

FERNANDO JUNIOR ALVES ROCHA

Comparativo de uma carteira de investimento via modelo de Markowitz

Monografia apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do certificado de conclusão do curso MBA em Engenharia Financeira.

Professor orientador: Danilo Z. Figueiredo

São Paulo
2016



Catalogação-na-publicação

10/2016/5

ROCHA, FERNANDO

Comparativo de uma carteira de investimento via modelo de Markowitz /
F. ROCHA – São Paulo, 2016.

43 p.

Monografia (MBA em Engenharia Financeira) - Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo. PECE – Programa de Educação Continuada em
Engenharia.

1.Finanças 2.Investimentos 3.Portfólios 4.Administração de carteiras
I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. PECE – Programa de
Educação Continuada em Engenharia II.I.

RESUMO

Harry M. Markowitz desenvolveu em 1952 um artigo que viria a se tornar a base da teoria de portfólios. Uma de suas contribuições foi a introdução do conceito de diversificação de ativos de investimentos como uma forma de otimizar a relação risco/retorno da carteira formada, ou seja, minimizando seu risco para um dado retorno desejado. Tal avanço se revelou altamente pertinente como auxílio na tomada de decisão por parte dos agentes econômicos envolvidos com gestão de investimentos. O objetivo principal do trabalho é aplicar o modelo de Markowitz com o intuito de otimizar carteiras hipotéticas de investimento a partir das ações que compuseram o índice Bovespa nos anos de 2010 a 2015 e compará-las com os retornos da Bolsa de Valores de São Paulo e com a carteira simulada de distribuição de igual financeiro, tendo como ponto de partida os ativos que compõe o índice desses anos. Foi feita uma análise dos resultados obtidos com a intenção de verificar e comparar a eficiência do modelo de seleção de carteiras desenvolvido por Markowitz.

Palavras-Chave: Finanças. Investimentos. Portfólios. Administração de carteiras.

ABSTRACT

Harry M. Markowitz developed an article in 1952 that would become the basis of portfolio theory. One of his contributions was the introduction of the concept of diversification of investment assets as a way of optimizing the risk / return ratio of the portfolio, that is, minimizing its risk for a desired return. This advance was highly relevant as an aid in decision-making by economic agents involved in investment management. The main objective of the study is to apply the Markowitz model with the purpose of optimizing hypothetical investment portfolios from the shares that composed the Bovespa index in the years 2010 to 2015 and compare them with the returns of the São Paulo Stock Exchange and with the simulated distribution portfolio of financial equality, taking as its starting point the assets that make up the index of those years. An analysis was made of the results obtained with the intention to verify and compare the efficiency of the portfolio selection model developed by Markowitz.

Keywords: Finance. Investments. Portfolios. Portfolio management.

LISTA DE IMAGENS

Imagen 1 — Solver.....27

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 — Fronteira eficiente hipotética.....	21
Gráfico 2 — Fronteira eficiente 2010	28
Gráfico 3 — Fronteira eficiente 2011	32
Gráfico 4 — Fronteira eficiente 2012	34
Gráfico 5 — Fronteira eficiente 2013	36
Gráfico 6 — Fronteira eficiente 2014	38
Gráfico 7 — Fronteira eficiente 2015	40

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 — Retorno e volatilidade anual 2010	25
Tabela 2 — Retorno e igual distribuição do financeiro 2010.....	26
Tabela 3 — Carteiras otimizadas	28
Tabela 4 — Retornos Ibovespa	29
Tabela 5 — Retorno e igual distribuição do financeiro 2011.....	31
Tabela 6 — Carteiras otimizadas 2011	32
Tabela 7 — Carteiras otimizadas 2012	33
Tabela 8 — Carteiras otimizadas 2012	34
Tabela 9 — Carteiras otimizadas 2013	35
Tabela 10 — Carteiras otimizadas 2013.....	36
Tabela 11 — Carteiras otimizadas 2014.....	37
Tabela 12 — Carteiras otimizadas 2014.....	38
Tabela 13 — Carteiras otimizadas 2015.....	39
Tabela 14 — Carteiras otimizadas 2015.....	40

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	DISCUSSÃO DO PROBLEMA	9
1.2	OBJETIVO DO TRABALHO	10
1.3	JUSTIFICATIVA DO TEMA.....	10
2	CONCEITOS PRELIMINARES.....	11
2.1	O MERCADO FINANCEIRO E DE CAPITAIS	11
2.2	RISCO E RETORNO DE UMA CARTEIRA DE AÇÕES	11
2.3	SELEÇÃO ÓTIMA DE CARTEIRAS: TEORIA DE MARKOWITZ.....	17
2.4	ÍNDICE BOVESPA	22
3	METODOLOGIA	23
4	APLICAÇÃO DO MODELO.....	24
4.1	RESULTADOS E ANÁLISES	29
5	CONCLUSÕES	41
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	43

1 INTRODUÇÃO

1.1 Discussão do Problema

Com o avanço da globalização e consequente aumento de acordos econômicos bilaterais entre países nos últimos anos, observamos uma crescente interdependência entre os diversos mercados mundiais implicando em investimentos cada vez mais expostos a inúmeros fatores de risco. Tais fatores tornam mais complexo o processo de tomada de decisão dos agentes financeiros envolvidos com esses investimentos já que cresce a incerteza em relação ao cenário econômico das nações envolvidas.

Neste contexto, torna-se de vital importância uma eficiente gestão de riscos na composição e gerenciamento de carteiras de investimentos a fim de minimizar possíveis perdas advindas de uma maior exposição ao risco e consequente maior volatilidade dos ativos envolvidos. Um investidor sempre busca o maior retorno possível de seu investimento para um dado nível de risco admitido e, além disso, sabemos que risco e retorno são variáveis correlacionadas, ou seja, quanto maior for o retorno, maior será o risco incorrido e vice-versa. Assim, uma gestão eficiente de portfólio deverá sempre buscar um conjunto de ativos que, combinados, produzam o maior retorno possível para um dado nível de risco, ou o mínimo risco para um certo retorno. A moderna teoria de portfólios, inicialmente desenvolvida por Markowitz (1952), representou um passo importante nessa direção, mostrando a importância da diversificação no processo para alocação de ativos, permitindo que os riscos envolvidos em carteiras de investimentos diminuam de forma consistente.

Neste trabalho, temos como principal objetivo utilizar os conceitos de seleção de carteiras de ativos propostos por Markowitz nas ações de empresas que compuseram o índice Bovespa ao longo dos anos de 2010 a 2015 afim de analisar, comparativamente com esse índice e face aos diferentes cenários econômicos ao longo desse período, o desempenho de diversos portfólios gerados com a aplicação do modelo de Markowitz. Compararemos também tais portfólios

com carteiras formadas com igual participação proporcional dos ativos do Ibovespa em sua composição (ou seja, uma carteira com distribuição de igual financeiro).

Com esse objetivo, no Capítulo 2, inicialmente introduziremos uma base teórica sobre a teoria de Markowitz e, posteriormente, no Capítulo 3, apresentaremos a metodologia utilizada na aplicação prática do modelo. No Capítulo 4, efetivamente aplicaremos o modelo fazendo o uso do MS Excel. Em particular, utilizaremos o suplemento Solver do MS Excel para impor restrições sobre parâmetros fundamentais para então gerar as diversas carteiras otimizadas e as respectivas fronteiras eficientes para os períodos considerados. Os resultados serão então apresentados e sua análise será devidamente contextualizada com os correspondentes cenários econômico vigentes. Finalmente, no último capítulo descreveremos nossas conclusões finais acerca dos resultados obtidos.

1.2 Objetivo do trabalho

O objetivo do presente estudo é testar a eficiência do modelo de seleção de carteiras comparativamente a dois outros pontos de vista. Serão utilizados três carteiras para efeito de comparação: carteiras otimizadas pelo modelo de média-variância proposto por Markowitz, carteira de mercado (representado pelo índice Bovespa) e a carteira que distribui igualmente o financeiro entre os ativos a disposição.

1.3 Justificativa do tema

A partir do início dos anos 2000 o mercado de capitais vem passando por um enorme processo de popularização, especialmente devido ao fácil acesso de informações proporcionado pela globalização de informações na rede, crescimento do números de empresas com capital aberto disponíveis no mercado, via Oferta Pública Inicial (OPI) e com as novas comercializações de diversos tipos de produtos financeiros, criando oportunidades de investimentos. Por outro lado, devido a essas mudanças, associadas a crises internas e externas no período, ainda sentidas nos tempos atuais, o mercado tornou-se muito mais volátil e mais complexo no que diz respeito a gestão de investimentos com vistas a auferir lucros para os investidores.

Por essa razão, um estudo comparativo de diferentes modelos de seleção de portfólios de investimentos é altamente pertinente face às questões levantadas.

2 CONCEITOS PRELIMINARES

2.1 O mercado financeiro e de capitais

O mercado financeiro basicamente é o ambiente onde são realizadas as transações de valores entre os agentes econômicos, ou seja, pessoas e empresas, agentes estes que tomam ou emprestam dinheiro. A principal atividade é a captação de recursos com o intuito de financiar operações e negócios bem como para gerar lucros. Ele faz a conexão entre pessoas e companhias que precisam tomar ou emprestar dinheiro.

Segundo Gitman (1997) esse mercado dispõe de dois modelos financeiros básicos: mercado monetário e mercado de capitais. A ideia do primeiro são operações com instrumento de dívida de curto prazo, o segundo realiza operações com os títulos de longo prazo.

O mercado de capitais é formado pelas bolsas de valores, corretoras e outras instituições financeiras. Esse é um mercado de distribuição de valores mobiliários e a finalidade é possibilitar maior liquidez aos títulos emitidos pelas empresas facilitando o processo de captação.

2.2 Risco e retorno de uma carteira de ações

A preocupação de todos os investidores na tomada de decisão de investimento reside na incerteza quanto ao valor que os ativos financeiros podem assumir ao longo do tempo. Tais decisões são estudadas em termos do problema risco/retorno, ambos pertinentes a qualquer alternativa financeira considerada. O risco, nesse contexto é considerado como a volatilidade dos retornos dos ativos e o retorno esperado é a média dos retornos dos mesmos. Esses e outros conceitos estatísticos preliminares serão mais detalhados no contexto da teoria financeira mais adiante.

Tais investimentos são realizados pela formação de uma carteira de investimentos, isto é, um grupo de ativos pertencente ao investidor. A escolha de investimento através de uma carteira ao invés de um ativo individual se dá principalmente pela possibilidade de diversificação dos ativos e consequentemente, diminuição do risco. Como a carteira é formada por mais de um ativo, podem ser encontradas inúmeras composições de carteiras; cada uma com um certo retorno esperado e nível de risco.

- **Retorno esperado**

O valor esperado representa uma média estimada de vários resultados constatados onde as medidas representam o percentual conferido a cada um desses pesos. Para Luenberger (1998) o valor esperado de uma variável aleatória x , é a soma da multiplicação do possível valor para a variável aleatória x_i ($i=1,2,3\dots n$ possíveis valores) pela sua probabilidade de ocorrência p_i

O cálculo é expresso matematicamente da seguinte forma:

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Onde:

$E(x)$: Retorno (valor) esperado;

x_i : Valor de cada resultado considerado;

p_i : Percentual associado a cada resultado.

- **Variância e desvio-padrão**

Segundo Luenberger (1998), a variância (σ^2) é uma medida de dispersão e uma maneira de demonstrar o quanto os valores de uma amostra se desviam da média. De acordo com Assaf Neto (2008) as medidas de dispersão indicam como os valores de um conjunto distribuem-se em relação a sua média.

Variância e desvio-padrão são duas medidas de dispersão. A variância representa a soma dos quadrados de cada retorno analisado. Quanto maior a variância, mais difusos estão os dados. Matematicamente, ela indica o valor esperado da diferença ao quadrado entre um valor qualquer escolhido no intervalo de possibilidades da variável aleatória x e o valor médio de x .

Considerando que $\mu = E(X)$, a variância é representada por:

$$\sigma^2 = var(X) = E((X - \mu)^2)$$

Ou seja, é o valor esperado do quadrado do desvio de X em relação à sua própria média.

O desvio padrão (σ) é a raiz quadrada da variância.

- **Covariância e Correlação**

Segundo Assaf Neto (2008) a covariância e correlação são medidas que relacionam duas variáveis. A covariância tem por objetivo identificar de que forma certos valores se inter-relacionam. É basicamente uma medida que avalia como as variáveis X e Y movimentam-se ao mesmo tempo em relação a seus valores médios. Ou ainda, mostra a simetria existente entre X e Y. A covariância de X e Y pode ser observada pela fórmula abaixo:

$$cov(x_1, x_2) = \rho_{12} = E((x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2))$$

Para Luenberger (1998), a covariância entre duas variáveis aleatórias é representada pela letra grega σ acompanhada dos índices que representam as variáveis (neste caso σ_{12}). Outra medida de dependência entre duas variáveis é a correlação, expressa pela letra grega p (p_{12} neste exemplo) e pode ser obtida com a covariância das variáveis e os respectivos desvios padrões:

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$$

Caso as variáveis mostrem comportamentos isolados e individuais, isto é, não têm relação entre si, são considerados não correlacionadas e o coeficiente de correlação é igual a zero. Se o valor se depara entre zero e um, as variáveis são ditas positivamente correlacionadas e, portanto, a variação de uma das variáveis implica também na variação da outra no mesmo sentido. A intensidade deste acompanhamento é dada pelo módulo de p_{12} , quando este vale o equivalente a 1, as variações são constantes e no mesmo sentido para as duas séries. Luenberger (1998) exemplifica que no caso de o valor estar entre zero e menos um, as variáveis são ditas negativamente correlacionadas e a variação de uma variável implica na variação em direção contrária da outra. Se o valor for igual a -1, a variação no valor de uma variável implica que a uma série varia em relação a outra constantemente.

- **Retorno esperado de um portfólio**

Segundo Assaf Neto (2008), o retorno esperado de uma carteira composta por mais de um ativo é definido pela média ponderada do retorno de cada ativo em relação a sua participação no total da carteira. Considerando que i é o ativo da carteira, w_i o peso do ativo e $E(r_i)$ seu retorno esperado. O retorno esperado da carteira é representado da seguinte forma:

$$E(R) = w_1E(r_1) + w_2E(r_2) + \cdots + w_nE(r_n)$$

- **Risco de uma carteira de investimentos**

As tomadas de decisão no que diz respeito a investimentos são executadas em situações de incerteza em relação ao futuro já que não se prevê o resultado das operações do mercado. Sendo assim, é relevante que o ponto de incerteza seja considerado. Segundo Assaf Neto (2008), sempre que existir uma associação entre incerteza e verificação de determinado evento que possa ser mensurada através de uma distribuição probabilística dos diversos resultados previstos, diz-se que a decisão está sendo tomada sob uma situação de risco. Sob este contexto, pode-se dizer que o risco é uma medida de incerteza de uma decisão mediante o conhecimento das probabilidades associadas à ocorrência de determinados resultados ou valores.

Através da combinação de três fatores (o desvio-padrão de cada ativo que compõe a carteira, o peso de cada componente e as correlações entre eles) pode-se encontrar o risco de uma carteira de ativos. Quanto menor a correlação entre eles, menor é o risco total da carteira. O desvio-padrão da carteira com um número n de ativos é dado pela fórmula:

$$\sigma_{portfólio} = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \right]^{1/2}$$

O retorno e o risco esperado tendem a apresentar uma correlação positiva, ou seja, o risco está associado ao grau de incerteza sobre o investimento no futuro. Quanto maior o grau de incerteza, maior o risco e maior o retorno esperado. O investidor está propenso a escolher suas

aplicações entre o menor risco possível e o maior retorno. Desta forma, um agente racional, na escolha de alternativas de investimento, sempre escolherá aquela que, para um mesmo retorno, apresente o menor risco.

- **Média-variância**

Para Costa e Assunção (2005) caso uma carteira seja formada apenas por ativos de risco, podemos considerar um portfólio com retorno P composto por n ativos com retornos R_1, \dots, R_n , retorno esperado r_1, \dots, r_n , e matriz de covariância Σ . Investe-se uma proporção ω_i no ativo com retorno R_i , de modo que:

$$P = \sum_{i=1}^n \omega_i R_i, \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

Usa-se a seguinte notação vetorial

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = E(R) = \begin{pmatrix} E(R_1) \\ \vdots \\ E(R_n) \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = cov(R) = E((R - r)(R - r)')$$

Segue que a média do retorno P , denotada por μ , é dada por

$$\mu = E(P) = E(\omega' R) = \omega' E(R) = \omega' r$$

E a variância de P , denotada por σ^2 , é dada por

$$\sigma^2 = \omega' \Sigma \omega$$

Resumindo, obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \omega' R \\ \mu = \omega' r \\ \sigma^2 = \omega' \Sigma \omega \\ 1 = \omega' e \end{array} \right.$$

Deseja-se resolver o seguinte problema de otimização. Para um dado valor de μ (rentabilidade desejada),

$$\begin{aligned} & \min \omega' \Sigma \omega \\ & \text{Sujeito a} \\ & \omega' r = \mu \\ & \omega' e = 1 \\ & \omega \in R^n \\ & \omega \geq 0 \end{aligned}$$

Assume-se que:

H1) $\Sigma > 0$;

H2) r não é múltiplo de e ($r \neq ae$).

A hipótese H1 apenas garante que todos os ativos são realmente de risco.

A hipótese H2, que necessariamente implica $n \geq 2$, garante uma situação não-degenerada, pois, caso contrário, com $r = ae$, as restrições só seriam consistentes com $\mu = a$.

Definem-se as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned} \alpha &= e' \Sigma^{-1} e \\ \gamma &= r' \Sigma^{-1} r \\ \varphi &= e' \Sigma^{-1} r \\ \delta &= \alpha \gamma - \varphi^2 = (e' \Sigma^{-1} e)(r' \Sigma^{-1} r) - (e' \Sigma^{-1} r)^2 \end{aligned}$$

A solução do problema de média-variância é dada por:

$$\omega = h \mu + g,$$

Em que h e g , não-dependentes de μ , são dados por,

$$h = \frac{\alpha}{\delta} \Sigma^{-1} r - \frac{\varphi}{\delta} \Sigma^{-1} e$$

$$g = \frac{\gamma}{\delta} \Sigma^{-1} e - \frac{\varphi}{\delta} \Sigma^{-1} r$$

2.3 Seleção ótima de carteiras: teoria de Markowitz

A teoria moderna de carteiras ou teoria do portfólio, é utilizada para selecionar e avaliar carteiras de investimento.

Os conceitos desta teoria foram inicialmente formulados por H. Markowitz, o qual, ao publicar o artigo “Portfolio Selection” em 1952, instituiu uma nova abordagem para o conceito de risco dos investimentos. Contrariando o pensamento dominante à época, de que a melhor opção para a composição da carteira consistia na concentração de investimentos em ativos que ofereciam os maiores retornos Almonacid (2010). Markowitz, em uma época de muitas indagações sobre o mercado financeiro, marcou e mudou o pensamento à respeito das finanças e recursos. Ele idealizou ser possível alocar os recursos com eficiência, utilizando a avaliação e contrabalanceando os riscos dos ativos que faziam parte da carteira, assim apresentava ao investidor a quais riscos estava exposto a fim de reduzir os mesmos. Com esta ideia compôs as premissas sobre as quais se firmou a teoria moderna de carteiras. As análises dessas premissas serão exploradas a seguir.

- **Diversificação: às margens da teoria de Markowitz**

A diversificação segundo Markowitz tem a pretensão de reduzir os riscos e/ou aumentar o retorno diante de uma aplicação de recursos.

De acordo com Assaf Neto (2008) diversificação significa não concentrar todos os investimentos em um só ativo, procurando selecionar várias alternativas que apresentam comportamentos não coincidentes. O objetivo da diversificação é reduzir riscos, pode-se pensar como outra estratégia para reduzir o risco de uma carteira, é selecionar ativos de naturezas diferentes, exemplo, títulos de renda fixa e ações. A diversificação deve incluir, como sugestão, ativos com maior e menor liquidez, ativos com maior nível de risco e retorno esperado e outros com menor risco e rentabilidade, provenientes de diferentes mercados, sempre com o objetivo de reduzir o impacto de um desempenho negativo de um ativo sobre o risco de toda a carteira.

Compreendem Zanini e Figueiredo (2005) que uma das maiores contribuições dos estudos de Markowitz foi ressaltar a importância da diversificação, conceito contestado por importantes acadêmicos de então, como Keynes. O conceito da diversificação decorre da constatação de que os preços dos ativos financeiros não se movem de modo exatamente conjunto. Ou, dizendo de outra forma, eles têm uma correlação imperfeita. Nesta condição, a variância total de uma carteira é reduzida pelo fato de a variação no preço individual de um ativo ser compensada por variações complementares nos demais. Importante destacar, contudo, que quando se fala em minimização do risco da carteira por meio da diversificação, leva-se em consideração apenas o risco próprio ou específico dos ativos.

Markowitz quebrou o raciocínio dominante de que a escolha impensada de ativos traria a redução de risco a uma carteira, ou seja, uma carteira rentável é muito mais do que um amontoado de bons ativos.

De acordo com Ralph Vince (1999), Markowitz propôs essencialmente que a administração de carteiras deve se basear na composição dos ativos, e não em uma seleção individual de lotes de ações ou ativos. Markowitz propôs que a análise de um grupo de ativos e seus possíveis arranjos nas mais diversas proporções delimita um conjunto específico de carteiras de investimentos que na teoria tem um desempenho superior em relação a todas as outras carteiras viáveis. Estas carteiras foram chamadas carteiras eficientes.

Seguindo então o conceito de diversificação foi possível traçar as principais variáveis de interesse do investidor no momento de selecionar sua carteira: o risco e o retorno (lucratividade).

• Risco x Retorno

Risco e retorno são as referências para qualquer investimento. O equilíbrio destes dois pilares do investimento foi a resposta de Markowitz com sua teoria. Harry Markowitz apresentou em seu trabalho como fazer para obter o máximo de retorno para um determinado nível de risco.

De acordo com Gastineau e Kritzman (2004), a definição mais genérica de risco é que este representa um valor, estimado ou calculado, da probabilidade da ocorrência de um fato ou da sua gravidade. Em outras palavras, risco pode ser considerado como a probabilidade da ocorrência de um fato. Podemos também definir risco como a volatilidade de resultados inesperados, normalmente relacionada a possíveis perdas ou impactos negativos.

O risco que uma pessoa está disposta a assumir pode variar muito dependendo de fatores culturais, sociais entre muitos outros. Dessa forma é difícil existir uma única carteira de ações que satisfaça todos os investidores, principalmente considerando que quanto maior o retorno almejado, maior será o risco assumido.

Podemos pensar em duas categorias de riscos: risco diversificável (ou não sistemático) e o risco sistemático (ou não diversificável), Assaf Neto (2008) esclarece que o risco diversificável é causado por eventos randômicos tais como processos judiciais, greves, programas de publicidade bem ou malsucedidos, ganhos ou perdas de um grande contrato e outros eventos que são únicos para uma empresa em particular. Dado que tais eventos são aleatórios, seus efeitos sobre a carteira de ativos podem ser eliminados pela diversificação – os maus resultados de uma empresa serão contrabalanceados pelos bons resultados de outras.

Por risco sistemático, pode ser definido como o risco que não pode ser eliminado. É o risco pertinente a uma economia de mercado e aos negócios empreendidos. É o risco que permanece igual, mesmo em grandes carteiras de ações. Securato (2007) explica que o risco sistemático ou conjuntural é aquele decorrente da conjuntura política, econômica e social, ou seja, o risco decorrente das mudanças de conjuntura ou até mesmo das perspectivas de mudanças de conjuntura política, econômica e social. Logo é compreensível que este risco tem influência sobre todas as empresas do mesmo modo, exemplos desse risco incluem: inflação, alternações de câmbio, insegurança política e contratual.

A diversificação proposta por Markowitz busca reduzir ou até mesmo eliminar o risco diversificável de um portfólio. Fica, porém, o risco sistemático. A diversificação do portfólio, quando utilizada para reduzir o risco, não é uma decisão aleatória, mas deve ser elaborada com

critérios técnicos, observando-se as correlações dos retornos, de modo a estabelecer a melhor composição de uma carteira para um indivíduo. Logo é possível concluir que a gestão eficiente dos riscos direciona as ações no sentido de minimizar ou suprimir riscos que não geram retorno.

Amonacid (2010) diz que Markowitz pressupõe que os investidores são avessos ao risco e, deste modo, sempre que existirem dois ativos com o mesmo retorno esperado, os investidores preferirão o de menor risco. Por outro lado, os investidores somente aumentarão o nível de risco de sua carteira se forem compensados pelo aumento do rendimento esperado. A metodologia proposta por Markowitz propõe que as decisões relacionadas à seleção de investimentos sejam tomadas com base no binômio risco-retorno.

Em se tratando de retorno, às vistas do mercado este é o fator almejado pelo investidor. Segundo Brown e Reilly (2010), o retorno refere-se à esperança positiva que os possíveis valores podem assumir, como um aumento de vendas ou alta no preço das ações.

Segundo Damodaran (2004), os retornos reais conseguidos com um investimento podem ser diferentes dos retornos esperados e é essa diferença que representa o risco, ou seja, o desvio dos retornos reais em relação aos retornos esperados.

Para Bampi, Camargo e Colombo (2009), o risco é a parcela imprevista do retorno, resultante de eventos inesperados ou de insucesso, representando possibilidades de prejuízos financeiros ou efeitos indesejáveis.

Almonacid (2010) aponta que uma estratégia para melhorar o desempenho de uma carteira de investimentos é aumentar os ativos que apresentem um maior retorno, dentro do mesmo patamar de risco desejado, substituindo aqueles de menor retorno. Ou seja, melhorar a rentabilidade de uma carteira, sem afetar o seu risco. Outra estratégia é substituir ativos que tenham maior risco por ativos que apresentem um menor risco, dentro do mesmo patamar de retorno desejado. Assim, diminui-se o risco de uma carteira, sem abrir mão do seu retorno.

Portanto, a teoria do portfólio de Markowitz propõe que as melhores carteiras são conseguidas por meio da diversificação de ativos, obtida com a análise dos retornos almejados e dos possíveis riscos.

- **Fronteira Eficiente**

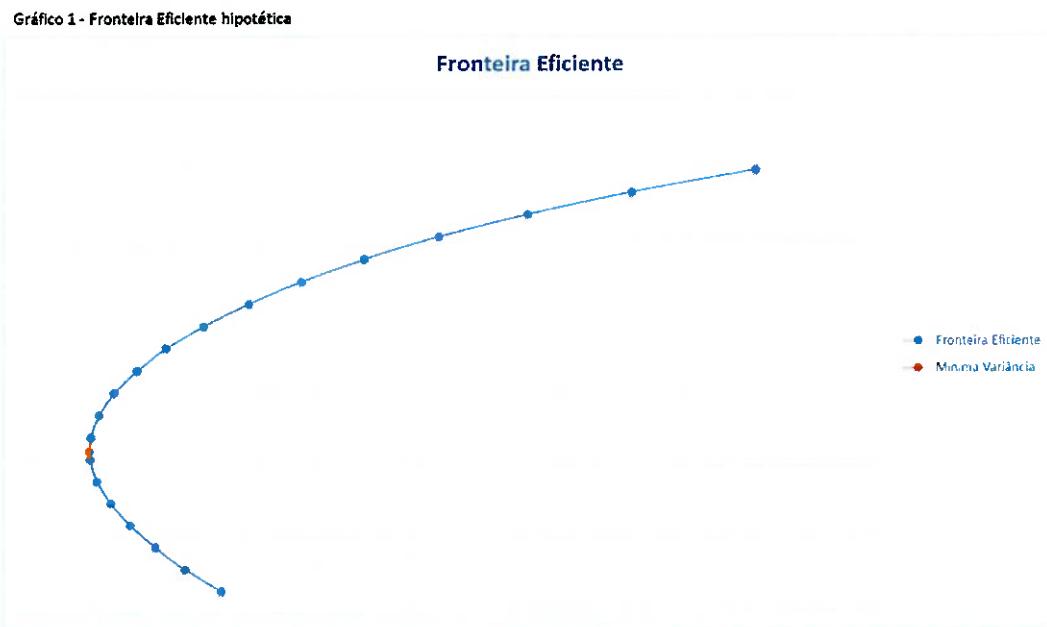
O principal objetivo no estudo de carteiras é selecionar a carteira definida como a melhor indicação, tomando por base o critério de investimentos ou, em outras palavras, escolher a carteira que oferece o maior retorno para um determinado grau de risco ou um nível de retorno esperado. Com base neste objetivo, existe a necessidade do estudo da fronteira eficiente.

Para Almonacid (2010) a fronteira eficiente é o conjunto de carteiras cuja distribuição do peso dos ativos apresenta, para cada patamar de risco, o melhor retorno possível e, para cada patamar de rentabilidade, o menor risco possível. Ou seja, a fronteira eficiente é determinada pelo conjunto de carteiras cuja rentabilidade não pode ser mais incrementada sem que se aumente o risco, ou por outro lado, pelo conjunto de carteiras cujo risco não pode cair sem que diminua a rentabilidade.

Carvalho (2009), diz que a fronteira eficiente permite apresentar aos tomadores de decisão diversos cenários futuros e decidir qual portfólio deve ser selecionado. Entretanto, Markowitz reconheceu que antecipar o futuro pode ser tanto uma arte como uma ciência.

A seguir um gráfico ilustrando uma hipotética fronteira eficiente:

Gráfico 1 — Fronteira eficiente hipotética



Segundo Hudson-Wilson (2000), a fronteira eficiente, por si só, possibilita a extração de vastas informações relevantes ao investidor. Quanto mais paralela for a fronteira eficiente em relação ao eixo horizontal menos valerá a pena a assunção do risco. Por outro lado, quanto mais

ascendente for a fronteira eficiente mais valerá a pena o aumento do risco, pois este será compensado pelo retorno. As carteiras posicionadas na fronteira eficiente são chamadas de carteiras eficientes ou ótimas. Segundo Reilly (1994), a carteira eficiente é “o portfólio eficiente que apresenta a maior utilidade para o investidor” e “se situa no ponto de tangência entre a fronteira eficiente e a curva de maior utilidade possível”. As carteiras que estiverem fora da fronteira eficiente são chamadas de ineficientes. Ou seja, carteiras cuja rentabilidade possa ser aumentada sem que tal fato resulte em incremento de risco e carteiras cujo risco possa ser diminuído sem que isto acarrete uma diminuição de retorno. Cabe ressaltar que a fronteira eficiente está vinculada aos dados históricos do modelo apresentado, assim, para cada novo período no qual existam novos dados, haverá uma nova fronteira eficiente.

2.4 Índice bovespa

O Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (Ibovespa) é o indicador mais importante do mercado de ações brasileiro, pois traduz o comportamento das principais ações negociadas na Bovespa. As principais ações negociadas compõe uma carteira teórica que é constituída por mais de 50 empresas que correspondem por mais de 80% do volume negociado.

Um dos principais papéis do Ibovespa é ser utilizado como indicador do comportamento do mercado de ações. O índice é calculado em tempo real, podendo ser acompanhado “on line” no Brasil e no mundo.

3 METODOLOGIA

Primeiramente foram coletados os retornos diáários históricos de 2010 a 2015 das ações do índice Bovespa que possuem registro completo de operações nesse período.

Posteriormente foram calculados com o auxílio do MS Excel o retorno lognormal das ações bem como os retornos esperados, a variância e a matriz de covariância dos mesmos. O modelo de Markowitz foi replicado com a utilização da ferramenta Solver do MS Excel que gerou os diversos portfólios otimizados no contexto risco/retorno, dentre eles a fronteira eficiente e a carteira de mínima variância.

Foi realizada uma análise dos resultados obtidos ano a ano, comparando a eficiência do modelo estudado em questão com os retornos efetivamente realizados no mercado e pela carteira formada com a igual distribuição dos recursos disponíveis. Vale ressaltar que não é uma análise de “back test” e foram usados os dados do mesmo ano para calibrar e verificar o resultado da análise via modelo de Markowitz.

4 APLICAÇÃO DO MODELO

Este capítulo discorre sobre as simulações executadas no presente trabalho pelos quais foi possível comparar as carteiras geradas conforme os modelos abordados anteriormente.

Para realizar nossos estudos, consideramos como base os preços de fechamento diários de ações que compuseram índice Bovespa durante o período de janeiro de 2010 a dezembro de 2015.

Para obter os retornos anuais precisaríamos agregar os retornos diários ao longo dos 6 anos e como as taxas de retorno são aplicadas no regime de capitalização composta, seria necessário um cálculo multiplicativo, o que demandaria muito tempo em termos computacionais. Por essa razão o trabalho foi feito, alternativamente, com os log retornos diários dos ativos. Os log retornos exerce a característica mais conveniente de serem agregados ao longo do tempo por um processo de adição e ainda representam uma boa aproximação dos retornos para períodos de tempo curtos como o diário, que é o nosso caso. O log retorno entre os tempos $t-1$ e t de um ativo com preços P_{t-1} e P_t , respectivamente é definido como:

$$r_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Na Tabela 1 temos os log retornos anuais e as respectivas volatilidades para as 68 ações que compuseram o índice Ibovespa no ano de 2010, por exemplo.

Tabela 1 — Retorno e volatilidade anual 2010

Ativos	Retorno anual	Volatilidade anual	Ativos	Retorno anual	Volatilidade anual
ALLL11	-3,4%	30%	JBSS3	-30,6%	39%
AMBV4	-128,8%	164%	KLBN4	9,9%	35%
BBAS3	5,1%	28%	LAME4	-2,9%	33%
BBDC4	-14,7%	30%	LIGT3	-0,8%	27%
BISA3	12,2%	41%	LLXL3	-76,4%	72%
BRAP4	10,2%	32%	LREN3	34,6%	38%
BRFS3	-52,8%	76%	MMXM3	-12,7%	49%
BRKM5	36,6%	30%	MRFG3	-23,0%	33%
BRTO4	-35,8%	31%	MRVE3	13,0%	44%
BTOW3	-39,9%	37%	NATU3	23,5%	28%
BVMF3	1,4%	36%	NETC4	-8,2%	29%
CCRO3	16,0%	30%	OGXP3	12,7%	38%
CESP6	10,1%	33%	PCAR5	5,9%	27%
CIEL3	-16,5%	34%	PDGR3	-49,1%	80%
CMIG4	-16,5%	28%	PETR3	-31,7%	29%
CPFE3	12,4%	21%	PETR4	-32,1%	29%
CPLE6	8,4%	22%	RDCD3	-32,4%	33%
CRUZ3	40,3%	24%	RSID3	-6,1%	45%
CSAN3	8,1%	34%	SANB11	-5,3%	31%
CSNA3	-76,4%	75%	SBSP3	23,2%	29%
CYRE3	-10,5%	39%	TAMM4	-0,2%	46%
DTEX3	5,4%	33%	TCSL3	-5,4%	36%
ECOD3	-21,2%	48%	TCSL4	5,9%	32%
ELET3	-54,3%	45%	TLPP4	-2,8%	23%
ELET6	-21,5%	31%	TMAR5	-28,0%	31%
ELPL6	-16,4%	30%	TNLP3	-34,0%	40%
EMBR3	18,3%	27%	TNLP4	-45,0%	33%
FIBR3	-40,4%	42%	TRPL4	6,7%	20%
GFSB3	-85,7%	81%	UGPA4	26,1%	20%
GGBR4	-27,3%	33%	USIM3	-89,2%	78%
GOAU4	-29,6%	34%	USIM5	-100,3%	76%
GOLL4	-4,8%	38%	VALE3	7,4%	30%
ITSA4	6,7%	26%	VALE5	11,1%	29%
ITUB4	-0,8%	26%	VIVO4	-1,3%	31%

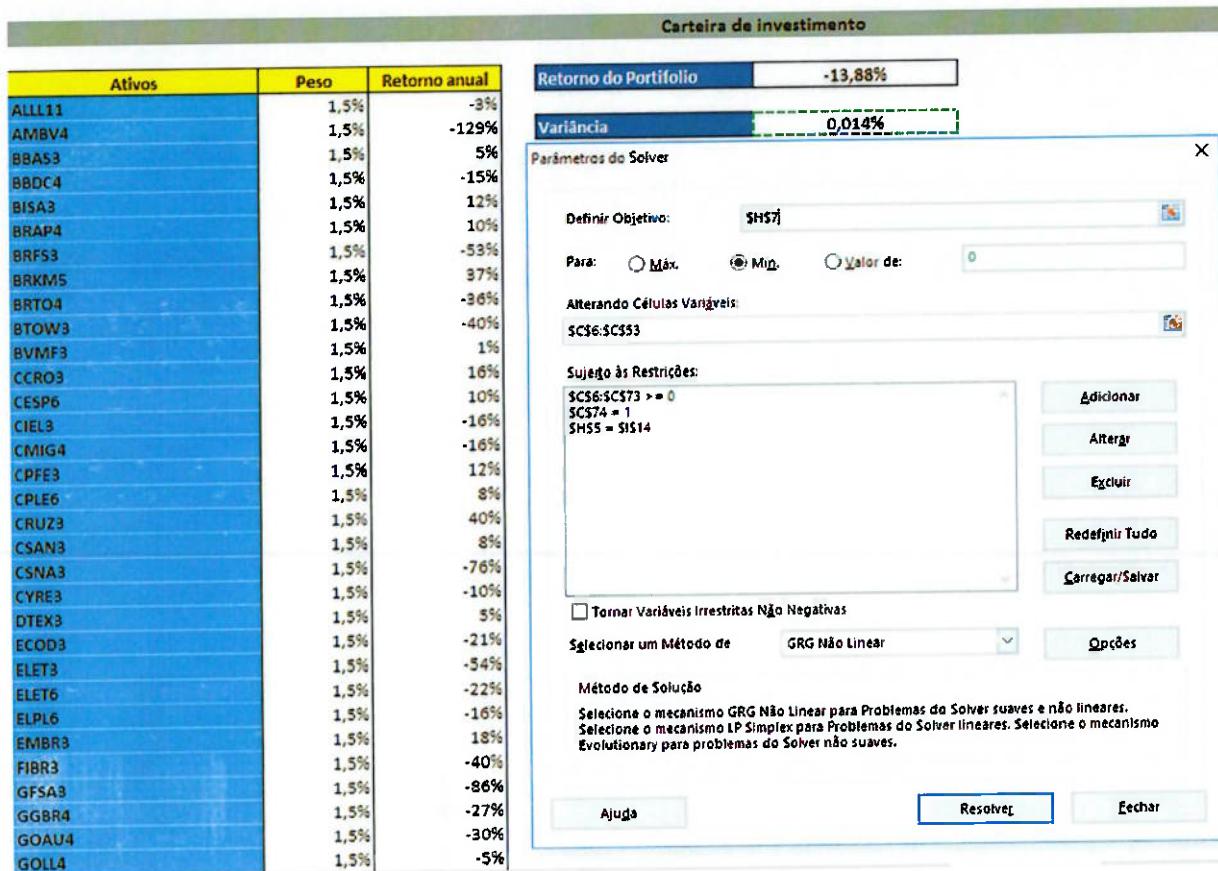
Inicialmente, para aplicar o modelo de Markowitz calculamos, utilizando o MS Excel, a matriz de covariância dos retornos acima. Com o auxílio do suplemento Solver do MS Excel pudemos gerar então uma série de carteiras com pesos atribuídos a cada ativo, resultando em mínimo risco (variância) associado a um dado retorno desejado. Esse procedimento é realizado primeiro escolhendo um portfólio inicial com pesos iguais para todas as ações participantes e calculando sua variância e retorno anual conforme indicado na Tabela 2 abaixo:

Tabela 2 — Retorno e igual distribuição do financeiro 2010

Ativos	Retorno anual	Peso	Ativos	Retorno anual	Peso
ALLL11	-3,4%	1,47%	JBSS3	-30,6%	1,47%
AMBV4	-128,8%	1,47%	KLBN4	9,9%	1,47%
BBAS3	5,1%	1,47%	LAME4	-2,9%	1,47%
BBDC4	-14,7%	1,47%	LIGT3	-0,8%	1,47%
BISA3	12,2%	1,47%	LLXL3	-76,4%	1,47%
BRAP4	10,2%	1,47%	LREN3	34,6%	1,47%
BRFS3	-52,8%	1,47%	MMXM3	-12,7%	1,47%
BRKM5	36,6%	1,47%	MRFG3	-23,0%	1,47%
BRT04	-35,8%	1,47%	MRVE3	13,0%	1,47%
BTOW3	-39,9%	1,47%	NATU3	23,5%	1,47%
BVMF3	1,4%	1,47%	NETC4	-8,2%	1,47%
CCRO3	16,0%	1,47%	OGXP3	12,7%	1,47%
CESP6	10,1%	1,47%	PCAR5	5,9%	1,47%
CIEL3	-16,5%	1,47%	PDGR3	-49,1%	1,47%
CMIG4	-16,5%	1,47%	PETR3	-31,7%	1,47%
CPFE3	12,4%	1,47%	PETR4	-32,1%	1,47%
CPLE6	8,4%	1,47%	RDCD3	-32,4%	1,47%
CRUZ3	40,3%	1,47%	RSID3	-6,1%	1,47%
CSAN3	8,1%	1,47%	SANB11	-5,3%	1,47%
CSNA3	-76,4%	1,47%	SBSP3	23,2%	1,47%
CYRE3	-10,5%	1,47%	TAMM4	-0,2%	1,47%
DTEX3	5,4%	1,47%	TCSL3	-5,4%	1,47%
ECOD3	-21,2%	1,47%	TCSL4	5,9%	1,47%
ELET3	-54,3%	1,47%	TLPP4	-2,8%	1,47%
ELET6	-21,5%	1,47%	TMAR5	-28,0%	1,47%
ELPL6	-16,4%	1,47%	TNLP3	-34,0%	1,47%
EMBR3	18,3%	1,47%	TNLP4	-45,0%	1,47%
FIBR3	-40,4%	1,47%	TRPL4	6,7%	1,47%
GFSAS3	-85,7%	1,47%	UGPA4	26,1%	1,47%
GGBR4	-27,3%	1,47%	USIM3	-89,2%	1,47%
GOAU4	-29,6%	1,47%	USIM5	-100,3%	1,47%
GOLL4	-4,8%	1,47%	VALE3	7,4%	1,47%
ITSA4	6,7%	1,47%	VALE5	11,1%	1,47%
ITUB4	-0,8%	1,47%	VIVO4	-1,3%	1,47%

A célula que é atribuída para o cálculo da variância é então escolhida como a variável objetivo na ferramenta Solver do MS Excel a ser minimizada e para as células dos pesos são atribuídas restrições de existência (todas devem ser não negativas e com soma igual a 1). O procedimento pode ser visualizado na figura abaixo:

Imagen 1 — Solver



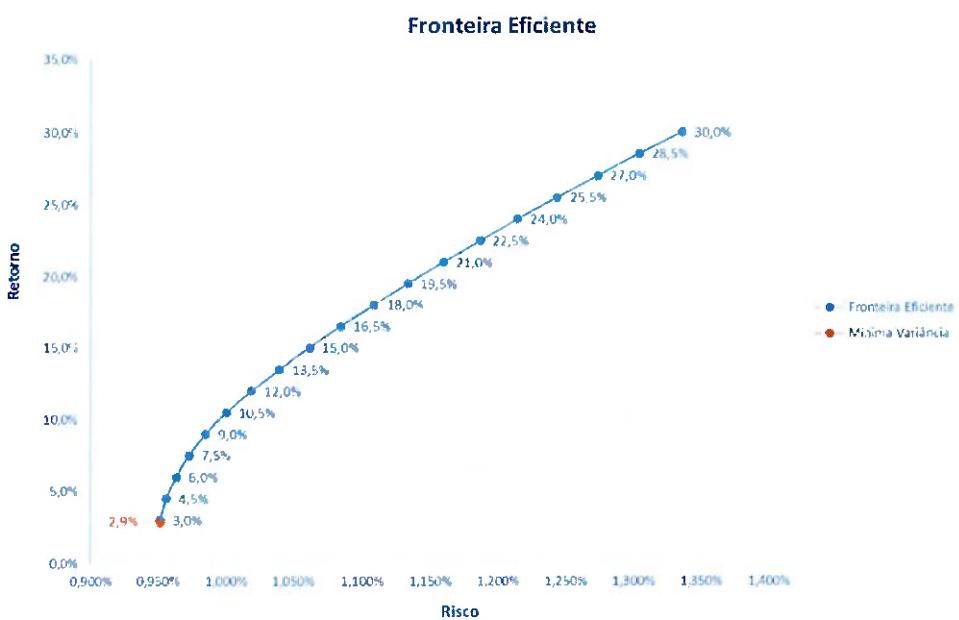
Na tabela 3 temos o resultado de 20 carteiras geradas a partir da taxa de retorno livre de risco igual a 1,5% e acréscimos de 0,5%. A carteira destacada em vermelho representa o menor risco possível ao se combinar os ativos considerados, resultando um retorno de 2,9% assumindo um risco mínimo igual a 0,952%.

Tabela 3 —Carteiras otimizadas

Portifolio de Markowitz	Desvio padrão	Rendimento esperado
1	0,956%	1,5%
2	0,952%	3,0%
3	0,956%	4,5%
4	0,963%	6,0%
5	0,973%	7,5%
6	0,985%	9,0%
7	1,000%	10,5%
8	1,019%	12,0%
9	1,039%	13,5%
10	1,061%	15,0%
11	1,084%	16,5%
12	1,109%	18,0%
13	1,134%	19,5%
14	1,160%	21,0%
15	1,187%	22,5%
16	1,215%	24,0%
17	1,243%	25,5%
18	1,273%	27,0%
19	1,304%	28,5%
20	1,335%	30,0%
Minima Variância	0,952%	2,9%

A fronteira eficiente é então gerada conforme o gráfico abaixo:

Gráfico 2 — Fronteira eficiente 2010



A fronteira eficiente é aquela cujas carteiras, formadas com pesos distintos, estão sobre a linha representada no gráfico e exibe a satisfação do investidor em relação ao risco e retorno, ou seja, para um determinado retorno desejado tem-se o menor risco possível. De fato, observe que qualquer carteira escolhida na área abaixo da curva da fronteira eficiente representa uma escolha inadequada para o investidor já que para um mesmo retorno assume-se, nesses casos, um risco maior do que o necessário.

Utilizando o mesmo procedimento utilizado para o ano de 2010, obtemos também as fronteiras eficientes para os anos de 2011 a 2015 ilustrados nas figuras abaixo bem como as carteira de igual financeiro e o risco/retorno do Ibovespa nos respectivos anos cujos resultados também veremos mais adiante.

Para efeito comparativo, temos também abaixo os dados de risco/retorno do índice Bovespa para os anos de 2010 a 2015 extraídos a partir de dados da BMF&Bovespa.

Tabela 4 — Retornos Ibovespa

2015	Retorno	-28,14%
	Desvio padrão	1,70%
2014	Retorno	-14,63%
	Desvio padrão	1,67%
2013	Retorno	-17,87%
	Desvio padrão	1,20%
2012	Retorno	3,70%
	Desvio padrão	1,21%
2011	Retorno	-38,46%
	Desvio padrão	1,71%
2010	Retorno	-13,92%
	Desvio padrão	1,38%

4.1 Resultados e Análises

A partir dos resultados obtidos podemos agora analisar comparativamente as carteiras compostas pelos dados da Bovespa e otimizadas pelo modelo de Markowitz, com o próprio índice Bovespa e com a carteira de igual financeiro em cada um dos anos considerados.

No ano de 2010, mesmo com a economia do país registrando um crescimento de 7,5% o índice Bovespa apresentou, com uma volatilidade de 1,38%, um retorno de -13,92% enquanto que diversas carteiras geradas pelo modelo de Markowitz resultaram em retornos positivos,

mesmo com riscos associados menores, como mostra a Tabela 3. . A carteira de igual financeiro apresentou o pior desempenho dos três modelos registrando um prejuízo de 13,88%.

O ano de 2011 foi marcado pela significativa perda de valor de 213,11 bilhões das empresas brasileiras de capital aberto devido ao temor generalizado de uma quebradeira generalizada na zona do euro. Como consequência o índice Bovespa teve um péssimo desempenho, registrando uma queda de -38,46% com risco de 1,71% . A carteira de igual financeiro apresentou um resultado ainda pior, com um prejuízo de -26,91% e risco de 1,49%. No entanto, mesmo nesse cenário negativo para o mercado acionário, o modelo de markowitz foi novamente capaz de produzir portfólios com resultados positivos associados a riscos ainda menores do que os apresentados pelo ibovespa e a carteira de igual financeiro, conforme mostra a tabelas abaixo.

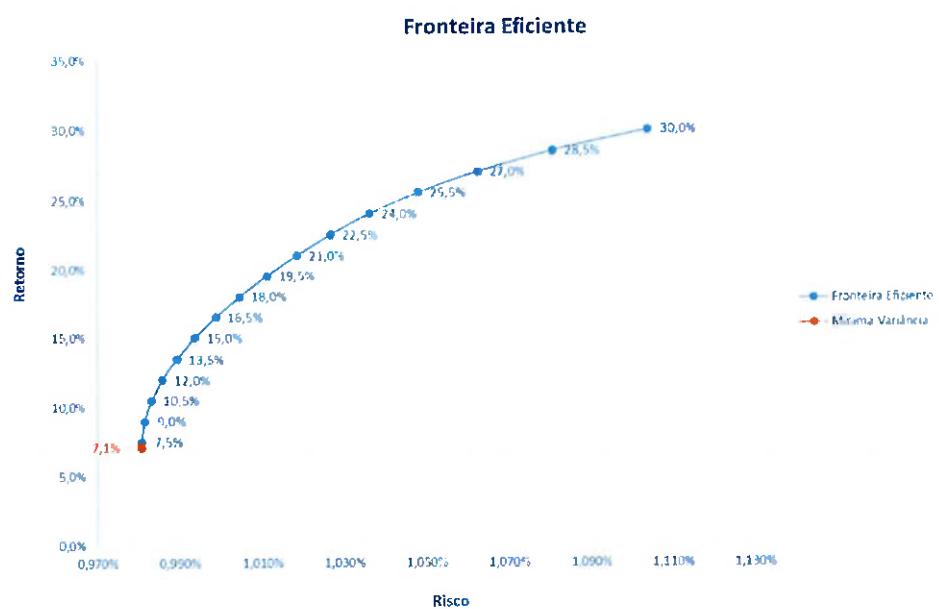
Tabela 5 — Retorno e igual distribuição do financeiro 2011

Ativos	Peso	Retorno anual	Ativos	Peso	Retorno anual
ALLL3	1,5%	-50,25%	HYPE3	1,5%	-97,55%
AMBV4	1,5%	27,76%	ITSA4	1,5%	-16,05%
BBAS3	1,5%	-28,59%	ITUB4	1,5%	-15,73%
BBDC4	1,5%	-7,30%	JBSS3	1,5%	-16,33%
BISA3	1,5%	-57,54%	KLBN4	1,5%	31,80%
BRAP4	1,5%	-34,97%	LAME4	1,5%	-7,53%
BRFS3	1,5%	29,89%	LIGT3	1,5%	11,97%
BRKM5	1,5%	-46,61%	LLXL3	1,5%	-34,88%
BRML3	1,5%	7,99%	LREN3	1,5%	-16,76%
BRTO4	1,5%	-12,05%	MMXM3	1,5%	-51,94%
BTOW3	1,5%	-130,75%	MRFG3	1,5%	-60,24%
BVMF3	1,5%	-31,79%	MRVE3	1,5%	-41,77%
CCRO3	1,5%	-135,75%	NATU3	1,5%	-31,42%
CESP6	1,5%	21,15%	OGXP3	1,5%	-39,19%
CIEL3	1,5%	128,57%	PCAR4	1,5%	-2,99%
CMIG4	1,5%	19,58%	PDGR3	1,5%	-56,02%
CPFE3	1,5%	-48,00%	PETR3	1,5%	-28,01%
CPL6	1,5%	-6,94%	PETR4	1,5%	-23,19%
CRUZ3	1,5%	-141,48%	RDCD3	1,5%	31,31%
CSAN3	1,5%	-1,86%	RSID3	1,5%	-62,79%
CSNA3	1,5%	-60,99%	SANB11	1,5%	-41,02%
CYRE3	1,5%	-38,14%	SBSP3	1,5%	17,24%
DTEX3	1,5%	-68,24%	TAMM4	1,5%	-10,02%
ECOD3	1,5%	-55,35%	TIMP3	1,5%	2,67%
ELET3	1,5%	-24,39%	TLPP4	1,5%	13,65%
ELET6	1,5%	-1,32%	TMAR5	1,5%	-7,44%
ELPL4	1,5%	12,14%	TNLP3	1,5%	-43,42%
EMBR3	1,5%	-1,20%	TNLP4	1,5%	-35,28%
FIBR3	1,5%	-66,24%	TRPL4	1,5%	2,20%
GFS3	1,5%	-109,72%	UGPA3	1,5%	14,69%
GGBR4	1,5%	-47,45%	USIM3	1,5%	-23,44%
GOAU4	1,5%	-43,39%	USIM5	1,5%	-64,67%
GOLL4	1,5%	-74,52%	VALE3	1,5%	-37,34%
HGTX3	1,5%	15,24%	VALE5	1,5%	-28,17%

Tabela 6 — Carteiras otimizadas 2011

Portifolio de Markowitz	Desvio padrão	Rendimento esperado
1	0,987%	1,5%
2	0,984%	3,0%
3	0,982%	4,5%
4	0,981%	6,0%
5	0,981%	7,5%
6	0,981%	9,0%
7	0,983%	10,5%
8	0,986%	12,0%
9	0,989%	13,5%
10	0,993%	15,0%
11	0,999%	16,5%
12	1,004%	18,0%
13	1,011%	19,5%
14	1,018%	21,0%
15	1,027%	22,5%
16	1,036%	24,0%
17	1,048%	25,5%
18	1,063%	27,0%
19	1,081%	28,5%
20	1,104%	30,0%
Minima Variância	0,981%	7,1%

Gráfico 3 — Fronteira eficiente 2011



No ano de 2012 mesmo com uma forte redução do crescimento do PIB (aumento de apenas 0,9%) o índice Bovespa, impulsionado pela forte alta no setor de comércio registrou um crescimento de 5,41% com um nível de risco de 1,35%. A carteira de igual financeiro ainda registrou queda de 26,91% e risco igual a 1,49%. Apesar do forte crescimento do índice Bovespa, o modelo de Markowitz conseguiu gerar diversas carterias com retornos ainda superiores assumindo riscos maiores. As Tabelas 7 e 8 evidenciam esses resultados.

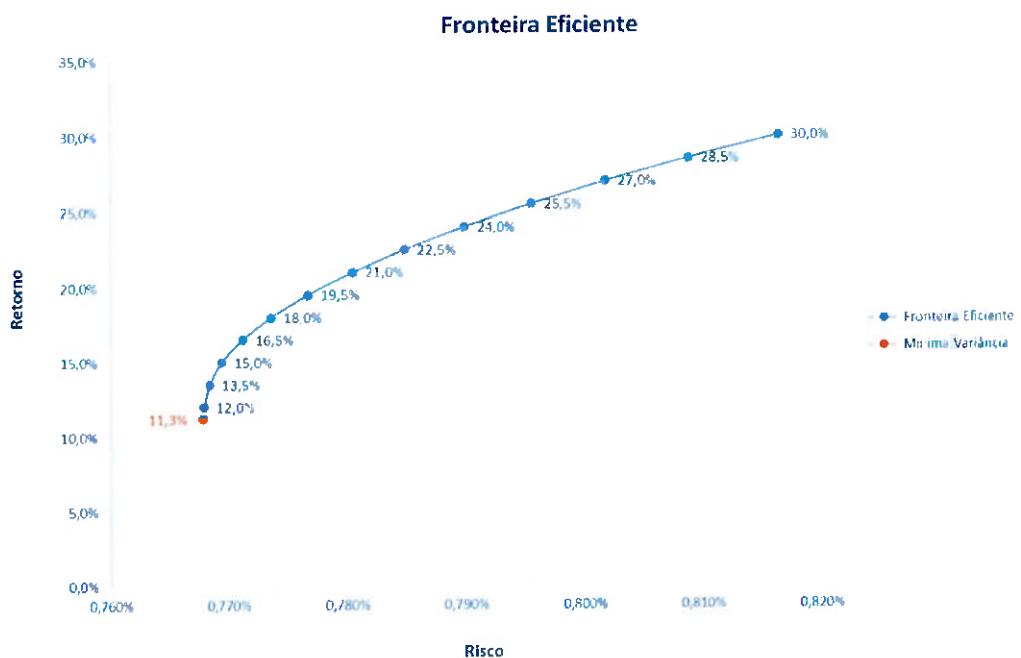
Tabela 7 — Carteiras otimizadas 2012

Ativos	Peso	Retorno anual	Ativos	Peso	Retorno anual
ALLL3	1,4%	-12,13%	ITSA4	1,4%	-14,34%
AMBV4	1,4%	24,26%	ITUB4	1,4%	-1,95%
BBAS3	1,4%	5,40%	JBSS3	1,4%	6,73%
BBDC4	1,4%	13,95%	KLBN4	1,4%	51,53%
BISA3	1,4%	-46,02%	LAME4	1,4%	21,79%
BRAP4	1,4%	0,44%	LIGT3	1,4%	-25,32%
BRFS3	1,4%	17,61%	LLXL3	1,4%	-34,30%
BRKMS	1,4%	-6,99%	LREN3	1,4%	45,98%
BRML3	1,4%	36,22%	MMXM3	1,4%	-47,33%
BTOW3	1,4%	59,96%	MRFG3	1,4%	-6,01%
BVMF3	1,4%	37,21%	MRVE3	1,4%	5,19%
CCRO3	1,4%	47,64%	NATU3	1,4%	47,64%
CESP6	1,4%	-55,32%	OGXP3	1,4%	-117,67%
CIEL3	1,4%	16,91%	OIBR3	1,4%	-25,70%
CMIG4	1,4%	-38,31%	OIBR4	1,4%	-15,78%
CPFE3	1,4%	-19,27%	PCAR4	1,4%	32,47%
CPLE6	1,4%	-19,45%	PDGR3	1,4%	-65,05%
CRUZ3	1,4%	28,56%	PETR3	1,4%	-17,65%
CSAN3	1,4%	45,98%	PETR4	1,4%	-11,03%
CSNA3	1,4%	-24,91%	RDCD3	1,4%	19,10%
CTIP3	1,4%	-6,32%	RENT3	1,4%	34,21%
CYRE3	1,4%	15,48%	RSID3	1,4%	-65,48%
DASA3	1,4%	-19,86%	SANB11	1,4%	-3,05%
DTEX3	1,4%	49,81%	SBSP3	1,4%	55,96%
ELET3	1,4%	-105,47%	SUZB5	1,4%	1,92%
ELET6	1,4%	-95,42%	TIMP3	1,4%	-15,14%
ELPL4	1,4%	-78,11%	TRPL4	1,4%	-56,82%
EMBR3	1,4%	20,84%	UGPA3	1,4%	37,94%
FIBR3	1,4%	47,37%	USIM3	1,4%	-20,10%
GFSAS3	1,4%	5,15%	USIM5	1,4%	20,08%
GGBR4	1,4%	21,13%	VAGR3	1,4%	22,33%
GOAU4	1,4%	26,49%	VALE3	1,4%	3,41%
GOLL4	1,4%	2,01%	VALE5	1,4%	5,08%
HGTX3	1,4%	20,24%	VIVT4	1,4%	-4,30%
HYPE3	1,4%	63,09%			

Tabela 8 — Carteiras otimizadas 2012

Portifólio de Markowitz	Desvio padrão	Rendimento esperado
1	0,777%	1,5%
2	0,775%	3,0%
3	0,772%	4,5%
4	0,771%	6,0%
5	0,769%	7,5%
6	0,768%	9,0%
7	0,768%	10,5%
8	0,768%	12,0%
9	0,768%	13,5%
10	0,769%	15,0%
11	0,771%	16,5%
12	0,774%	18,0%
13	0,777%	19,5%
14	0,780%	21,0%
15	0,785%	22,5%
16	0,790%	24,0%
17	0,796%	25,5%
18	0,802%	27,0%
19	0,809%	28,5%
20	0,816%	30,0%
Minima Variância	0,768%	11,3%

Gráfico 4 — Fronteira eficiente 2012



Em 2013, com a piora do cenário fiscal brasileiro, baixo crescimento econômico e pressão inflacionária, o índice Bovespa registrou novamente uma forte queda de 19,66%, com risco 1,28%. A carteira de igual financeiro, mostrada na tabela abaixo, também registrou queda de 14,66% mas associado a um risco menor, de 0,93%. Ainda assim, mesmo nesse cenário econômico extremamente adverso, seria possível, conforme o modelo de Markowitz (ver tabela) gerar carteiras lucrativas com riscos menores. Observe, por exemplo, que com um risco de apenas 0,715% seria possível montar uma carteira com retornos em torno de 30%.

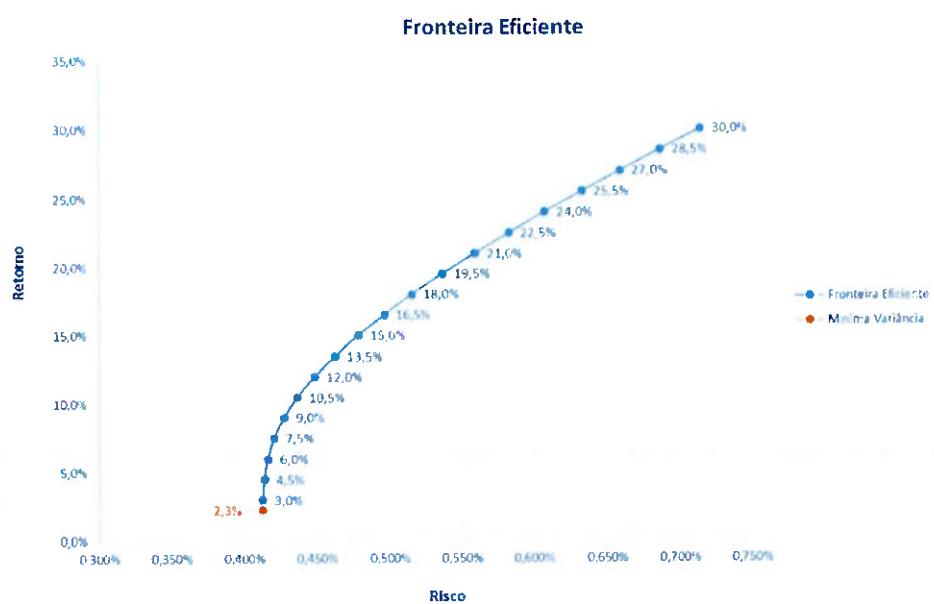
Tabela 9 — Carteiras otimizadas 2013

Ativos	Peso	Retorno anual	Ativos	Peso	Retorno anual
AEDU3	1,4%	-91,74%	HGTX3	1,4%	-37,78%
ALLL3	1,4%	-27,63%	HYPE3	1,4%	6,01%
AMBV4	1,4%	1,03%	ITSA4	1,4%	-12,19%
BBAS3	1,4%	-5,69%	ITUB4	1,4%	-9,71%
BBDC3	1,4%	-9,62%	JBSS3	1,4%	36,37%
BBDC4	1,4%	-21,80%	KLBN4	1,4%	-4,40%
BISA3	1,4%	-115,57%	KROT3	1,4%	-15,05%
BRAP4	1,4%	-31,73%	LAME4	1,4%	-17,48%
BRFS3	1,4%	14,15%	LIGT3	1,4%	-0,32%
BRKM5	1,4%	44,17%	LLXL3	1,4%	-88,05%
BRML3	1,4%	-49,69%	LREN3	1,4%	-28,11%
BRPR3	1,4%	-33,38%	MMXM3	1,4%	-190,29%
BTOW3	1,4%	-10,05%	MRCG3	1,4%	-80,79%
BVMF3	1,4%	-24,85%	MRVE3	1,4%	-33,01%
CCRO3	1,4%	-7,10%	NATU3	1,4%	-36,65%
CESP6	1,4%	9,88%	OGXP3	1,4%	-304,78%
CIEL3	1,4%	11,80%	OIBR3	1,4%	-95,55%
CMIG4	1,4%	-50,58%	OIBR4	1,4%	-85,51%
CPFE3	1,4%	-15,21%	PCAR4	1,4%	17,00%
CPLE6	1,4%	-5,53%	PDGR3	1,4%	-66,99%
CRUZ3	1,4%	-27,63%	PETR3	1,4%	-22,01%
CSAN3	1,4%	-7,26%	PETR4	1,4%	-14,51%
CSNA3	1,4%	13,32%	RENT3	1,4%	-15,00%
CTIP3	1,4%	-6,53%	RSID3	1,4%	-86,66%
CYRE3	1,4%	-22,88%	SANB11	1,4%	-5,12%
DASA3	1,4%	4,29%	SBSP3	1,4%	-121,24%
DTEX3	1,4%	-12,88%	SUZB5	1,4%	22,66%
ELET3	1,4%	-13,95%	TIMP3	1,4%	43,50%
ELET6	1,4%	-9,98%	TRPL4	1,4%	-22,31%
ELPL4	1,4%	-64,42%	UGPA3	1,4%	20,42%
EMBR3	1,4%	25,38%	USIM3	1,4%	-16,87%
ENBR3	1,4%	-12,90%	USIM5	1,4%	7,14%
FIBR3	1,4%	13,60%	VAGR3	1,4%	216,72%
GFSB3	1,4%	-31,14%	VALE3	1,4%	-21,53%
GGBR4	1,4%	-2,91%	VALE5	1,4%	-26,89%
GOAU4	1,4%	-1,73%	VIVT4	1,4%	-10,36%
GOLL4	1,4%	-20,56%			

Tabela 10 — Carteiras otimizadas 2013

Portifolio de Markowitz	Desvio padrão	Rendimento esperado
1	0,413%	1,5%
2	0,413%	3,0%
3	0,414%	4,5%
4	0,416%	6,0%
5	0,421%	7,5%
6	0,427%	9,0%
7	0,437%	10,5%
8	0,448%	12,0%
9	0,462%	13,5%
10	0,478%	15,0%
11	0,496%	16,5%
12	0,516%	18,0%
13	0,537%	19,5%
14	0,560%	21,0%
15	0,583%	22,5%
16	0,608%	24,0%
17	0,634%	25,5%
18	0,660%	27,0%
19	0,687%	28,5%
20	0,715%	30,0%
Minima Variância	0,412%	2,3%

Gráfico 5 — Fronteira eficiente 2013



O ano de 2014 foi problemático para a economia brasileira, e consequentemente para o mercado acionário, por várias razões, entre elas, a crescente deterioração nos fundamentos da economia, a crise de corrupção na Petrobrás e o fato de ser um ano eleitoral. O resultado foi um desempenho negativo do índice Bovespa na ordem de 2,89% com um risco de 1,56%. A carteira de igual financeiro (ver Tabela 11) registrou uma queda muito pior, de 23,24% e risco de 1,31%. Nesse ano, as carteiras de Markowitz, com um conjunto de riscos em geral menores que os anos 2013 e 2012 resultaram uma relação risco/retorno positivos em relação ao índice Bovespa e a carteira de igual financeiro, como podemos ver nas figuras abaixo:

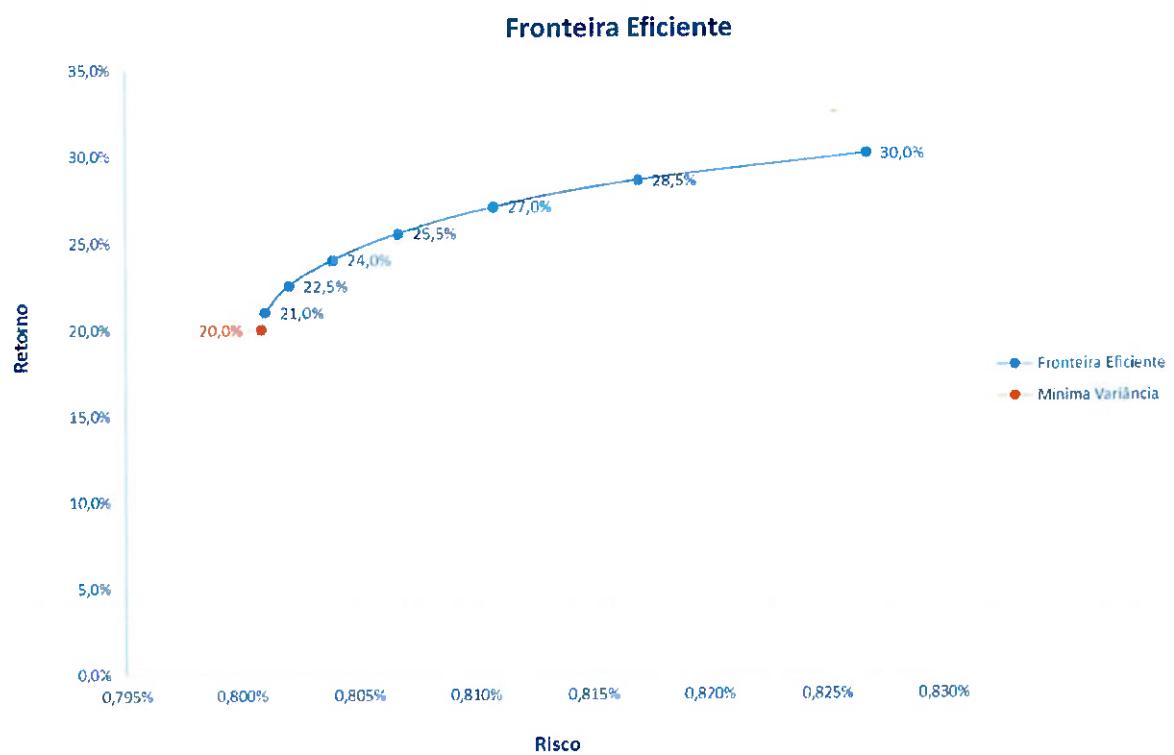
Tabela 11 — Carteiras otimizadas 2014

Ativos	Peso	Retorno anual	Ativos	Peso	Retorno anual
ABEV3	1,4%	-6,29%	GOAU4	1,4%	-72,29%
ALL3	1,4%	-22,36%	GOLL4	1,4%	41,27%
BBAS3	1,4%	-0,98%	HGTX3	1,4%	-38,00%
BBDC3	1,4%	7,97%	HYPE3	1,4%	-4,90%
BBDC4	1,4%	19,54%	ITSA4	1,4%	6,85%
BBSE3	1,4%	30,07%	ITUB4	1,4%	9,51%
BRAP4	1,4%	-53,42%	JBSS3	1,4%	26,95%
BRFS3	1,4%	27,33%	KLBN11	1,4%	-142,06%
BRKM5	1,4%	-15,69%	KROT3	1,4%	-92,56%
BRML3	1,4%	-3,60%	LAME4	1,4%	11,45%
BRPR3	1,4%	-58,46%	LIGT3	1,4%	-24,50%
BVMF3	1,4%	-7,29%	LREN3	1,4%	26,46%
CCRO3	1,4%	-12,45%	MRFG3	1,4%	46,95%
CESP6	1,4%	18,79%	MRVE3	1,4%	-4,78%
CIEL3	1,4%	-47,09%	NATU3	1,4%	-23,93%
CMIG4	1,4%	-4,78%	OIBR4	1,4%	91,84%
CPFE3	1,4%	-0,06%	PCAR4	1,4%	-5,06%
CPLE6	1,4%	18,39%	PDGR3	1,4%	-68,92%
CRUZ3	1,4%	-19,85%	PETR3	1,4%	-51,07%
CSAN3	1,4%	-28,24%	PETR4	1,4%	-52,42%
CSNA3	1,4%	-94,14%	POMO4	1,4%	-37,94%
CTIP3	1,4%	31,31%	QUAL3	1,4%	20,27%
CYRE3	1,4%	-24,34%	RENT3	1,4%	8,83%
DTEX3	1,4%	-45,80%	RSID3	1,4%	58,00%
ECOR3	1,4%	-32,72%	SANB11	1,4%	-1,43%
ELET3	1,4%	4,68%	SBSP3	1,4%	-43,13%
ELET6	1,4%	-16,97%	SUZB5	1,4%	18,44%
ELPL4	1,4%	1,90%	TBLE3	1,4%	-7,81%
EMBR3	1,4%	24,62%	TIMP3	1,4%	-2,90%
ENBR3	1,4%	-21,46%	UGPA3	1,4%	-5,82%
ESTC3	1,4%	16,72%	USIM5	1,4%	-99,71%
EVEN3	1,4%	-38,96%	VALE3	1,4%	-47,23%
FIBR3	1,4%	16,52%	VALE5	1,4%	-51,70%
GFSAA3	1,4%	-39,81%	VIVT4	1,4%	5,92%
GGBR4	1,4%	-65,70%			

Tabela 12 — Carteiras otimizadas 2014

Portifolio de Markowitz	Desvio padrão	Rendimento esperado
1	0,853%	1,5%
2	0,846%	3,0%
3	0,839%	4,5%
4	0,832%	6,0%
5	0,826%	7,5%
6	0,821%	9,0%
7	0,816%	10,5%
8	0,811%	12,0%
9	0,808%	13,5%
10	0,805%	15,0%
11	0,803%	16,5%
12	0,801%	18,0%
13	0,801%	19,5%
14	0,801%	21,0%
15	0,802%	22,5%
16	0,804%	24,0%
17	0,807%	25,5%
18	0,811%	27,0%
19	0,817%	28,5%
20	0,827%	30,0%
Minima Variância	0,801%	20,0%

Gráfico 6 — Fronteira eficiente 2014



O ano de 2015 foi marcado pelo aprofundamento da crise financeira no brasil, agravados por vários fatores, como por exemplo, escândalos de corrupção, ingerência governamental, crise política e queda no preço do petróleo, entre outros problemas, resultando numa queda histórica do PIB na ordem de 3,8%. Nesse cenário o índice Bovespa apresentou um resultado negativo de 11,43% com risco de 1,45%, impulsionado pelas fortes quedas no setor de construção, mineração e petróleo.

Criar um portfólio como o mesmo peso para cada uma das ações que compõem o índice Bovespa nesse ano seria um péssimo investimento já que nesse caso teria um prejuízo entorno de 13,74%, mesmo assumindo um pequeno risco de 1,33% (veja figura abaixo).

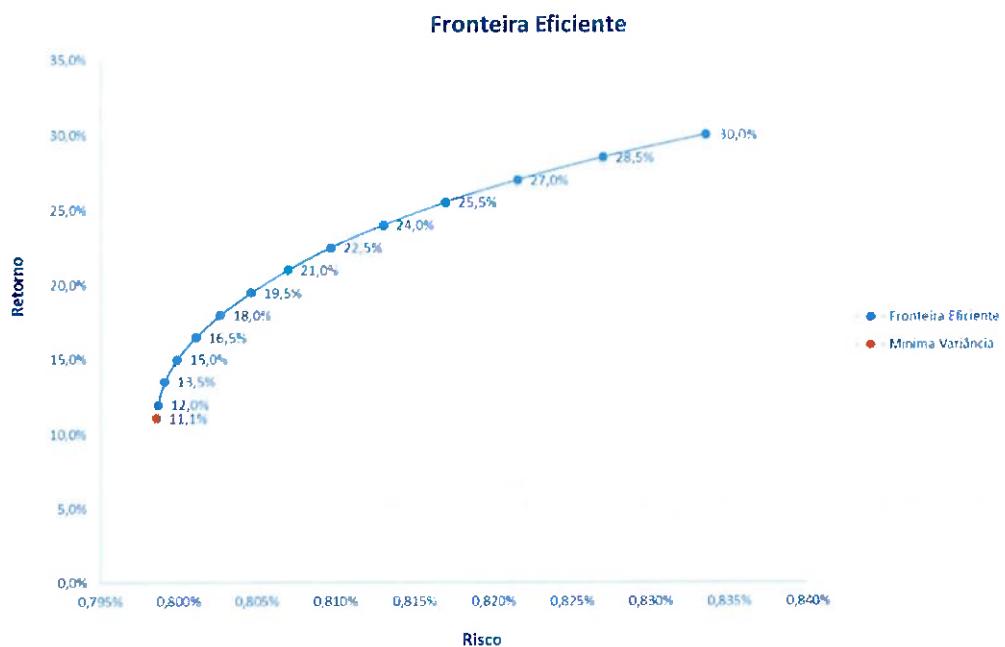
Tabela 13 — Carteiras otimizadas 2015

Ativos	Peso	Retorno anual	Ativos	Peso	Retorno anual
ABEV3	1,7%	11%	ITUB4	1,7%	-26%
BBAS3	1,7%	-45%	JBSS3	1,7%	14%
BBDC3	1,7%	-52%	KLBN11	1,7%	51%
BBDC4	1,7%	-60%	KROT3	1,7%	-44%
BBSE3	1,7%	-24%	LAME4	1,7%	16%
BRAP4	1,7%	-103%	LREN3	1,7%	-152%
BRFS3	1,7%	-12%	MRCG3	1,7%	9%
BRKM5	1,7%	48%	MRVE3	1,7%	17%
BRML3	1,7%	-35%	MULT3	1,7%	-17%
BVMF3	1,7%	14%	NATU3	1,7%	-27%
CCRO3	1,7%	-17%	PCAR4	1,7%	-84%
CESP6	1,7%	-67%	PETR3	1,7%	-7%
CIEL3	1,7%	-19%	PETR4	1,7%	-38%
CMIG4	1,7%	-75%	QUAL3	1,7%	-66%
CPFE3	1,7%	-17%	RADL3	1,7%	35%
CPL6	1,7%	-36%	RENT3	1,7%	-37%
CSAN3	1,7%	-11%	RUMO3	1,7%	155%
CSNA3	1,7%	-26%	SANB11	1,7%	24%
CTIP3	1,7%	16%	SBSP3	1,7%	12%
CYRE3	1,7%	-39%	SMLE3	1,7%	-31%
ECOR3	1,7%	-76%	SUZB5	1,7%	54%
EMBR3	1,7%	19%	TBLE3	1,7%	3%
ENBR3	1,7%	34%	TIMP3	1,7%	-57%
EQTL3	1,7%	23%	UGPA3	1,7%	19%
ESTC3	1,7%	-50%	USIM5	1,7%	-119%
FIBR3	1,7%	47%	VALE3	1,7%	-51%
GGBR4	1,7%	-70%	VALE5	1,7%	-63%
GOAU4	1,7%	-194%	VIVT4	1,7%	-26%
HYPE3	1,7%	29%	WEGE3	1,7%	-76%
ITSA4	1,7%	-30%			

Tabela 14 — Carteiras otimizadas 2015

Portifolio de Markowitz	Desvio padrão	Rendimento esperado
1	0,806%	1,5%
2	0,804%	3,0%
3	0,802%	4,5%
4	0,801%	6,0%
5	0,800%	7,5%
6	0,799%	9,0%
7	0,799%	10,5%
8	0,799%	12,0%
9	0,799%	13,5%
10	0,800%	15,0%
11	0,801%	16,5%
12	0,803%	18,0%
13	0,805%	19,5%
14	0,807%	21,0%
15	0,810%	22,5%
16	0,813%	24,0%
17	0,817%	25,5%
18	0,822%	27,0%
19	0,827%	28,5%
20	0,834%	30,0%
Minima Variância	0,799%	11,1%

Gráfico 7 — Fronteira eficiente 2015



5 CONCLUSÕES

Com os resultados obtidos neste trabalho, podemos observar que a moderna teoria de portfólios para otimização e formação de carteiras de investimentos, inicialmente desenvolvida por Harry Markowitz, se mostrou eficiente em otimizar a relação risco/retorno, minimizando o risco da aplicação de recursos, dado um retorno desejado. O desempenho das carteiras geradas pelo modelo de Markowitz em relação a carteiras formadas pelo Ibovespa e as de igual financeiro reafirma o conceito, já estabelecido teoricamente no modelo, de que para reduzir de maneira eficiente o risco associado com a formação de uma carteira de ações em relação a um ativo individualmente é necessário que a participação dos ativos que a compõem satisfaçam critérios que vão além de volume de negócios ou perspectivas de crescimento, por exemplo. Para escolhermos e ponderarmos corretamente os ativos é extremamente importante analisarmos também o quanto os mesmos estão correlacionados entre si, uma vez que, ativos com forte correlação positiva tendem a aumentar o risco da carteira e ativos com correlação negativa entre si tendem a diluí-lo. Alcançamos assim a maximização do retorno esperado dado o risco assumido.

Com a criação das fronteiras eficientes em cada ano, apresentamos diversas carteiras otimizadas a serem escolhidas pelo investidor de acordo com suas preferências em relação ao risco e retorno do investimento. Para um dado nível de risco, a fronteira eficiente identifica a carteira de maior retorno e identifica a carteira de menor risco. Ademais podemos também identificar na fronteira eficiente a carteira de mínima variância, que apresenta maior retorno possível com o menor risco.

Os resultados obtidos no estudo mostraram que a aplicação do modelo de Markowitz nos dados do índice Bovespa foi capaz de minimizar os riscos em todos os anos analisados mostrando que a teoria pode ser levada em conta na análise de investimentos. O modelo estudado mostrou que se pode maximizar o retorno de uma carteira, dado um risco desejado de forma mais satisfatória do que o índice Bovespa ou da carteira de igual financeiro. A utilização dessa ferramenta também nos mostrou a sua eficiência em diversos momentos no mercado acionário nos anos estudados produzindo carteiras lucrativas com baixo risco (em comparação com a volatilidade do Ibovespa e as carteiras de igual financeiro) tanto em cenários de expansão econômica (2010, 2011 e 2012) como em crises financeiras e incertezas no ambiente macroeconômico (2013, 2014 e 2015).

A teoria apresentada serve, portanto, como uma ferramenta extremamente útil para compor carteiras que apresentem a melhor relação risco/retorno frente a diversas cenários envolvendo o mercado financeiro, inclusive momentos de grande instabilidade e volatilidade nos preços dos ativos. Além disso, tem a vantagem de ser facilmente executado por qualquer investidor com conhecimentos analíticos e computacionais. Concluímos, portanto, que nesse trabalho, atingimos o objetivo de mostrar, com exemplos, análises e estudos condizentes com a realidade, a praticidade do modelo de Markowitz como um poderoso auxílio para profissionais da área de finanças com o intuito de apoiar no estudo da formação de seus portfólios de investimentos.

É importante destacar que caso fosse utilizado outras perspectivas de tempo o resultado poderia ter sido totalmente distinto. Estudos e trabalhos podem ser dissertados levando em consideração outros modelos onde os resultados podem ser mais efetivos que os detectados por meio do modelo de Markowitz, no entanto, não foram utilizados no estudo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMONACID, G. A. **Aplicabilidade da Teoria de Markowitz para Investimentos em Ativos do Real Estate: Estudo de Caso de uma Carteira Mista.** 2010. 76 f. Monografia (MBA-USP – Real Estate Economia e Mercados)
- BAMPI, R. E.; CAMARGO, M. E.; COLOMBO, J. A. **Redução de risco na formação de carteiras: um estudo da correlação das ações do Ibovespa.** In: SIMPÓSIO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 16. 2009, Botucatu. Anais. XVI SIMPEP, 2009.
- BOLSA DE VALORES DE SÃO PAULO. **Composição do índice IBOVESPA.** Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/>>. Acesso: 15/10/2016
- CARVALHO, H. **Harry Markowitz e a fronteira eficiente.** 2009.
- DAMODARAN, A. **Finanças corporativas: teoria e prática.** 2 ed. Porto Alegre: Bookman, 2004
- GASTINEAU, G. L.; KRITZMAN, M. P. **Dicionário de administração de risco financeiro.** São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 2004. 435 p.
- GITMAN, L. J. **Princípios de administração Financeira.** São Paulo: Harbra, 1997.
- LUENBERGER, D. G. **Investment Science.** New York: Oxford University, 1998
- MARKOWITZ, H. M. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, Mar 1952.
- MARKOWITZ, H. M. **Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments.** New York: John Wiley & Sons, Inc., 1959.
- ASSAF NETO, A. **Mercado Financeiro.** São Paulo: Atlas, 2008.
- HUDSON-WILSON, S. **Modern Real Estate Portfolio Management.** New Hope: FJF, 2000
- COSTA, O. L. V.; ASSUNÇÃO, H. G. V. **Análise de risco e retorno em investimentos financeiros** - Barueri, SP : Manole, 2005.