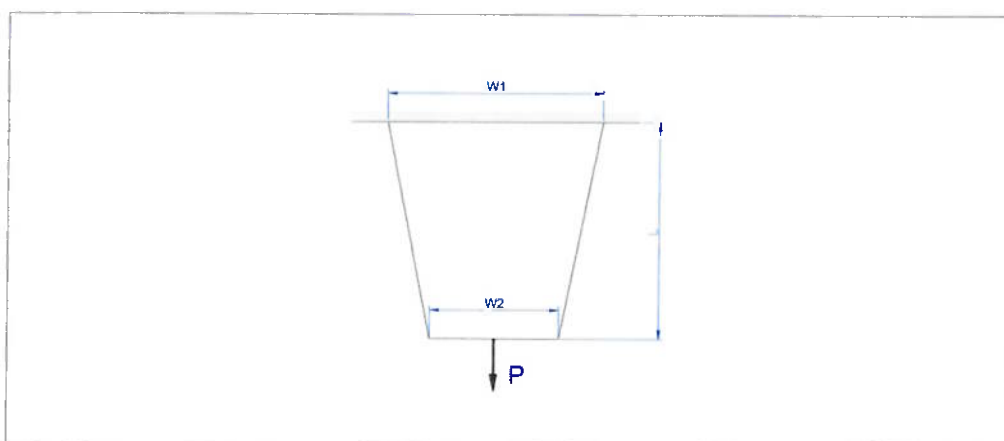
As abordagens mais comuns para as formulações através do Método dos Elementos Finitos são:

- 1 – Formulação Direta
- 2 – Método da Mínima Energia Potencial
- 3 – Método dos Resíduos Ponderados.

Discutir-se-á as diferentes formulações através de exemplos.

#### A.6.1.1 Formulação Direta

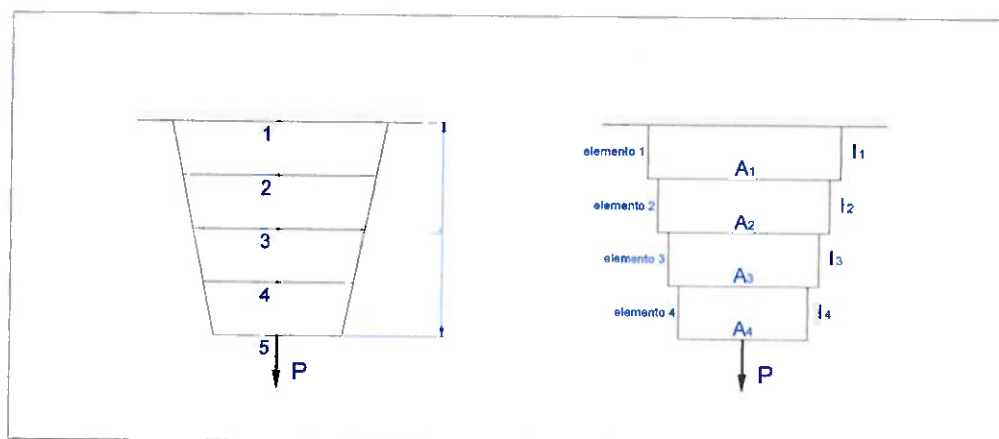
Considere-se a barra de secção variável que suporta a carga "P" numa das extremidades e é fixa pela outra conforme ilustrado pela Figura A. A barra tem módulo de elasticidade "E" e espessura "t" e suas outras dimensões são aquelas mostradas na Figura 52. Seu peso pode ser desprezado pois tem magnitude pequena em relação a carga "P".



**Figura 52** – Barra sob carregamento axial

Seguindo os passos do item 1.4 ter-se-ia:

**1º Passo:** Discretização do domínio em estudo – divisão da estrutura em elementos e nós. Sabe-se que uma discretização adequada<sup>2</sup> do domínio é fundamental para a obtenção de um resultado preciso. Como este é um exemplo didático escolher-se-á uma malha com cinco nós e quatro elementos de secção uniforme, como pode ser visto na Figura 53.



**Figura 53** – Dividindo a barra em elementos e nós

As áreas  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  e  $A_4$  da Figura 53 são valores médios em relação as áreas das secções onde se localizam os nós que formam os elementos, ou seja,  $A_1$  é dado por:

<sup>2</sup> A primeira vista pode parecer que quanto maior a quantidade de elementos, ou seja, quanto menor o tamanho do mesmo, maior a precisão, mas isto não é verdade.



$$A_1 = \frac{(S_1 + S_2)}{2} \cdot t$$

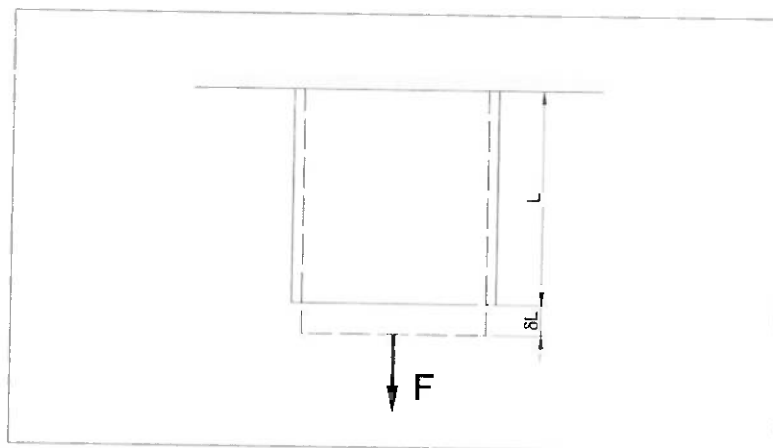
onde:

$S_1$  : é o comprimento da linha que passa pelo nó 1

$S_2$  : é o comprimento da linha que passa pelo nó 2

$t$  : é a espessura da barra

**2º Passo:** Adoção de uma função para representar o comportamento do elemento. Cada elemento pode ser modelado como uma barra de secção constante  $A$  e comprimento  $L$  sujeita a uma força axial  $F$  que provoca uma deformação  $\delta L$  como mostra a Figura 54.



**Figura 54** – Modelamento dos elementos

Nestas condições pode-se dizer que a tensão normal média ( $\sigma$ ) é dada por:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (\text{A.1})$$

E a deformação específica é dada por:

$$\varepsilon = \frac{\delta L}{L} \quad (\text{A.2})$$

Sabe-se que para a região elástica vale a Lei de Hooke:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (\text{A.3})$$

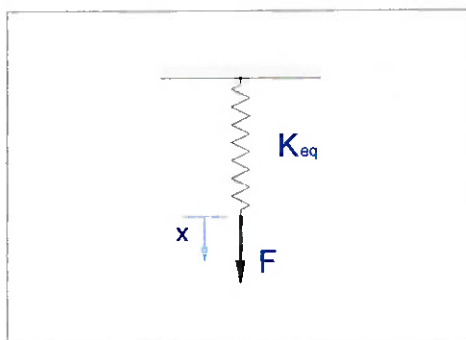
Combinando as equações A.1, A.2 e A.3 obtêm-se:

$$F = \left( \frac{A \cdot E}{L} \right) \cdot \delta L \quad (\text{A.4})$$

A expressão A.4 é similar a equação da mola ( $F = K \cdot x$ ) onde a constante elástica seria dada por:

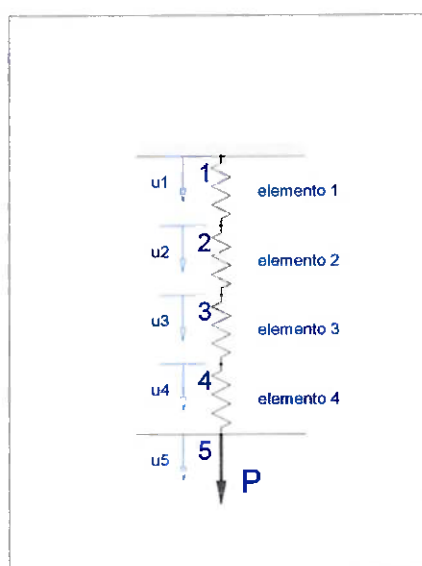
$$K_{eq} = \frac{A \cdot E}{L} \quad (\text{A.5})$$

Assim os elementos poderiam ser modelados como mostrado na Figura 5.



**Figura 55** – Modelo para um elemento

E para a estrutura como um todo, ter-se-ia:



**Figura 56** – Estrutura modelada

Escrevendo-se a equação de equilíbrio para cada nó obtêm-se:

$$\text{Nó 1} : R_1 - K_1 \cdot (u_2 - u_1) = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\text{Nó 2} : K_1 \cdot (u_2 - u_1) - K_2 \cdot (u_3 - u_2) = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Nó 3} : K_2 \cdot (u_3 - u_2) - K_3 \cdot (u_4 - u_3) = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\text{Nó 4} : K_3 \cdot (u_4 - u_3) - K_4 \cdot (u_5 - u_4) = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\text{Nó 5} : K_4 \cdot (u_5 - u_4) - P = 0 \quad (\text{A.10})$$

Colocando as equações A.6, A.7, A.8, A.9 e A.10 na forma matricial chega-se

a:

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 + K_4 & -K_4 \\ 0 & 0 & 0 & -K_4 & K_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

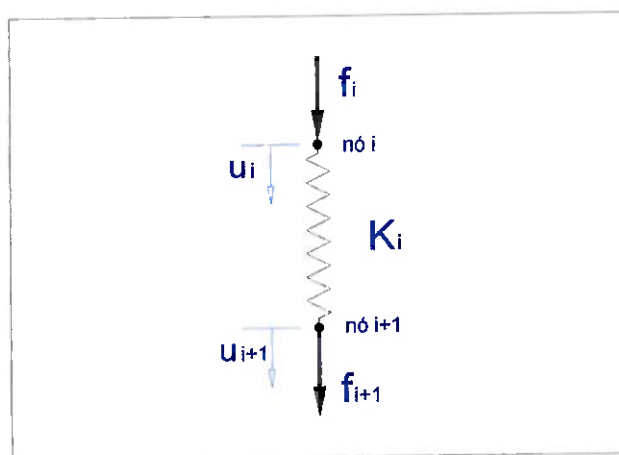
É importante que se faça distinção entre o carregamento e as reações. Assim sendo, A.11 seria melhor escrita na forma:

$$\begin{bmatrix} -R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 + K_4 & -K_4 \\ 0 & 0 & 0 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

que equivale a:

$$[\text{matriz reação}] = [\text{matriz rigidez}] \cdot [\text{matriz deslocamento}] - [\text{matriz carga}] \quad (\text{A.13})$$

**3º Passo:** Desenvolver as equações para um elemento. Como cada elemento está associado a dois nós e cada um destes a um único deslocamento será necessário escrever apenas duas equações para cada elemento. Estas equações devem envolver os deslocamentos nodais e a rigidez do elemento. Para as forças internas  $f_i$  e  $f_{i+1}$  e para os deslocamentos  $u_i$  e  $u_{i+1}$  de um elemento, conforme mostrado na Figura 57.



**Figura 57** — Forças internas

Na condição de equilíbrio estático deve-se ter que:

$$f_i + f_{i+1} = 0$$

(A.14)

Escrevendo-se as forças internas em função da rigidez e dos deslocamentos associados chega-se a:

$$\begin{cases} f_i = K_i \cdot (u_i - u_{i+1}) \\ f_{i+1} = K_i \cdot (u_{i+1} - u_i) \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Que escrito na forma matricial equivale a:

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_i & -K_i \\ -K_i & K_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

**4º Passo:** Fazer a montagem dos elementos de modo que fique caracterizado o problema como um todo, ou seja, montagem da matriz global de rigidez.

Aplicando-se a equação A.16 a todos os elementos e fazendo a montagem destes chegar-se-á a matriz de rigidez global. Assim sendo:

Elemento 1

$$[K]^{(1)} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

E considerando-se sua posição na matriz de rigidez global, chegar-se-ia a:

$$[K]^{(1G)} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Analogamente para os outros elementos

### Elemento 2

$$[K]^{(2)} = \begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

e

$$[K]^{(2G)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & -K_2 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

### Elemento 3

$$[K]^{(3)} = \begin{bmatrix} K_3 & -K_3 \\ -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

e

$$[K]^{(3G)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 & -K_3 & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

### Elemento 4

$$[K]^{(4)} = \begin{bmatrix} K_4 & -K_4 \\ -K_4 & K_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

e

$$[K]^{(4G)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_4 & -K_4 \\ 0 & 0 & 0 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

Assim chega-se a matriz global de rigidez que é dada por:

$$[K] = [K]^{(1G)} + [K]^{(2G)} + [K]^{(3G)} + [K]^{(4G)} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 + K_4 & -K_4 \\ 0 & 0 & 0 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

**5º Passo:** Aplicar as condições iniciais, de contorno e de carregamento. Como a barra é fixa na extremidade superior tem-se que:

$$u_1 = 0$$

A carga P é aplicada no nó 5. Para estas condições de carga e contorno chega-se a seguinte sistema:



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 + K_4 & -K_4 \\ 0 & 0 & 0 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Deve-se ressaltar que a condição  $u_1=0$  é aplicada fazendo-se com que apareça um 1 na posição correspondente a  $u_1$  e 0 nas outras.

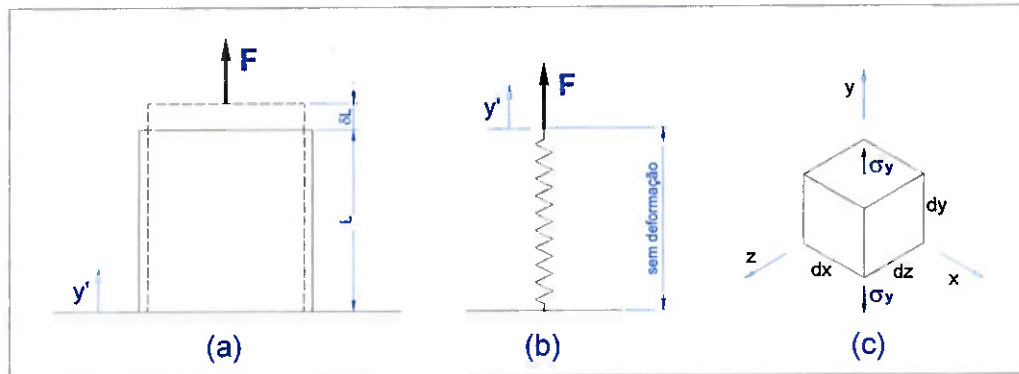
**6º Passo:** Resolver o sistema simultâneo de equações lineares ou não lineares de modo a se obter os valores nodais. Conhecidas as dimensões envolvidas ( $L$ ,  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $t$ ), as propriedades do material ( $E$ ) e o valor de  $P$ , poder-se-ia calcular os  $K_i$ s necessários e resolver-se o sistema da equação A.26.

**7º Passo:** Obter os resultados de interesse. Para este problema os resultados de interesse seriam os valores de tensão nos elementos. Estes podem ser facilmente obtidos a partir dos deslocamentos pela aplicação da Lei de Hooke.

#### A.6.1.2 Formulação Energética

Esta formulação é muito usada em mecânica dos sólidos e também é útil para a geração de modelos de elementos finitos. Baseia-se no Princípio da Mínima Energia Potencial Total que afirma que os deslocamentos na posição de equilíbrio ocorrem de modo que a energia potencial deste sistema seja mínima. Quando se submete uma estrutura a um carregamento externo esta se deforma e o trabalho realizado pelas forças externas é armazenado numa

forma de energia elástica chamada de energia de deformação. Com base nos esquemas da Figura 58, desenvolver-se-á o equacionamento pertinente.



**Figura 58** – Comportamento elástico de um elemento sob esforço axial

Para uma estrutura carregada como na Figura 58a, sabe-se que se pode modelar a estrutura como uma mola de rigidez  $K$  (ver equações de A.1 a A.5) como mostrado na Figura 58b. Para um volume elementar tirado do corpo (Figura 58c) vale o mesmo modelamento. Quando este volume elementar é deformado um diferencial  $dy'$  tem-se que a energia armazenada é dada por:

$$d\Lambda = \int_0^{y'} F \cdot dy' = \int_0^{y'} K \cdot y' \cdot dy' = \frac{1}{2} \cdot K \cdot y'^2 = \frac{1}{2} \cdot (K \cdot y') \cdot y' \quad (\text{A.27})$$

mas:

$$y' = \varepsilon \cdot dy \quad (\text{A.28})$$

e

$$K \cdot y' = F = \sigma_y \cdot dx \cdot dz \quad (\text{A.29})$$

Logo, substituindo A.29 e A.28 em A.27, chega-se a:

$$d\Lambda = \frac{1}{2} \cdot (K \cdot y') \cdot y' = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_y \cdot dx \cdot dz) \cdot \varepsilon \cdot dy = \frac{1}{2} \cdot \sigma_y \cdot \varepsilon \cdot dV \quad (\text{A.30})$$

Assim, para um componente ou um elemento sob tensão axial, tem-se que a energia de deformação é dada por:

$$\Lambda^{(e)} = \int d\Lambda = \int_V \frac{1}{2} \cdot \sigma_y \cdot \varepsilon \cdot dV = \int_V \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon^2 \cdot dV \quad (\text{A.31})$$

onde:

$V$  : é o volume do componente

A energia potencial total ( $\Pi$ ) de um corpo constituído por  $n$  elementos e  $m$  nós é a diferença entre o montante de energia de deformação e o trabalho realizado pelas forças externas, ou seja:

$$\Pi = \sum_{e=1}^n \Lambda^{(e)} - \sum_{i=1}^m F_i \cdot u_i \quad (\text{A.32})$$

Como o Princípio da Mínima Energia Potencial Total afirma que  $\Pi$  é um valor mínimo, tem-se que:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} \sum_{e=1}^n \Lambda^{(e)} - \frac{\partial}{\partial u_i} \sum_{j=1}^m F_j \cdot u_i = 0 \quad \text{para } i=1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{A.33})$$

Pode-se aplicar estes conceitos na resolução do problema resolvido no item A.1 (Formulação Direta). Neste caso:

$$\varepsilon = \frac{(u_{i+1} - u_i)}{L_i} \quad (\text{A.34})$$

Substituindo a equação A.34 em A.31:

$$\Lambda^{(e)} = \int \frac{1}{2} \cdot E \cdot \left[ \frac{(u_{i+1} - u_i)}{L_i} \right]^2 \cdot dV = \frac{A_i \cdot E}{2 \cdot L_i} \cdot (u_{i+1}^2 + u_i^2 - 2 \cdot u_{i+1} \cdot u_i) \quad (\text{A.35})$$

Minimizando o termo da energia de deformação em relação a  $u_i$  e  $u_{i+1}$  obtem-se:

$$\frac{\partial \Lambda^{(e)}}{\partial u_i} = \frac{A_i \cdot E}{L_i} \cdot (u_i - u_{i+1}) = K_i \cdot (u_i - u_{i+1}) \quad (\text{A.36})$$

e

$$\frac{\partial \Lambda^{(e)}}{\partial u_{i+1}} = \frac{A_i \cdot E}{L_i} \cdot (u_{i+1} - u_i) = K_i \cdot (u_{i+1} - u_i) \quad (\text{A.37})$$

Estas equações correspondem a um dado elemento e podem ser assim escritas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Lambda^{(e)}}{\partial u_{i+1}} \\ \frac{\partial \Lambda^{(e)}}{\partial u_{i+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_i & -K_i \\ -K_i & K_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

Minimizando o termo do trabalho das forcas externas em relação a  $u_i$  e  $u_{i+1}$  para um elemento obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} (F_i \cdot u_i) = F_i \quad (\text{A.39})$$

e

$$\frac{\partial}{\partial u_{i+1}} (F_{i+1} \cdot u_{i+1}) = F_{i+1} \quad (\text{A.40})$$

Aplicando as equações A.37 a A.40 ao problema, o sistema resultante será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 + K_4 & -K_4 \\ 0 & 0 & 0 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

Observar que é o mesmo resultado obtido para a formulação direta (ver equação A.26).

#### **A.6.1.2 Métodos de Resíduos Ponderados**

Estes métodos são baseados na adoção de uma solução aproximada para a equação diferencial do sistema, sendo que esta solução deve obrigatoriamente satisfazer as condições iniciais e de contorno do problema. Uma vez que a mesma não é exata sua substituição na equação diferencial levará a algum erro ou resíduo. As diferenças entre os métodos ficam por conta dos pontos ou dos intervalos em que eles requerem que o resíduo seja zero. Quatro destes métodos serão abordados, a saber:

- Collocation Method
- Subdomain Method
- Galerkin's Method
- Método dos Mínimos Quadrados

Todos estes métodos são derivações da formulação variacional. Esta formulação envolve a integral definida de uma função, que leva a um certo valor. Trocando-se essa função um novo valor será obtido. A função que levar ao menor resultado tem a propriedade adicional de satisfazer a uma

determinada equação diferencial. Para clarificar este conceito considere a integral abaixo:

$$\Pi = \int_0^H \left[ \frac{D(x)}{2} \cdot \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - Q(x) \cdot y \right] \cdot dx \quad (\text{A.42})$$

O valor de  $\Pi$  pode ser calculado para uma dada equação  $y=f(x)$ . O cálculo variacional mostra, entretanto, que a particular equação  $y=g(x)$  que leva ao menor valor de  $\Pi$  é também a solução da equação diferencial que se segue:

$$D(x) \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + Q(x) = 0 \quad (\text{A.42})$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y(H) = y_H \end{cases} \quad (\text{A.43})$$

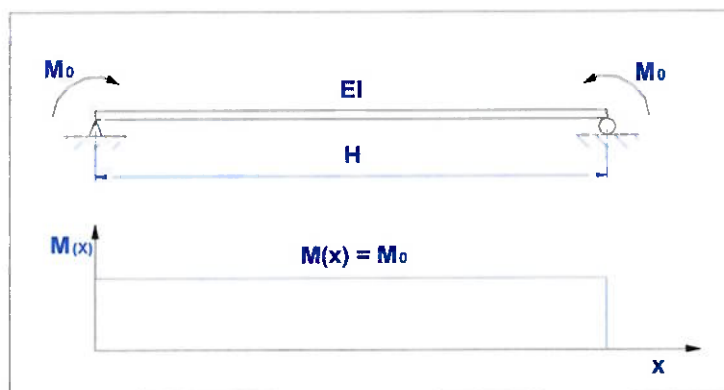
O processo pode ser invertido. Dada uma equação diferencial, uma solução aproximada pode ser obtida pela substituição de diferentes funções de teste na funcional apropriada. A função de teste que levar ao menor valor de  $\Pi$  é a solução aproximada. Supondo que a função escolhida foi  $y=h(x)$ , substituindo esta função em A.42 obtém-se:

$$D(x) \cdot \frac{d^2 h(x)}{dx^2} + Q(x) = R(x) \neq 0 \quad (\text{A.44})$$

Os métodos citados requerem que:

$$\int_0^H W_i(x) \cdot R(x) \cdot dx = 0 \quad (\text{A.45})$$

E é na escolha da função peso  $W_i(x)$  que reside a diferença entre os mesmos. Para ilustrar a aplicação dos métodos considere-se o problema geometricamente representado pela Figura 59 que tem por equação diferencial a equação A.46.



**Figura 59 – Barra biapoiada**

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} - M(x) = 0 \quad \text{com} \quad y(0) = y(H) = 0 \quad (\text{A.46})$$

Quer-se aproximar  $y(x)$  por:

$$y(x) = A \cdot \sin(\pi \cdot x / H) \quad (\text{A.47})$$



E usar-se-á dos diferentes métodos para determinar-se o valor de A.

#### A.6.1.A.1 Collocation Method

Neste método funções impulso são usadas como peso. Ou seja,  $W_i = \delta(x - X_i)$ , o que equivale a dizer que se obriga que o resíduo se anule em determinados pontos. A quantidade de pontos selecionados deve ser igual ao número de incógnitas (ou coeficientes não determinados) na função aproximadora.

Para o exemplo da Figura 59 deve-se substituir a equação A.47 em A.46:

$$R(x) = -E \cdot I \cdot \frac{A \cdot \pi^2}{H^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{H}\right) - M_0 \quad (\text{A.48})$$

A equação A.48 só apresenta uma incógnita (A), logo será necessário zerar  $R(x)$  em apenas um ponto entre 0 e H. Escolher-se-á, por conveniência, o ponto  $x = H/2$ . Nestas condições:

$$R\left(\frac{H}{2}\right) = -E \cdot I \cdot \frac{A \cdot \pi^2}{H^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot \frac{H}{2}}{H}\right) - M_0 = 0 \Rightarrow A = -\frac{M_0 \cdot H^2}{E \cdot I \cdot \pi^2} \quad (\text{A.49})$$

Logo, a função aproximadora é:

$$y(x) = -\frac{M_0 \cdot H^2}{E \cdot I \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{H}\right) \quad (\text{A.50})$$

#### A.6.1.A.2 Subdomain Method

Neste método as funções peso são unitárias ( $W_i(x) = 1$ ) num trecho específico. Isto equivale a requerer que a integral do resíduo seja zero durante um certo intervalo. O número de intervalos de integração deve ser igual ao de incógnitas da função aproximadora. Para exemplo da Figura 59, como só há uma incógnita (ver equação A.47) um único intervalo é requerido. Usar-se-á o intervalo todo, ou seja:

$$\int_0^H W_i(x) \cdot R(x) \cdot dx = \int_0^H 1 \cdot R(x) \cdot dx = 0 \quad (\text{A.51})$$

Onde o valor de  $R(x)$  é o mesmo do método anterior e pode ser obtido pela equação A.48. Logo, substituindo A.48 em A.51 obtém-se:

$$\int_0^H \left( -E \cdot I \cdot \frac{A \cdot \pi^2}{H^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{H}\right) - M_0 \right) \cdot dx = 0 \Rightarrow A = -\frac{M_0 \cdot H^2}{2 \cdot E \cdot I \cdot \pi} \quad (\text{A.52})$$

Logo, a função aproximadora é:

$$y(x) = -\frac{M_0 \cdot H^2}{2 \cdot E \cdot I \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{H}\right) \quad (\text{A.53})$$

### A.6.1.A.3 Galerkin's Method

Este método usa como funções peso as mesmas funções que são usadas como aproximadoras. Para exemplo da Figura 59, ter-se-ia:

$$\int_0^H W_i(x) \cdot R(x) \cdot dx = \int_0^H \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{H}\right) \cdot R(x) \cdot dx = 0 \quad (\text{A.54})$$

Onde o valor de  $R(x)$  é o mesmo dos métodos anteriores e pode ser obtido pela equação A.48. Logo, substituindo A.48 em A.54 obtém-se:

$$\int_0^H \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{H}\right) \cdot \left(-E \cdot I \cdot \frac{A \cdot \pi^2}{H^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{H}\right) - M_0\right) \cdot dx = 0 \Rightarrow A = -\frac{4 \cdot M_0 \cdot H^2}{E \cdot I \cdot \pi^3} \quad (\text{A.55})$$

Logo, a função aproximadora é:

$$y(x) = -\frac{4 \cdot M_0 \cdot H^2}{E \cdot I \cdot \pi^3} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{H}\right) \quad (\text{A.56})$$

#### A.6.1.A.4 Método dos Mínimos Quadrados

Este método utiliza o próprio resíduo como função peso e define um novo erro que deverá ser minimizado em relação as incógnitas da função aproximadora. Ou seja:

$$E = \int_0^H W_i(x) \cdot R(x) \cdot dx = \int_0^H R(x) \cdot R(x) \cdot dx = \int_0^H R(x)^2 \cdot dx = 0 \quad (\text{A.57})$$

E para minimizar:

$$\frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \quad (\text{A.58})$$

onde :

$I$  : são as incógnitas da função aproximadora

$i$  : é o número de incógnitas

Para exemplo da Figura 59, onde o valor de  $R(x)$  é o mesmo dos métodos anteriores e pode ser obtido pela equação A.48, ter-se-ia:

$$E = \int_0^H \left( -E \cdot I \cdot \frac{A \cdot \pi^2}{H^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{H}\right) - M_0 \right) \cdot \left( -E \cdot I \cdot \frac{A \cdot \pi^2}{H^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{H}\right) - M_0 \right) \cdot dx \quad (\text{A.60})$$

Logo:

$$E = \frac{A^2 \cdot H}{2} \cdot \left( \frac{E \cdot I \cdot \pi^2}{H^2} \right)^2 + \frac{4 \cdot M_0 \cdot E \cdot I \cdot \pi}{H} \cdot A + M_0 \cdot H \quad (\text{A.61})$$

Neste caso existe uma única incógnita (A). Deve-se aplicar A.58:

$$\frac{\partial E}{\partial A} = 0 \Rightarrow A = -\frac{4 \cdot M_0 \cdot H^2}{\pi^3 \cdot E \cdot I} \quad (\text{A.62})$$

Chega-se então a:

$$y(x) = -\frac{4 \cdot M_0 \cdot H^2}{\pi^3 \cdot E \cdot I} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{H}\right) \quad (\text{A.63})$$

### A.6.2 Shape Functions

Shape functions são as funções interpoladoras que tem a propriedade de apresentar valor 1 em seu próprio nó e zero nos demais nós.

### A.6.3 Coordenadas locais, globais e naturais

A aplicação do MEF requer a solução de algumas integrais. Algumas são de fácil resolução, outras são mais difíceis e algumas não possuem solução analítica, o que obriga que se faça uso de um método numérico. Na maioria

destas integrações uma simples mudança nas variáveis de integração e no sistema de coordenadas pode facilitar e otimizar o processo de cálculo.

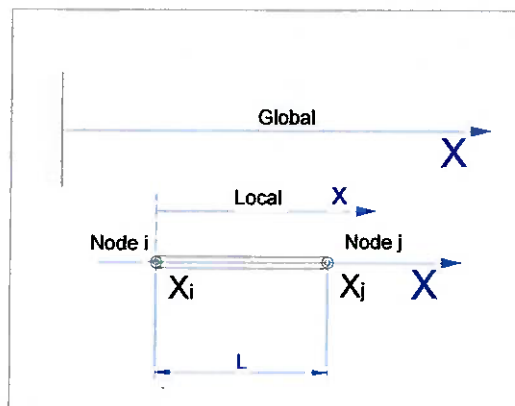
Freqüentemente nos modelos em elementos finitos é conveniente o uso de diversos sistemas de coordenadas. Um sistema global é necessário para a representação das posições dos diversos nós e elementos, para a representação das condições de contorno e para a aplicação do carregamento. A solução, deslocamentos nodais por exemplo, também é melhor representada no sistema global, mas o uso de coordenadas locais e naturais é mais indicado para construir a geometria e para computar as integrais, principalmente quando estas são compostas por produtos de funções de forma (*shape functions*).

### **A.6.3.1 Elementos unidimensionais**

#### **A.6.3.1.1 Coordenadas globais e locais para *shape function* lineares**

Para o problema unidimensional a relação entre o sistema global "X" e o local "x" é dado pela equação A.1 (ver também a Figura A1):

$$X = X_i + x \tag{A.1}$$



**Figura 60** – Coordenadas globais e locais

Substituindo a equação A.1 na equação A.71 (funções de forma para  $S_i$  e  $S_j$ ) tem-se:

$$\begin{cases} S_i = \frac{X_j - (X_i + x)}{X_j - X_i} = 1 - \frac{x}{L} \\ S_j = \frac{(X_i + x) - X_i}{X_j - X_i} = \frac{x}{L} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

#### **A.6.3.1.2**    Coordenadas naturais para *shape function* lineares

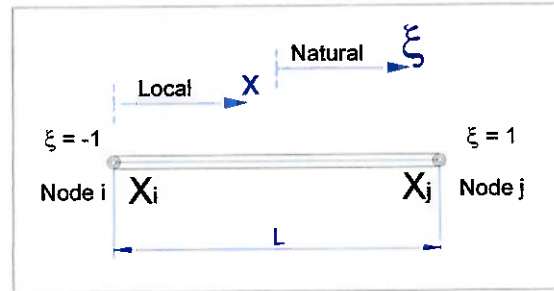
Coordenadas naturais são basicamente as locais escritas numa forma adimensional. Sua grande vantagem é que o intervalo de integração possui como extremos  $-1$  e  $1$ . Assim sendo deve-se fazer a seguinte transformação:

$$\xi = \frac{2 \cdot x}{L} - 1 \quad (\text{A.3})$$

Aplicando a equação A.3 na A.2 chega-se a:

$$\begin{cases} S_i = \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi) \\ S_j = \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Para uma melhor visualização ver Figura 61.



**Figura 61** – Coordenadas locais e naturais

#### A.6.3.1.3 *Shape functions* lineares quadráticas

Extendendo o resultado anterior para as formas quadráticas obtém-se:

##### ➤ Coordenadas Quadráticas Locais

$$\begin{cases} S_i = \left(\frac{x}{L} - 1\right) \cdot \left(\frac{2 \cdot x}{L} - 1\right) \\ S_j = \left(\frac{x}{L}\right) \cdot \left(\frac{2 \cdot x}{L} - 1\right) \\ S_k = 4 \cdot \left(\frac{x}{L}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

##### ➤ Coordenadas Quadráticas Naturais



$$\begin{cases} S_i = -\frac{1}{2} \cdot \xi(1-\xi) \\ S_j = \frac{1}{2} \cdot \xi(1-\xi) \\ S_k = (1-\xi) \cdot (1+\xi) \end{cases} \quad (\text{A.7})$$