

BRUNO RUSSI

**OTIMIZAÇÃO MULTIPERÍODO DE CARTEIRAS DE
INVESTIMENTOS UTILIZANDO A TÉCNICA DE
GERAÇÃO DE ÁRVORES DE CENÁRIOS**

Trabalho de Formatura apresentado à
Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do Diploma
de Engenheiro de Produção

Orientadora:
Prof^a Dr^a Celma de Oliveira Ribeiro

SÃO PAULO
2005

Á MINHA FAMÍLIA

AGRADECIMENTOS

A toda minha família, pelo enorme apoio e compreensão que me deram durante os cinco anos do curso de Engenharia de Produção da Poli.

À professora Celma de Oliveira Ribeiro, pela paciência, incentivo e sugestões na realização deste trabalho.

Aos professores do departamento de engenharia de produção, pelos conhecimentos transmitidos que permitiram construir e elaborar este trabalho de formatura.

Aos amigos de faculdade, pelo companheirismo demonstrado em todos os momentos de minha vida acadêmica.

A todos aqueles que, embora não citados, contribuíram direta ou indiretamente para a execução deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho consiste na elaboração de um modelo de otimização multiperíodo de carteiras de investimento com custos de transação. A escolha da carteira ótima de investimento envolve incertezas, caracterizadas pelos preços dos ativos, que podem ser modeladas segundo processos estocásticos, transformando o problema num problema de otimização estocástica. Entretanto, dado o tamanho e a complexidade desses problemas, utilizam-se algoritmos alternativos na modelagem dessas incertezas, como as técnicas de geração de árvores de cenários. O processo de geração de árvores de cenários transforma o problema estocástico num problema determinístico de grandes dimensões, além de representar de forma clara e concisa a evolução dos possíveis caminhos – cenários – que uma variável aleatória pode assumir. Três técnicas de geração de árvores de cenários são apresentadas: simulação e *clustering*, os modelos de otimização e o modelo híbrido. Para resolver o modelo de otimização, utilizou-se uma carteira de investimento composta de ações de empresas brasileiras. Os resultados obtidos com o modelo e as análises de sensibilidade são explicitados e confrontados com os índices *benchmark* de mercado.

ABSTRACT

This work proposes a model to solve a multi-period portfolio management problem over a finite horizon with transaction costs. The choice of the optimal portfolio inherently involves uncertainties, characterized by financial asset prices, which can be modeled using stochastic process, transforming the problem into a stochastic optimization problem. However, given the size as well as the complexity of these problems, alternatives algorithms were developed to model these uncertainties, like the scenario tree approach. The scenario tree approach transforms the stochastic problem into a large-scale deterministic problem; besides it represents clearly the possible paths – scenarios – that a random variable can assume. Three techniques are presented for generating scenario trees: simulation and clustering, optimization and hybrid simulation/optimization. To solve the optimization problem, a portfolio of Brazilian company's shares was utilized. The results obtained with the model and the sensitivity analyses are explained and compared with market benchmarks.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	iv
RESUMO	v
ABSTRACT	vi
SUMÁRIO	vii
LISTA DE FIGURAS.....	x
LISTA DE TABELAS	xii
1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Motivação.....	1
1.2 A Empresa	2
1.3 Organização do Trabalho	3
2. CONCEITOS	5
2.1 Teoria Moderna de Carteiras	5
2.2 Ações.....	9
2.2.1 Índice BOVESPA (IBOVESPA)	10
2.2.2 Classificação Setorial das Empresas Listadas na BOVESPA..	11
2.3 Processos Estocásticos	13
2.3.1 Tipos de Processos Estocásticos	14
2.3.1.1 Processos de Markov	14
2.3.1.2 Processos de Wiener.....	14
2.4 Simulação Monte Carlo.....	16
3. MÉTODOS DE GERAÇÃO DE ÁRVORES DE CENÁRIOS	19
3.1 Introdução.....	21
3.2 Simulação e Clustering.....	21
3.2.1 Simulação em Paralelo	22
3.2.2 Simulação Seqüencial	23
3.3 Modelo de Otimização	24
3.3.1 Otimização Seqüencial	25
3.3.2 Otimização Global	27

3.4 Modelo Híbrido.....	29
3.5 Comentários Finais	29
4. DEFINIÇÃO DO MODELO	30
4.1 Introdução.....	30
4.2 Simulação e <i>Clustering</i>	31
4.2.1 Identificação do Centróide do <i>Cluster</i>	32
4.3 Formulação Matemática.....	33
4.3.1 Parâmetros do Modelo	34
4.3.2 Variáveis de Decisão.....	34
4.3.3 Função Objetivo.....	36
4.4 Comentários Finais	37
5. RESOLUÇÃO, RESULTADOS E ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	38
5.1 Introdução.....	38
5.2 Definição das variáveis de entrada do Modelo.....	39
5.3 Simulação Monte Carlo e <i>Clustering</i>	43
5.4 Descrição dos Parâmetros do Modelo.....	48
5.5 Resultados.....	51
5.6 Análise de Sensibilidade	57
5.6.1 Limitação de Caixa (ASI).....	57
5.6.2 Quantidade Mínima de Ações na Carteira (ASII).....	60
5.7 Observações Gerais.....	62
6. CONCLUSÃO.....	63
6.1 Análise dos Resultados	63
6.2 Conclusões	66
6.3 Comentários Finais e Recomendações para Trabalhos Futuros.....	68
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	70

APÊNDICES

A. CÁLCULO DE RETORNOS FINANCEIROS	73
B. EWMA (<i>EXPONENTIAL WEIGHTED MOVING AVERAGE</i>).....	76
C. MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO DE CHOLESKY	78
D. <i>CLUSTERING</i>	80
E. MATLAB – ALGORITMO DE SIMULAÇÃO MONTE CARLO	84
F. MATLAB – ALGORITMO DE <i>CLUSTERING</i>	88

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Relação risco-retorno de uma carteira composta por 2 ativos em função da correlação entre eles.....	8
Figura 2.2 – Fronteira eficiente de Markowitz.....	9
Figura 2.3 – Evolução do índice BOVESPA	11
Figura 2.4 – Processo de Wiener: Movimento Browniano.....	15
Figura 3.1 – Modelo de uma árvore de cenários	21
Figura 3.2 – Simulação em paralelo	23
Figura 3.3 – Simulação seqüencial	24
Figura 3.4 – Otimização seqüencial	27
Figura 3.5 – Otimização global	29
Figura 4.1 – Construção da árvore de cenários	32
Figura 5.1 – Evolução do preço da TNLP4	40
Figura 5.2 – Evolução do preço da PETR4.....	41
Figura 5.3 – Evolução do preço da EMBR4	41
Figura 5.4 – Evolução do preço da VALES5	41
Figura 5.5 – Evolução do preço da AMBV4	42
Figura 5.6 – Evolução do preço da ITAU4	42
Figura 5.7 – Evolução do preço da CMIG4	42
Figura 5.8 – Evolução do preço da NETC4	43
Figura 5.9 – Evolução do preço da CCRO3.....	43
Figura 5.10 – Matriz de variância-covariância.....	44
Figura 5.11 – Decomposição de Cholesky da matriz variância-covariância	45
Figura 5.12 – Simulação Monte Carlo para a ação TNLP4	46
Figura 5.13 – Árvore de cenários: TNLP4.....	47
Figura 5.14 – Carteira inicial	51
Figura 5.15 – Carteira em $t = 0$	52
Figura 5.16 – Carteira em $t = 5$	53
Figura 5.17 – Carteira em $t = 10$	54

Figura 5.18 – Carteira em $t = 15$	55
Figura 5.19 – Carteira em $t = 20$	56
Figura 5.20 – Valor da carteira ao longo do horizonte de investimento T	57
Figura 5.21 – ASI: Carteira em $t = 0$	59
Figura 5.22 – ASI: Valor da carteira ao longo do horizonte de investimento T	60
Figura 5.23 – ASII: Carteira em $t = 0$	62
Figura 5.24 – ASII: Valor da carteira ao longo do horizonte de investimento T	62
Figura 6.1 – Evolução do valor das carteiras: Simulação X IBOVESPA	64
Figura 6.2 – Evolução do valor das carteiras: Simulação X CDI.....	65
Figura A.1 – Gráfico comparativo entre os retornos aritméticos e geométricos.....	75
Figura D.1 – <i>Single Linkage</i>	81
Figura D.2 – <i>Complete Linkage</i>	82
Figura D.3 – <i>Average Linkage</i>	82
Figura D.4 – Dendograma.....	83

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Risco e retorno de uma carteira composta por 2 ativos genéricos	7
Tabela 5.1 – Variáveis de entrada do modelo de otimização.....	40
Tabela 5.2 – Preços de fechamento do pregão do dia 09/09/2005	44
Tabela 5.3 – Carteira inicial.....	50
Tabela 5.4 – Carteira em $t = 0$	52
Tabela 5.5 – Carteira em $t = 5$	53
Tabela 5.6 – Carteira em $t = 10$	54
Tabela 5.7 – Carteira em $t = 15$	55
Tabela 5.8 – Carteira em $t = 20$	56
Tabela 5.9 – ASI: Carteira em $t = 0$	59
Tabela 5.10 – ASII: Carteira em $t = 0$	61
Tabela 6.1 – Análise de Rentabilidades: Simulação X IBOVESPA	64
Tabela 6.2 – Análise de Rentabilidades: Simulação X CDI	65
Tabela 6.3 – Rentabilidades das ações ao longo do horizonte de investimento T	66

1

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo aplicar os conceitos de pesquisa operacional adquiridos da engenharia de produção na área de otimização de carteiras em finanças.

Os conceitos de pesquisa operacional são amplamente utilizados em engenharia de produção para a modelagem de sistemas de estoques, problemas de transporte, teoria de filas, entre outros. Uma característica comum destes problemas é que eles lidam com a minimização ou maximização de uma função objetivo, expressa na forma de custo, distância percorrida ou tempo de espera. Ou seja, são problemas de otimização. WINSTON (1995) apresenta uma série de exemplos aplicados em situações reais sobre o tema.

Os conceitos de otimização também podem ser aplicados em carteiras de investimentos. Dada uma carteira de investimento composta por ativos financeiros, um investidor racional busca a maximização do retorno do capital investido na carteira de acordo com um dado nível de risco. Dessa forma, um algoritmo de otimização pode ser construído para a determinação dos pesos ótimos dos ativos financeiros que compõem a carteira ótima de investimento.

1.1 – Motivação

O problema da alocação ótima de ativos numa carteira de investimentos – *portfolio* – vem se tornando um tópico de extremo interesse por acadêmicos e profissionais que atuam na área de finanças nos últimos anos. Baseados no célebre trabalho de MARKOWITZ (1952), os pesquisadores vêm desenvolvendo modelos que buscam aprimorar as técnicas já comumente conhecidas.

Muitos autores têm estudado o problema da alocação dinâmica de carteiras de investimentos, em que a composição da carteira ótima é revisada ao longo de um

horizonte de investimento¹. Em oposição ao modelo estático criado por Markowitz, os pesquisadores utilizam uma variedade de métodos numéricos como resoluções de equações diferenciais parciais, simulação Monte Carlo, otimização estocástica, para tentar desenvolver um modelo dinâmico de alocação ótima de ativos. Entretanto, devido à complexidade destes modelos e do enorme esforço computacional que eles demandam, estes modelos acabam não sendo utilizados na prática por profissionais da área financeira, sendo delegados a pesquisadores e acadêmicos da área em geral.

A abordagem deste presente trabalho busca tentar preencher este espaço existente entre a teoria e a prática desses modelos multiperíodos de otimização. No Brasil, as técnicas de alocação ótima de carteiras estão ainda em estágio inicial de implementação, sendo, portanto, utilizados apenas os conceitos intitulados por Markowitz por grande parte dos tomadores de decisão do mercado financeiro brasileiro – bancos, fundos de pensão, companhias de seguro, fundos mútuos, entre outros.

Dessa forma, será apresentado um modelo que contemple um algoritmo de otimização multiperíodo baseado em métodos numéricos que possa ser utilizado na prática por um fundo de investimento brasileiro.

1.2 – A Empresa

Este trabalho foi realizado num fundo de investimentos financeiros que administra recursos de terceiros. O fundo foi constituído em 2001, sob a ótica de atuar baseado na análise dos fundamentos macroeconômicos e, consequentemente, gerar riqueza para seus cotistas.

Nos dois primeiros anos de existência, o fundo administrava apenas o dinheiro de seus sócios. A partir de 2003, ele passou a captar recursos de clientes externos e vem crescendo a cada ano de existência.

Atualmente, a gestora possui 5 tipos de fundos de investimento que juntos somam cerca de, aproximadamente, R\$ 300 milhões de reais sob sua gestão. Com a abertura recente do novo fundo de ações da empresa, técnicas sofisticadas de composição de carteiras estão sendo demandadas a cada dia. Isto decorre pelo fato de que, devido ao perfil do fundo, que busca retornos financeiros acima da média do mercado, os modelos atuais conhecidos já não se adequam, dado a sua enorme difusão

¹ Veja JOLIG (2003) e HIBIKI (2005).

pelo mercado financeiro do país, isto é, eles já são conhecidos por grande parte dos participantes do mercado.

Portanto, o desenvolvimento de um modelo inovador contribui para que a empresa possa obter um diferencial em relação aos seus competidores no mercado.

1.3 – Organização do Trabalho

O Capítulo 1 apresenta o tema do trabalho a ser desenvolvido bem como descreve a empresa na qual o trabalho foi realizado.

O Capítulo 2 descreve alguns conceitos necessários à compreensão deste trabalho. O capítulo começa com uma introdução a teoria moderna de carteiras desenvolvida inicialmente por MARKOWITZ (1952). Em seguida, são apresentadas as características do mercado de ações brasileiro, descrevendo seu produto – as ações – e o principal índice de ações do mercado brasileiro o IBOVESPA. Por último, descreve-se alguns métodos que tentam explicar a evolução dos preços das ações como os processos estocásticos e a simulação Monte Carlo.

O Capítulo 3 analisa os métodos de geração de árvores de cenários. O objetivo do capítulo é encontrar na teoria os métodos utilizados na modelagem de parâmetros aleatórios – preços das ações – sob a forma de árvores de cenários. Três métodos são apresentados: a simulação e *clustering*, os modelos de otimização e o modelo híbrido. Destes três métodos, um será escolhido para descrever os preços das ações que compõem a carteira a ser otimizada.

O Capítulo 4 descreve o modelo de programação linear a ser utilizado na resolução do problema de otimização de carteiras de investimento. O capítulo começa com o detalhamento da técnica de geração de árvores de cenários escolhida – simulação e *clustering*. Em seguida, o modelo de otimização é descrito de forma minuciosa: parâmetros, variáveis de decisão e função objetivo.

O Capítulo 5 apresenta os resultados obtidos na aplicação do modelo numa carteira composta por ações de empresas brasileiras. O modelo é testado num horizonte de investimento de um mês, em que a carteira de ações é revisada uma vez por semana. O capítulo se encerra com a análise de sensibilidade dos resultados encontrados, no qual dois casos particulares são estudados como uma generalização do modelo geral.

O Capítulo 6 é o capítulo de fechamento do trabalho. Neste capítulo serão analisadas as respostas obtidas no capítulo 5. Após a análise, serão apresentadas as conclusões e as recomendações para trabalhos futuros que podem ser desenvolvidos a partir do modelo construído neste trabalho.

As referências bibliográficas são apresentadas ao final do documento.

Os apêndices também fazem parte deste trabalho

2

CONCEITOS

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos relativos à área de finanças, necessários para uma melhor compreensão do trabalho. As características do mercado de ações brasileiro serão explicitadas, bem como alguns tópicos da teoria que descreve a evolução dos preços dos ativos financeiros.

2.1 – Teoria Moderna de Carteiras

A teoria moderna de carteiras – ou teoria de carteiras – foi introduzida em 1952 por Harry Markowitz² (MARKOWITZ, 1952). Antes de seu trabalho ter sido publicado e mudado os rumos da teoria das carteiras em finanças, os investidores concentravam-se exclusivamente nos riscos e retornos de ativos individuais na construção de suas carteiras de investimento. Logo, os investidores procuravam aqueles ativos que oferecessem as melhores oportunidades de rentabilidade com mínimo risco, para então construírem as suas carteiras.

Markowitz propõe que os investidores devem focar seus esforços na seleção de carteiras de investimentos baseados nos riscos-retornos da carteira como um todo, ao invés de compilarem carteiras de ativos que individualmente possuem riscos-retornos atrativos. Em outras palavras, os investidores devem focar sua atenção na seleção de carteiras, não em ativos individuais, dado que a diversificação de carteiras poderia levar a construção de carteiras “mais eficientes” (isto é, dado um nível de risco, existe uma carteira que possui um maior nível de retorno esperado), devido ao efeito da correlação entre os ativos.

Se tratarmos os retornos dos ativos de uma carteira como variáveis aleatórias, podemos atribuí-los medidas quantitativas de valores esperados, desvios padrões e correlações dos retornos dos ativos. Baseado nessas informações, pode-se calcular o

² Markowitz dividiu o prêmio Nobel de economia com William Sharpe e Merton Miller por seu trabalho sobre a teoria das carteiras trinta anos mais tarde.

retorno esperado e o risco de qualquer carteira construída com esses ativos, de acordo com o peso de cada ativo na carteira. Certamente, podemos construir uma carteira ótima com esses ativos, isto é, dado um nível de risco, encontramos aquela carteira com o maior retorno possível, dentre todas aquelas que constituem o nosso universo de escolha, ou vice-versa.

Esta definição retrata aquilo que Markowitz chamou de “fronteira eficiente”. Logo, os investidores devem escolher carteiras de investimentos que estejam na fronteira eficiente, pois elas estariam maximizando as suas utilidades esperadas dos retornos futuros.

O modelo proposto por Markowitz é baseado nas seguintes expressões:

$$E = \sum_{i=1}^N X_i \mu_i \quad (2.1)$$

$$V = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X_i X_j \sigma_{ij} \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^N X_i = 1 \quad (2.3)$$

$$X_i \geq 0 \quad (2.4)$$

onde:

E ... Retorno esperado da carteira;

V ... Variância da carteira;

X_i ... Porcentagem de cada ativo i alocada na carteira;

μ_i ... Retorno esperado de cada ativo i ;

σ_{ij} ... Covariância entre o par de ativos i e j , se i for diferente de j . Variância do ativo i , caso contrário.

Como exemplo, considere uma carteira composta por 2 ativos com as seguintes características:

Ativo	Retorno Esperado (R)	Volatilidade (σ) ³
A	$R_A = 20\%$	$\sigma_A = 15\%$
B	$R_B = 35\%$	$\sigma_B = 20\%$

Tabela 2.1 – Risco e retorno de uma carteira composta por 2 ativos genéricos

O retorno de uma carteira composta por esses 2 ativos ao longo de um horizonte de tempo pode ser calculado da seguinte forma⁴:

$$R_\pi = xR_A + (1 - x)R_B \quad (2.5)$$

onde:

R_π Retorno esperado da carteira;

x Fração alocada no ativo A;

R_A Retorno esperado do ativo A;

$1 - x$ Fração alocada no ativo B;

R_B Retorno esperado do ativo B.

Já o risco da carteira pode ser definido da seguinte forma:

$$\sigma_\pi = \sqrt{x^2 \sigma_A^2 + (1 - x)^2 \sigma_B^2 + 2x(1 - x)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B} \quad (2.6)$$

onde:

σ_π Risco da carteira;

x Fração alocada no ativo A;

σ_A^2 Variância do ativo A;

$1 - x$ Fração alocada no ativo B;

σ_B^2 Variância do ativo B;

ρ_{AB} Correlação entre os ativos A e B.

³ A volatilidade de um ativo pode ser definida como o desvio padrão do retorno geométrico do ativo.

⁴ Pressupõe-se que as distribuições dos retornos sobre os ativos individuais são normais.

Para visualizarmos os efeitos da diversificação da carteira, ilustramos a seguir o gráfico com a relação risco-retorno da carteira com os ativos A e B para diferentes valores de correlação entre os ativos.

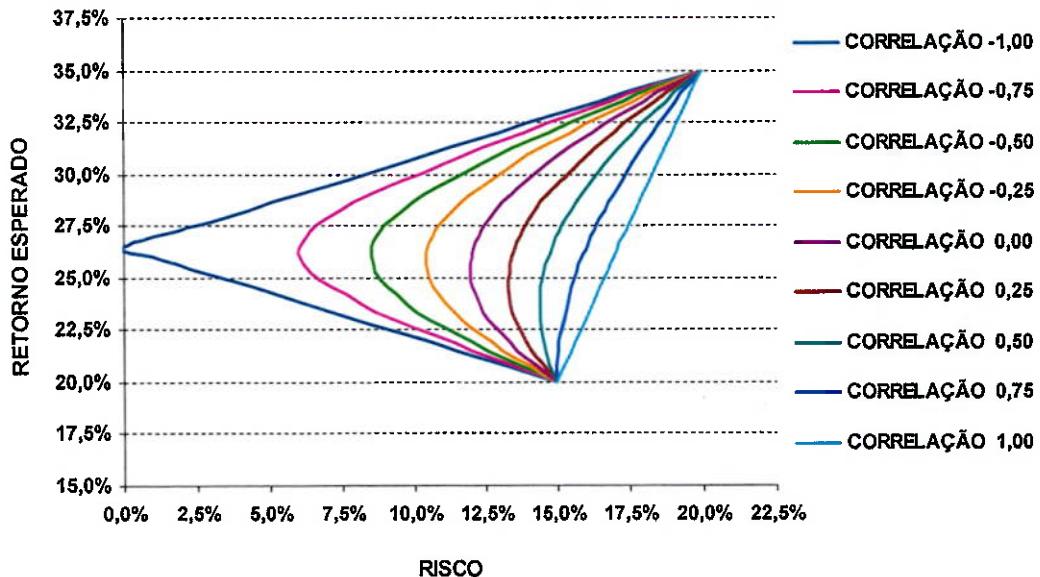


Figura 2.1: Relação risco-retorno de uma carteira composta por 2 ativos em função da correlação entre eles

Observamos que quando a correlação dos ativos é alta (maior que 0.70), não há melhora significativa na composição da carteira, dado que, para uma eventual notícia ou movimento de mercado, os ativos reagirão quase que da mesma maneira a estes. Entretanto, quando a correlação dos ativos é baixa (menor do que 0.70), podemos construir uma carteira com o mesmo nível de retorno, mas com um risco menor. No limite, para ativos com correlação perfeitamente negativa (igual a -1), podemos construir uma carteira com risco zero, isto é, o retorno esperado da carteira não se altera com qualquer movimento de mercado. Na prática, porém, é muito difícil de se encontrar ativos com correlação perfeitamente negativa.

A fronteira eficiente é definida como a região do gráfico onde encontramos “carteiras ótimas”, isto é, para um dado nível de risco, têm-se o máximo retorno possível e vice-versa. A fronteira eficiente é ilustrada através da linha AB na figura 2.2:

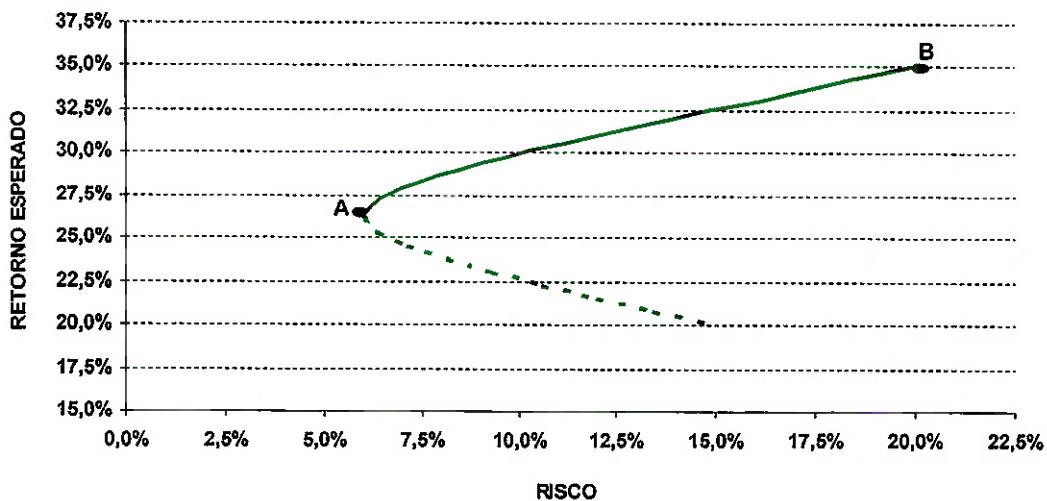


Figura 2.2 – Fronteira eficiente de Markowitz

2.2 – Ações

Ações são títulos de renda variável vendidos a pessoas físicas e jurídicas. Elas representam a menor fração do capital social de uma empresa.

As ações podem ser de três tipos:

- **ON – Denominadas Ordinárias:** são as ações que dão direito a voto no estatuto da empresa, além de participar dos resultados da companhia através do recebimento de dividendos. Os dividendos pagos às ações do tipo ON são 10% menores dos que os pagos às ações do tipo PN caso não seja especificado pelo estatuto. As ações do tipo ON geralmente possuem menor valor de mercado do que as do tipo PN e também menor liquidez, uma vez que a maioria dessas ações está em poder dos proprietários que não negociam com freqüência o papel;
- **PN – Denominadas Preferenciais:** são as ações que dão prioridade na participação dos resultados da empresa (dividendos), assim como no reembolso do capital, mas não tem direito a voto. As ações preferenciais passam a ter direito a voto quando a empresa deixa de pagar dividendos mínimos por três anos.

- **PNA, PNB ou PNC:** são também ações preferenciais que possuem características distintas das preferenciais comuns. Estas características são definidas por meio de estatutos. As diferenças variam de empresa para empresa, portanto, não é possível fazer uma definição geral deste tipo de ação.

No Brasil, as ações são negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA). Existem, basicamente, dois tipos de mercado:

- **Primário** – compreende as negociações realizadas em ofertas públicas iniciais (*IPOs – Initial Public Offers*) onde as empresas realizam a emissão de novas ações na bolsa de valores.
- **Secundário** – compreende as negociações diárias realizadas entre os agentes com as ações das empresas já existentes no mercado.

2.2.1 – Índice Bovespa (IBOVESPA)

O Índice Bovespa (IBOVESPA) é o mais importante indicador do desempenho médio das cotações do mercado de ações brasileiro. Compreende o valor atual de uma carteira teórica formada pelos principais papéis negociados na BOVESPA, representando o desempenho médio das ações que compõem o índice. A finalidade básica do IBOVESPA é a de servir como indicador médio (*benchmark*) do comportamento do mercado. Para tanto, as ações que compõem o índice respondem por mais de 80% do número de negócios e do volume financeiro verificados no mercado à vista.

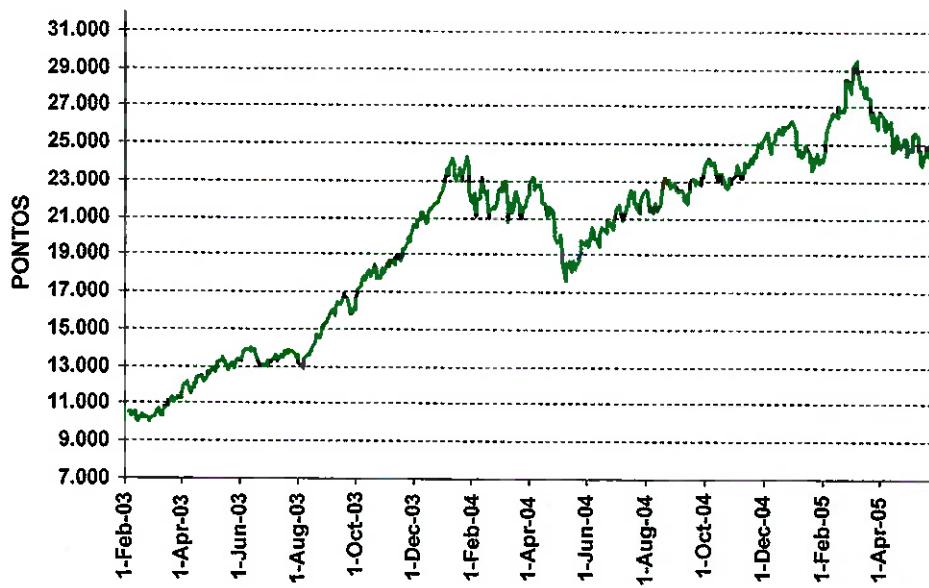


Figura 2.3 – Evolução do índice BOVESPA

2.2.2 – Classificação Setorial das Empresas Listadas na BOVESPA

As empresas negociadas na Bovespa podem ser classificadas de acordo com os setores e sub-setores econômicos em que elas atuam. Pode-se visualizar essa classificação a seguir:

- **Petróleo e Gás**
 - Petróleo e Gás
- **Materiais Básicos**
 - Mineração
 - Siderurgia e Metalurgia
 - Químicos
 - Madeira e Papel
 - Embalagens
 - Materiais Diversos
- **Bens Industriais**
 - Material de Transporte

- Equipamentos Elétricos
 - Máquinas e Equipamentos
 - Tecnologia da Informação
 - Serviços
 - Comércio
-
- **Construção e Transporte**
 - Construção e Engenharia
 - Transporte
-
- **Consumo Não Cíclico**
 - Alimentos
 - Bebidas
 - Fumo
 - Produtos de Uso Pessoal e de Limpeza
 - Saúde
 - Comércio
-
- **Consumo Cíclico**
 - Tecidos, Vestuário e Calçados
 - Utilidades Domésticas
 - Mídia
 - Hotelaria
 - Lazer
 - Comércio
-
- **Telecomunicações**
 - Telefonia Fixa
 - Telefonia Móvel
-
- **Utilidade Pública**
 - Energia Elétrica
 - Água e Saneamento

- Gás

- **Financeiro e Outros**

- Intermediários Financeiros
- Securitizadoras de Recebíveis
- Previdência e Seguros
- Exploração de Imóveis
- *Holdings* Diversificadas
- Serviços Diversos
- Fundos
- Outros

2.3 – Processos Estocásticos

Um processo estocástico $\{X(t), t \in T\}$ é uma coleção de variáveis aleatórias onde t representa, na maioria das vezes, o tempo e $X(t)$ representa o estado do processo no tempo t . Segundo HULL (1997), pode-se afirmar que um ativo segue um processo estocástico quando seu preço varia ao longo do tempo de forma aleatória. Desta forma, os processos estocásticos que explicam a evolução dos preços dos ativos podem ser classificados de duas formas:

Com relação ao fator tempo:

- **Discreto:** o valor do ativo pode variar apenas em certos pontos fixos no tempo, ou seja, o conjunto T ($t \in T$) é enumerável;
- **Contínuo:** o valor do ativo pode variar em qualquer ponto no tempo, ou seja, o conjunto T ($t \in T$) não é enumerável.

Com relação às variáveis do modelo (ativos):

- **Discreto:** o ativo pode assumir apenas determinados valores;
- **Contínuo:** o ativo pode assumir qualquer valor dentro de um certo intervalo.

2.3.1 – Tipos de Processos Estocásticos

2.3.1.1 – Processos de Markov

Um processo de Markov é um particular tipo de um processo estocástico, onde apenas o valor atual do ativo é relevante para prever o futuro. O histórico dos preços passados e o comportamento passado que levou à formação do preço atual do ativo são irrelevantes para o modelo.

Geralmente, pode-se afirmar que os preços de ações seguem um processo de Markov. Por exemplo, suponha que o preço da ação Telemar (TNLP4) esteja R\$ 37,00 hoje. Se a ação segue um processo de Markov, nossa projeção para o preço da ação no futuro não deve ser afetada pelo preço da ação há uma semana atrás, há um mês atrás ou há um ano atrás. A única informação relevante é o fato do preço da ação ser R\$ 37,00 hoje, isto é, o preço atual contém toda a informação embutida do histórico dos preços passados da ação.

2.3.1.2 – Processos de Wiener

Um processo de Wiener é um particular tipo de um processo estocástico de Markov. Ele é muito utilizado na Física para descrever o movimento de uma partícula que está sujeita a um grande número de pequenos choques moleculares e é muitas vezes chamado de *Movimento Browniano*.

O movimento dos preços de uma ação S pode ser explicado através de um processo de Wiener. Segundo JORION (2003), o modelo pressupõe que as inovações do preço do ativo não são autocorrelacionados e que pequenas oscilações nos preços dos ativos podem ser descritas pela seguinte equação:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dz \quad (2.7)$$

ou

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dz \quad (2.8)$$

onde dz é uma variável aleatória normalmente distribuída com média zero e variância dt . Essa variável condiciona os choques aleatórios sobre o preço e não depende de informações passadas. A variável é *browniana* no sentido de que sua variância diminui com o intervalo de tempo, $VAR(dz) = dt$, o que exclui, por exemplo, movimentos com saltos repentinos. O processo também é geométrico porque todos os parâmetros são multiplicados pelo preço atual S_t . Os parâmetros μ , e σ , representam o desvio e a volatilidade instantânea no momento t , que podem evoluir com o tempo. Para simplificar, trabalha-se com parâmetros μ e σ constantes.

Integrando a equação (2.7) para um intervalo finito, tem-se, aproximadamente:

$$\Delta S_t = S_{t-1} (\mu \Delta t + \sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}) \quad (2.9)$$

onde ε é uma variável aleatória normal padrão, isto é, uma variável aleatória com média zero e variância um e $\Delta t = \lambda / n$, onde λ é o horizonte de investimento e n o número de incrementos (períodos) ao longo deste horizonte.

HULL (1997) apresenta uma figura em que a evolução do caminho aleatório do preço de uma ação qualquer, ao longo do tempo, pode ser ilustrada da seguinte forma:

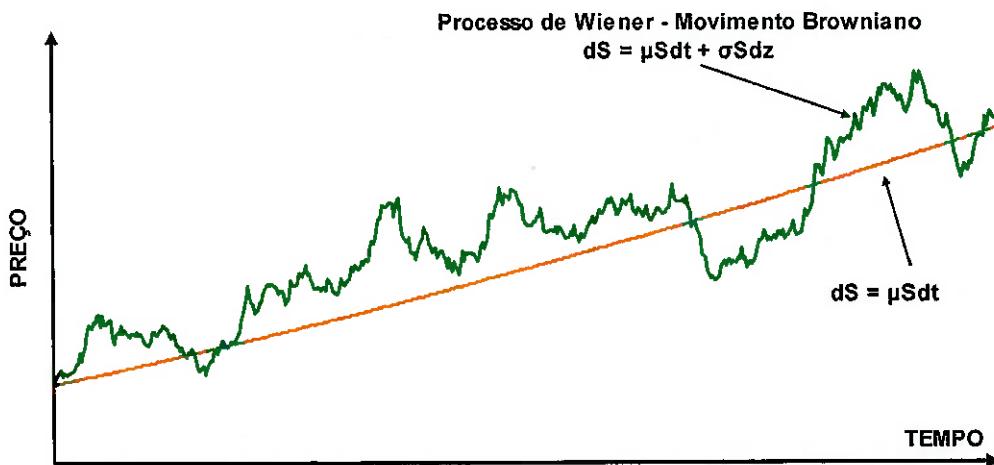


Figura 2.4 – Processo de Wiener: Movimento Browniano

2.4 – Simulação Monte Carlo

No tópico anterior, foi apresentada a equação que descreve o movimento de uma ação ao longo do tempo. Na prática, as carteiras de investimento possuem mais de uma fonte de risco financeiro (ações), o que nos obriga a trabalhar com uma distribuição multivariada. Tal fato introduz uma complicação computacional na modelagem do caminho a ser percorrido pelos preços dos ativos de uma carteira, haja vista que os ativos são correlacionados e esta correlação também evolui com o tempo.

JORION (2003) sugere que uma solução para este tipo de problema consiste na utilização de métodos de simulação numérica, como o método de Monte Carlo. Os métodos de simulação Monte Carlo geram pontos independentes pseudo-aleatórios que tentam preencher um espaço N -dimensional, onde N é o número de fatores de risco (ações) que influenciam os preços de uma carteira.

As simulações conseguem tratar adequadamente carteiras que dependem de mais de uma variável porque o tempo de processamento aumenta linearmente com N , enquanto que ele aumenta geometricamente com N para métodos binomiais ou de diferenças finitas.

Considere uma carteira composta por N fatores de risco (ações). No caso dos ativos não serem correlacionados, a solução para o problema da evolução do preço da carteira se dá de forma direta. Generalizando a equação (2.9) para N ativos, temos:

$$\Delta S_{j,t} = S_{j,t-1} (\mu_j \Delta t + \sigma_j \varepsilon_{j,t} \sqrt{\Delta t}) \quad (2.10)$$

onde os valores de ε são independentes entre os períodos de tempo e entre as séries $j = 1, \dots, N$. Através da simulação Monte Carlo, geram-se números pseudo-aleatórios que descrevem o comportamento a ser percorrido pelos ativos independentemente. O valor da carteira formada pelos N ativos num determinado horizonte de tempo λ é dado pelo somatório do valor de cada ativo j no instante de tempo λ .

Entretanto, as variáveis (ativos) são em geral correlacionadas. Isto faz com que a simulação se torne computacionalmente mais robusta, haja vista que para um determinado instante de tempo Δ_t , a carteira possuirá uma matriz de variância-covariância (Σ_t).

Umas das formas de se obter uma simulação completa, sem nenhuma simplificação com relação às correlações entre os ativos da carteira, consiste na utilização de uma técnica matemática conhecida como método de decomposição de Cholesky⁵ da matriz variância-covariância dos ativos.

Como exemplo, considere uma carteira composta por 2 ativos A e B . Admitindo-se que os ativos apresentem uma média dos retornos $\mu_j = 0$ e que Δt seja igual a um, obtemos as seguintes equações a partir de (2.10):

$$R_{A,t} = \frac{\Delta S_{A,t}}{S_{A,t-1}} = \sigma_A \varepsilon_{A,t} \quad (2.11)$$

$$R_{B,t} = \frac{\Delta S_{B,t}}{S_{B,t-1}} = \sigma_B \varepsilon_{B,t} \quad (2.12)$$

Entretanto, devido à correlação dos ativos que formam a carteira ser diferente de zero, isto é, $\rho_{AB} \neq 0$, incorporamo-la no modelo através da seguinte operação matricial:

$$R = L X Z \quad (2.13)$$

ou

$$\begin{bmatrix} R_{A,t} \\ R_{B,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{A,t} \\ \varepsilon_{B,t} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

onde a matriz L transforma as variáveis aleatórias $\varepsilon_{A,t}$ e $\varepsilon_{B,t}$ que seguem a distribuição normal padronizada, em variações correlacionadas dos fatores de risco $R_{A,t}$ e $R_{B,t}$.

A matriz L pode ser encontrada através da decomposição de Cholesky da matriz variância-covariância dos ativos. Como a matriz de variância-covariância é simétrica ($A = A'$) e definida positiva ($x' A x > 0 \forall x \neq 0$), ela pode ser fatorada em $A = LU = LL'$, utilizando a decomposição de Cholesky:

⁵ Veja o Apêndice C

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_A \sigma_B \rho_{AB} \\ \sigma_A \sigma_B \rho_{AB} & \sigma_B^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{11} & I_{21} \\ 0 & I_{22} \end{pmatrix} = LL' \quad (2.15)$$

Resolvendo a equação acima, temos que:

$$L = \begin{pmatrix} \sigma_A & 0 \\ \sigma_B \rho_{AB} & \sigma_B \sqrt{1 - \rho_{AB}^2} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Logo, a evolução dos retornos dos ativos da carteira pode ser descrita pelas seguintes equações:

$$R_{A,t} = \sigma_A \varepsilon_{A,t} \quad (2.17)$$

$$R_{B,t} = \sigma_B \rho_{AB} \varepsilon_{A,t} + \sigma_B \sqrt{1 - \rho_{AB}^2} \varepsilon_{B,t} \quad (2.18)$$

A decomposição de Cholesky será utilizada no modelo de construção de árvores de cenário a ser apresentado no capítulo 4.

3

MÉTODOS DE GERAÇÃO DE ÁRVORES DE CENÁRIO

Neste capítulo, serão abordadas as principais técnicas de geração de árvores de cenários existentes apresentadas por GULPINAR *et al.* (2001). Essas técnicas são comumente utilizadas no intuito de reduzir de forma significativa o esforço computacional exigido na resolução de problemas de otimização financeira multiperíodo. Dessas técnicas apresentadas, uma será escolhida para explicar a evolução dos preços dos ativos, sob a forma de uma árvore de cenários, e servirá de base para a resolução do modelo de otimização a ser apresentado no capítulo 4.

3.1 – Introdução

Dada uma determinada carteira de investimento, composta por n ativos com risco, um gestor deve acessar as informações do mercado financeiro como os preços dos ativos e custos de transação, de forma a determinar a composição da carteira a cada instante de tomada de decisão ao longo de um horizonte de investimento. O objetivo do gestor é determinar a composição ótima da carteira, composta pelos n ativos, a cada instante t , de forma a maximizar a sua riqueza futura em T , onde $t = 1, 2, \dots, T$. Esse problema é comumente conhecido como um problema de otimização financeira multiperíodo.

Contudo, dado que os preços dos ativos variam ao longo do tempo de forma aleatória, o problema de tomada de decisão envolve incertezas. Logo, podemos modelar essas incertezas, caracterizadas pela evolução dos preços dos ativos, segundo os processos estocásticos apresentados no capítulo anterior, transformando o problema num problema de otimização estocástica multiperíodo (HU, 2003).

Entretanto, os problemas de otimização estocástica multiperíodo possuem certas particularidades, como o cálculo de expectativas condicionais de variáveis aleatórias,

que dificultam a sua resolução. Além disto, o tamanho e a complexidade desses problemas podem crescer rapidamente com a adição de novas incertezas no modelo. Dessa forma, exceto para casos extremamente simples, os problemas de programação estocástica multiperíodo podem apenas serem formulados, mas não resolvidos. Logo, muitos autores têm se concentrado em criar métodos e algoritmos que exploram e simplificam a resolução desses problemas. Como exemplo, podemos citar os métodos de geração de árvores de cenários, umas das técnicas mais empregadas na resolução destes tipos de problema atualmente.

O objetivo da geração de árvores de cenários é representar de forma clara e concisa a evolução dos possíveis caminhos que uma variável aleatória pode seguir. Dado que uma variável aleatória pode assumir diferentes valores ao longo do tempo, segundo uma determinada distribuição de probabilidades, estes métodos buscam tentar reproduzir esses caminhos através da construção de cenários ou estados da natureza.

O processo de geração de cenários transforma implicitamente o problema estocástico num problema determinístico de grandes dimensões que, naturalmente, contém um erro originado pelo processo de discretização. Dessa forma, supõe-se que o futuro se reduz a um número finito de pontos no tempo, com um horizonte temporal de comprimento fixado. Em cada data futura, toma-se uma aproximação da distribuição contínua, supondo que apenas possa ocorrer um número finito de estados, definidos como uma realização dos valores dos elementos aleatórios considerados.

A figura 3.1 representa de forma ilustrativa o modelo de uma árvore de cenários. O conjunto dos cenários corresponde ao conjunto das “folhas” e dos “nós” da árvore. Nela, identificamos claramente todos os elementos que compõem o processo de discretização da variável aleatória ao longo do tempo através da utilização do modelo de árvores.

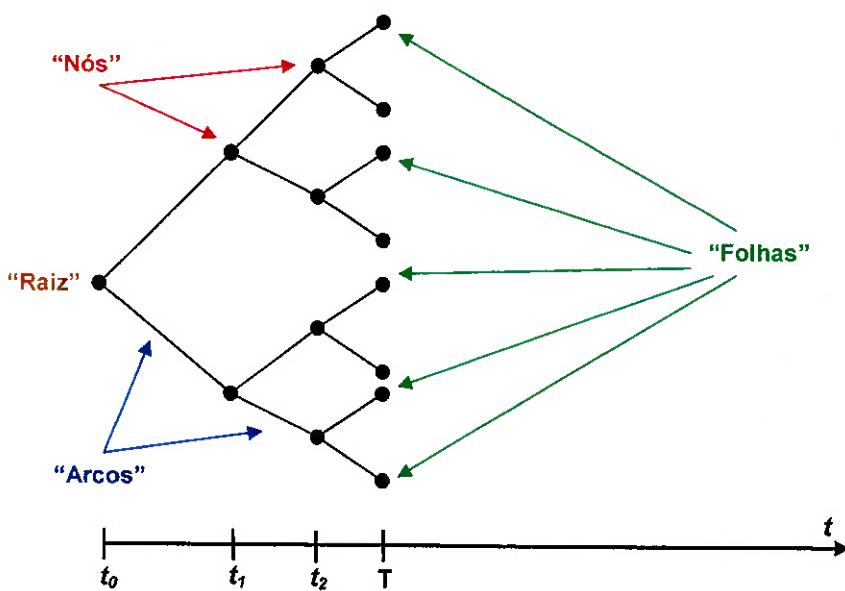


Figura 3.1 – Modelo de uma árvore de cenários

A “raiz” da árvore representa o estado inicial, isto é, o valor atual da variável aleatória. Para um dado “galho” da árvore, desde a “raiz” até uma de suas “folhas”, teríamos um particular cenário, isto é, uma particular seqüência de realizações da variável aleatória. Os “nós” da árvore representam estados possíveis e os “arcos”, transições com probabilidade positiva. O número de arcos que parte de cada nó pode não ser o mesmo em cada tempo: é razoável considerar que nos tempos mais próximos do atual, em que há melhor conhecimento da situação, haja vantagem em haver um número maior de possibilidades do que quando se está afastando no tempo. Particularmente, no caso onde há dois estados no final de cada período para cada estado no início deste, temos uma árvore binomial.

Existem diversas técnicas para a geração de árvores de cenários. Apresentaremos aqui, a simulação e *clustering*, os modelos de otimização e o modelo híbrido.

3.2 – Simulação e *Clustering*

Esta técnica de geração de árvores de cenários consiste na simulação de um número grande de caminhos que uma variável aleatória possa seguir, respeitando as características de sua distribuição de probabilidades (média, variância, assimetria e

curtose). Inúmeras técnicas de simulação podem ser utilizadas, como por exemplo, a simulação Monte Carlo. A simulação Monte Carlo é considerada uma ferramenta computacional valiosa e flexível na teoria moderna de finanças: é fácil conseguir um conjunto de caminhos simulados representando as possíveis realizações de uma variável aleatória, dada uma determinada equação estocástica ou um modelo de séries temporais que represente o processo da sua evolução ao longo do tempo. Em seguida, aplica-se uma técnica de *clustering*⁶ para obter as ramificações desejadas, de forma a construir a árvore de cenários.

A obtenção da árvore de cenários no método de simulação e *clustering* pode ser realizada de duas formas: simulação em paralelo ou simulação seqüencial. Detalharemos sucintamente cada uma delas a seguir.

3.2.1 – Simulação em Paralelo

Na simulação em paralelo, cada um dos cenários pertencentes a um dado nó da árvore é obtido a partir do valor atual da variável aleatória (raiz). No tempo inicial $t = 0$, o valor atual da variável aleatória forma a raiz da árvore. Simula-se um número adequado de representações do fenômeno a considerar, gerando caminhos que a variável aleatória possa seguir. Através de uma técnica de *clustering*, determinam-se os respectivos *clusters*, cujos centróides constituem os nós do nível um ($t = 1$). Esses clusters são então divididos em *sub-clusters*, cujos centróides representam os nós do nível dois ($t = 2$) e assim sucessivamente até chegar às folhas da árvore ($t = T$).

A figura 3.2 ilustra o processo da simulação em paralelo. A figura foi adaptada de GULPINAR *et al.* (2001). As linhas pontilhadas denotam os caminhos obtidos por simulação. As elipses representam os *clusters* obtidos em cada instante de tempo t e as linhas cheias, a árvore de cenários resultante. Percebe-se que o número total de caminhos simulados em todos os nós num dado nível da árvore é sempre igual ao número original de caminhos simulados. Esta é a característica da simulação em paralelo: com uma única simulação, determina-se a árvore de cenários resultante.

⁶ Veja o Apêndice D.

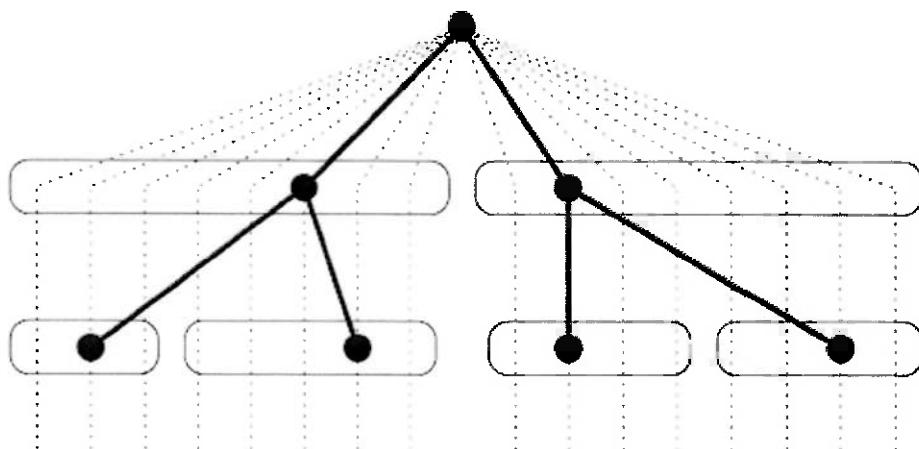


Figura 3.2 – Simulação em paralelo

3.2.2 – Simulação Seqüencial

Na simulação seqüencial, todos os cenários de um dado nó são obtidos a partir do valor encontrado no centróide do *cluster* que constitui o nó imediatamente anterior. Dessa forma, dado que o valor representativo da variável aleatória de um determinado nó não pode ser encontrado até que o *cluster* do tempo imediatamente anterior determine o seu centróide, os cenários não podem ser gerados fora do horizonte cronológico de tempo. Por isso a designação seqüencial da simulação. No tempo inicial $t = 0$, o valor atual da variável aleatória forma a raiz da árvore. A partir desse nó inicial comum, são gerados aleatoriamente os caminhos que vão constituir os *clusters* de tempo $t = 1$, formados na primeira iteração do algoritmo, e cujos centróides são associados com os nós do nível um; repete-se o processo de simulação e *clustering* para cada nó do nível um obtendo-se os nós do nível dois ($t = 2$), e assim sucessivamente até se chegar às folhas ($t = T$). Neste caso, não há a necessidade de usar um maior número de caminhos simulados na raiz do que perto das folhas, sendo que um número constante de caminhos pode ser usado em todos os nós.

A figura 3.3 ilustra o processo da simulação seqüencial. A figura foi adaptada de GULPINAR *et al.* (2001). As linhas pontilhadas denotam os caminhos obtidos por simulação. As elipses representam os *clusters* obtidos em cada instante de tempo t e as linhas cheias, a árvore de cenários resultante. Percebe-se que, diferentemente da simulação em paralelo, para cada nó encontrado é necessário realizar uma nova simulação.

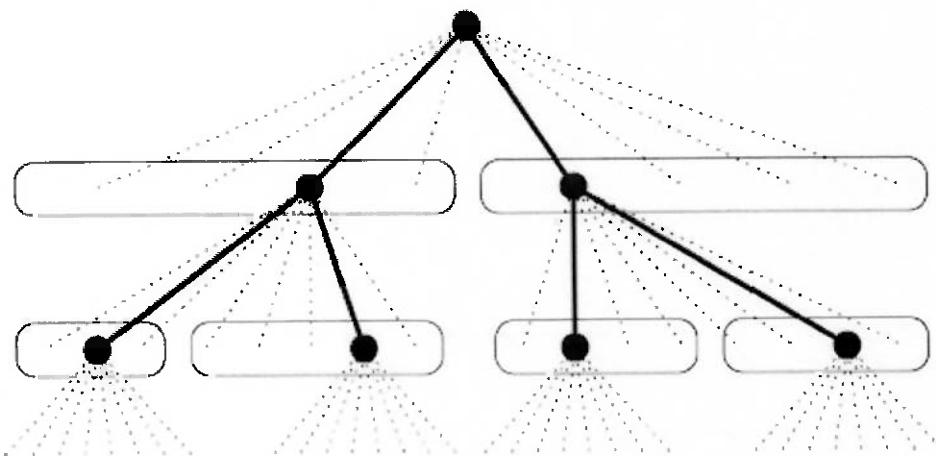


Figura 3.3 – Simulação seqüencial

3.3 – Modelo de Otimização

Esta técnica de geração de árvore de cenários utiliza modelos de otimização para a obtenção dos valores associados aos nós da árvore de cenários⁷. A aproximação da distribuição contínua por uma distribuição discreta envolve o seguinte procedimento: primeiramente, obtém-se por simulação uma amostra de tamanho adequado para a distribuição em estudo. Em seguida, dividem-se os resultados em conjuntos, selecionando um ponto representativo de cada intervalo e atribuindo uma probabilidade a cada ponto.

Em geral, utiliza-se uma árvore simétrica na modelagem, isto é, com um mesmo número de ramos que emanam de cada nó. O algoritmo para obter a árvore através de um modelo de otimização pode ser descrito da seguinte forma: Seja S o conjunto de todas as propriedades estatísticas e SV_i o valor específico de cada propriedade $i, i \in S$. Se x e p denotam o vetor preço e o vetor probabilidade, respectivamente, a expressão matemática da propriedade estatística i pode ser definida com uma função dessas variáveis aleatórias $f_i(x, p)$. O objetivo é construir x e p de forma que a soma dos quadrados das diferenças entre as propriedades estatísticas da distribuição simulada e as especificações seja minimizadas (HOYLAND *et al.*, 2001). Matematicamente, temos:

⁷ Veja GULPINAR *et. al.* (2001) e PFLUG (2001).

$$\text{MIN}_{x, p} \quad \sum_{i \in S} w_i (f_i(x, p) - SV_i)^2 \quad (3.1)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum p_i = 1, \quad p \geq 0, \quad (3.2)$$

onde w_i é o peso da propriedade estatística i .

Geralmente, este problema de otimização não-linear não é convexo. Logo, a solução encontrada pode ser um ótimo local. Entretanto, o simples fato da solução apresentar propriedades similares àquelas da distribuição contínua já é suficiente para obtermos uma solução satisfatória.

Duas formas de se obter a árvore de cenários serão apresentadas. Se a árvore de cenários é construída considerando cada nó separadamente, teremos uma *otimização seqüencial*. Neste caso, um problema de otimização de pequena dimensão é construído e resolvido para cada nó da árvore. Alternativamente, se considerarmos todos os nós da árvore e gerarmos a árvore inteira de uma só vez, num problema de otimização de grande dimensão, teremos uma *otimização global*.

3.3.1 – Otimização Seqüencial

Para ilustrarmos o algoritmo da otimização seqüencial, utilizaremos um exemplo em que se pretende simular, através de uma árvore de cenários, o comportamento de um conjunto de n ativos com risco, num horizonte temporal T . O conjunto dos cenários corresponde ao conjunto das folhas da árvore e dos nós no tempo $t \geq 1$, nível t da árvore. Um cenário s é um caminho da raiz até uma folha e o tempo t especifica um nó particular deste caminho. Assim, $e = (s, t)$ indica um nó da árvore e Ω_t , o conjunto dos nós da árvore no tempo $t \geq 1$, nível t da árvore.

Os momentos centrais e momentos conjuntos das variáveis aleatórias fazem parte das especificações estatísticas do modelo, sendo os quatro primeiros momentos centrais: valor esperado, desvio padrão, assimetria e curtose e as covariâncias, os momentos conjuntos.

Seja $I = \{1, 2, \dots, n\}$ o conjunto dos ativos considerados. Sejam M_{ik} , para $k = 1, 2, 3, 4$, os quatro primeiros momentos centrais da distribuição do ativo i ; C_{ii} a

covariância dos ativos i e l ($i, l \in I$ e $i < l$); N_i , o número de ramos que emanam de um nó no tempo $t = 1, \dots, T-1$.

O preço x_{ij} dos cenários e as probabilidades p_j das variáveis, com $i \in I$ e $j = 1, \dots, N_i$, são variáveis de decisão no seguinte problema de otimização não linear a ser resolvido em cada nó:

$$\text{MIN}_{x, p} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^4 w_{ik} (m_{ik} - M_{ik})^2 + \sum_{i, l \in I, i < l} w_{il} (c_{il} - C_{il})^2 \quad (3.3)$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{N_i} p_j = 1 \quad (3.4)$$

$$m_{ii} = \sum_{j=1}^{N_i} x_{ij} p_j, \quad i \in I, \quad (3.5)$$

$$m_{ik} = \sum_{j=1}^{N_i} (x_{ij} - m_{ii})^k p_j, \quad i \in I, k = 2, 3, 4, \quad (3.6)$$

$$c_{il} = \sum_{j=1}^{N_i} (x_{ij} - m_{ii})(x_{lj} - m_{ll}) p_j, \quad i, l \in I, i < l, \quad (3.7)$$

$$p_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N_i, \quad (3.8)$$

onde $w_{ik} = w'_k / M_{ik}^2$ e $w_{il} = w'_l / C_{il}^2$ são pesos nos quais w'_k para $k = 1, 2, 3, 4$, traduzem a importância relativa dos momentos centrais e w'_l a das covariâncias dos ativos $i, l \in I$. Embora não demonstrado o cálculo dos momentos centrais M_{ik} e das covariâncias C_{il} , podemos garantir que os valores são diferentes de zero. O resultado é demonstrado em GULPINAR *et al.* (2001).

Nesta formulação, a primeira restrição indica que a soma das probabilidades na ramificação do nó deve ser igual a um. As outras restrições dizem respeito aos momentos que aparecem na função objetivo. A última restrição garante que as probabilidades são não-negativas.

O algoritmo de geração da árvore pode ser descrito da seguinte forma: na raiz da árvore considera-se o preço histórico dos n ativos, representados por um vetor $H_0 = (P_1, \dots, P_n)$. Estes preços podem ser observados durante um determinado período de tempo: mensal ou semanalmente. Para cada nó da árvore $e \in \Omega_t$, $t = 1, \dots, T-1$, o

conjunto H_0 é atualizado incluindo a seqüência de preços gerados. Dessa forma, na raiz da árvore, apenas um problema de otimização é construído e resolvido, obtendo-se N_0 realizações dos preços e suas probabilidades. Para cada ramo que sai da raiz, especificam-se as propriedades estatísticas condicionadas para o período $t = 1$, tomando $H_e = H_0 \cup X_e, e \in \Omega_1$, onde X_e denota o vetor formado pelos preços dos n ativos em e . Logo, em $t = 1$, temos N_0 problemas de otimização, cujas soluções dão os resultados para $t = 2$. O processo continua até o último período, gerando sempre cenários condicionados pelos resultados anteriores.

A figura 3.4 ilustra o processo da otimização seqüencial. A figura foi adaptada de GULPINAR *et al.* (2001). As linhas cheias representam os problemas de otimização previamente resolvidos. As linhas tracejadas denotam os problemas de otimização futuros a serem resolvidos. Já as linhas em negrito, o problema de otimização atual.

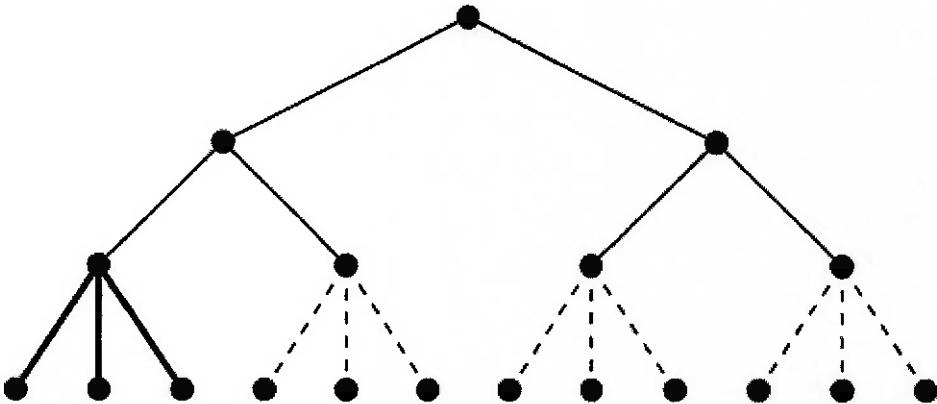


Figura 3.4 – Otimização seqüencial

3.3.2 – Otimização Global

A abordagem da otimização seqüencial implica que as propriedades estatísticas sejam especificadas apenas localmente, em cada nó da árvore. Dessa forma, o modelo não permite um controle direto das propriedades estatísticas globais, sobre todos os períodos considerados. Logo, podemos dizer que a otimização seqüencial gera árvores de cenários subótimas. Assim, um modelo que gera a árvore de forma global é mais realístico.

A principal desvantagem da otimização global é que o tamanho do problema de otimização cresce em termos do número de variáveis e restrições, do número de ativos, da estrutura da árvore de cenários em cada estágio e do número de momentos centrais das variáveis.

O modelo de otimização global segue a mesma idéia do modelo seqüencial. Entretanto, ao invés da construção da árvore ser feita nó por nó, a árvore inteira é gerada resolvendo um problema de otimização de grande dimensão. Dada a notação matemática apresentada na seção anterior, o problema de otimização global pode ser formulado da seguinte forma:

$$MIN_{x,p} \quad \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{e \in \Omega_i} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^4 w_{ike} (m_{ike} - M_{ike}(H_e))^2 + \sum_{i,l \in I, i < l} w_{ile} (c_{ile} - C_{ile}(H_e))^2 \right) \quad (3.9)$$

$$s.a \quad \sum_{j=1}^{N_i} p_{je} = 1 \quad e \in \Omega_i, t = 0, 1, \dots, T-1, \quad (3.10)$$

$$m_{ile} = \sum_{j=1}^{N_i} x_{ije} p_{je}, \quad i \in I, e \in \Omega_i, t = 0, 1, \dots, T-1 \quad (3.11)$$

$$m_{ike} = \sum_{j=1}^{N_i} (x_{ije} - m_{ile})^k p_{je}, \quad i \in I, k = 2, 3, 4, e \in \Omega_i, t = 0, 1, \dots, T-1 \quad (3.12)$$

$$c_{ile} = \sum_{j=1}^{N_i} (x_{ike} - m_{ile})(x_{ile} - m_{ile}) p_{je}, \quad i, l \in I, i < l, \quad (3.13)$$

$$i, l \in I, i < l, e \in \Omega_i, t = 0, 1, \dots, T-1, \quad (3.14)$$

$$p_{je} \geq 0, \quad j = 1, \dots, N_i, e \in \Omega_i, t = 0, 1, \dots, T-1, \quad (3.15)$$

A figura 3.5 ilustra o processo da otimização global. A figura foi adaptada de GULPINAR *et al.* (2001). Percebe-se que neste caso, a árvore inteira é gerada de uma só vez, num único problema de grande dimensão.

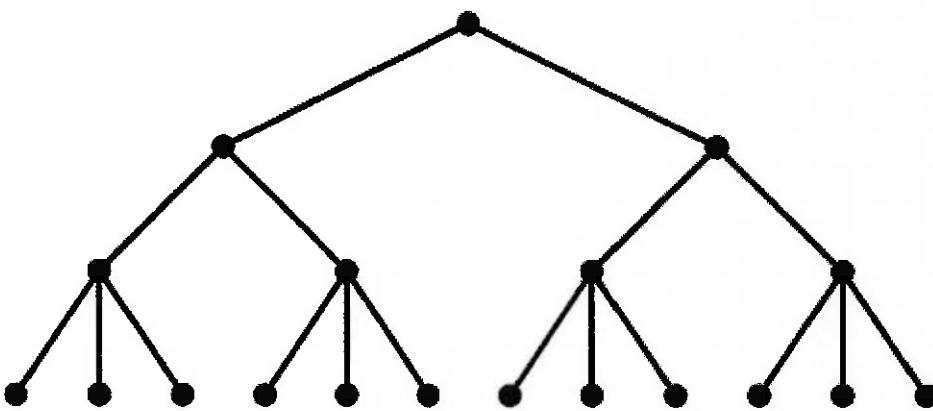


Figura 3.5 – Otimização global

3.4 – Modelo Híbrido

No modelo de otimização, cenários econômicos são gerados de forma a garantir que as propriedades estatísticas da distribuição simulada estejam de acordo com as da distribuição em estudo, enquanto que na simulação, os centróides dos *clusters* representam de algum modo os cenários.

O modelo híbrido combina as idéias principais dos modelos de simulação e otimização. Nesta abordagem, os preços são obtidos como centróides dos *clusters* da simulação e substituídos, como variáveis de decisão, nos modelos de simulação. As probabilidades são então determinadas resolvendo o problema de otimização, cujo tamanho é relativamente menor do que aqueles dos problemas de otimização.

3.5 – Comentários Finais

As técnicas de geração de árvores de cenários constituem um grande avanço computacional, na medida em que elas reduzem drasticamente o tamanho do problema de descrever o processo da evolução dos valores que uma variável aleatória pode assumir, sem grandes perdas de informação do processo. Desta forma, torna-se computacionalmente viável a implementação de um modelo de otimização multiperíodo de carteiras. O modelo de otimização a ser implementado será apresentado no próximo capítulo.

4

DEFINIÇÃO DO MODELO

Neste capítulo, descreveremos sucintamente o modelo utilizado na construção das carteiras de investimento. Tal modelo envolve o uso da simulação e *clustering* para a geração da árvore de cenários. Em seguida, aplica-se um modelo de programação linear de grande porte para a obtenção da carteira ótima de investimento em cada instante de tempo t .

4.1 – Introdução

Baseado nos métodos de geração de cenários apresentados anteriormente, decidiu-se criar um modelo que fosse relativamente simples e de fácil implementação, haja vista que ele deverá ser colocado em prática numa situação real num fundo de investimento. Dessa forma, optou-se pela abordagem utilizada por HU (2003).

O modelo proposto por HU (2003) é baseado na construção da árvore de cenários por simulação. Além disto, o modelo utiliza a técnica da simulação em paralelo. Dessa forma, há apenas a necessidade de se executar uma vez a simulação, na raiz da árvore, economizando tempo e esforço computacional. Após a simulação, uma técnica de *clustering* é aplicada para classificar os caminhos simulados em *clusters*, de forma a construir uma árvore de cenários. Dessa forma, limitamos dramaticamente o número de variáveis de decisão do problema – os caminhos simulados são substituídos por *clusters* que representam as possíveis realizações da variável aleatória. Em seguida, um modelo de otimização baseado em programação linear é aplicado de forma a obter a carteira ótima de investimento em cada instante de tempo t .

A seguir, descreveremos sucintamente os principais passos do modelo.

4.2 – Simulação e *Clustering*

Considere um modelo a ser aplicado num horizonte de investimento T , onde o tempo varia de $t = 0$ a $t = T$, e decisões condicionadas são tomadas a cada instante de tempo t . Um conjunto formado por N ativos com risco está disponível para a seleção da carteira de investimento.

Seja $P_t = (P_{t1}, \dots, P_{tn})'$, $t = 0, \dots, T$, o vetor de preços dos ativos com risco. Claramente, este vetor comporta as variáveis aleatórias de nosso modelo de simulação.

As possíveis realizações dos preços dos ativos P_t onde $t = 0, \dots, T$, são descritas através de J caminhos simulados, obtidos via simulação Monte Carlo:

$$J^{(q)} = \{P_0^{(q)}, P_1^{(q)}, \dots, P_T^{(q)}\}, \quad q = 1, \dots, J,$$

começando do estado inicial P_0 e transcorrendo todo o horizonte de investimento, desde $t = 0$ até $t = T$. No início do horizonte de investimento, assume-se que o estado inicial P_0 é conhecido com certeza. A cada instante de tempo t , os caminhos que possuem características semelhantes são divididos em *clusters*, e diferentes decisões podem ser feitas em cada *cluster*. O processo é repetido para $t = 1, \dots, T-1$, até se conseguir uma árvore de cenários.

Na formação dos *clusters*, a dissimilaridade entre dois pontos, correspondente aos vetores de preços $P_t^{(q_1)}$ e $P_t^{(q_2)}$, é medida utilizando a distância euclidiana, que corresponde à seguinte expressão:

$$dist(P_t^{(q_1)}, P_t^{(q_2)}) = \left\{ \sum_{j=1}^J |P_{tj}^{(q_1)} - P_{tj}^{(q_2)}|^2 \right\}^{1/2} \quad (4.1)$$

Claramente, percebe-se que quanto menor a distância, mais similares são os pontos um com o outro, indicando que eles podem fazer parte do mesmo *cluster*. Dessa forma, a árvore de cenários pode ser gerada utilizando um método de agrupamento, a partir da matriz de dissimilaridades dos preços dos ativos. Entre os métodos existentes na literatura, empregou-se o método de WARD, que é amplamente usado em problemas

de otimização financeira e considerado superior aos outros métodos existentes na prática. O Apêndice D traz uma descrição detalhada da técnica de *clustering*.

A figura 4.1 ilustra o processo da construção da árvore de cenários através do método da simulação e *clustering*, com simulação em paralelo. Os passos representam a identificação dos *clusters* e *subclusters* em cada período de tempo t .

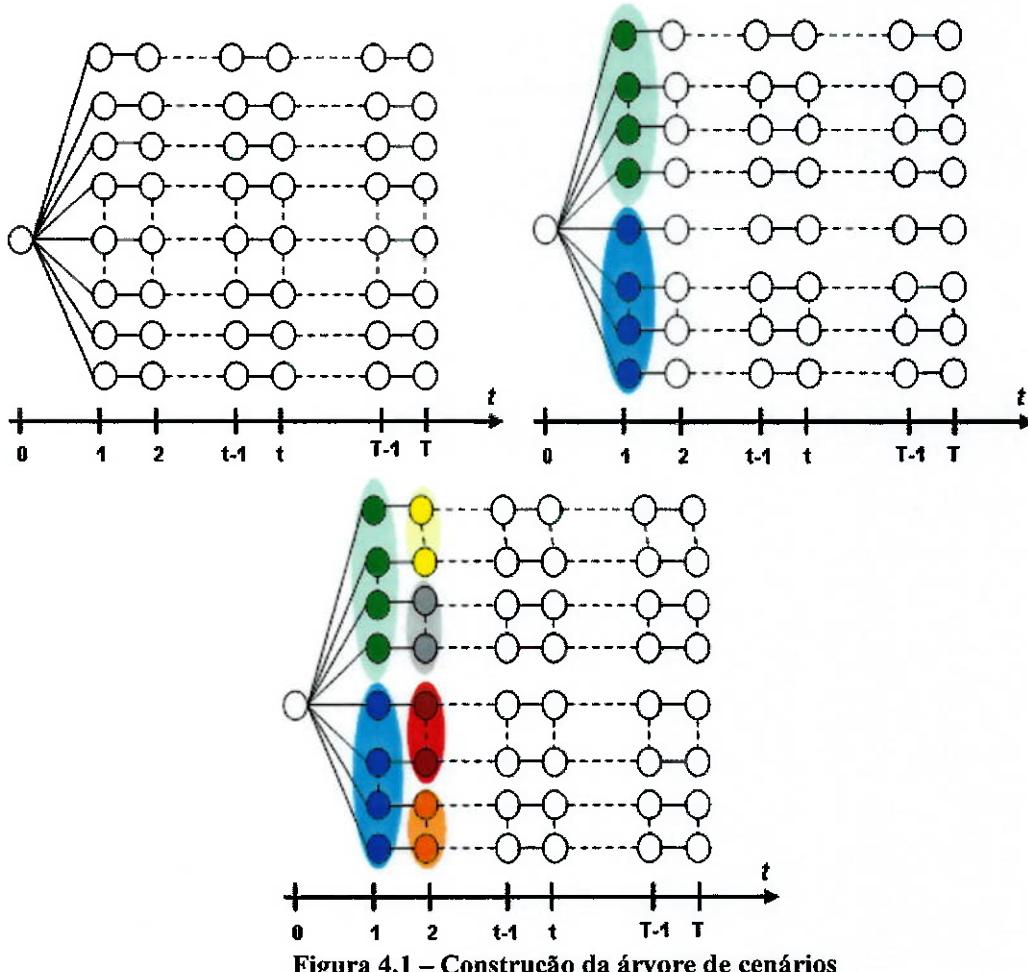


Figura 4.1 – Construção da árvore de cenários

4.2.1 – Identificação do Centróide do Cluster

Uma vez obtido um conjunto aceitável de valores agregados, ou seja, obtido o *cluster*, é preciso representá-lo por um único valor que tornará o dado associado com o nó numa árvore de cenários. Este valor é comumente chamado de centróide do *cluster*. Assim, é preciso fixar a noção de centro, sendo as mais utilizadas as seguintes: média, mediana, centro de gravidade, entre outras. Optou-se pela utilização da média, dado que

a média representaria num valor único o conjunto dos pontos obtidos no *cluster*. Entretanto, tal escolha poderia ser viesada, dado que se no conjunto dos pontos obtidos houvesse a presença de valores extremos, tanto para cima, quanto para baixo, o valor representado pela média poderia estar distorcido. Para contornar este eventual problema, utilizou-se um número relativamente grande de caminhos simulados na simulação Monte Carlo. Consequentemente, o número de caminhos passando por cada *cluster* seria maior, gerando valores médios menos distorcidos.

Dessa forma, o cálculo do vetor dos valores que compõem o centróide do cluster pode ser obtido através da seguinte expressão:

$$C_{ts} = \frac{1}{J_{ts}} \sum_{q=1}^{J_{ts}} P_i^{(q)} \quad i = 1, \dots, N; \quad (4.2)$$

onde:

C_{ts} ...Centróide do cluster do tempo t e do cenário S , composto por um vetor de médias dos preços dos ativos com risco;

$P_i^{(q)}$...Preço do ativo i no caminho q ;

J_{ts} ...Número de caminhos que passam pelo cluster do tempo t e do cenário S .

4.3 – Formulação Matemática

A formulação matemática envolve o desenvolvimento de um modelo a ser aplicado numa carteira de investimentos composta por N ativos com risco e um ativo livre de risco (*risk free*), num horizonte de investimento T . Além disso, não é permitido a alavancagem financeira da carteira. Isto ocorre quando o investidor aloca mais de 100% do patrimônio da carteira nos ativos com risco. Isto seria possível se o investidor tivesse dinheiro emprestado à taxa livre de risco no mercado para a compra dos ativos com risco.

Embora o modelo de otimização multiperíodo proposto seja baseado no trabalho de HU (2003), a formulação matemática a ser desenvolvida foi adaptada de BARRO *et al.* (2004), com algumas modificações. Esta formulação é simples e mais fácil de ser implementada computacionalmente do que aquela proposta por HU (2003).

4.3.1 – Parâmetros do Modelo

Primeiro, definimos os parâmetros, bem como as notações que serão empregadas no modelo de simulação:

$I = \{1, \dots, N\}$: conjunto dos ativos que podem ser escolhidos para formar a carteira;

$\pi_s, s = 1, \dots, S$: probabilidade de ocorrência do cenário s ;

$X_{is}(t), i \in I, t = 0, \dots, T$: quantidade do ativo i no tempo t no cenário s na carteira;

$A_{is}(t), i \in I, t = 0, \dots, T-1$: quantidade do ativo i comprado no tempo t no cenário s na carteira;

$V_{is}(t), i \in I, t = 0, \dots, T-1$: quantidade do ativo i vendido no tempo t no cenário s na carteira;

$X_{n+1s}(t), t = 0, \dots, T$: quantidade de caixa no tempo t no cenário s na carteira;

cta : custo de transação expresso como porcentagem do total dos ativos comprados;

ctv : custo de transação expresso como porcentagem do total dos ativos vendidos;

$d^+ = (1 + cta), d^- = (1 - ctv)$;

r : taxa livre de risco, supostamente constante ao longo do tempo e sobre todos os cenários;

$P_{is}(t), i \in I, t = 0, \dots, T$: preço do ativo i no tempo t no cenário s ;

$R_s(t), t = 0, \dots, T$: riqueza no tempo t no cenário s , dado pelo valor da carteira em t ;

4.3.2 – Variáveis de Decisão

Em seguida, definimos as variáveis de decisão para cada estágio da simulação:

- Variáveis em $t = 0$

No início do horizonte de investimento, assume-se que toda informação é conhecida com certeza.

- $A(0) = (A_1(0), A_2(0), \dots, A_n(0))'$: quantidade do ativo i , $i \in I$, comprado em $t = 0$.
- $V(0) = (V_1(0), V_2(0), \dots, V_n(0))'$: quantidade do ativo i , $i \in I$, vendido em $t = 0$.

- Variáveis em $t = 1, \dots, T-1$

- $A(t, s) = (A_{1s}(t), A_{2s}(t), \dots, A_{ns}(t))'$: quantidade do ativo i , $i \in I$, comprado no tempo t no cenário s .
- $V(t, s) = (V_{1s}(t), V_{2s}(t), \dots, V_{ns}(t))'$: quantidade do ativo i , $i \in I$, vendido no tempo t no cenário s .
- $X(t, s) = (X_{1s}(t), X_{2s}(t), \dots, X_{ns}(t))'$: quantidade do ativo i , $i \in I$, na carteira no tempo t no cenário s .
- $X_{n+1s}(t)$: quantidade de caixa na carteira no tempo t no cenário s .

- Variáveis em $t = T$

- $X(T, s) = (X_{1s}(T), X_{2s}(T), \dots, X_{ns}(T))'$: quantidade do ativo i , $i \in I$, na carteira no tempo $t = T$ no cenário s .
- $X_{n+1s}(t)$: quantidade de caixa na carteira no tempo $t = T$ no cenário s .

4.3.3 – Função Objetivo

A função objetivo busca a maximização da riqueza futura do indivíduo. O problema é então formulado como um problema de programação linear de grande porte com uma matriz de coeficientes esparsa.

Matematicamente, temos:

$$\begin{aligned} \text{MAX}_{\substack{X(0,s), \dots, X(T,s) \\ s=1, \dots, S}} \quad & \sum_{s=1}^S \pi_s R_s(T) \\ \pi_s > 0 \quad & \sum_{s=1}^S \pi_s = 1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

s.a.

$$X_{is}(t+1) = X_{is}(t) + A_{is}(t) - V_{is}(t), \quad (4.4)$$

$$X_{n+1s}(t+1) = (1+r) \left[X_{n+1s}(t) - d^+ \sum_{i=1}^n P_{is}(t) A_{is}(t) + d^- \sum_{i=1}^n P_{is}(t) V_{is}(t) \right], \quad (4.5)$$

$$A_{is}(t) \geq 0, \quad (4.6)$$

$$V_{is}(t) \geq 0, \quad (4.7)$$

$$t = 0, \dots, T-1;$$

$$R_s(t) = X_{n+1}(t) + \sum_{i=1}^n X_{is}(t) P_{is}(t), \quad (4.8)$$

$$X_{is}(0) = X_{i0}, \quad (4.9)$$

$$X_{n+1s}(0) = X_{n+10}, \quad (4.10)$$

$$X_{is}(t) \geq 0, \quad (4.11)$$

$$X_{n+1s}(t) \geq 0, \quad (4.12)$$

$$t = 0, \dots, T; \quad i = 0, \dots, N; \quad s = 1, \dots, S;$$

$$X(t, s) = \{X_{1s}(t), \dots, X_{ns}(t), X_{n+1s}(t), A_{1s}(t), \dots, A_{ns}(t), V_{1s}(t), \dots, V_{ns}(t)\}$$

para $t = 0, \dots, T-1$;

$$X(T, s) = \{X_{1s}(T), \dots, X_{ns}(T), X_{n+1s}(T)\}$$

para $t = T$;

As restrições 4.4 e 4.5 são, respectivamente, restrições de estoque dos ativos e fluxos de caixas. Conforme mencionado anteriormente, o modelo não permite a alavancagem financeira. A restrição 4.8 diz respeito à riqueza do indivíduo num instante de tempo t e num cenário s dado pela somatório do caixa mais o valor a mercado dos ativos multiplicado pelas respectivas quantidades. As demais restrições ilustram a não negatividade das variáveis do modelo.

4.4 – Comentários Finais

Conforme apresentado neste capítulo, o modelo desenvolvido possui um grande avanço para o mercado financeiro brasileiro, devido ao fato de que a grande maioria dos gestores de carteiras de investimento utiliza ainda o modelo estático baseado em MARKOWITZ (1952). O modelo foi baseado nos trabalhos de HU (2003) e BARRO *et al.* (2004) e sua implementação será descrita no próximo capítulo, numa carteira de investimento composta por ações. Destaca-se ainda a utilização da técnica de *clustering* no modelo, uma ferramenta matemática simples e desconhecida para muitos do mercado financeiro brasileiro, que possui um imenso benefício na classificação de grupos.

5

RESOLUÇÃO, RESULTADOS E ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Neste capítulo, será aplicado o modelo de otimização numa carteira de investimentos composta por ações. Elaboraremos passo a passo a aplicação do modelo desenvolvido numa situação real, vivida pelos gestores de carteiras de investimento. Além disto, apresentaremos os principais resultados obtidos com a análise de sensibilidade do problema.

5.1 – Introdução

Uma vez apresentado o modelo de otimização de carteiras de investimento, iniciaremos a parte prática deste trabalho. Em uma primeira etapa, será feita a análise da performance da carteira obtida de acordo com o modelo geral, conforme definido por BARRO *et. al* (2004). Em seguida, será feita uma análise de sensibilidade com a introdução de novas restrições no modelo para uma posterior análise do comportamento da carteira nestas situações.

O horizonte de investimento considerado na simulação das carteiras foi $T = 20$ dias úteis (1 mês). O horizonte engloba o período de 09 de setembro de 2005 a 07 de outubro de 2005. Além disso, decisões de mudança de investimento poderão ser tomadas uma vez por semana. Assim, em cada instante de tomada de decisão t ($t = 0, t = 5, t = 10, t = 15$), encontraremos uma nova composição da carteira simulada pelo modelo. Embora o modelo proposto apresente decisões de tomada de investimento a cada unidade de tempo t , onde $t = 0, 1, 2, \dots, T$, decidiu-se pelo rebalanceamento semanal da carteira. Dessa forma, o modelo se aproxima da realidade vivida pelos gestores de carteiras, onde as decisões de investimento tomadas não são de curto prazo.

Todos os passos do modelo proposto foram simulados utilizando o software MATLAB versão 6.1. Dado o número de variáveis do problema e o número de

restrições, os softwares convencionais não seriam aptos a resolver este tipo de problema. O MATLAB possui uma grande vantagem, pois ele trabalha com dados representados na forma de matrizes. Além disto, o software possui alguns algoritmos prontos, como a aplicação da técnica de *clustering* e a resolução de problemas de programação linear, fato este que simplificou consideravelmente a aplicação do modelo em estudo.

5.2 – Definição das Variáveis de Entrada do Modelo

De acordo com MARKOWITZ (1952), a adequação da diversificação de uma carteira não depende somente do número de ativos que a compõe. A razão para isto reside no fato de ser mais provável as empresas de um mesmo ramo de negócios terem piores desempenhos ao mesmo tempo, do que empresas de diferentes ramos de negócios.

O mesmo raciocínio vale para o risco de uma carteira. A fim de minimizar o risco de uma carteira, os investidores devem apostar em empresas com características econômicas não similares. Geralmente, essas empresas possuem correlação menor que as firmas de um mesmo setor econômico.

Baseado nessas informações, o processo de decisão das variáveis de entrada do modelo respeitou os seguintes critérios:

- 1) Buscou-se uma ação que representasse cada setor econômico das empresas listadas na BOVESPA, totalizando um total de 9 ações.
- 2) Dentro de cada setor, optou-se pela ação que apresentasse um expressivo volume de negociação. Pelo fato do modelo matemático ter de rebalancear a carteira periodicamente, o risco de liquidez⁸ teria de ser minimizado.
- 3) Buscou-se uma ação que fizesse parte do índice BOVESPA. Dessa forma, a carteira poderia ter seu desempenho avaliado de acordo com o índice *benchmark* do setor.
- 4) As ações podem ser tanto preferenciais (PN) quanto ordinárias (ON).

⁸ O risco de liquidez de um ativo, às vezes chamado de risco de liquidez de mercado/produto, surge quando uma transação não pode ser efetuada a preços correntes de mercado em razão do tamanho da posição, quando comparada aos lotes normalmente transacionados.

Respeitando os critérios acima, as seguintes ações foram selecionadas para fazerem parte do modelo:

NÚMERO	SETOR ECONÔMICO	AÇÃO	CÓDIGO
1	Telecomunicações	Telemar PN*	TNLP4
2	Petróleo e Gás	Petrobrás PN*	PETR4
3	Bens Industriais	Embraer PN*	EMBR4
4	Materiais Básicos	Vale R Doce PNA*	VALE5
5	Consumo Não Cíclico	Ambev PN*	AMBV4
6	Financeiro e Outros	Itaúbanco PN*	ITAU4
7	Utilidade Pública	Cemig PN*	CMIG4
8	Consumo Cíclico	Net PN*	NETC4
9	Construção e Transporte	CCR Rodovias ON	CCRO3

*Fazem parte do IBOVESPA

Tabela 5.1 – Variáveis de entrada do modelo de otimização

Para a elaboração do modelo de otimização, foram coletados os preços de fechamento diários das ações no período de 22 de fevereiro de 2005 a 09 de setembro de 2005. A seguir, ilustramos a evolução do preço dessas ações ao longo deste período:

- **TNLP4**

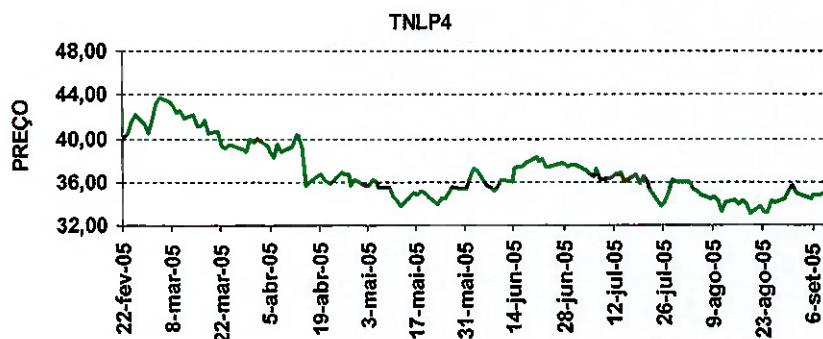


Figura 5.1 – Evolução do preço da TNLP4

- PETR4

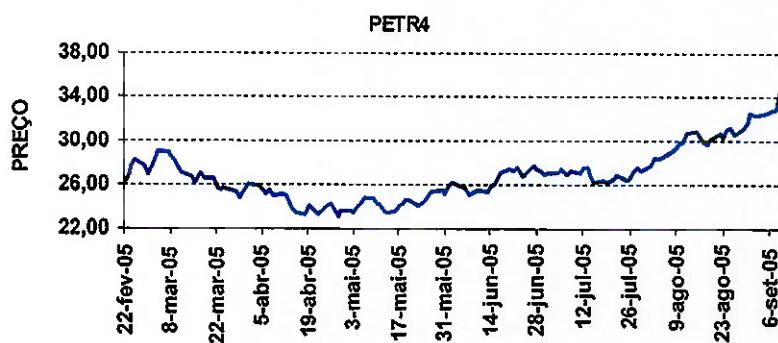


Figura 5.2 – Evolução do preço da PETR4

- EMBR4

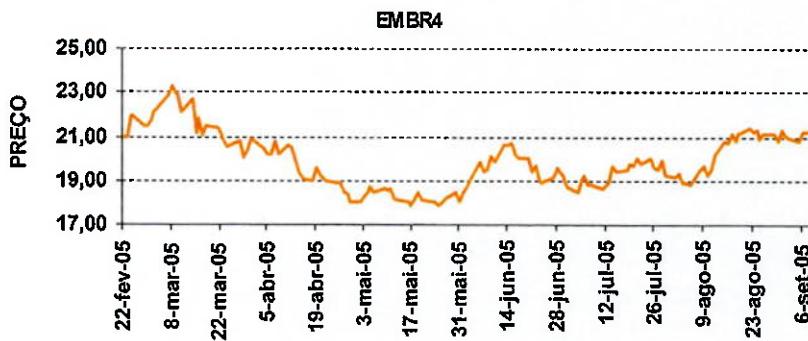


Figura 5.3 – Evolução do preço da EMBR4

- VALE5

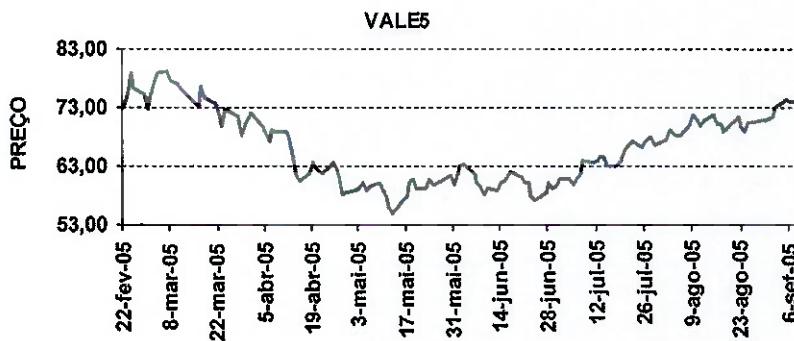


Figura 5.4 – Evolução do preço da VALE5

- **AMBV4**

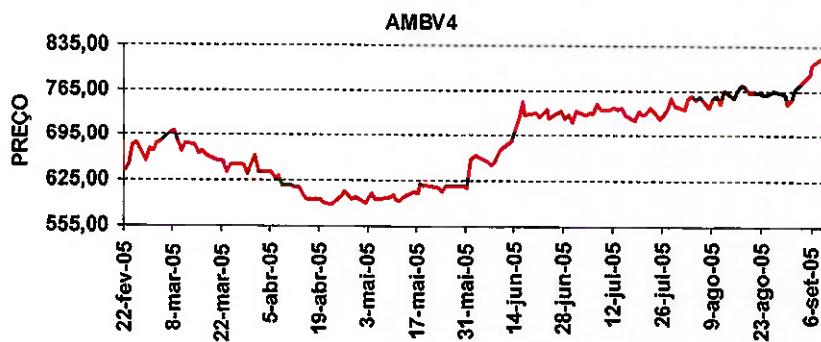


Figura 5.5 – Evolução do preço da AMBV4

- **ITAU4**

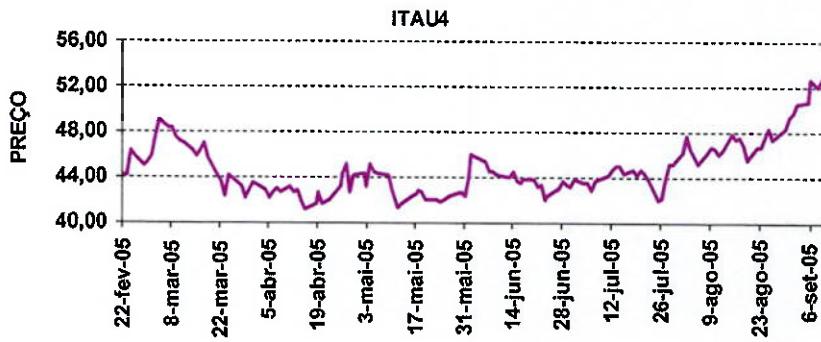


Figura 5.6 – Evolução do preço da ITAU4

- **CMIG4**

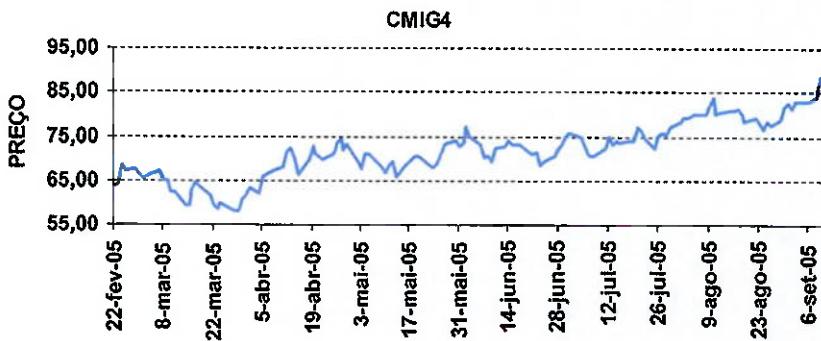


Figura 5.7 – Evolução do preço da CMIG4

- NETC4

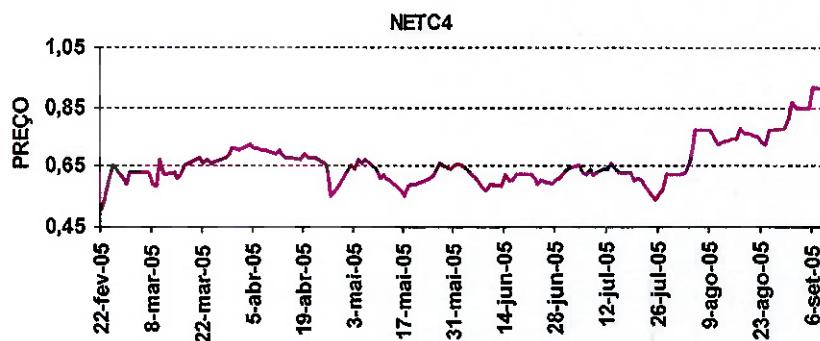


Figura 5.8 – Evolução do preço da NETC4

- CCRO3

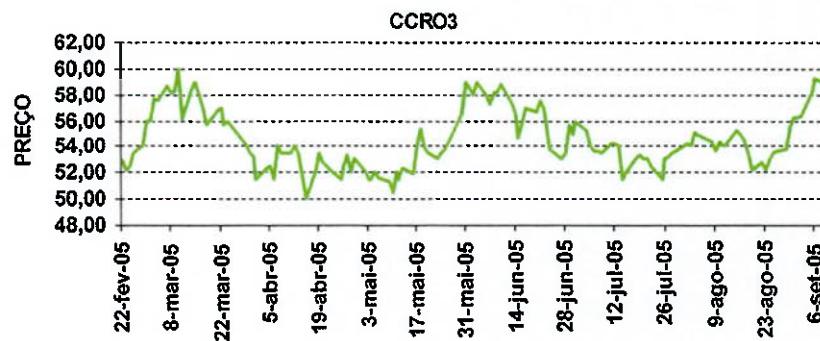


Figura 5.9 – Evolução do preço da CCRO3

5.3 – Simulação Monte Carlo e *Clustering*

Uma vez definida as variáveis de entrada do modelo, iniciou-se o algoritmo de seleção da carteira ótima. O modelo começa com a simulação dos preços das ações que compõem a carteira.

A tabela 5.2 mostra os preços de fechamento do pregão da BOVESPA do dia 09 de setembro de 2005 das ações que compõem a carteira a ser estudada:

CÓDIGO	PREÇO (R\$)
TNLP4	34,95
PETR4	34,52
EMBR4	21,29
VALE5	74,90
AMBV4	818,95
ITAU4	52,60
CMIG4	88,75
NETC4	0,93
CCRO3	60,00

Tabela 5.2 – Preços de fechamento do pregão do dia 09/09/2005

Os preços de fechamento do pregão do dia 09 de setembro de 2005 serão utilizados como os preços iniciais na simulação Monte Carlo, ou seja, eles constituirão a “raiz” da árvore de cenários a ser obtida.

Para a construção da matriz de variância-covariância dos ativos, utilizaram-se os dados diários dos retornos dos preços dos ativos no período de 22 de fevereiro de 2005 até 09 de setembro de 2005. Os retornos foram calculados como sendo os retornos geométricos⁹ dos preços dos ativos num instante de tempo t . A partir das séries de retornos geométricos, as volatilidades e as respectivas covariâncias foram então calculadas utilizando um modelo EWMA¹⁰, numa janela de 20 dias úteis. A figura 5.10 ilustra a matriz de variância-covariância obtida:

TNLP4	PETR4	EMBR4	VALE5	AMBV4	ITAU4	CMIG4	NETC4	CCRO3
0,02631%	0,01151%	0,00425%	0,01070%	0,00633%	0,01766%	0,01841%	0,03183%	0,00759%
0,01151%	0,02383%	0,00781%	0,01392%	0,00486%	0,01605%	0,01120%	0,01778%	0,00752%
0,00425%	0,00781%	0,03017%	0,00612%	0,00271%	0,00826%	-0,00259%	0,00476%	-0,00517%
0,01070%	0,01392%	0,00612%	0,02852%	0,00690%	0,01602%	0,01543%	0,01455%	0,00554%
0,00633%	0,00486%	0,00271%	0,00690%	0,02198%	0,00778%	0,00344%	0,01107%	0,00208%
0,01766%	0,01605%	0,00826%	0,01602%	0,00778%	0,03285%	0,01606%	0,02624%	0,01076%
0,01841%	0,01120%	-0,00259%	0,01543%	0,00344%	0,01606%	0,04243%	0,02498%	0,01095%
0,03183%	0,01778%	0,00476%	0,01455%	0,01107%	0,02624%	0,02498%	0,14119%	0,02060%
0,00759%	0,00752%	-0,00517%	0,00554%	0,00208%	0,01076%	0,01095%	0,02060%	0,02752%

Figura 5.10 – Matriz de variância-covariância

⁹ Veja o Apêndice A.

¹⁰ Veja o Apêndice B.

Simulação Monte Carlo

Antes de efetuarmos a simulação Monte Carlo da carteira, precisamos aplicar o método da decomposição de Cholesky na matriz de variância-covariância dos ativos, conforme apresentado no item 2.4 do capítulo 2. Aplicando o método, encontramos a seguinte matriz triangular inferior L :

	TNLP4	PETR4	EMBR4	VALE5	AMBV4	ITAU4	CMIG4	NETC4	CCRO3
TNLP4	1,62210%	0,00000%	0,00000%	0,00000%	0,00000%	0,00000%	0,00000%	0,00000%	0,00000%
PETR4	0,70941%	1,37107%	0,00000%	0,00000%	0,00000%	0,00000%	0,00000%	0,00000%	0,00000%
EMBR4	0,26214%	0,43398%	1,66138%	0,00000%	0,00000%	0,00000%	0,00000%	0,00000%	0,00000%
VALE5	0,65980%	0,87383%	0,08832%	1,39827%	0,00000%	0,00000%	0,00000%	0,00000%	0,00000%
AMBV4	0,39050%	0,15233%	0,06196%	0,23187%	1,40175%	0,00000%	0,00000%	0,00000%	0,00000%
ITAU4	1,08864%	0,60750%	0,16659%	0,32874%	0,12405%	1,25693%	0,00000%	0,00000%	0,00000%
CMIG4	1,13522%	0,22920%	-0,39487%	0,48264%	-0,15781%	0,12544%	1,57237%	0,00000%	0,00000%
NETC4	1,96198%	0,28191%	-0,09698%	-0,01516%	0,21941%	0,24752%	0,11363%	3,17152%	0,00000%
CCRO3	0,46792%	0,30630%	-0,46498%	0,05752%	-0,00443%	0,34951%	0,15092%	0,28845%	1,41155%

Figura 5.11 – Decomposição de Cholesky da matriz variância-covariância

Dessa forma, os retornos dos ativos podem ser obtidos utilizando a seguinte equação:

$$\mathbf{R} = \mathbf{L} \mathbf{X} \mathbf{E} \quad (5.1)$$

onde \mathbf{R} é o vetor de retornos dos ativos simulados que queremos encontrar, \mathbf{L} é a matriz triangular inferior resultado da decomposição de Cholesky da matriz variância covariância e \mathbf{E} é um vetor composto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d), onde ε_i é um choque aleatório que apresenta distribuição normal com média zero e variância 1 ($N(0,1)$).

A simulação Monte Carlo foi então realizada utilizando um horizonte de investimento $T = 20$ dias úteis com $J = 1000$ caminhos simulados¹¹. Dessa forma, encontramos um vetor, composto pelos retornos de cada um dos nove ativos, para cada instante de tempo t , onde $t = 1, 2, \dots, T$ e para cada caminho simulado q , onde $q = 1, 2, \dots, J$. A evolução dos preços dos ativos é então calculada com base nos vetores de retornos geométricos encontrados na simulação Monte Carlo, utilizando a seguinte expressão:

¹¹ Este foi o número máximo de caminhos que o computador conseguiu simular no modelo.

$$P_t^{(q)} = P_{t-1}^{(q)} * EXP(r_t^{(q)} * \Delta t) \quad (5.2)$$

$$t = 1, 2, \dots, T$$

$$q = 1, 2, \dots, J$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

onde $\Delta_t = 1$, neste caso.

Dado que o problema é de grandes dimensões, não é possível representar graficamente o vetor dos preços dos ativos ao longo do horizonte de investimento. Como exemplo, representamos na figura 5.12 a evolução dos possíveis caminhos que a ação TNLP4 pode seguir, dado que ela faz parte de uma carteira composta por 9 ações¹².

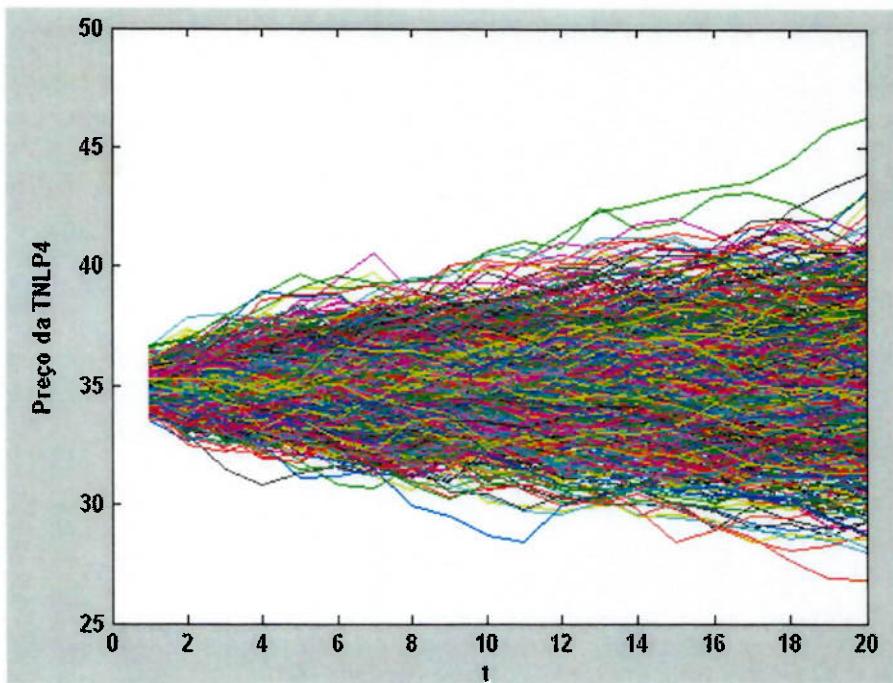


Figura 5.12 – Simulação Monte Carlo para a ação TNLP4

¹² O leitor mais atento deve perceber que os possíveis caminhos que a TNLP4 pode seguir estão condicionados à covariância da ação TNLP4 com as outras ações que compõem a carteira, dado que a simulação Monte Carlo é aplicada à carteira e não a cada ação separadamente.

Clustering

A partir dos caminhos simulados, iniciou-se o processo da divisão dos *clusters* para a obtenção dos centróides que constituirão os nós da árvore de cenários. Em cada instante de tomada de decisão t ($t = 0, t = 5, t = 10, t = 15$), foi aplicada a técnica de *clustering*, obtendo 2 *subclusters* para cada *cluster* inicial, ou seja, dois estados da natureza no final de cada período para cada estado no início deste. Dessa forma, obtivemos um modelo binomial da evolução dos preços das ações.

A figura 5.13 traz a árvore de cenários resultante da ação TNLP4 proveniente da aplicação da técnica de *clustering* na carteira. Da mesma forma que na simulação Monte Carlo, devido a grande dimensão do problema, não é possível representar graficamente a árvore de cenários inteira, com o vetor de preços das ações que compõem a carteira em cada nó da árvore.

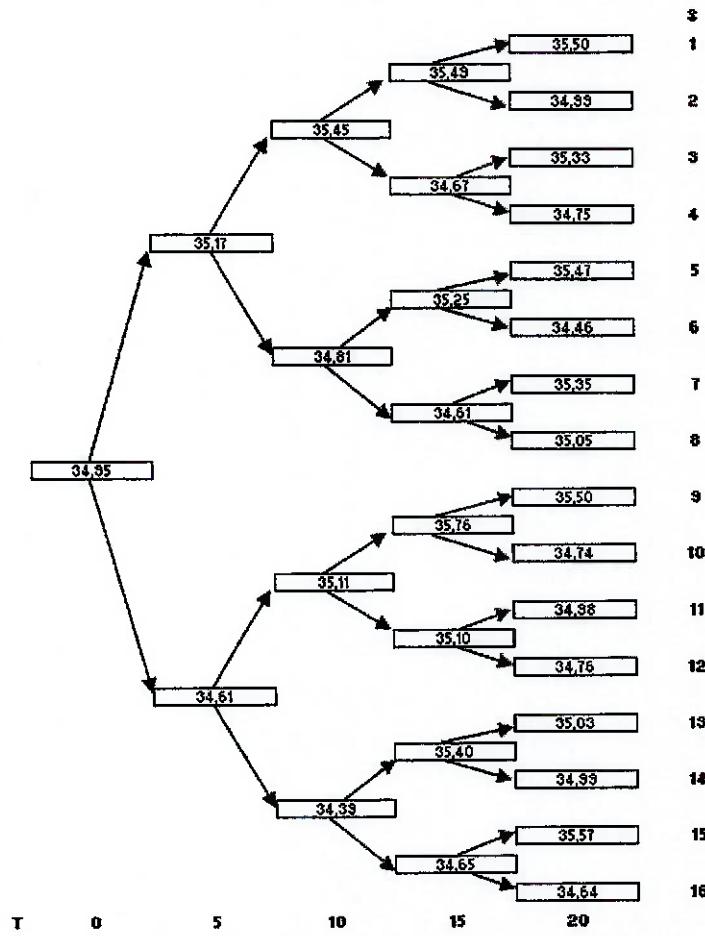


Figura 5.13 – Árvore de cenários: TNLP4

5.4 – Descrição dos Parâmetros do Modelo

Antes de apresentarmos os resultados, precisamos definir alguns parâmetros do modelo que serão necessários para a resolução do problema de otimização.

Custos de Transação

Os custos de transação de uma operação de compra ou venda de ações são expressos na forma de corretagens e emolumentos.

- **Corretagem:** As corretagens referem-se aos custos cobrados pelas corretoras de valores na intermediação dos negócios transacionados entre os agentes do mercado. O custo é definido como um percentual sobre o movimento financeiro total (compras mais vendas) das ordens realizadas em nome do investidor num mesmo pregão. Este percentual varia de acordo com a corretora e com o volume de negociação, sendo, em alguns casos, acrescido de um valor fixo. As taxas cobradas variam de acordo com o tipo de cliente: pessoa física ou jurídica. Neste problema, utilizou-se a taxa de corretagem de 0,20%, já que ela representa o custo de corretagem médio das operações feitas pelo fundo de investimentos no qual o modelo será testado.
- **Emolumentos** os emolumentos são cobrados pelas bolsas de valores através de uma taxa fixa para cada tipo de operação ou produto. Este serviço é cobrado pela instituição à corretora, que, por sua vez, repassa ao investidor, além da taxa de corretagem. Neste problema, utilizou-se a taxa de emolumentos de 0,025%, já que ela representa o custo de emolumento médio das operações feitas pelo fundo de investimentos no qual o modelo será testado.

Dessa forma, os custos de transação representam, em média, 0,225% (0,20% + 0,025%) do valor do negócio realizado. Assim, podemos definir os seguintes valores para os parâmetros do modelo:

$$cta = ctv = 0,225\%$$

$$d^+ = (1 + cta) = (1 + 0,40\%) = 1,225\%$$

$$d^- = (1 - ctv) = (1 - 0,40\%) = 0,775\%$$

Taxa livre de Risco

A taxa livre de risco refere-se ao custo do dinheiro no tempo, ou seja, a taxa de juros utilizada para remunerar dinheiro em caixa. No Brasil, considera-se a taxa livre de risco o CDI. O CDI é a taxa de juros que rege o mercado financeiro brasileiro, sendo utilizado como taxa base em todas as operações monetárias que envolvem fluxo de caixa em períodos de tempo distintos. O CDI é uma taxa que acompanha a taxa SELIC (taxa de referência imposta pelo Banco Central na economia), isto é, a diferença entre as duas taxas é muito pequena. Como exemplo, no dia 09 de setembro de 2005 o CDI foi 19,69% ao ano (a.a.), enquanto que a taxa SELIC estava em 19,75% a.a.

Na implementação do modelo, foi utilizada a taxa livre de risco como sendo igual a 97% do CDI (aproximadamente 19,05% a.a. em 09 de setembro de 2005). Esta taxa de juros reflete a taxa média das operações de aplicação de caixa, descontados os custos operacionais, feitas pelo fundo de investimentos no qual o modelo será testado.

Assim, podemos definir o seguinte valor para o parâmetro do modelo:

$$i = 19,05\% \text{ a.a.}$$

Dado que o modelo trabalha com taxas semanais, temos que:

$$r = \left((1 + 19,05\%)^{\frac{5}{252}} \right) - 1 = 0,34658\% \text{ ao período}$$

Probabilidade de Ocorrência dos Cenários

A probabilidade de ocorrência do cenário $\pi_s, s = 1, \dots, S$ no tempo T foi calculada utilizando o número de caminhos simulados que “passam” por cada *cluster*

em T . Matematicamente, esta probabilidade pode ser obtida através da seguinte expressão:

$$\pi_s = \frac{J_s}{J} \quad (5.3)$$

onde:

π_s : probabilidade de ocorrência do cenário S ;

J_s : número de caminhos que “passam” pelo cluster obtido no cenário S ;

J : número de caminhos simulados.

Carteira Inicial

A carteira inicial foi definida de forma que cada ação pudesse representar 1/9 do valor a mercado da carteira total. Além disto, uma pequena quantidade em caixa foi introduzida na carteira.

A tabela 5.3 e a figura 5.14 resumem de forma clara as características da carteira inicial em 09 de setembro de 2005.

CÓDIGO	QUANTIDADE (1)	PREÇO (R\$) (2)	(1)X(2) (R\$)	FRAÇÃO
TNLP4	100	34,95	3.495,00	10,73%
PETR4	100	34,52	3.452,00	10,59%
EMBR4	150	21,29	3.193,50	9,80%
VALE5	50	74,90	3.745,00	11,49%
AMBV4	4	818,95	3.275,80	10,05%
ITAU4	60	52,60	3.156,00	9,68%
CMIG4	40	88,75	3.550,00	10,89%
NETC4	4.000	0,93	3.720,00	11,42%
CCRO3	50	60,00	3.000,00	9,21%
CAIXA	-	2.000,00	2.000,00	6,14%
		TOTAL	32.587,30	100,00%

Tabela 5.3 – Carteira inicial

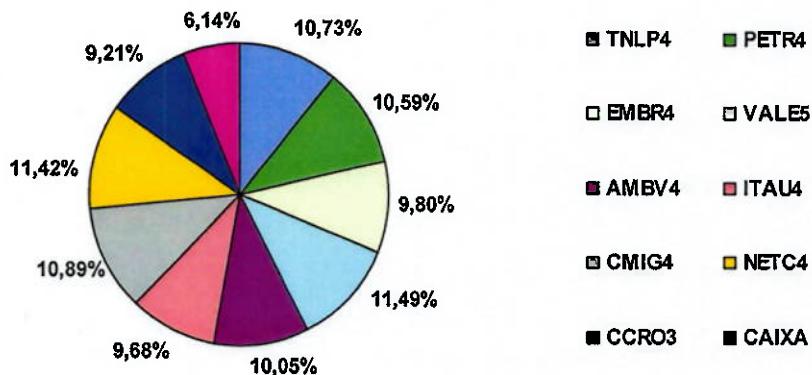


Figura 5.14 – Carteira inicial

5.5 – Resultados

O modelo proposto apresentou as seguintes características:

- **Número de variáveis de decisão:** 600
- **Número de restrições do tipo menor ou igual:** 136
- **Número de restrições do tipo igual a:** 300
- **Número de restrições de valores máximos das variáveis de decisão:** 600
- **Número de restrições de valores mínimos das variáveis de decisão:** 600

O algoritmo utilizado para a resolução do problema foi o método dos pontos interiores¹³. Este algoritmo é indicado para a resolução de problemas de programação linear de grandes dimensões.

O modelo de otimização foi simulado em cada instante de tomada de decisão t ($t = 0, t = 5, t = 10, t = 15$). Em cada instante de tomada de decisão t , os dados dos preços das ações foram atualizados e uma nova matriz de variância-covariância foi obtida.

Apresentamos a seguir os resultados obtidos:

¹³ O método dos pontos interiores, também conhecido como método de Karmarkar, inicia o algoritmo de otimização através do centro do sólido definido pelo problema a ser otimizado, ao invés de começar pela sua superfície, como faz o algoritmo *Simplex*. Veja WINSTON (1995).

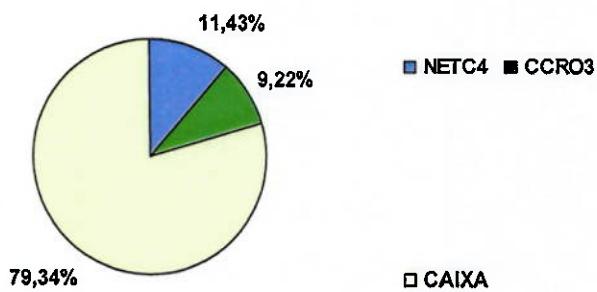
t = 0 – 09 de setembro de 2005

A tabela 5.4 traz os resultados obtidos para $t = 0$. Observamos que neste período o modelo indica a venda de todas as ações da carteira com exceção das ações NETC4 e CCRO3. O resultado obtido com a venda das ações é aplicado, junto com o caixa, na taxa livre de risco.

CÓDIGO	QUANTIDADE INICIAL	QUANTIDADE FINAL (1)	PREÇO (R\$) (2)	(1)X(2) (R\$)	FRAÇÃO
TNLP4	100	0	34,95	0	0,00%
PETR4	100	0	34,52	0	0,00%
EMBR4	150	0	21,29	0	0,00%
VALES	50	0	74,90	0	0,00%
AMBV4	4	0	818,95	0	0,00%
ITAU4	60	0	52,60	0	0,00%
CMIG4	40	0	88,75	0	0,00%
NETC4	4.000	4.000	0,93	3.720,00	11,43%
CCRO3	50	50	60,00	3.000,00	9,22%
CAIXA	-	-	25.813,54	25.813,54	79,34%
			TOTAL	32.533,54	100,00%

Tabela 5.4 – Carteira em $t = 0$

A figura 5.15 traz a composição final da carteira obtida pelo modelo em $t = 0$. A carteira ficou composta apenas por 2 ações.

**Figura 5.15 – Carteira em $t = 0$**

$t = 5 - 16$ de setembro de 2005

A tabela 5.5 traz os resultados obtidos para $t = 5$. O modelo permanece com as mesmas posições obtidas no período anterior.

CÓDIGO	QUANTIDADE INICIAL	QUANTIDADE FINAL (1)	PREÇO (R\$) (2)	(1)X(2) (R\$)	FRAÇÃO
TNLP4	0	0	34,18	0	0,00%
PETR4	0	0	34,75	0	0,00%
EMBR4	0	0	21,00	0	0,00%
VALE5	0	0	79,65	0	0,00%
AMBV4	0	0	819,00	0	0,00%
ITAU4	0	0	50,58	0	0,00%
CMIG4	0	0	86,40	0	0,00%
NETC4	4.000	4.000	0,90	3.600,00	11,09%
CCRO3	50	50	58,9	2.945,00	9,08%
CAIXA	-	-	25.903,01	25.903,01	79,83%
			TOTAL	32.448,01	100,00%

Tabela 5.5 – Carteira em $t = 5$

A figura 5.16 traz a composição final da carteira obtida pelo modelo em $t = 5$. A carteira permaneceu composta por 2 ações.

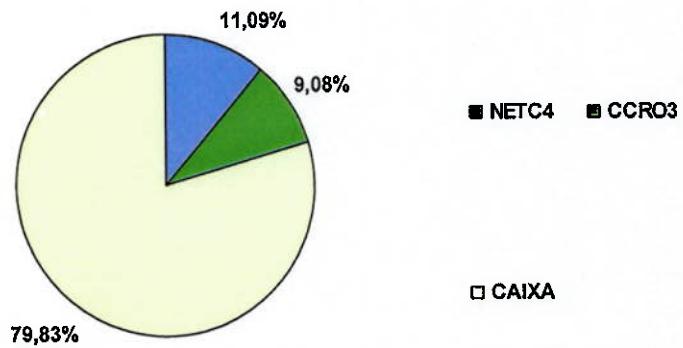


Figura 5.16 – Carteira em $t = 5$

$t = 10 - 23$ de setembro de 2005

A tabela 5.6 traz os resultados obtidos para $t = 10$. O modelo permanece com as mesmas posições obtidas no período anterior.

CÓDIGO	QUANTIDADE INICIAL	QUANTIDADE FINAL (1)	PREÇO (R\$) (2)	(1)X(2) (R\$)	FRAÇÃO
TNLP4	0	0	37,05	0	0,00%
PETR4	0	0	35,80	0	0,00%
EMBR4	0	0	21,59	0	0,00%
VALE5	0	0	85,45	0	0,00%
AMBV4	0	0	815,65	0	0,00%
ITAU4	0	0	53,60	0	0,00%
CMIG4	0	0	86,60	0	0,00%
NETC4	4.000	4.000	0,88	3.520,00	10,91%
CCRO3	50	50	55,00	2.750,00	8,52%
CAIXA	-	-	25.992,78	25.992,78	80,57%
		TOTAL	32.262,78	100,00%	

Tabela 5.6 – Carteira em $t = 10$

A figura 5.17 traz a composição final da carteira obtida pelo modelo em $t = 10$. A carteira permaneceu composta por 2 ações.

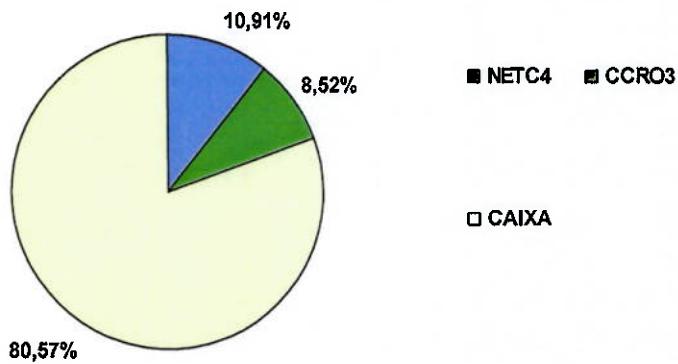


Figura 5.17 – Carteira em $t = 10$

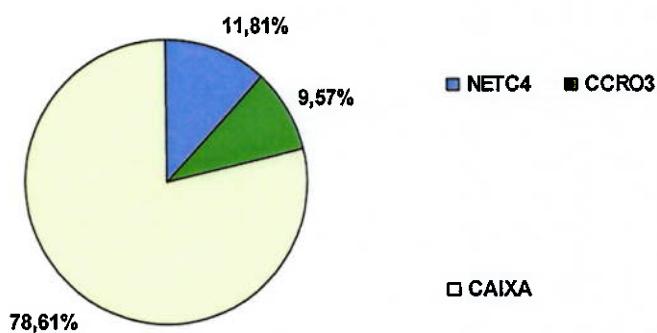
$t = 15 - 30$ de setembro de 2005

A tabela 5.7 traz os resultados obtidos para $t = 15$. O modelo permanece com as mesmas posições obtidas no período anterior.

CÓDIGO	QUANTIDADE INICIAL	QUANTIDADE FINAL (1)	PREÇO (R\$) (2)	(1)X(2) (R\$)	FRAÇÃO
TNLP4	0	0	36,75	0	0,00%
PETR4	0	0	35,66	0	0,00%
EMBR4	0	0	21,45	0	0,00%
VALE5	0	0	86,85	0	0,00%
AMBV4	0	0	839,00	0	0,00%
ITAU4	0	0	53,25	0	0,00%
CMIG4	0	0	85,00	0	0,00%
NETC4	4.000	4.000	0,98	3.920,00	11,81%
CCRO3	50	50	63,51	3.175,50	9,57%
CAIXA	-	-	26.082,87	26.082,87	78,61%
			TOTAL	33.136,88	

Tabela 5.7 – Carteira em $t = 15$

A figura 5.18 traz a composição final da carteira obtida pelo modelo em $t = 15$. A carteira permaneceu composta por 2 ações.

**Figura 5.18 – Carteira em $t = 15$**

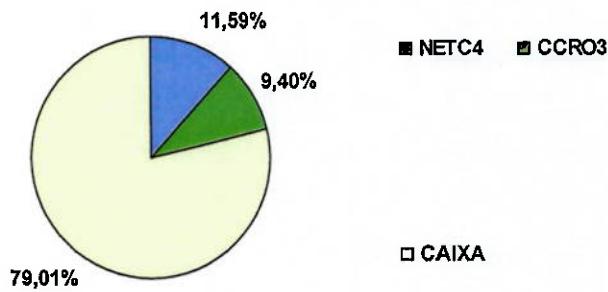
$t = 20 - 07$ de outubro de 2005

A tabela 5.8 traz os resultados obtidos para $t = 20$. Nesta tabela temos as posições finais indicadas pelo modelo ao final do horizonte de investimento.

CÓDIGO	QUANTIDADE (1)	PREÇO (R\$) (2)	(1)X(2) (R\$)	FRAÇÃO
TNLP4	0	35,85	0	0,00%
PETR4	0	31,91	0	0,00%
EMBR4	0	21,01	0	0,00%
VALE5	0	78,89	0	0,00%
AMBV4	0	828,00	0	0,00%
ITAU4	0	53,70	0	0,00%
CMIG4	0	82,30	0	0,00%
NETC4	4.000	0,96	3.840,00	11,59%
CCRO3	50	62,28	3.114,00	9,40%
CAIXA	-	26.173,27	26.173,27	79,01%
TOTAL		33.085,85		

Tabela 5.8 – Carteira em $t = 20$

A figura 5.19 traz a composição final da carteira em $t = 20$.

**Figura 5.19 – Carteira em $t = 20$**

A figura 5.20 consolida os resultados obtidos. Nela, observamos a evolução do valor da carteira ao longo do horizonte de investimento T e nos instantes de tomada de decisão t . A carteira do modelo apresentou um retorno de 1,81% ao longo do período (1mês).

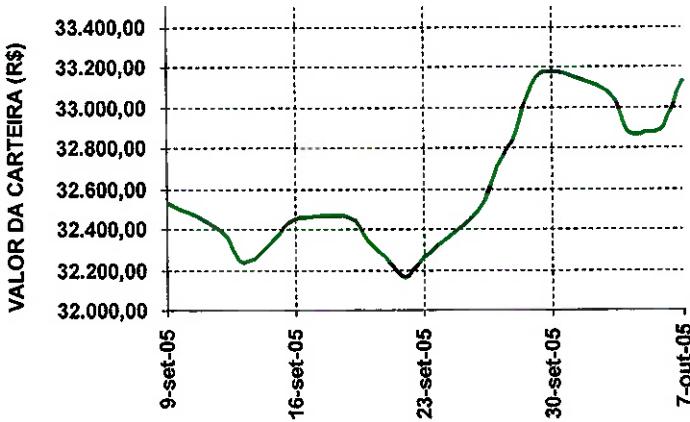


Figura 5.20 – Valor da carteira ao longo do horizonte de investimento T

5.6 – Análise de Sensibilidade

A análise de sensibilidade estuda como as mudanças nos parâmetros do modelo em estudo afetam a solução ótima encontrada (WINSTON, 1995). Dessa forma, pode-se analisar como a carteira de investimento se comporta dada uma mudança no valor dos parâmetros do modelo, como custos de transação e taxa livre de risco, bem como a adição de novas restrições no modelo.

Neste contexto, 2 casos particulares do modelo em estudo foram analisados.

5.6.1 – Limitação de Caixa (ASI)¹⁴

Analizando a carteira encontrada pelo modelo, percebemos que a quantidade em caixa representa quase que 80% do valor da carteira ao longo do horizonte de investimento T . Isto se deve, entre outros fatores, a elevada taxa de juros¹⁵ vigente no

¹⁴ Análise de Sensibilidade I.

¹⁵ O Brasil é o país que apresenta as maiores taxas de juros reais do mundo. Por taxa de juros real, entende-se a taxa de juros nominal descontada da inflação no período.

país atualmente. Dessa forma, é mais conveniente aplicar o dinheiro em títulos de renda fixa¹⁶ do que em ações, que são ativos mais arriscados.

Para limitarmos a quantidade em caixa da carteira, introduzimos uma nova restrição no modelo, definida por:

$$X_{n+1s}(t) \leq 9500, \quad (5.4)$$

$$t = 0, 1, \dots, T; \quad s = 1, \dots, S;$$

O valor de R\$ 9,500 representa aproximadamente 30% do valor da carteira inicial. Esta porcentagem é usualmente utilizada pela maioria dos fundos de ações no Brasil como um valor máximo da participação do caixa na composição da carteira do fundo.

Resultados

Da mesma forma que no resultado anterior, a carteira encontrada pelo modelo não sofreu modificação ao longo do horizonte de investimento T . Dessa forma, por simplificação, apresentaremos apenas os resultados obtidos para $t = 0$, já que nos instantes de tempo posteriores, a carteira permaneceu a mesma.

$t = 0$ – 09 de setembro de 2005

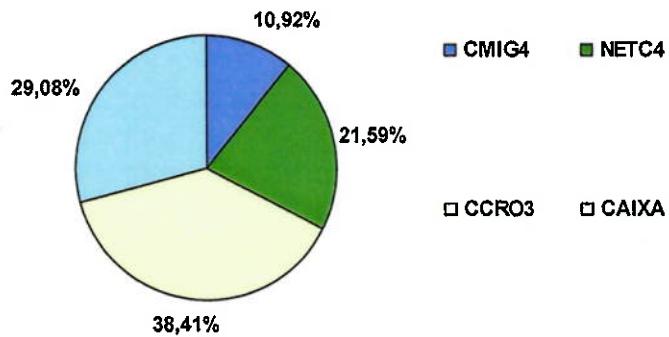
A tabela 5.9 traz os resultados obtidos para $t = 0$. Observamos que o modelo indica a venda de todas as ações da carteira com exceção das ações CMIG4, NETC4 e CCRO3. Além disso, o modelo indicou um aumento na quantidade das ações NETC4 e CCRO3. O caixa resultante é aplicado na taxa livre de risco.

¹⁶ Títulos de renda fixa são papéis que pagam uma taxa de juros ao longo de um período. Estes papéis têm seu valor atrelado à taxa de juros vigente na economia.

CÓDIGO	QUANTIDADE INICIAL	QUANTIDADE FINAL (1)	PREÇO (R\$) (2)	(1)X(2) (R\$)	FRAÇÃO
TNLP4	100	0	34,95	0	0,00%
PETR4	100	0	34,52	0	0,00%
EMBR4	150	0	21,29	0	0,00%
VALE5	50	0	74,90	0	0,00%
AMBV4	4	0	818,95	0	0,00%
ITAU4	60	0	52,60	0	0,00%
CMIG4	40	40	88,75	3.550,00	10,92%
NETC4	4.000	7.542	0,93	7.014,06	21,59%
CCRO3	50	208	60,00	12.480,00	38,41%
CAIXA	-	-	9.450,64	9.450,64	29,08%
			TOTAL	32.494,70	100,00%

Tabela 5.9 – ASI: Carteira em $t = 0$

A figura 5.21 traz a composição final da carteira obtida pelo modelo em $t = 0$. A carteira ficou composta apenas por 3 ações.

Figura 5.21 – ASI: Carteira em $t = 0$

A figura 5.22 consolida os resultados obtidos. Nela, observamos a evolução do valor da carteira ao longo do horizonte de investimento T e nos instantes de tomada de decisão t . A carteira com a limitação de caixa apresentou um retorno de 1,75% ao longo do período (1mês).

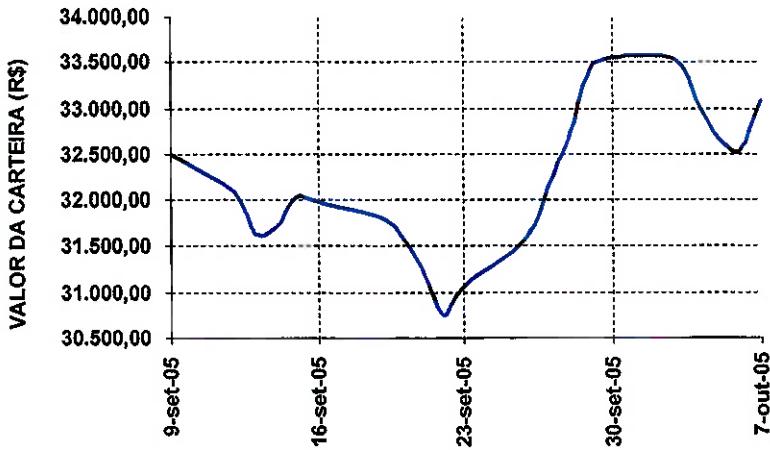


Figura 5.22 – ASI: Valor da carteira ao longo do horizonte de investimento T

5.6.2 – Quantidade Mínima de Ações na Carteira (ASII)¹⁷

Analizando a carteira encontrada pela análise de sensibilidade I (ASI), percebe-se que a mesma não apresentou mudanças significativas com relação à carteira encontrada pelo modelo geral. Observou-se a introdução da ação CMIG4 na carteira, devido à incorporação da restrição de limitação de caixa.

Nesta análise, introduziu-se uma nova restrição no modelo. Estudaremos o comportamento da carteira com pelo menos uma quantidade mínima de cada ação na carteira. A quantidade mínima foi definida arbitrariamente como sendo metade da quantidade inicial. Além disso, a restrição de limitação de caixa foi mantida, pois ela aproxima a carteira do modelo de uma situação real. Dessa forma, devemos adicionar as seguintes restrições no modelo definido pela análise de sensibilidade I (ASI):

$$X_{1s}(t) \geq 50, \quad (5.5)$$

$$X_{2s}(t) \geq 50, \quad (5.6)$$

$$X_{3s}(t) \geq 75, \quad (5.7)$$

$$X_{4s}(t) \geq 25, \quad (5.8)$$

$$X_{5s}(t) \geq 2, \quad (5.9)$$

¹⁷ Análise de Sensibilidade II.

$$X_{6s}(t) \geq 30, \quad (5.10)$$

$$X_{7s}(t) \geq 20, \quad (5.11)$$

$$X_{8s}(t) \geq 2000, \quad (5.12)$$

$$X_{9s}(t) \geq 25, \quad (5.13)$$

$$t = 0, 5, \dots, T; \quad s = 1, \dots, S;$$

Resultados

Da mesma forma que no resultado anterior, a carteira encontrada pelo modelo não sofreu modificação ao longo do horizonte de investimento T . Dessa forma, por simplificação, apenas os resultados obtidos para $t = 0$ serão apresentados, já que nos instantes de tempo posteriores, a carteira permaneceu a mesma.

$t = 0$ – 09 de setembro de 2005

A tabela 5.10 traz os resultados obtidos para $t = 0$. Observamos que o modelo indicou uma diminuição das quantidades das ações TNLP4, PETR4, EMBR4, VALE5, AMBV4, ITAU4. A quantidade de CMIG4 permaneceu a mesma. Já as ações NETC4 e CCRO3 tiveram suas quantidades aumentas. O caixa resultante é aplicado na taxa livre de risco.

CÓDIGO	QUANTIDADE	QUANTIDADE	PREÇO (R\$)	(1)X(2) (R\$)	FRAÇÃO
TNLP4	100	50	34,95	1.747,50	5,37%
PETR4	100	50	34,52	1.726,00	5,31%
EMBR4	150	75	21,29	1.596,75	4,91%
VALE5	50	25	74,90	1.872,50	5,76%
AMBV4	4	2	818,95	1.637,90	5,04%
ITAU4	60	31	52,60	1.630,60	5,01%
CMIG4	40	40	88,75	3.550,00	10,92%
NETC4	4.000	4.636	0,93	4.311,48	13,26%
CCRO3	50	83	60,00	4.980,00	15,31%
CAIXA	-	-	9.467,19	9.467,19	29,11%
			TOTAL	32.494,70	100,00%

Tabela 5.10 – ASII: Carteira em $t = 0$

A figura 5.23 traz a composição final da carteira obtida pelo modelo em $t = 0$.

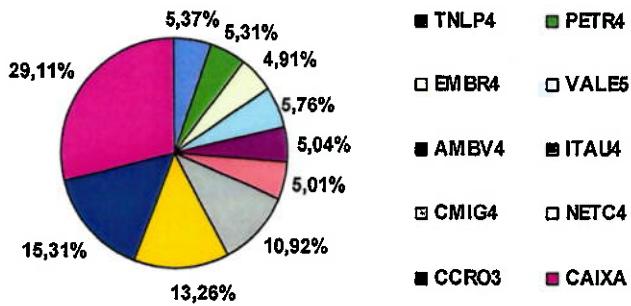


Figura 5.23 – ASII: Carteira em $t = 0$

A figura 5.24 consolida os resultados obtidos. Nela, observamos a evolução do valor da carteira ao longo do horizonte de investimento T e nos instantes de tomada de decisão t . A carteira com a limitação de caixa e quantidade mínima de ações apresentou um retorno de 0,76% ao longo do período (1mês).

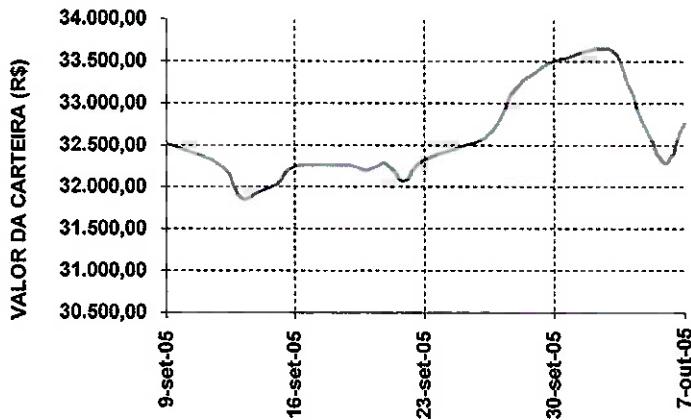


Figura 5.24 – ASII: Valor da carteira ao longo do horizonte de investimento T

5.7 – Observações Gerais

Os resultados obtidos pelo modelo foram satisfatórios, na medida em que eles refletem aquilo que se esperava de acordo com a teoria de carteiras. Além disso, todas as soluções encontradas foram factíveis. A comparação dos resultados será realizada no próximo capítulo, juntamente com a conclusão do trabalho e sugestões de desenvolvimento de trabalhos futuros.

6

CONCLUSÃO

Neste capítulo, serão apresentadas as análises dos resultados obtidos. As principais conclusões serão explicitadas, bem como as recomendações para trabalhos futuros.

6.1 – Análise dos Resultados

O objetivo deste trabalho foi construir um modelo multiperíodo na determinação de carteiras ótimas de investimento para ser utilizado no mercado de ações brasileiro. Entretanto, um modelo quantitativo só é considerado bom se seus resultados forem satisfatórios, isto é, se os resultados obtidos com o modelo forem melhores que os resultados obtidos com o índice *benchmark* do mercado. Caso contrário, um investidor racional colocaria todos os recursos numa carteira que replicasse o índice *benchmark* do mercado.

Dessa forma, os resultados obtidos com o modelo geral e as análises de sensibilidades I e II foram confrontados com índices *benchmark* de mercado.

A tabela 6.1 apresenta uma comparação das rentabilidades das carteiras simuladas com o IBOVESPA. Pode-se perceber que no período considerado, o IBOVESPA apresentou uma rentabilidade maior que as carteiras simuladas. Uma das razões para esta performance melhor consiste no fato de que, no período considerado, a bolsa brasileira registrou uma alta rentabilidade comparada a períodos recentes. Além disso, o índice BOVESPA é composto por uma cesta de 54 ações, enquanto que as carteiras simuladas podiam apresentar no máximo 9 ações. Dessa forma, a probabilidade de existirem ações que tiveram uma melhor performance que aquelas selecionadas para a composição da carteira em estudo é relativamente alta.

CÓDIGO	RENTABILIDADE
IBOVESPA	2,24%
MODELO	1,81%
ASI	1,75%
ASII	0,76%

Tabela 6.1 – Análise de Rentabilidades: Simulação X IBOVESPA

A figura 6.1 apresenta a evolução dos preços das carteiras simuladas contra uma carteira composta pelas ações do índice BOVESPA, para um mesmo valor inicial investido. Percebe-se que as carteiras simuladas apresentaram uma menor volatilidade que a do IBOVESPA. Este fato pode ser usado como uma explicação do melhor desempenho da cesta de ações do IBOVESPA, haja vista que quanto maior o risco de um ativo, maior é o seu retorno esperado.

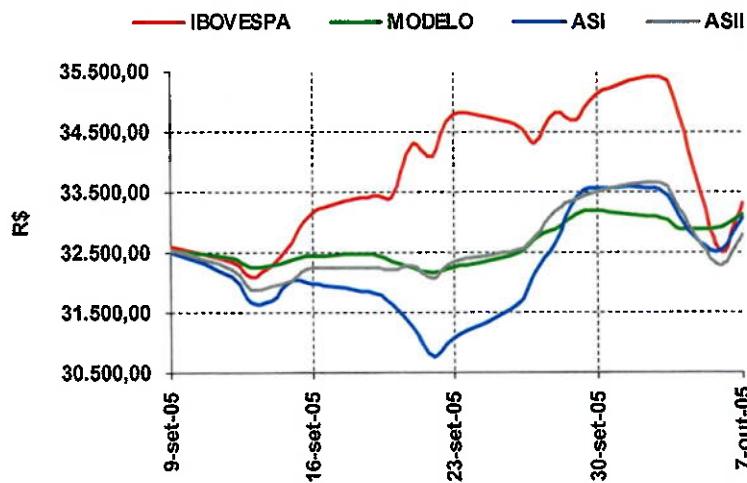


Figura 6.1 – Evolução do valor das carteiras: Simulação X IBOVESPA

A tabela 6.2 apresenta uma comparação das rentabilidades das carteiras simuladas com a rentabilidade do CDI. Pode-se perceber que no período considerado, apenas a carteira do modelo da análise de sensibilidade II apresentou desempenho inferior ao índice.

CÓDIGO	RENTABILIDADE
CDI	1,41%
MODELO	1,81%
ASI	1,75%
ASII	0,76%

Tabela 6.2 – Análise de Rentabilidades: Simulação X CDI

A figura 6.2 apresenta a evolução dos preços das carteiras simuladas contra uma carteira cujo valor acompanha a rentabilidade do CDI, para um mesmo valor inicial investido. Percebe-se que a volatilidade da carteira do CDI é bem menor que as carteiras de ações, haja vista que a carteira dada pelo CDI é composta de títulos de renda fixa que possui risco inferior às ações.

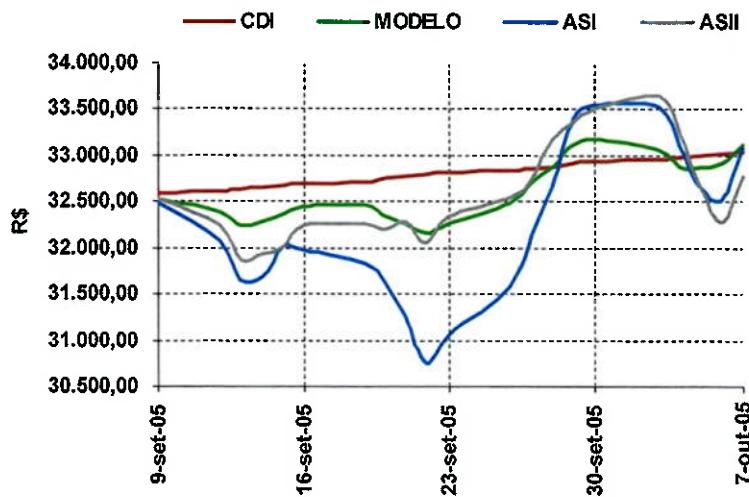


Figura 6.2 – Evolução do valor das carteiras: Simulação X CDI

A tabela 6.3 apresenta as rentabilidades, ao longo do horizonte de investimento T , das ações consideradas na seleção das carteiras. Pode-se perceber que as ações que apresentaram as maiores rentabilidades no período foram a VALE5, NETC4 e CCRO3. Não obstante, as ações NETC4 e CCRO3 foram as ações que apresentaram um maior peso em todas as carteiras simuladas. Entretanto, a ação VALE5 não foi selecionada para nenhuma carteira. Pode-se interpretar este fato devido às variâncias e covariâncias das ações selecionadas. Como o processo de decisão da carteira ótima é baseado na simulação de variâncias e covariâncias passadas das ações, muitas vezes o modelo

demora a incorporar as informações mais recentes embutidas nos preços das ações, embora estivéssemos utilizando um modelo EWMA numa janela de 20 dias úteis.

CÓDIGO	RENTABILIDADE NO PERÍODO
TNLP4	2,54 %
PETR4	-7,86 %
EMBR4	-1,32 %
VALES	5,19 %
AMBV4	1,10 %
ITAU4	2,07 %
CMIG4	-7,55 %
NETC4	3,17 %
CCRO3	3,73 %

Tabela 6.3 – Rentabilidades das ações ao longo do horizonte de investimento T

Considerando os resultados obtidos, percebe-se que o modelo emitiu resultados satisfatórios, na medida em que as carteiras simuladas apresentaram rentabilidades similares aos índices de mercado.

6.2 – Conclusões

O objetivo deste Trabalho de Formatura foi desenvolver um modelo quantitativo de otimização multiperíodo de carteiras de investimento. Este modelo foi aplicado em carteiras de investimento compostas por ações de empresas brasileiras listadas na BOVESPA. O tema deste trabalho surgiu da necessidade do fundo de investimento, no qual este trabalho foi realizado, por novos métodos quantitativos de seleção de carteiras de investimento, haja vista que os modelos atuais já se encontram ultrapassados e amplamente difundidos entre os participantes do mercado financeiro brasileiro. Dessa forma, buscou-se desenvolver um modelo inovador que proporcionasse uma vantagem competitiva para o fundo em questão.

Conforme ressaltado no início deste trabalho, todo o aparato teórico e prático desenvolvido neste trabalho poderia ter sido aplicado em problemas de pesquisa operacional aplicados em engenharia de produção. Entretanto, optou-se pelo desenvolvimento de um modelo aplicado área financeira devido às características da empresa na qual foi realizada o estágio.

Para a elaboração deste trabalho, foram estudados alguns modelos de otimização existentes, listados na literatura especializada. A grande maioria deles segue o raciocínio iniciado por MARKOWITZ (1952), sem nenhum desenvolvimento adicional em termos quantitativos. Além disso, deve-se ressaltar que os modelos de Markowitz são modelos estáticos de seleção de carteiras, isto é, são modelos que não consideram a evolução que as variáveis aleatórias – representadas pelos preços dos ativos financeiros que compõem a carteira – apresentam ao longo do tempo.

Os modelos multiperíodos ainda se encontram em estágio inicial de desenvolvimento no mercado financeiro brasileiro. Muito pouco tem sido criado ou discutido na literatura nacional.

O modelo proposto foi adaptado dos trabalhos desenvolvidos por HU (2003) e BARRO *et al.* (2004) para o caso brasileiro. Algumas modificações e simplificações foram realizadas, dado que estes trabalhos apresentam um elevado grau de sofisticação e complexidade teórica.

Discutimos também as principais técnicas de geração de árvores de cenários existentes apresentadas por GULPINAR *et al.* (2001). Estes métodos são muito importantes, pois eles limitam drasticamente o tamanho de um problema de otimização financeira multiperíodo, através da discretização das variáveis aleatórias sob a forma de uma árvore de cenários. Dessa forma, conseguimos reduzir significativamente o esforço computacional utilizado na resolução destes problemas. Esta análise foi necessária, pois o modelo de HU (2003) assume que já existe uma árvore de cenários a ser otimizada, enquanto que BARRO *et al.* (2004) utiliza técnicas avançadas de decomposição de cenários como o *Progressive Hedging Algorithm*¹⁸. Ademais, foi possível escolher dentre as várias técnicas apresentadas, uma que seria convenientemente aplicável à situação em estudo.

Os resultados obtidos estavam de acordo com aquilo que se esperava da realidade. Além disso, foi observado como a solução ótima encontrada se comportava com a adição de novas restrições no modelo, através das análises de sensibilidade I e II. Os resultados foram apresentados de forma simples e clara através de gráficos e tabelas ilustrativas. Dessa forma, um leitor que não possui pleno conhecimento do assunto pode facilmente analisar e entender o modelo proposto. Isto foi de extrema importância na

¹⁸ Veja ROCKAFELLAR and WETS (1991).

hora de conscientizar a instituição, na qual o trabalho foi realizado, dos benefícios que tal modelo poderia proporcionar.

6.3 – Comentários Finais e Recomendações para Trabalhos Futuros

Os resultados obtidos com o modelo quantitativo foram condizentes com o objetivo inicial do trabalho. Entretanto, o seguinte aspecto vale ser mencionado: o fato do modelo não indicar o rebalanceamento das posições ao longo do horizonte de investimento em todas as carteiras simuladas. Isto é, nas 3 carteiras simuladas, o modelo apenas indica a mudança das posições em $t = 0$. Uma das razões para este fato consiste no curto horizonte de investimento utilizado no trabalho: $T = 20$ dias úteis (1 mês). Desta forma, dado que o comportamento das ações não varia muito neste período, o modelo acaba indicando as mesmas posições nos rebalanceamentos. O horizonte utilizado foi escolhido para se adequar às necessidades de um fundo de investimento de ações, que realiza decisões de investimento de curto prazo. Entretanto, o modelo utilizado parece se adequar melhor a decisões de longo prazo, condizentes com um fundo de administração de recursos de um plano de previdência complementar¹⁹. Dessa forma, uma recomendação de continuação do trabalho seria aplicá-lo para decisões de investimento de longo prazo, com rebalanceamentos num período suficientemente grande de tempo (bimestral, semestral, anual) para que se possam evidenciar as mudanças de posições em cada instante de tomada de decisão.

Outras recomendações para o desenvolvimento de trabalhos futuros seriam:

- **Aplicação de outros métodos de geração de árvores de cenários:** neste trabalho foi utilizado apenas o método de simulação e *clustering*, com simulação em paralelo, na construção da árvore de cenários. A utilização dos outros métodos poderia ser analisada para que se possam comparar as respostas obtidas com o modelo de otimização, utilizando as várias técnicas, bem como avaliar o tempo necessário requerido para a construção da árvore de cenários em cada método (eficiência computacional).

¹⁹ Veja JOLIG (2003).

- **Incorporação do risco da carteira na função objetivo:** a utilização de medidas de risco na função objetivo tornaria o problema praticamente completo, do ponto de vista prático. HU (2003) incorpora em seu modelo de otimização a utilização de medidas de risco como o VAR, CVAR, e mínima riqueza esperada (*target*). No presente trabalho, tentou-se a simulação das carteiras de investimento incorporando medidas de mínima riqueza esperada (*target*). Entretanto, os resultados obtidos foram infactíveis, dadas as condições dos modelos. Já a utilização de medidas de risco como o VAR e CVAR na modelagem do problema adiciona uma complexidade computacional a mais no modelo como a otimização de funções não lineares num ambiente multiperíodo.
- **Incorporação de funções de utilidade na função objetivo:** a utilização de funções de utilidade na função objetivo do modelo levaria em conta o perfil de aversão ao risco característico dos cotistas de um fundo de investimento no qual o modelo seria implementado. Além disso, a utilização de funções de utilidade quadráticas possui o benefício de minimizar a variância da carteira a ser otimizada. LUENBERGER (1997) apresenta exemplos de tipos de funções utilidade que podem ser utilizados na prática.
- **Diversificação do número/tipos de ativos:** o modelo estudado era composto de 9 ações de empresas brasileiras. Um número maior de ações poderia ser utilizado no modelo. Dessa forma, faria mais sentido a comparação da carteira ótima com o índice *benchmark* do setor (IBOVESPA). Além disso, outros tipos de produtos financeiros poderiam ser utilizados no modelo de otimização como os derivativos: futuros e opções. Para uma descrição dos tipos dos produtos financeiros existentes em finanças, veja HULL (1997).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BARRO, D; CANESTRELLI, E. **Dynamic Portfolio Optimization: Time Decomposition Using the Maximum Principle with a Scenario Approach.** European Journal of Operational Research, 2004.
2. BIRGE, J, R; LOUVEAUX, F. **Introduction to Stochastic Programming.** New York: Springer, 1997.
3. BRIGHAM, E, F; GAPENSKI, L, C; EHRHARDT, M, C. **Administração Financeira – Teoria e Prática.** 1^a ed. Editora Atlas, 2001
4. EVERITT, B. S. **Cluster Analysis.** 3^a ed. London: Edward Arnold, 1993.
5. FRANCIS, J, C; ARCHER, S, H. **Portfolio Analysis.** 2^a ed. New Jersey: Prentice Hall, 1979.
6. GULPINAR, N; RUSTEM, B; STTERGREN, R. **Simulation and Optimization Approaches to Scenario Tree Generation.** Working Paper, 2001.
7. HIBIKI, N. **Multi-Period Stochastic Optimization Models for Dynamic Asset Allocation.** Journal of Banking & Finance, 2005.
8. HOYLAND, K; WALLACE, S, W. **Generating Scenario Trees for Multistage Problems.** Management Science 47 (2), 295-307, 2001.
9. HU, H. **A New Simulation-Based Approach for Multi-Period Portfolio Optimization Problems.** Working Paper. Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University, 2003.

10. HULL, J, C. **Options, Futures and Others Derivatives.** 3^a ed. New Jersey: Prentice Hall, 1997.
11. INOUE, O. **Modelos para a Estimativa do Risco de Mercado em Carteiras de Derivativos.** Trabalho de Formatura – Escola Politécnica – USP. São Paulo, 1998.
12. JOHNSON, R, A; WICHERM, D, W. **Applied Multivariate Statistical Analysis.** 4^a ed. Prentice Hall, New Jersey, 1998.
13. JOLIG, R. **Modelo de Otimização Dinâmica para a Gestão de Longo Prazo dos Recursos de um Plano de Previdência Complementar.** Trabalho de Formatura – Escola Politécnica – USP. São Paulo, 2003.
14. JORION, P. **Value at Risk: A Nova Fonte de Referência para a Gestão de Risco Financeiro.** 2^a ed. Bolsa de Mercadorias & Futuros (BMF), 2003.
15. LUENBERGER, D, G. **Investment Science.** Oxford University Press, 1997
16. MARKOWITZ, H, M. **Portfolio Selection.** Journal of Finance, v.7 n.1, 1952.
17. MATSUMOTO, E, Y. **Matlab 6.5: Fundamentos de Programação.** São Paulo: Editora Érica, 2002.
18. MORGAN, Banco J. P. **Riskmetrics.** New York, J.P. Morgan, 1994. 212p.
19. PFLUG, G, CH. **Scenario Tree Generation for Multi-Period Financial Optimization by Optimal Discretization.** Mathematical Programming, Ser B 89, pp251-257, 2001.
20. ROCKAFELLAR, R, T; WETS, R, B, J. **Scenario and Policy Aggregation in Optimization under Uncertainty.** Mathematics of Operations Research 16, 119-147, 1991.

21. WINSTON, W, L. **Introduction to Mathematical Programming: Applications and Algorithms.** 2^a ed. Belmont, California: Duxbury Press, 1995.
22. WARD, Jr., J, H. **Hierarchical Grouping to Optimize an Objective Function.** Journal of the American Statistical Association 58, 236-244, 1963.

APÊNDICE A

CÁLCULO DE RETORNOS

FINANCEIROS

Segundo JORION (2003), existem duas formas de se calcular o retorno dos ativos financeiros. A taxa de retorno *discreta* ou *aritmética* pode ser definida como a razão entre o ganho de capital do ativo no instante t e o preço do ativo no instante $t - 1$. Matematicamente, temos:

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (\text{A.1})$$

onde:

r_t : Retorno aritmético do ativo no instante t ;

P_t : Preço do ativo no instante t ;

P_{t-1} : Preço do ativo no instante $t - 1$.

Alternativamente, a taxa de retorno *geométrica* é definida como o logaritmo da razão de preço do ativo:

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (\text{A.2})$$

onde:

R_t : Retorno geométrico do ativo no instante t ;

P_t : Preço do ativo no instante t ;

P_{t-1} : Preço do ativo no instante $t - 1$.

No presente trabalho, utilizou-se, em todos os cálculos, a taxa de retorno geométrica. A opção pela taxa de retorno geométrica ao invés da taxa de retorno aritmética se deve basicamente aos seguintes aspectos:

Primeiramente, os retornos geométricos possuem uma maior significância econômica do que os retornos aritméticos. Por exemplo, se os retornos geométricos possuírem uma distribuição normal de probabilidades (hipótese fundamental assumida quando o preço dos ativos varia ao longo do tempo de forma aleatória), a distribuição nunca poderá levar a um preço negativo do ativo financeiro. Isto ocorre porque, na cauda esquerda da distribuição, na medida em que $\ln(P_t / P_{t-1}) \rightarrow -\infty$, $(P_t / P_{t-1}) \rightarrow 0$, ou $P_t \rightarrow 0$.

Enquanto isso, na cauda esquerda de uma distribuição normal de retornos aritméticos, temos que $r_t = (P_t - P_{t-1}) / P_{t-1} \rightarrow -\infty$ é alcançado quando $(P_t / P_{t-1}) - 1 < -1$, ou $P_t < 0$. Dessa forma, a atribuição da distribuição normal a retornos aritméticos poderia levar a resultados que economicamente não fariam algum sentido.

A segunda vantagem do uso de retornos geométricos é a facilidade de se obter extensões para períodos múltiplos. Como exemplo, o retorno geométrico calculado entre dois instantes de tempo pode ser decomposto da seguinte forma:

$$R_{t,2} = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-2}}\right) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) + \ln\left(\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}\right) = R_t + R_{t-1} \quad (\text{A.3})$$

A decomposição dos retornos aritméticos não é tão simples assim. Logo, o uso de retornos geométricos é particularmente conveniente na medida em que o retorno geométrico de dois instantes de tempo é a soma de cada retorno em cada instante de tempo.

Por fim, outro aspecto que merece ser comentado é o fato de que, na prática, as diferenças entre os dois retornos calculados serem pequenas. O retorno geométrico pode ser escrito utilizando o retorno aritmético da seguinte forma: $R_t = \ln(P_t / P_{t-1}) = \ln(1 + r_t)$. Logo, se r_t for pequeno, R_t poderá ser decomposto utilizando a expansão da série de Taylor:

$$R_t = r_t + \frac{r_t^2}{2} + \frac{r_t^3}{3} + \dots \quad (\text{A.4})$$

Se r_t for pequeno, a equação acima pode ser aproximada por:

$$R_t \approx r_t \quad (\text{A.5})$$

A figura a seguir ilustra essa aproximação. Percebe-se que para retornos muito pequenos (inferiores a 15%), o erro cometido é pequeno.

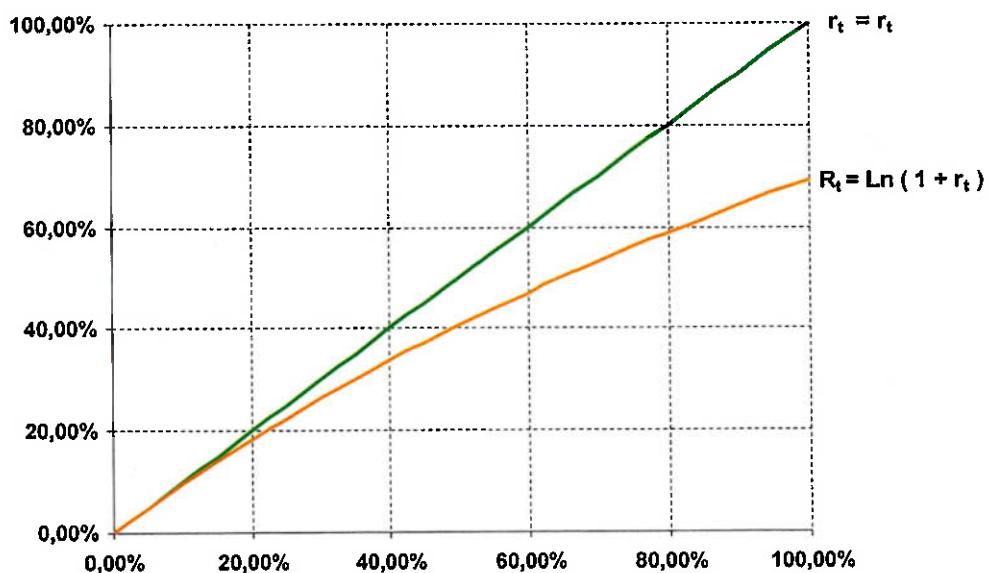


Figura A.1 – Gráfico comparativo entre os retornos aritméticos e geométricos

Logo, na prática, haverá pouca diferença entre os retornos aritméticos e geométricos, contanto que os retornos encontrados sejam pequenos. Entretanto, cuidados especiais devem ser tomados ao se utilizar essa aproximação, principalmente em mercados com grandes oscilações como os de países emergentes como o Brasil.

APÊNDICE B

EWMA (*EXPONENTIAL WEIGHTED MOVING AVERAGE*)

O EWMA (Exponential Weighted Moving Average), ou media móvel ponderada com alisamento exponencial é uma técnica, sugerida pela metodologia *Riskmetrics* do banco JPMorgan (MORGAN, 1994), utilizada na modelagem da volatilidade de ativos. A volatilidade dos ativos pode ser definida como o desvio padrão de seus retornos, sendo que o desvio padrão é igual à raiz quadrada da variância:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^t (r_i - \bar{r})^2}{t-1}} \quad (B.1)$$

A técnica do EWMA sugere que a variância dos retornos pode ser calculada da seguinte forma:

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2 \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (B.2)$$

onde:

σ_t^2 : Variância do retorno em t ;

λ : Fator de decaimento;

σ_{t-1}^2 : Variância do retorno em $t-1$;

r_{t-1}^2 : Retorno ao quadrado do ativo em $t-1$;

A expressão B.2 sugere que a variância do retorno de um ativo, num dado instante de tempo, é composta por dois termos. O primeiro termo expressa a dependência temporal da variância dos retornos. O segundo, representa a contribuição

da observação mais recente para a variância estimada. Além disso, podemos inferir da expressão que quanto maior o fator de decaimento, maior é o peso dado à variância mais recente.

O mesmo princípio do cálculo da variância pode ser estendido para a estimação da covariância entre dois ativos. Assim, a covariância entre dois ativos i e j pode ser definida por:

$$\sigma_{ij,t}^2 = \lambda \sigma_{ij,t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{i,t-1} r_{j,t-1} \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (\text{B.3})$$

onde:

$\sigma_{ij,t}^2$: Covariância entre os retornos i e j em t ;

λ : Fator de decaimento;

$\sigma_{ij,t-1}^2$: Covariância entre os retornos i e j em $t-1$;

$r_{i,t-1}$: Retorno do ativo i em $t-1$;

$r_{j,t-1}$: Retorno do ativo j em $t-1$;

A escolha do valor do parâmetro λ pode ser arbitrária. Entretanto, a metodologia *Riskmetrics* sugere um procedimento para a escolha de um λ ótimo baseado no erro de predição um passo à frente, onde o erro de predição um passo à frente é definido por $\varepsilon_{t+1|t} = r_{t+1}^2 - \sigma_{t+1|t}^2$. O mesmo procedimento poderia ser utilizado para o λ empregado no cálculo das covariâncias. Para maiores detalhes desses procedimentos, veja MORGAN (1994).

Neste trabalho, utilizou-se o valor de 0.97 para todos os cálculos de variâncias e covariâncias, pois esse é o valor usual utilizado pelos agentes do mercado financeiro brasileiro na determinação dos parâmetros dos diversos ativos.

A vantagem da utilização do EWMA consiste no fato dele captar mais rapidamente as mudanças bruscas de volatilidade que ocorrem com os ativos financeiros, dado que as observações mais recentes recebem um peso maior, sendo de extrema importância principalmente em épocas de crises financeiras.

APÊNDICE C

MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO DE CHOLESKY

A Fatoração de Cholesky consiste num método de fatoração da matriz de coeficientes de um sistema linear do tipo $Ax = b$. Este método é um caso especial da decomposição LU da matriz de coeficientes A , onde a matriz A é decomposta como o produto de duas matrizes L e U , onde L é uma matriz triangular inferior e U , uma matriz triangular superior, isto é:

$$A = LU \quad (C.1)$$

A Fatoração de Cholesky se aplica quando a matriz dos coeficientes A é simétrica ($A = A'$) e definida positiva²⁰ ($x'Ax > 0 \forall x \neq 0$). Neste caso, a matriz A pode ser fatorada em $A = LU = LL'$, onde L (que pode ser interpretada como “raiz quadrada” de A) é a matriz triangular inferior com todos os elementos de sua diagonal positivos.

Matricialmente, pode-se escrever $A = LL'$, como sendo igual a:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ I_{21} & I_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{n1} & I_{n2} & \cdots & I_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{11} & I_{21} & \cdots & I_{n1} \\ 0 & I_{22} & \cdots & I_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_{nn} \end{pmatrix}$$

Os elementos I_{ij} de L podem ser determinados a partir das seguintes fórmulas:

²⁰ Observamos que, em uma matriz definida positiva, todos os autovalores da matriz são positivos, isto é, são positivas todas as raízes do polinômio característico $\det(A - \lambda I) = 0$.

- Para $i = j$, temos:

$$a_{11} = I_{11}^2 \Rightarrow I_{11} = \sqrt{a_{11}} \quad (\text{C.2})$$

$$a_{22} = I_{21}^2 + I_{22}^2 \Rightarrow I_{22} = \sqrt{a_{22} - I_{21}^2} \quad (\text{C.3})$$

$$a_{33} = I_{31}^2 + I_{32}^2 + I_{33}^2 \Rightarrow I_{33} = \sqrt{a_{33} - I_{31}^2 - I_{32}^2} \quad (\text{C.4})$$

Portanto:

$$I_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} I_{ij}^2} \quad \forall i = 2, \dots, n \quad (\text{C.5})$$

- Para $i \neq j$, temos:

$$a_{21} = I_{21} \cdot I_{11} \Rightarrow I_{21} = \frac{a_{21}}{I_{11}} \quad (\text{C.6})$$

$$a_{31} = I_{31} \cdot I_{11} \Rightarrow I_{31} = \frac{a_{31}}{I_{11}} \quad (\text{C.7})$$

$$a_{32} = (I_{31} \cdot I_{21}) + (I_{32} \cdot I_{22}) \Rightarrow I_{32} = \frac{a_{32} - (I_{31} \cdot I_{21})}{I_{22}} \quad (\text{C.8})$$

Portanto:

$$I_{ij} = \frac{1}{I_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} I_{ik} I_{jk} \right) \quad \forall i = j+1, \dots, n; \quad j \geq 2 \quad (\text{C.9})$$

APÊNDICE D

CLUSTERING

Clustering é um método de classificação para a identificação de grupos num conjunto de dados (JOHNSON *et. al.*, 1998). Considerada uma das técnicas de agrupamento mais populares hoje em dia, a técnica de *clustering* possui aplicações diversas em quase todas as áreas de conhecimento.

A classificação em grupos é baseada em similaridades ou distâncias (dissimilaridades) entre os elementos de um conjunto de dados. Um dos métodos mais utilizados para o cálculo dessas dissimilaridades é a distância de Minkowski, em que a distância entre os elementos é calculada através da seguinte expressão:

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^p |x_i - y_i|^m \right]^{\frac{1}{m}} \quad (\text{D.1})$$

onde m é um número inteiro positivo que define o peso dado às diferenças. Em particular, para m igual a 2, temos a distância Euclidiana.

A partir da matriz de distâncias dos elementos de um conjunto de dados, inicia-se o algoritmo de formação de grupos. Devido a enorme variedade de formas agrupamentos, algumas técnicas foram criadas para a construção de *clusters* de forma racional, sem a necessidade de olhar para todas as possíveis configurações. Os métodos hierárquicos de *clustering* representam algumas destas técnicas.

Os métodos hierárquicos de *clustering* podem ser de duas formas: aglomeração ou divisão.

Os métodos de aglomeração começam com objetos individuais. Dessa forma, existem tantos *clusters* quantos objetos. Os objetos mais similares são agrupados. A partir dos *clusters* iniciais, desenvolve-se o mesmo algoritmo para o agrupamento destes *clusters* em *clusters* maiores, até a formação de um único *cluster* com todos os objetos, sempre respeitando a similaridade entre os grupos.

Os métodos de divisão trabalham na direção oposta. Primeiramente, temos um único *cluster* que é então subdividido em pequenos *clusters*. O processo continua até a existência de tantos *clusters* quantos objetos, isto é, até quando cada objeto formar um único *cluster*.

Analisaremos aqui os métodos de aglomeração. Para uma abordagem dos métodos de divisão, veja EVERITT (1993). JOHNSON *et. al.* (1998) apresenta os seguintes passos para a realização do agrupamento de N objetos utilizando os métodos de aglomeração:

- 1) Comece com N *clusters*, cada um contendo um único objeto, e uma matriz simétrica $N \times N$ de distâncias (ou similaridades) $D = \{d_{ik}\}$.
- 2) Procure na matriz a distância para os pares de *clusters* mais similares. Defina a distância entre os *clusters* mais similares U e V como d_{UV} .
- 3) Agrupe os *clusters* U e V . O novo *cluster* formado será nomeado UV . Atualize a matriz de distância eliminando as linhas e colunas correspondentes aos *clusters* U e V e adicionando as novas distâncias calculadas entre o *cluster* UV e os *clusters* restantes.
- 4) Repita os passos 2 e 3 até a formação de um único *cluster*. Em cada interação, identifique os *clusters* formados bem como as distâncias (ou similaridades) obtidas.

Existem vários tipos de métodos de aglomeração. Os mais utilizados são:

- **Single linkage** (mínima distância ou vizinho mais próximo) – *clusters* são formados juntando-se os elementos que possuem maior similaridade, utilizando-se a menor distância entre os elementos (um de cada *cluster*).

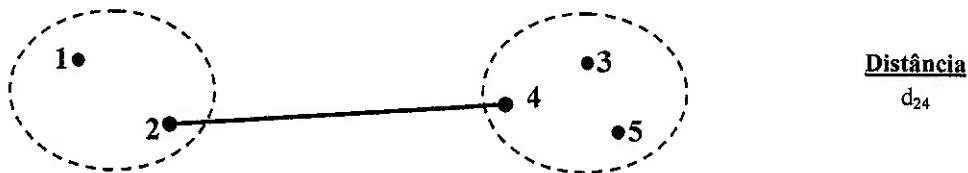


Figura D.1 – *Single Linkage* – Adaptado de JOHNSON *et. al.* (1998)

- **Complete Linkage** (máxima distância ou vizinho mais distante) - *clusters* são formados juntando-se os elementos que possuem maior similaridade, utilizando-se a maior distância entre os elementos (um de cada *cluster*).

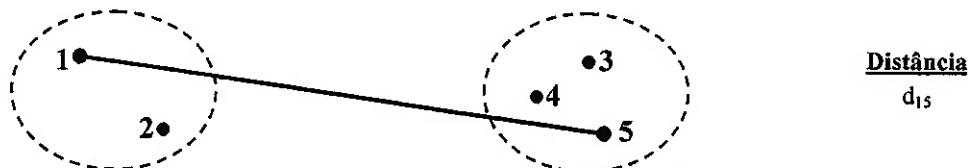


Figura D.2 – *Complete Linkage* – Adaptado de JOHNSON *et. al.* (1998)

- **Average Linkage** (distância média) – trata a distância entre dois *clusters* como a distância média entre todos os pares de itens, onde cada membro de um par pertence a um *cluster*.

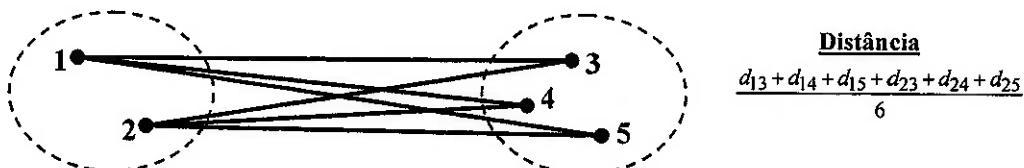


Figura D.3 – *Average Linkage* – Adaptado de JOHNSON *et. al.* (1998)

- **Ward Method** (método de WARD) – *clusters* são formados minimizando a “perda de informação” de se juntar dois grupos. Em cada passo, *clusters*, cuja combinação resulta no menor aumento da soma de desvios quadrados (calculado com relação ao centróide do cluster), são agrupados. Para uma descrição mais sucinta do método de WARD e suas aplicações, veja WARD (1963).

Os resultados da aglomeração em *clusters* podem ser visualizados na forma de um gráfico chamado dendrograma, ou diagrama em árvore. A figura D.1 ilustra esta representação. O exemplo foi construído utilizando os dados da carteira a ser otimizada. No eixo *X*, temos os objetos que representam os caminhos simulados. No eixo *Y*, temos a distância de WARD que representa o nível no qual o agrupamento foi realizado.

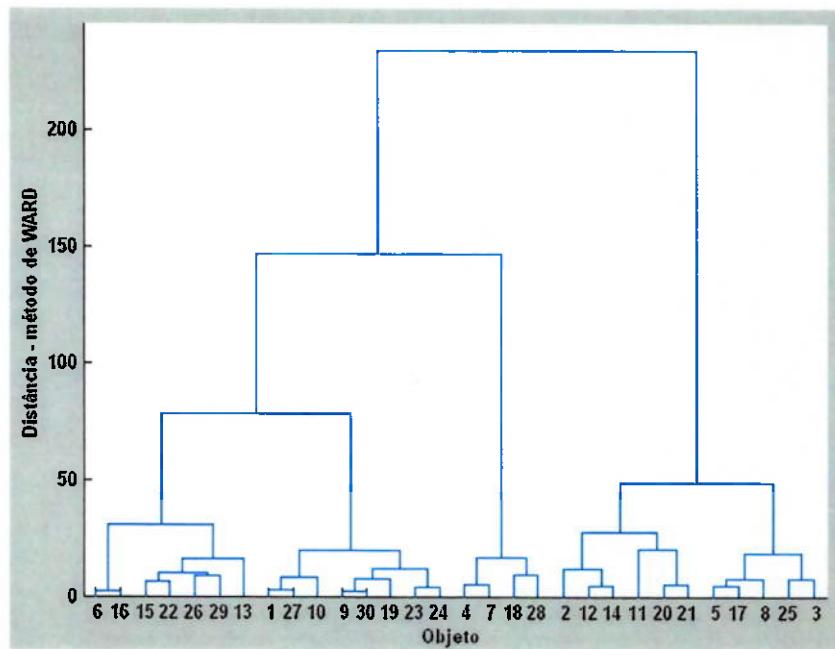


Figura D.4 – Dendograma

As divisões na árvore (nós) representam *clusters*. Dessa forma, para determinarmos o número de *clusters* que desejamos obter no conjunto de dados, efetuamos um corte horizontal numa determinada altura (eixo *Y*) do dendograma. Cada conjunto de dados resultantes representaria um *cluster*.

APÊNDICE E

MATLAB – ALGORITMO DE SIMULAÇÃO MONTE CARLO

```
%SIMULAÇÃO MONTE CARLO
%*****  

function[TNLP4,PETR4,EMBR4,VALES,AMBV4,ITAU4,CMIG4,NETC4,CCRO3,S,T,raiz,cholesky]=
MONTE_CARLO_TF(HISTORICO_DE_PRECOS_TF,MATRIZ_DE_COVARIANCIA_TF)  

% S...NÚMERO DE CENÁRIOS
% T...HORIZONTE DE INVESTIMENTO
% raiz...RAIZ DA ÁRVORE DE CENARIOS
% cholesky...DECOMPOSIÇÃO DE CHOLESKY DA MATRIZ VARIÂNCIA-COVARIÂNCIA  

% Input Boxes
S=inputdlg('Digite o numero de cenários (S) desejados:');
T=inputdlg('Digite o horizonte de investimento T (Dias):');  

% Converte o string em double
S=str2double(S);
T=str2double(T);  

% Carrega vetor raiz inicial
raiz =HISTORICO_DE_PRECOS_TF(140,:);  

%*****  

% Decomposição de Cholesky
cholesky=chol(MATRIZ_DE_COVARIANCIA_TF);
cholesky=cholesky';  

%Loop até o numero de cenários desejado
for i=1:S  

    %Loop até o número de dias (Horizonte de Investimento)
    for j=1:T  

        %Carrega a matriz de números aleatórios 9x1 (9 Ações)
        ALEATORIO=randn(9,1);  

        %Loop para calcular a variação de cada ação num dia
        for k=1:9  

            Sum=0;  

            for m=1:9  


```

```

Sum=Sum+(cholesky(k,m)*ALEATORIO(m,1));

end

%Armazena a variação da Ação 1 (Cenário i, tempo j)

if k==1
    TNLP4(i,j)=Sum;
end

%Armazena a variação da Ação 2 (Cenário i, tempo j)

if k==2
    PETR4(i,j)=Sum;
end

%Armazena a variação da Ação 3 (Cenário i, tempo j)

if k==3
    EMBR4(i,j)=Sum;
end

%Armazena a variação da Ação 4 (Cenário i, tempo j)

if k==4
    VALE5(i,j)=Sum;
end

%Armazena a variação da Ação 5 (Cenário i, tempo j)

if k==5
    AMBV4(i,j)=Sum;
end

%Armazena a variação da Ação 6 (Cenário i, tempo j)

if k==6
    ITAU4(i,j)=Sum;
end

%Armazena a variação da Ação 7 (Cenário i, tempo j)

if k==7
    CMIG4(i,j)=Sum;
end

%Armazena a variação da Ação 8 (Cenário i, tempo j)

if k==8
    NETC4(i,j)=Sum;
end

%Armazena a variação da Ação 9 (Cenário i, tempo j)

if k==9
    CCRO3(i,j)=Sum;
end

end % end do k

end % end do j
end % end do i

%Calculo dos preços dos ativos com base nos retornos calculados anteriormente

%Loop até o número de cenários desejado
for i=1:S

```

```

%Loop até o número de dias (horizonte de investimento)
for j=1:T

    for k=1:9

        if k==1

            if j==1
                TNLP4(i,j)=raiz(1,k)*exp(TNLP4(i,j));
            else
                TNLP4(i,j)=TNLP4(i,j-1)*exp(TNLP4(i,j));
            end

        end

        if k==2

            if j==1
                PETR4(i,j)=raiz(1,k)*exp(PETR4(i,j));
            else
                PETR4(i,j)=PETR4(i,j-1)*exp(PETR4(i,j));
            end

        end

        if k==3

            if j==1
                EMBR4(i,j)=raiz(1,k)*exp(EMBR4(i,j));
            else
                EMBR4(i,j)=EMBR4(i,j-1)*exp(EMBR4(i,j));
            end

        end

        if k==4

            if j==1
                VALE5(i,j)=raiz(1,k)*exp(VALE5(i,j));
            else
                VALE5(i,j)=VALE5(i,j-1)*exp(VALE5(i,j));
            end

        end

        if k==5

            if j==1
                AMBV4(i,j)=raiz(1,k)*exp(AMBV4(i,j));
            else
                AMBV4(i,j)=AMBV4(i,j-1)*exp(AMBV4(i,j));
            end

        end

        if k==6
    end
end

```

```

if j==1
    ITAU4(i,j)=raiz(1,k)*exp(ITAU4(i,j));
else
    ITAU4(i,j)=ITAU4(i,j-1)*exp(ITAU4(i,j));
end

end

if k==7

if j==1
    CMIG4(i,j)=raiz(1,k)*exp(CMIG4(i,j));
else
    CMIG4(i,j)=CMIG4(i,j-1)*exp(CMIG4(i,j));
end

end

if k==8

if j==1
    NETC4(i,j)=raiz(1,k)*exp(NETC4(i,j));
else
    NETC4(i,j)=NETC4(i,j-1)*exp(NETC4(i,j));
end

end

if k==9

if j==1
    CCRO3(i,j)=raiz(1,k)*exp(CCRO3(i,j));
else
    CCRO3(i,j)=CCRO3(i,j-1)*exp(CCRO3(i,j));
end

end

end %end k

end %end j
end %end i

```

APÊNDICE F

MATLAB – ALGORITMO DE

CLUSTERING

```
% ANÁLISE DE CLUSTER
%*****
function[Cont,dt,TD,TD_UP,TD_DOWN,C,N_DOWN,N_UP,Arvore,Elipse_UP,Elipse_DOWN,Y,L]=C
LUSTERING_TF(TNLP4,PETR4,EMBR4,VALE5,AMBV4,ITAU4,CMIG4,NETC4,CCRO3,S,T,raiz)

% Cont...VETOR DE PROBABILIDADES DE CENÁRIOS
% dt...INTERVALO DE TOMADA DE DECISÃO
% TD...MATRIZ COM OS VALORES DE TOMADA DE DECISÃO
% TD_UP...MATRIZ COM OS VALORES DE TOMADA DE DECISÃO (CLUSTERS UP)
% TD_DOWN...MATRIZ COM OS VALORES DE TOMADA DE DECISÃO (CLUSTERS DOWN)
% C...DIVISÃO DOS CLUSTERS
% N_UP...MATRIZ COM OS VALORES DOS ATIVOS DOS CLUSTERS UP
% N_DOWN...MATRIZ COM OS VALORES DOS ATIVOS DOS CLUSTERS DOWN
% Arvore...ÁRVORE DE CENARIOS
% ELIPSE_UP...MATRIZ COM OS VALORES DE N_UP SEM ZEROS
% ELIPSE_DOWN...MATRIZ COM OS VALORES DE N_DOWN SEM ZEROS
% Y...MATRIZ DE DISTÂNCIAS - DISTÂNCIA EUCLIADIANA
% L...LINKAGE (WARD METHOD)

%Input Box
DT=inputdlg('Digite o intervalo DT de tomada de decisao (dias):');

%Converte o string em double
DT=str2double(DT);
dt=DT;

%Número de iterações
decisoes=T/DT;
decisoes=decisoes-1;

%Carrega a raiz da árvore - 9 ativos
for m=1:9
    Arvore(1,m)=raiz(1,m);
end

% Construção da Árvore de Cenários
%*****
for a=1:decisoes

    % a=1
    %*****
    if a==1

        %1-)Carrega a matriz TD com os preços das ações para efetuar o PDIST do vetor preço
```

```

for i=1:S
    for k=1:9

        %Armazena o preço da Ação 1 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
        if k==1
            TD(i,k)=TNLP4(i,DT);
        end

        %Armazena o preço da Ação 2 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
        if k==2
            TD(i,k)=PETR4(i,DT);
        end

        %Armazena o preço da Ação 3 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
        if k==3
            TD(i,k)=EMBR4(i,DT);
        end

        %Armazena o preço da Ação 4 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
        if k==4
            TD(i,k)=VALE5(i,DT);
        end

        %Armazena o preço da Ação 5 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
        if k==5
            TD(i,k)=AMBV4(i,DT);
        end

        %Armazena o preço da Ação 6 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
        if k==6
            TD(i,k)=ITAU4(i,DT);
        end

        %Armazena o preço da Ação 7 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
        if k==7
            TD(i,k)=CMIG4(i,DT);
        end

        %Armazena o preço da Ação 8 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
        if k==8
            TD(i,k)=NETC4(i,DT);
        end

        %Armazena o preço da Ação 9 (Cenário i,tempo DT - tomada de decisão)
        if k==9
            TD(i,k)=CCRO3(i,DT);
        end

    end % end do for k=1 até 9

end % end do for i=1 ate S

%2-)PDIST
Y=pdist(TD,'minkowski');

%3-)Linkage
L=LINKAGE(Y,'ward');

%4-)Divisão dos clusters

```

```

C(:,a)=cluster(L,2);

%5-)Binomial tree
j=1;
k=1;

for i=1:S % j+k=S

    %Cluster up
    if C(i,a)==1

        N_UP(i,:)=TD(i,:);
        Elipse_UP(j,:)=TD(i,:);
        j=j+1;

        N_DOWN(i,:)=zeros(1,9);
    end

    %Cluster down
    if C(i,a)==2

        N_DOWN(i,:)=TD(i,:);
        Elipse_DOWN(k,:)=TD(i,:);
        k=k+1;

        N_UP(i,:)=zeros(1,9);
    end

    end

    j=j-1;
    k=k-1;

    Cont(a)=j;
    Cont(a+1)=k;

    %6-)Cálculo dos pontos médios

    % Cluster up

    Sum=zeros(1,9);

    for i=1:j

        for m=1:9

            Sum(1,m)=Sum(1,m)+ Elipse_UP(i,m);

        end
    end

    for m=1:9

        Arvore(a+1,m)=Sum(1,m)/j;

    end

    % Cluster Down

```

```

Sum=zeros(1,9);

for i=1:k

    for m=1:9
        Sum(1,m)=Sum(1,m)+ Elipse_DOWN(i,m);
    end
end

for m=1:9
    Arvore(a+2,m)=Sum(1,m)/k;
end

end % end do if a ==1

% a > 1

%*****%
%Aloco a carteira nos clusters anteriores
if a>1

logica =1; % variável booleana de divisão da arvore de cenários

for b=((2^(a-1))-1):((2^a)-2) % Para cada b, terei um up e um down

    % Para a=2, b=1,2
    % Para a=3, b=3,4,5,6
    % Para a=4, b=7,8,9,10,11,12,13,14

X=1;      % variável booleana de divisão da arvore de cenários

if logica==1 % se for true, eu sei que é um up (b impar)

c=1;

for i=1:S

if N_UP(i,1,((b+1)/2))>0

    for k=1:9

        %Armazena o preço da Ação 1 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
        if k==1
            TD_UP(c,k)=TNLP4(i,DT);
        end

        %Armazena o preço da Ação 2 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
        if k==2
            TD_UP(c,k)=PETR4(i,DT);
        end

        %Armazena o preço da Ação 3 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
        if k==3
            TD_UP(c,k)=EMBR4(i,DT);
        end

        %Armazena o preço da Ação 4 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
        if k==4
            TD_UP(c,k)=VALE5(i,DT);
        end
    end
end

```

```

%Armazena o preço da Ação 5 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
if k==5
    TD_UP(c,k)=AMBV4(i,DT);
end

%Armazena o preço da Ação 6 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
if k==6
    TD_UP(c,k)=ITAU4(i,DT);
end

%Armazena o preço da Ação 7 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
if k==7
    TD_UP(c,k)=CMIG4(i,DT);
end

%Armazena o preço da Ação 8 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
if k==8
    TD_UP(c,k)=NETC4(i,DT);
end

%Armazena o preço da Ação 9 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
if k==9
    TD_UP(c,k)=CCRO3(i,DT);
end

end % end do for do k

c=c+1;

end % end do if N_up

end % end do for do i ate S

c=c-1;

% 2-)PDIST
Y=pdist(TD_UP(1:c,:),'minkowski');

% 3-)Linkage
L=LINKAGE(Y,'ward');

%4-)Divisão dos clusters
C(1:c,b+1)=cluster(L,2);

%5-)Binomial tree

j=1;
k=1;

for i=1:c

    %Cluster up

    if C(i,b+1)==1

        N_UP(i,:,b+1)=TD_UP(i,:,1);
        Elipse_UP(j,:,b+1)=TD_UP(i,:,1);
        j=j+1;
    end
end

```

```

    end

    %Cluster down

    if C(i,b+1)==2

        N_DOWN(i,:,b+1)=TD_UP(i,:,1);
        Elipse_DOWN(k,:,b+1)=TD_UP(i,:,1);
        k=k+1;

    end

end % end do for do i ate c

j=j-1;
k=k-1;

Cont((2*b)+1)=j;
Cont((2*b)+2)=k;

%6-) Cálculo dos pontos médios

%Cluster up

Sum=zeros(1,9,1);

for i=1:j

    for m=1:9
        Sum(1,m,1)=Sum(1,m,1)+ Elipse_UP(i,m,b+1);
    end

    end

    for m=1:9
        Arvore((2*b)+2,m,1)=Sum(1,m,1)/j;
    end

end

% Cluster down

Sum=zeros(1,9,1);

for i=1:k

    for m=1:9
        Sum(1,m,1)=Sum(1,m,1)+ Elipse_DOWN(i,m,b+1);
    end

    end

    for m=1:9
        Arvore((2*b)+3,m,1)=Sum(1,m,1)/k;
    end

end

logica=0;
X=0;

```

```

end % end do if logica

if logica==0 & X==1% se for false, eu sei que é um down (b par)

c=1;

for i=1:S

if N_DOWN(i,1,(b/2))>0

for k=1:9

%Armazena o preço da Ação 1 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
if k==1
    TD_DOWN(c,k)=TNLP4(i,DT);
end

%Armazena o preço da Ação 2 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
if k==2
    TD_DOWN(c,k)=PETR4(i,DT);
end

%Armazena o preço da Ação 3 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
if k==3
    TD_DOWN(c,k)=EMBR4(i,DT);
end

%Armazena o preço da Ação 4 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
if k==4
    TD_DOWN(c,k)=VALE5(i,DT);
end

%Armazena o preço da Ação 5 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
if k==5
    TD_DOWN(c,k)=AMBV4(i,DT);
end

%Armazena o preço da Ação 6 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
if k==6
    TD_DOWN(c,k)=ITAU4(i,DT);
end

%Armazena o preço da Ação 7 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
if k==7
    TD_DOWN(c,k)=CMIG4(i,DT);
end

%Armazena o preço da Ação 8 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
if k==8
    TD_DOWN(c,k)=NETC4(i,DT);
end

%Armazena o preço da Ação 9 (Cenário i, tempo DT - tomada de decisão)
if k==9
    TD_DOWN(c,k)=CCRO3(i,DT);
end

end % end do for do k

```

```

c=c+1;

end % end do if N_DOWN

end % end do for i ate s

c=c-1;

% 2-)PDIST
Y=pdist(TD_DOWN(1:c,:),'minkowski');

% 3-)Linkage
L=LINKAGE(Y,'ward');

%4-)Divisão dos clusters
C(1:c,b+1)=cluster(L,2);

%5-)Binomial tree

j=1;
k=1;

for i=1:c

%Cluster up

if C(i,b+1)==1

N_UP(i,:,b+1)=TD_DOWN(i,:,1);
Elipse_UP(j,:,b+1)=TD_DOWN(i,:,1);
j=j+1;

end

%Cluster down

if C(i,b+1)==2

N_DOWN(i,:,b+1)=TD_DOWN(i,:,1);
Elipse_DOWN(k,:,b+1)=TD_DOWN(i,:,1);
k=k+1;

end

end % end do for do i ate c

j=j-1;
k=k-1;

Cont((2*b)+1)=j;
Cont((2*b)+2)=k;

%6-)Cálculo dos pontos médios

% Cluster up

Sum=zeros(1,9,1);

for i=1:j

```

```

for m=1:9
    Sum(1,m,1)=Sum(1,m,1)+ Elipse_UP(i,m,b+1);
end

end

for m=1:9
    Arvore((2*b)+2,m,1)=Sum(1,m,1)/j;
end

% Cluster down

Sum=zeros(1,9,1);

for i=1:k

    for m=1:9
        Sum(1,m,1)=Sum(1,m,1)+ Elipse_DOWN(i,m,b+1);
    end

    for m=1:9
        Arvore((2*b)+3,m,1)=Sum(1,m,1)/k;
    end

    logica=1;

end % end do if logica

end % end do for do b

end % end do if a>1

DT=DT+dt;

end %end do for das decisoes

Cont=Cont/S;
Cont=Cont';

```