

Davi Gonçalves Sellin

Modelagem físico-computacional da dinâmica de voo de
veículos aeroespaciais de baixa altitude e simulação numérica
calibrada com dados experimentais

Trabalho de conclusão de curso apresentado
ao Instituto de Física de São Carlos da Univer-
sidade de São Paulo para obtenção do título de
Bacharel em Física Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Simeoni de
Sousa.

São Carlos
2025

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Resumo

Em decorrência da crescente retomada de atividades no âmbito aeroespacial, tem sido cada vez mais comum a operação de foguetes de pequeno porte por parte de uma parcela mais informal da sociedade, como hobistas, pequenas empresas e até mesmo instituições estudantis. Como a regulamentação para esse tipo de operação não é totalmente consolidada em nosso país, ela é muitas vezes realizada de maneira clandestina e em perímetros urbanos, oferecendo riscos à segurança tanto aos agentes operadores quanto aos civis frequentando a região ao entorno, logo, urge a necessidade de um sistema capaz de fornecer, confiavelmente, previsões tanto acerca da trajetória desempenhada por veículos dessa categoria quanto dos possíveis locais de queda. Ao longo deste documento serão retratados os resultados obtidos, a metodologia utilizada e a fundamentação teórica na qual se pautou a modelagem matemático-computacional das equações diferenciais que descrevem a dinâmica de voo de um veículo lançador de pequeno porte operado em regime subsônico munido com seis graus de liberdade. Além disso, também será discutido sobre o método numérico passo-adaptativo utilizado e suas vantagens sobre demais integradores numéricos da família Runge-kutta. Visando tornar o modelo desenvolvido ainda mais fidedigno, foram incorporados calibrações experimentais a respeito da performance do sistema de propulsão e das condições climáticas enfrentadas durante voo, principalmente no que concerne à direção e velocidade de rajadas de vento, as quais desempenham papel importante na perturbação da trajetória nominal. Por fim, todos os dados coletados e infraestruturas utilizadas para teste do foguete tomado como objeto de estudo são provenientes dos esforços desempenhados pela equipe de foguetemodelismo Topus Projetos Aeroespaciais, a quem todo conhecimento construído possa ser utilizado para alcançar resultados ainda maiores, se consagrando cada vez mais no cenário aeroespacial brasileiro.

Palavras-chave: Dinâmica de voo. Trajetória. Simulação numérica. Calibração experimental.

Sumário

1	Introdução	3
2	Fundamentação teórica	4
2.1	Definição e caracterização de um foguete de sondagem	4
2.2	Modelagem matemática da dinâmica de voo	6
2.2.1	Dinâmica translacional	6
2.2.2	Dinâmica rotacional	9
3	Metodologia	11
3.1	Sistema de equações diferenciais	11
3.2	Solução numérica	13
4	Resultados	14
4.1	Posições e velocidades translacionais	15
4.2	Ângulos de Euler e respectivas taxas de variação	16
4.3	Consumo de massa e posição do centro de gravidade	17
4.4	Erro de truncamento e variação do passo de tempo	17
5	Conclusões e próximos passos	18
	Referências	19

1 Introdução

Desde os primórdios da humanidade, o ser humano sempre foi fascinado pelo cosmos, tendo as primeiras atividades de cunho espacial voltadas à observação e explicação de fenômenos que envolviam o movimento de corpos celestes, mas que seriam efetivamente esclarecidos somente anos depois com a manipulação de equações provenientes do surgimento da álgebra diferencial e integral, revelando nomes como Kepler, Newton e Galileu.

Com o passar do tempo e propiciada pelo desenvolvimento tecnológico em decorrência de revoluções industriais, sendo principalmente intensificada pela corrida espacial realizada durante a guerra fria, a evolução e refino de tecnologias espaciais foi motivada por interesses cujo caráter variam desde atividades econômicas que mirão a exploração comercial da baixa órbita terrestre até manutenção de soberania e interesses governamentais.

Dentre os principais ativos pelo qual a busca por domínio tecnológico se destacou na última década, destaca-se a capacidade plena de operar veículos lançadores capazes de posicionar cargas pagas em órbita da maneira mais segura possível. Contudo, inspirados pelos feitos realizados por empresas como SpaceX e incentivados por grandes eventos realizados mundo afora (como é o caso da *Spaceport America Cup* e da *Latin America Space Challenge*), a operação de foguetes de pequeno porte protagonizada por pequenas empresas, organizações estudantis e demais hobistas têm se tornado cada vez mais frequente, sendo essa muitas vezes realizada de maneira clandestina e em locais inadequados em virtude da ausência de normas que regulamentem atividades dessa natureza.

Com isso, motivado pela falta de ferramentas que possam fornecer previsões fidedignas acerca da trajetória performada por foguetes de sondagem durante voo, bem como elencar possíveis locais de queda para os mesmos, o presente trabalho objetiva a aplicação de métodos computacionais para solucionar numericamente as equações diferenciais que modelam a dinâmica de voo de um veículo lançador de pequeno porte munido com seis graus de liberdade, tornando a operação mais segura não somente para equipe técnica envolvida, mas principalmente para as diversas esferas da sociedade alocadas ao entorno da região de operação de veículos dessa natureza.

2 Fundamentação teórica

2.1 Definição e caracterização de um foguete de sondagem

Um foguete de sondagem consiste em um modelo construído em pequena escala, porém razoavelmente similar, dos veículos lançadores desenvolvidos por renomadas companhias e agências governamentais internacionais, como por exemplo os foguetes *Falcon-9* e *New Shepard*, desenvolvidos, respectivamente, pela SpaceX e Blue Origin para atuar em missões que variam desde o posicionamento estratégico de satélites na órbita terrestre até o transporte comercial de pessoas. A figura abaixo evidencia uma arquitetura típica de foguetes de sondagem.

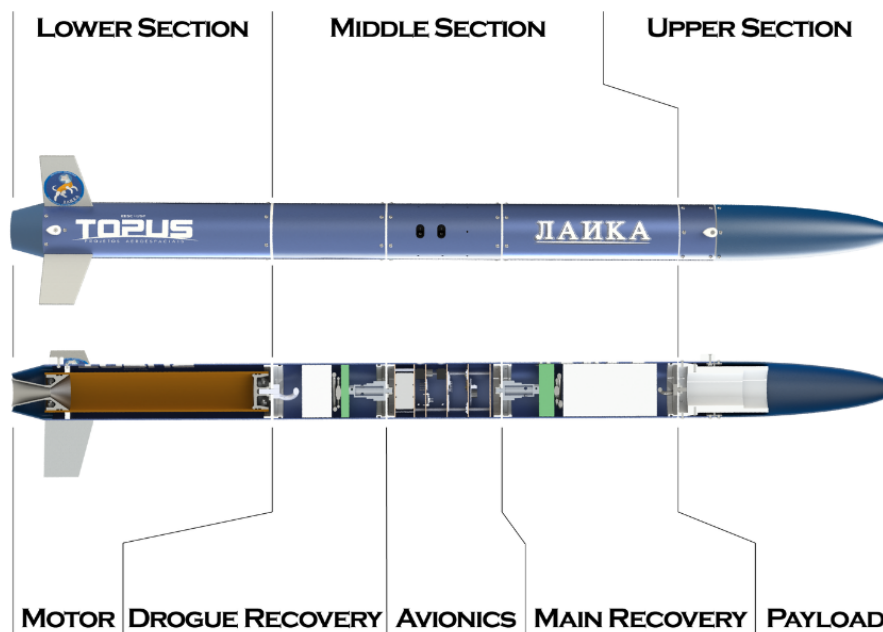


Figura 1: Diagrama explicativo seccionando os principais mecanismos embarcados em um foguete experimental. **Fonte:** TOPUS Projetos Aeroespaciais.

Como a capacidade de carga e performance do sistema de propulsão de veículos dessa categoria são bem reduzidas, sua arquitetura é projetada de modo a atender da melhor maneira as demandas da missão para a qual foi construído, estando estas muitas vezes pautadas em interesses estudantis e educacionais. Comumente, os subsistemas de um foguete de sondagem são embarcados seguindo a divisão exposta pela figura 1: **Lower Section**, **Middle Section** e **Upper Section**; cada uma destas contendo componentes imprescindíveis para garantir a operação plena do veículo.

- **Lower Section:** O interior desta seção é contemplada exclusivamente pelo motor, o qual é responsável por resistir às reações químicas provocadas pela combustão do propelente utilizado, direcionando a expansão dos gases gerados e propulsionando o foguete até o apogeu desejado. Por outro lado, no exterior desta seção são encontradas as **aletas** e a **boattail**, estruturas aerodinâmicas alocadas estrategicamente sobre a fuselagem de forma tanto a garantir a estabilidade do foguete durante voo posicionando o centro de pressão atrás do centro de gravidade quanto a otimizar os efeitos da força de arrasto incidente sobre a fuselagem;
- **Middle Section:** A seção intermediária contém os mecanismos de recuperação utilizados para promover o retorno seguro do foguete até o solo. Neste caso e, geralmente, são empregados de um a dois paraquedas, sendo estes acionados em momentos distintos durante a fase de queda livre, a qual consiste em todo intervalo de tempo em que o foguete está caindo após atingir o apogeu. Além disso, esta seção também incorpora toda instrumentação eletrônica utilizada para a captação de dados como altitude em relação ao solo, geolocalização, velocidade e orientação, sendo utilizados, a posteriori, para análises de performance;
- **Upper Section:** Por fim, a seção superior é destinada a acomodar o *payload* (ou "carga paga") da missão. No caso de foguetes em grande escala, estes possuem como payloads satélites com as mais variadas finalidades, mas quando a escala desses veículos lançadores é reduzida, o volume interno destinado à acomodação da carga paga é prejudicado, restringindo-se muitas vezes a um espaço útil interno utilizado somente para atender exigências de competições amadoras. Frequentemente o payload é acomodado no interior da **coifa**, outra estrutura aerodinâmica que merece atenção quando projetada uma vez que é responsável por aguentar grande parte do carregamento aerodinâmico durante voo.

Para a execução deste trabalho, foi tomado como objeto de estudo o foguete **Teseu** desenvolvido pela organização estudantil *TOPUS Projetos Aeroespaciais*, equipe de foguetemodelismo vinculada à Escola de Engenharia de São Carlos a qual o autor desta monografia teve a oportunidade de contribuir ativamente durante os últimos seis anos.

2.2 Modelagem matemática da dinâmica de voo

Por natureza, como um foguete experimental possui seis graus de liberdade, a modelagem do comportamento dinâmico foi descrita pela utilização em conjunto das formas diferenciais da **Segunda Lei de Newton** e das **Equações de Euler** para rotação de corpos rígidos,¹ responsáveis por descrever, respectivamente, o deslocamento do foguete ao longo do espaço tridimensional virtual e as posições angulares realizadas durante voo, sendo estas nomeadas na literatura como **Ângulos de Euler**.

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{1}{m} \sum_j \mathbf{F}_j \quad (1)$$

$$\mathbb{I} \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbb{I} \boldsymbol{\omega}(t)) = \sum_j \mathbf{T}_j \quad (2)$$

Em 1, o vetor de aceleração $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t)$, definido como a taxa de variação temporal da velocidade em $\mathbb{R}^3$, é descrito pelo produto entre a somatória de forças atuantes sobre o centro de massa do foguete, denotadas por $\mathbf{F}_j$, e o inverso da massa do mesmo. Enquanto isso, em 2, o vetor aceleração angular $\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)$, expresso por definição como a derivada temporal do vetor velocidade angular e também em $\mathbb{R}^3$, se encontra como função do próprio vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}(t)$, da matriz momento de inércia $\mathbb{I}$ e da somatória de forças exercidas sobre o centro de pressão do foguete responsáveis por exercer torque sobre o mesmo.

2.2.1 Dinâmica translacional

No que concerne à dinâmica translacional, as forças consideradas capazes de atuar diretamente no centro de gravidade do foguete de sondagem tomado como objeto de estudo, influenciando diretamente na distância percorrida ao longo das três dimensões espaciais, são as forças de **arrasto**, **empuxo** e **peso**.²

A força de arrasto $\mathbf{A}(t)$ é dada como função da densidade do fluido ρ no qual o veículo lançador está imerso, da área de referência S_{ref} , do vetor velocidade de deslocamento do centro de gravidade $\mathbf{V}$ e do coeficiente de arrasto C_d , sendo matematicamente representada da seguinte forma:

$$\mathbf{A}(t) = -\frac{1}{2} \rho S_{ref} C_d |\mathbf{v}(t)| \mathbf{v}(t) \quad (3)$$

Em teoria, o coeficiente de arrasto é determinado, de maneira precisa, quando tomado

como função de diversos parâmetros, como por exemplo os ângulos de ataque e deriva, número de mach, geometria e até mesmo, uma vez o foguete munido de um sistema ativo para controle de trajetória, do ângulo formado entre as superfícies defletoras e o plano axial. Contudo, considerando a geometria simples e quase simétrica do foguete em questão, bem como os baixos números de mach (razão entre o módulo da velocidade de deslocamento do centro de massa pela velocidade de propagação do som na região de lançamento) durante voo, o coeficiente de arrasto será tomado como constante, assumindo, entretanto, módulos distintos durante as fases de ascensão e de queda livre visto que a disposição física das seções do veículo lançador (vide figura 1) são discrepantes quando comparadas antes e depois da ativação do sistema de recuperação.

Enquanto isso, a força de empuxo é realizada pelo motor durante a expansão dos gases produzidos no processo de combustão do propelente utilizado. Por mais que existam estudos acerca de como a estequiometria e a geometria do combustível (no caso de motores de propulsão híbrida e sólida)² possam interferir diretamente na performance do sistema de propulsão, levando a expressões analíticas que relacionam a magnitude da força de empuxo com propriedades termodinâmicas dos gases produzidos no processo de combustão, implementou-se na modelagem em questão uma abordagem mais simples: levantamento experimental da **curva de empuxo** desempenhada pelos motores candidatos a serem embarcados no foguete tomado como objeto de estudo.

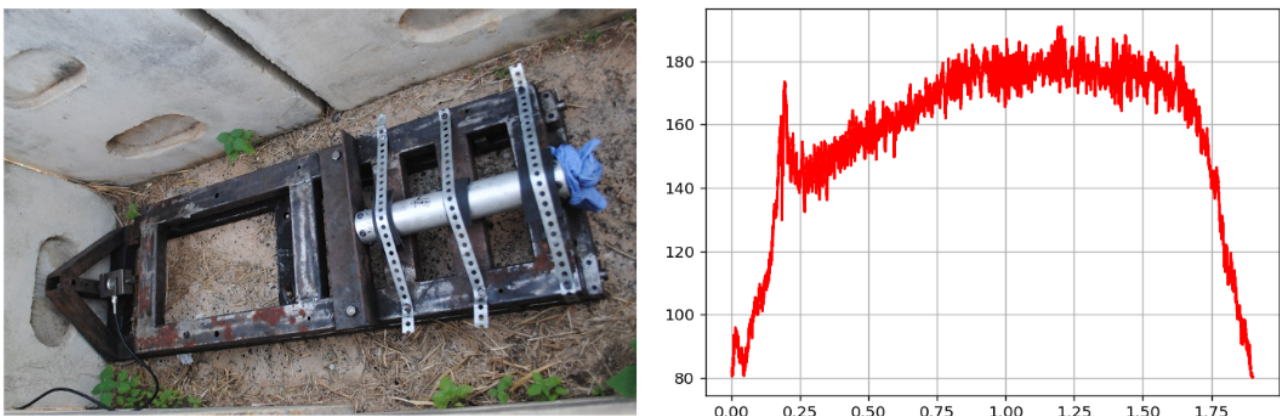


Figura 2: À esquerda, bancada de testes utilizada para captação da curva de empuxo (à direita).
Fonte: TOPUS Projetos Aeroespaciais.

Finalmente, a força peso P foi implementada como função da massa m do corpo no qual ela está atuando e do vetor aceleração da gravidade $\vec{g}$, sendo matematicamente

expressa pela equação abaixo:

$$P = mg \quad (4)$$

Existem diversos modelos que considerem alterações no cálculo do módulo do vetor g em decorrência de distorções acarretadas por aproximações geométricas da superfície terrestre e da distância entre esta e o corpo tomado como objeto de análise, como é o caso do modelo WGS-84.³ Contudo, o módulo do campo gravitacional da Terra foi assumido neste trabalho como constante igual à $9,78\text{m/s}^2$ em virtude do baixo erro relativo tanto para variações de 90° de latitude quanto para altitudes de operação até 10km , altitudes características para a operação de foguetes de sondagem.

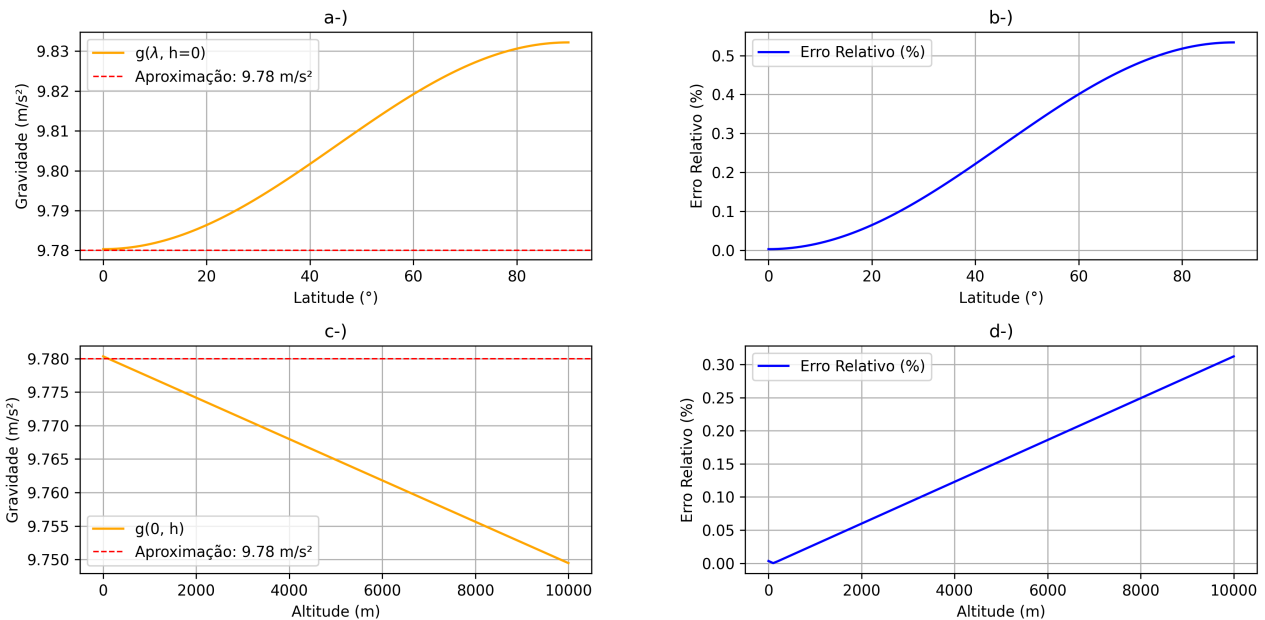


Figura 3: a-) e c-) Comportamento gráfico esboçado pela equação 5 em função, respectivamente, da latitude e altitude enquanto mantendo altitude e latitude constante. b-) e d-) Erros relativos das curvas a-) e c-) com relação ao valor de referência de $9,78\text{m/s}^2$ adotado como referência. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

A figura 3 promove uma visualização gráfica dos efeitos da correção do módulo da aceleração gravitacional do planeta em função da coordenada latitude λ e da altura h com a qual o objeto analisado se encontra da superfície terrestre considerando a modelagem proposta pelo modelo WGS-84, cuja representação matemática é expressa pela equação 5.

$$g(\lambda, h) = g(\lambda) - [3.0877 \times 10^{-6} - 0.0044 \times 10^{-6} \sin^2(\lambda)] h + 0.072 \times 10^{-12} h^2 \quad (5)$$

Sendo $g(\lambda)$ expresso por:

$$g(\lambda) = g_0 [1 + 0.0053024 \sin^2(\lambda) - 0.0000058 \sin^2(2\lambda)] \quad (6)$$

Na qual g_0 indica a aceleração gravitacional na linha do Equador.

2.2.2 Dinâmica rotacional

No que diz respeito à dinâmica rotacional enfrentada por um foguete de sondagem, à única força considerada como realmente relevante pelo modelo desenvolvido com capacidade de influenciar significativamente na orientação do veículo durante voo é a força de **sustentação**,² cuja representação matemática se encontra em função dos mesmos parâmetros que a força de arrasto, variando o coeficiente aerodinâmico de C_d para C_l .

Assim como o coeficiente de arrasto, o coeficiente de sustentação também pode ser representado como função de diversos parâmetros, contudo, este trabalho explora a seguinte aproximação: o coeficiente de sustentação será expresso como função linear ou do ângulo de ataque α ou do ângulo de deriva β assumido pelo foguete tomado como objeto de estudo durante voo, sendo o coeficiente angular dessa função chamado de $C^{l\alpha}$.

Esta simplificação é pautada nos mesmos fatos que permitem aproximar a natureza do módulo do coeficiente de arrasto para constante. A figura 4 auxilia na visualização dessa dependência praticamente linear do coeficiente de sustentação com o ângulo de ataque.

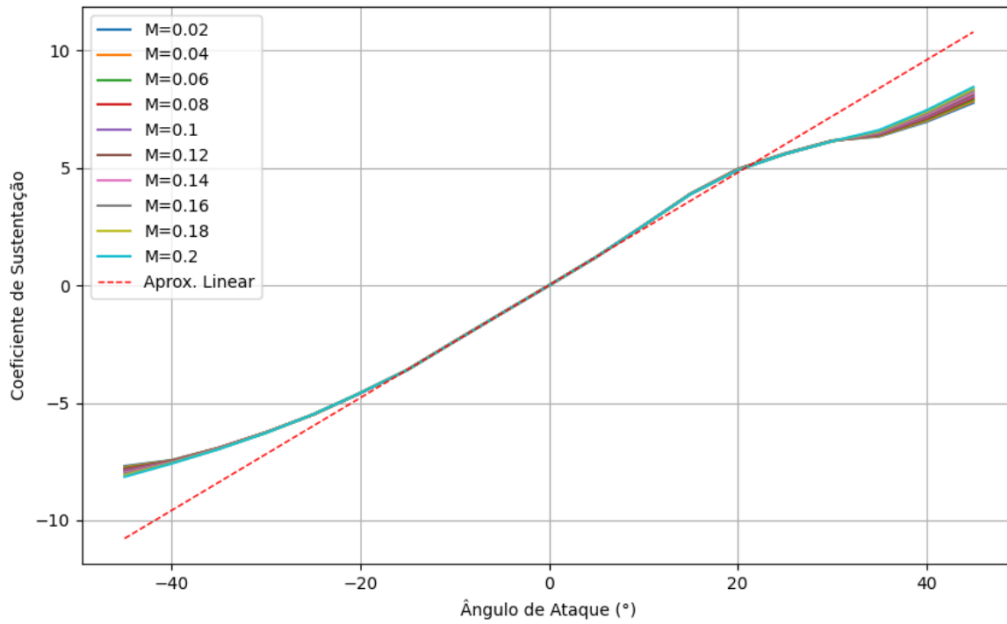


Figura 4: Coeficientes de sustentação extraídos com o auxílio da ferramenta *Missile Datcom* para os ângulo de ataque compreendidos pelo intervalo $[-45^\circ, 45^\circ]$. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

Durante voo, o coeficiente de sustentação geral de um foguete de sondagem pode ser determinado como uma média ponderada dos coeficientes de sustentação de cada componente posicionado sobre a fuselagem sujeito aos efeitos da força de sustentação, tomando como "peso" a posição do centro de pressão intrínseco a cada uma dessas componentes. No caso do foguete tomado como objeto de estudo deste trabalho, as únicas estruturas passíveis de exercer sustentação são a **coifa**, as **aletas** e o **boattail**, cujos respectivos $C^{l\alpha}$ podem ser determinados se apoiando nas equações de Barrowman,⁴ sendo representados, respectivamente, pelas equações abaixo.

$$C_{coifa}^{l\alpha} = 2; \quad C_{aletas}^{l\alpha} = \left(1 + \frac{R}{S + R}\right) \frac{4n \left(\frac{S}{d}\right)^2}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2LF}{Rr + CT}\right)^2}}; \quad C_{boattail}^{l\alpha} = -2 \left(1 - \frac{dR^2}{d^2}\right) \quad (7)$$

Nas quais os parâmetros à direita de duas das equações acima estão vinculadas a propriedades geométricas do foguete em questão, sendo estas ilustradas pela figura 5. Exceto pela variável n , a qual não é indicada abaixo mas que representa a quantidade de aletas que o foguete possui.

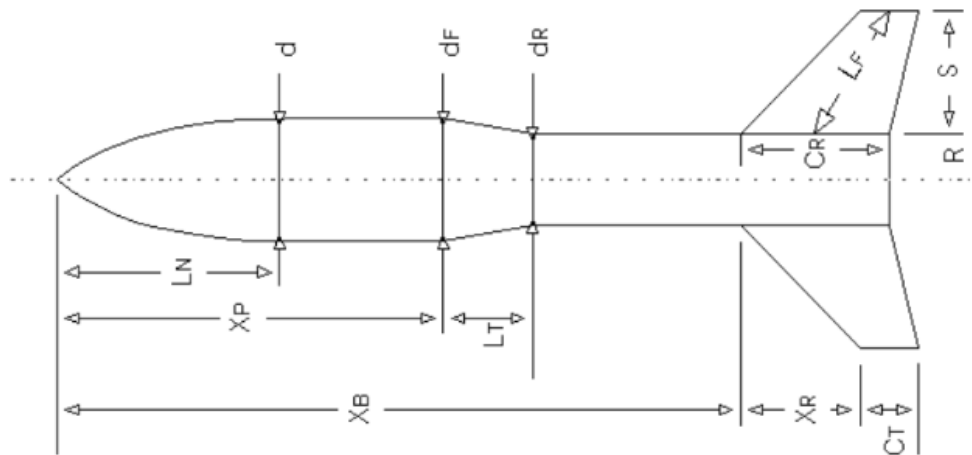


Figura 5: Diagrama explicativo utilizado para identificar os parâmetros geométricos tomados como argumentos das equações retratadas por 7. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

3 Metodologia

Visando tornar mais compreensível as fases de operação do foguete de sondagem tomado como objeto de estudo deste trabalho, o modelo em questão enaltece três principais gatilhos da operação de um veículo lançador:

- **Lift-off:** denotado por $t_{\text{lift-off}}$, representa o exato instante em que o foguete deixa a plataforma de lançamento;
- **MECO:** do inglês *Main Engine Cut-Off* e denotado por t_{meco} , marca o exato instante em que todo o combustível foi consumido, cessando a força de empuxo exercida pelo motor;
- **Apogeu:** denotado por t_{apogeu} , referencia o exato instante em que o foguete atinge a máxima altitude, momento no qual ocorre o acionamento do sistema de recuperação, viabilizando um retorno suave ao solo.

3.1 Sistema de equações diferenciais

Unindo as contribuições de cada uma das forças abordadas na seção anterior, a equação diferencial responsável por descrever a dinâmica translacional da problemática modelada é

representada pela expressão 8:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = -\mathbf{g} + \frac{1}{m(t)} \left(-\frac{1}{2} \rho S_{ref} |\mathbf{v}(t)| \mathbf{v}(t) \right) + \mathbf{E}(t) \quad (8)$$

Na qual o vetor $\mathbf{E}(t)$ representa a contribuição da força de empuxo exercida pelo motor durante voo, sendo este definido pela expressão abaixo:

$$\mathbf{E}(t) = \begin{cases} E(t) [\cos(\theta) \cos(\psi), \cos(\theta) \sin(\psi), \sin(\theta)]^T, & t \leq t_{meco} \\ 0, & t > t_{meco} \end{cases} \quad (9)$$

Em 9, $E(t)$ indica a força de empuxo registrada em um determinado instante de tempo do intervalo discretizado pelo setup experimental da figura 2 e $\dot{m}(t)$ representa a taxa com a qual o combustível é consumido ao longo do tempo. ψ e θ representam dois dos três ângulos de Euler.

Por outro lado, a equação diferencial responsável por descrever a dinâmica rotacional é representada pela expressão 10:

$$\mathbb{I} \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbb{I} \boldsymbol{\omega}(t)) = -\frac{1}{2} \rho S_{ref} \begin{bmatrix} |\mathbf{v}(t) - \mathbf{w}|^2 C^{l\alpha} \beta l + |\mathbf{v}(t) - \mathbf{w}| \omega_{\psi}(t) \left(\sum_{j \in \mathcal{J}} l_j^2 C_j^{l\alpha} \right) \\ |\mathbf{v}(t) - \mathbf{w}|^2 C^{l\alpha} \alpha l + |\mathbf{v}(t) - \mathbf{w}| \omega_{\theta}(t) \left(\sum_{j \in \mathcal{J}} l_j^2 C_j^{l\alpha} \right) \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{M}(t) \quad (10)$$

Na qual o vetor $\mathbf{M}(t)$ representa o efeito de amortecimento provocado pela ejeção dos gases produzidos durante combustão no movimento oscilatório performed pelo foguete, estando em função da taxa com a qual o combustível é consumido ao longo do tempo $\dot{m}(t)$, do módulo da distância entre as posições axiais do centro de gravidade geral do foguete e da tubeira r e das taxas de variação dos ângulos de guinada e arfagem, denotados respectivamente por ω_{ψ} e ω_{θ} . Sua representação matemática é dado por:

$$\mathbf{M}(t) = -\frac{\dot{m}(t)}{r^2} [\omega_{\psi}, \omega_{\theta}, 0]^T \quad (11)$$

Em 10, $C^{l\alpha 0}$ e $C_j^{l\alpha 0}$, com $\mathcal{J} = \{\text{coifa, aletas, boattail}\}$, indicam, respectivamente, o

coeficiente angular das aproximações lineares para o coeficiente de sustentação do foguete como um todo e de cada aeroestrutura suscetível aos efeitos da força de sustentação. As variáveis l_j indicam a distância entre o centro de gravidade do foguete e a posição do centro de pressão de cada aeroestrutura a qual $C_j^{l\alpha}$ se refere, bem como l indica o módulo da distância entre o centro de gravidade e o centro de pressão geral do foguete. O vetor w se refere ao vetor velocidade (em $\mathbb{R}^3$) com a qual as rajadas de vento (quando consideradas) estão incidindo sobre o veículo lançador. $\omega_\psi(t)$ e $\omega_\theta(t)$ indicam, respectivamente, a primeira e segunda componente do vetor $\omega(t)$.

Vale ressaltar que a expressão 10 é válida somente para o intervalo $t_{\text{lift-off}} < t < t_{\text{apogeu}}$, visto que para o foguete estar efetivamente sujeito às forças capazes de influenciar em sua orientação, é necessário que ele já tenha deixado o solo e que o sistema de recuperação não tenha sido acionado.

Por fim, os dados armazenados na curva de empuxo que caracteriza a performance do sistema de propulsão também foram utilizados para contemplar as equações diferenciais responsáveis por expressar a variação de massa e da posição do centro de gravidade ao longo do eixo axial do foguete durante o consumo de combustível (para todo $t < t_{\text{meço}}$), dadas respectivamente por 12 e 13:

$$\dot{m}(t) = \frac{E(t)}{I} M_{\text{comb}} \quad (12)$$

$$\dot{X}_{\text{cg}}(t) = \frac{E(t)}{I} \Delta_{\text{cg}} \quad (13)$$

Nas quais I representa o impulso gerado pelo motor, Δ_{cg} a variação total da posição do centro de gravidade ao longo do eixo axial do foguete durante o consumo do combustível e M_{comb} a massa deste. Com isso, as equações 8, 10, 12 e 13 consolidam as oito equações solucionadas numericamente pelo simulador de voo desenvolvido.

3.2 Solução numérica

A solução numérica do problema de valor inicial em questão foi obtida através da implementação do método numérico de **Fehlberg**, o qual consiste em um método passo-adaptativo de tempo através da combinação de dois métodos **Runge-Kutta**⁵ (um de quarta e outro de quinta ordem) cujo valor das variáveis abordadas na subseção anterior são determinadas, para um instante t_{n+1} , da seguinte maneira:

$$U^{n+1} = U^n + h \sum_{i=1}^R b_i K^i \quad \text{onde} \quad K^i = f \left(U^n + h \sum_{j=1}^{R-1} a_{ij} K^j, t_n + h c_i \right) \quad (14)$$

E seus coeficientes a_{ij} , b_i e c_i são expressos matricialmente como:

0	0				
c_2	a_{21}	0			
c_3	a_{31}	a_{32}	0		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	
c_R	a_{R1}	a_{R2}	$\cdots$	$a_{R,R-1}$	0
	b_1	b_2	$\cdots$	b_{R-1}	b_R

Tabela 1: Representação matricial dos coeficientes a_{ij} , b_i e c_i dos métodos da família Runge-Kutta.

A atualização do passo de tempo h é realizado através da expressão 15, na qual p representa a menor ordem do método de runge-kutta empregado (no caso em questão, este parâmetro assume valor igual a quatro), ε indica o erro de truncamento calculado em um determinado passo de tempo e expresso matematicamente pela norma do vetor diferença entre os resultados calculados por cada um dos métodos de Runge-Kutta implementados, ε_{tol} é o erro de truncamento máximo tolerado, h_n é o passo de tempo utilizado no momento e η é um fator de segurança utilizado para evitar oscilações instáveis que levem o passo de tempo a reduzir desenfreadamente.

$$h_{n+1} = \eta h_n \times \left(\frac{\varepsilon_{tol}}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p+1}} \quad (15)$$

4 Resultados

Visando aproximar os resultados obtidos no que diz respeito ao deslocamento realizado pelo foguete durante a trajetória, bem como evitar chamadas de API a cada passo de tempo simulado (o que acarretaria um tempo de processamento muito grande), a modelagem em questão considera o carregamento prévio de uma malha geoclimática pautada nas informações disponibilizadas pelas plataformas *OpenWeatherMap*⁶ e *Google Maps*,⁷

dispondo assim informações quase que instantâneas acerca da velocidade e direção do vento, temperatura, umidade relativa e até mesmo visualização utilizando imagens coletadas via satélite da região ao entorno das coordenadas de lançamento. A figura 6 ilustra como essa discretização espacial é realizada.

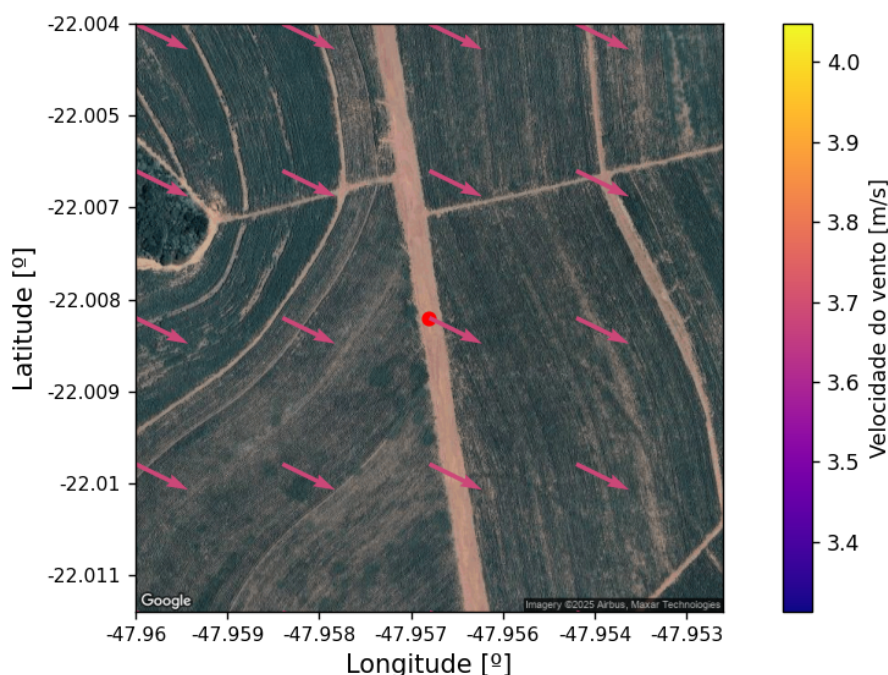


Figura 6: Discretização espacial do ambiente de simulação através de uma malha geoclimática previamente carregada. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

Na qual o ponto em vermelho indica a coordenada de lançamento. Os resultados expostos pela subseções abaixo, bem como pela figura 6, são referentes às condições climáticas do dia 4 de Novembro de 2025 às 10:38:25. De forma a facilitar o entendimento e auxiliar na validação dos fenômenos físicos simulados, as figuras abaixo contam com linhas verticais tracejadas das cores verde, azul e magenta, representando, respectivamente, os gatilhos **lift-off**, **MECO** e **apogeu**.

4.1 Posições e velocidades translacionais

Analisando as curvas de velocidade por meio da figura 7, é possível observar que fenômenos físicos como a influência dos efeitos gravitacionais do planeta e velocidade terminal foram contemplados com sucesso, bem como a influência das rajadas de vento na dispersão da trajetória ao longo do plano XY.

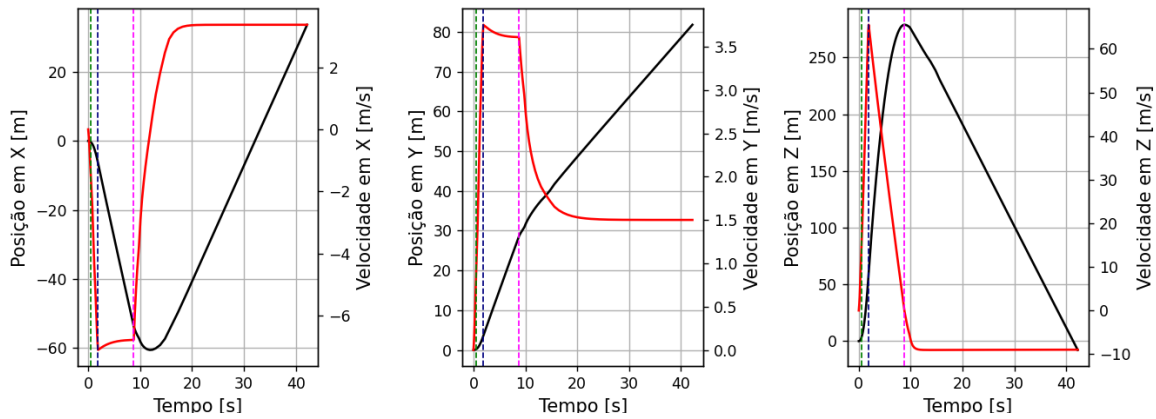


Figura 7: Representação gráfica das posições (curvas em preto) e velocidades (curvas em vermelho) ao longo dos três eixos espaciais que modelam o ambiente de simulação. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

4.2 Ângulos de Euler e respectivas taxas de variação

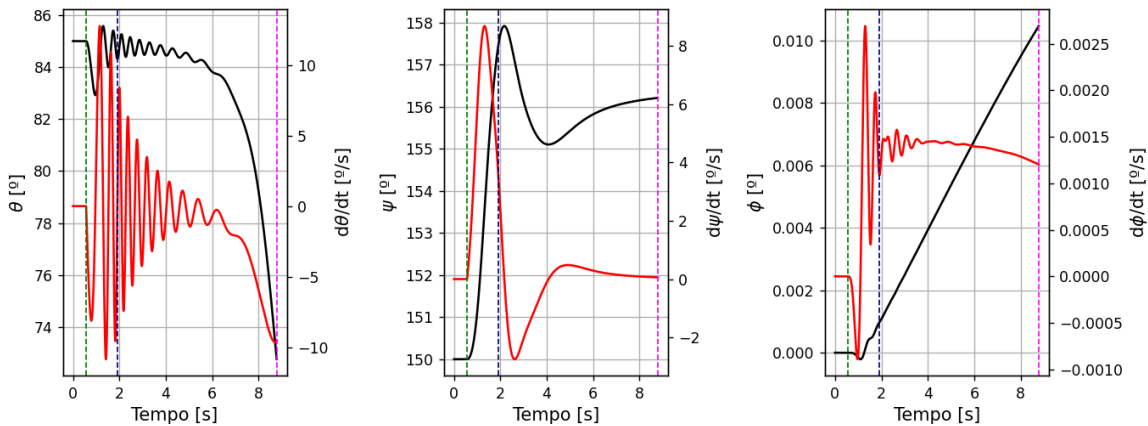


Figura 8: Ângulos de Euler (curvas em preto) e suas respectivas taxas de variação (curvas em vermelho). **Fonte:** Elaborado pelo autor.

Observando o lugar geométrico descrito pelos ângulos de Euler θ e ψ , é possível afirmar que a influência das rajadas de vento atenderam satisfatoriamente as expectativas iniciais ao promover um alinhamento da orientação do foguete com sua direção de propagação. Ademais, analisando a evolução temporal do ângulo ϕ , é possível constatar que realmente não houveram contribuições significativas capazes de interferir no movimento performedo pelo mesmo, levando-nos a interpretar o resultado observado como meras flutuações numéricas.

4.3 Consumo de massa e posição do centro de gravidade

No que diz respeito ao consumo de massa e a posição axial do centro de gravidade, é possível constatar que elas manifestam o comportamento esperado analisando o fato de que suas respectivas variações ocorrem somente durante o intervalo de tempo compreendido pela queima do combustível, logo, se parte da massa posicionada na parte traseira do foguete é consumida, a posição axial do centro de gravidade tende a se aproximar da coifa.

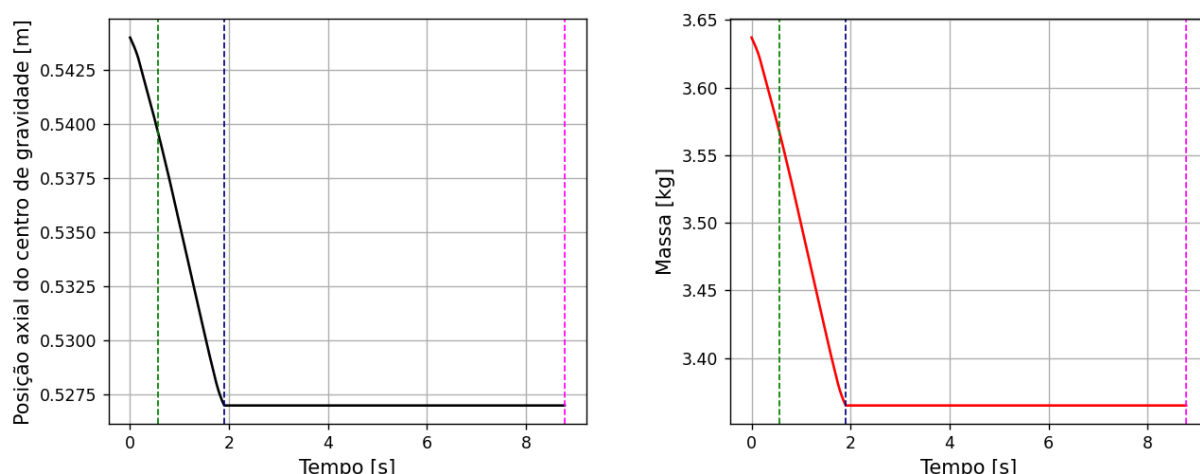


Figura 9: À esquerda, comportamento da massa do foguete durante voo. À direita, representação gráfica da posição do centro de gravidade ao longo do eixo axial do foguete. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

4.4 Erro de truncamento e variação do passo de tempo

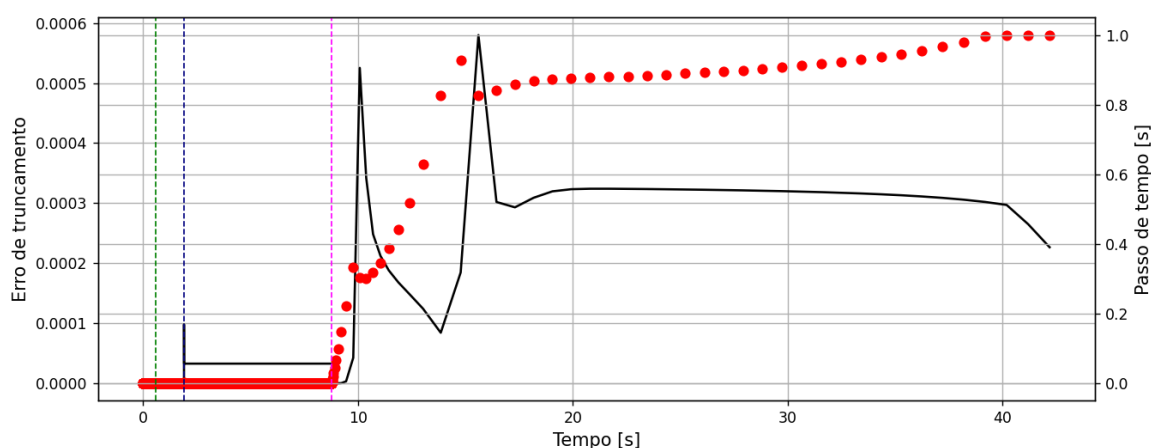


Figura 10: Comportamento gráfico descrito pelo erro de truncamento (curva em preto) mediante a adaptação do passo de tempo em constante atualização (curva em vermelho) método implementado **Fonte:** Elaborado pelo autor.

Por fim, a figura 10 deixa claro que o passo de tempo foi, com sucesso, atualizado durante a simulação de trajetória. É interessante observar como o algoritmo reage à avarias repentinas no erro de truncamento, reduzindo o passo de tempo e só retomando seu incremento após estabilização desse. Ao contrário de integradores numéricos com passo de tempo fixo, a principal vantagem da implementação de um método numérico passo-adaptativo é conciliar muito bem processamento computacional com precisão numérica.

5 Conclusões e próximos passos

Visando corrigir esses pontos de melhoria para um futuro trabalho de pós-graduação, o autor deste documento conta com mentoria especializada de membros da equipe técnica da empresa Sistemas Integrados de Alto Teor Tecnológico (SIATT), a qual aconselhou, inicialmente, eliminar as aproximações realizadas para os coeficientes aerodinâmicos pela obtenção real destes através de softwares especializados, como é o caso do *Missile Datcom*.

Além disso, também é apontado como ponto de melhoria a implementação da dinâmica rotacional utilizando **quaternions** como sistema de coordenadas para descrever a orientação do foguete, evitando dessa forma descontinuidades matemáticas como aquelas promovidas pelo fenômeno de *gimbal lock*, que ocorre quando dois ou mais eixos de rotação se alinham.

Finalmente, em uma perspectiva a longo prazo, o autor deste documento pretende se apoiar nos conhecimentos desenvolvidos neste trabalho para desenvolver, no programa de pós-graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, em parceria com a própria SIATT, um modelo mais refinado que permita simular a dinâmica orbital de veículos lançadores com capacidades reais de inserção de satélites na órbita baixa da Terra, contando com a implementação de um sistema de controle ativo de trajetória por vetorização de empuxo através do desvio de jato por um atuador posicionado na tubeira do motor do foguete, e que os resultados a serem futuramente obtidos possam fornecer aos diversos órgãos militares e científicos do governo federal perspectivas mais sólidas acerca dos desafios demandados por operações dessa natureza.

Referências

- 1 MARION, Jerry B.; THORNTON, Stephen T. Dinâmica clássica de partículas e sistemas. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012.
- 2 SUTTON, George P.; BIBLARZ, Oscar. *Rocket Propulsion Elements*. 9th ed. Hoboken: Wiley, 2017.
- 3 NATIONAL GEOSPATIAL-INTELLIGENCE AGENCY (NGA). Department of Defense World Geodetic System 1984: Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems (WGS 84). Technical Report TR8350.2, 3rd edition, January 2000. St. Louis, MO: NGA, 2000.
- 4 BARROWMAN, James S. The Practical Calculation of the Aerodynamic Characteristics of Slender Finned Vehicles. Master's Thesis – School of Engineering and Architecture, The Catholic University of America, Washington, D.C., 1967.
- 5 LEVEQUE, Randall J. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2007.
- 6 OPENWEATHER LTD. OpenWeatherMap: Weather Data API. Disponível em: <https://openweathermap.org/>. Acesso em: 2 nov. 2025.
- 7 GOOGLE LLC. Google Maps Platform. Disponível em: <https://maps.google.com/>. Acesso em: 2 nov. 2025.