

Leonardo Shikata Augusto Tubota

**Estudo de Algorítmos de Coordenação de Movimentos de  
Robôs Móveis**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Escola de En-  
genharia de São Carlos da Universidade de São Paulo  
Curso de Engenharia Elétrica com ênfase em Eletrônica

Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra

São Carlos  
2007



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>v</b>
<b>Resumo</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Controle Básico Líder - Seguidor</b>	<b>3</b>
2.1 Estabilidade de $e_1$ . . . . .	5
2.2 Estabilidade de $e_2$ . . . . .	6
2.3 Estabilidade de $e_3$ . . . . .	6
2.4 Simulação . . . . .	9
2.4.1 As constantes $k_1$ e $k_2$ possuem o mesmo valor . . . . .	10
2.4.2 A constante $k_1$ é maior que a constante $k_2$ . . . . .	11
2.4.3 A constante $k_2$ é maior que a constante $k_1$ . . . . .	11
<b>3 Mudança de Liderança</b>	<b>13</b>
3.1 Usando as equações não linearizadas . . . . .	14
3.2 Usando as equações linearizadas . . . . .	18
<b>4 Aplicação</b>	<b>21</b>
4.1 Teoria dos Grafos . . . . .	21
Matriz Adjacência . . . . .	22
Laplaciano . . . . .	22
Árvore enraizada . . . . .	22
4.2 Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos (SLSM) . . . . .	22
4.3 Controle de SLSM baseado em Redes . . . . .	23
Modelo . . . . .	24
4.4 Modelo da formação . . . . .	24
4.5 Modelo de alternância de Liderança . . . . .	26

Caracterização do líder . . . . .	26
Modelo . . . . .	26
Líder 1 . . . . .	27
Líder 2 . . . . .	29
Líder 3 . . . . .	31
Líder 4 . . . . .	32
Líder 5 . . . . .	34
Líder 6 . . . . .	35
<b>5 RoboLasi</b>	<b>39</b>
<b>6 Conclusão</b>	<b>41</b>

# Lista de Figuras

FIGURA 1.1 Cinemática do robô . . . . .	2
FIGURA 2.1 Formação Líder - Seguidor simples . . . . .	3
FIGURA 2.2 (a)Gráfico da resposta de $l_{ij}$ ao degrau com $k_1$ e $k_2$ iguais. (b) Gráfico da resposta de $\psi_{ij}$ ao degrau com $k_1$ e $k_2$ iguais . . . . .	10
FIGURA 2.3 (a) Gráfico da resposta de $l_{ij}$ ao degrau com $k_1$ alto. (b) Gráfico da resposta de $\psi_{ij}$ ao degrau com $k_1$ alto. . . . .	11
FIGURA 2.4 (a) Gráfico da resposta de $l_{ij}$ ao degrau com $k_2$ alto alto. (b) Gráfico da resposta de $\psi_{ij}$ ao degrau com $k_2$ alto. . . . .	12
FIGURA 3.1 Estados possíveis. . . . .	14
FIGURA 3.2 Posição inicial dos robôs. . . . .	16
FIGURA 3.3 Trajeória seguida pelo líder com e sem mudança de liderança. . . . .	16
FIGURA 3.4 Distância mantida entre os robôs tanto para o caso sem mudança de liderança como para o caso com mudança de liderança. . . . .	17
FIGURA 3.5 Orientação dos robôs,(a) sem mudança de liderança, (b) com mudança de liderança. . . . .	17
FIGURA 3.6 Distância entre os robôs com mudança de liderança . . . . .	19
FIGURA 3.7 Orientação dos robôs com mudança de liderança . . . . .	20
FIGURA 3.8 Trajetória do seguidor ao se variar a orientação relativa . . . . .	20
FIGURA 4.1 Representação da formação dos robôs. . . . .	27



# Resumo

Neste projeto de formatura será dado continuidade ao trabalho de iniciação científica, que consistiu na análise de métodos de coordenação de robôs móveis, ou seja métodos de controle de um conjunto de robôs para que esses assumam uma determinada formação com direção e distância entre eles pré-definidas. Sendo estudado primeiramente a cinemática do robô móvel e logo em seguida foi feita a análise de uma formação simples de líder-seguidor, considerando também a alternância da liderança entre os robôs. A partir desse ponto será feita a implementação da simulação do algoritmo de controle de 6 robôs móveis em formação utilizando controle por grafos e sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos.



# Capítulo 1

## Introdução

Nos últimos anos as pesquisas no campo de controle e coordenação de múltiplos robôs móveis têm crescido, principalmente aquelas que possuem aplicações como exploração [1], procura e resgate [2], mapeamento de locais desconhecidos [3], [4] e no transporte de grandes objetos [5], [6]. O objetivo deste trabalho é analisar os algoritmos de coordenação de robôs móveis e suas vizinhanças enquanto se movimentam em uma determinada configuração. Os robôs são não holonômicos (seus movimentos são restritos a certas direções), com velocidades controladas e possuem 2 entradas de controle independentes. Os controladores modelados para esses robôs são baseados em um método de linearização, denominado linearização por realimentação da saída [7]. Isso significa que pode-se regular as duas entradas de controle. As equações cinemáticas de cada um dos robôs utilizados são descritas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v\cos(\theta), \\ \dot{y} &= v\sin(\theta), \\ \dot{\theta} &= \omega\end{aligned}\tag{1.1}$$

sendo os termos  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, \theta_i) \in SE(2)$ ;  $v_i$  e  $\omega_i$  as velocidades linear e angular respectivamente.

Ver Figura 1.1

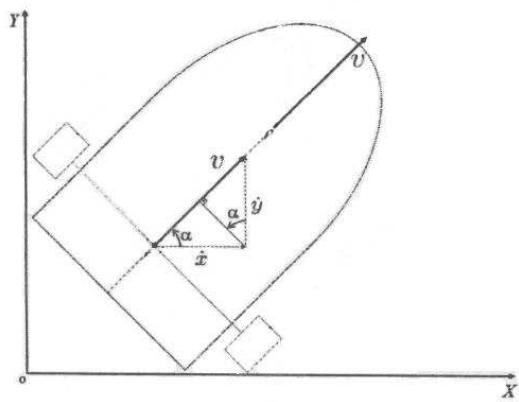


Figura 1.1: Cinemática do robô

## Capítulo 2

# Controle Básico Líder - Seguidor

Neste capítulo inicia-se a análise de uma formação básica de um robô líder e um seguidor (ver Figura 2.1), denominada  $SB_{ij}C$ , em que cada robô  $R_j$  segue  $R_i$  com uma distância pré-determinada  $l_{ij}^d$  constante e uma orientação relativa  $\psi_{ij}^d$ . Note que essa orientação relativa descreve a direção principal que o seguidor tem que respeitar em relação ao líder.

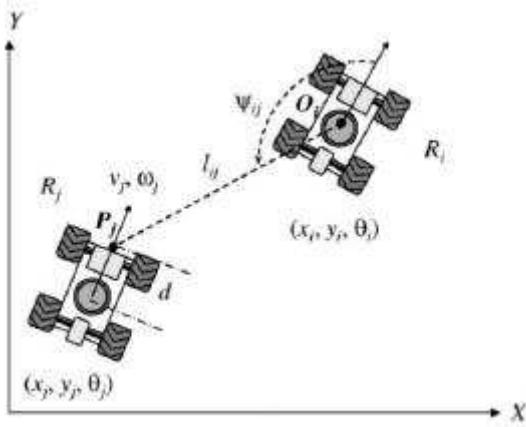


Figura 2.1: Formação Líder - Seguidor simples

Através da cinemática e da mudança do sistema de coordenadas, tem-se que as equações do sistema são [8]:

$$\begin{aligned}\dot{z}_{ij} &= G_{1(z_{ij}, \beta_{ij})} u_j + F_{1(z_{ij})} u_i, \\ \dot{\beta}_{ij} &= \omega_i - \omega_j\end{aligned}\tag{2.1}$$

sendo que:

- $z_{ij} = \begin{bmatrix} l_{ij} & \psi_{ij} \end{bmatrix}^T$  é a saída do sistema,
- $u_j = \begin{bmatrix} v_j & \omega_j \end{bmatrix}$  são as entradas de  $R_j$ ,
- $u_i = \begin{bmatrix} v_i & \omega_i \end{bmatrix}$  são as entradas de  $R_i$ ,

- $G_1 = \begin{bmatrix} \cos\gamma_{ij} & d\sin\gamma_{ij} \\ -\frac{\sin\gamma_{ij}}{l_{ij}} & \frac{d\cos\gamma_{ij}}{l_{ij}} \end{bmatrix}$  e
- $F_1 = \begin{bmatrix} -\cos\psi_{ij} & 0 \\ \frac{\sin\psi_{ij}}{l_{ij}} & -1 \end{bmatrix}$

e  $\gamma_{ij} = \beta_{ij} + \psi_{ij}$ . Aplicando o método de linearização denominado linearização por realimentação de entrada e saída [7], obtém-se a entrada  $u_j$ :

$$u_j = G_1^{-1}(p_1 - F_1 u_i) \quad (2.2)$$

$$\text{com } p_1 = \begin{bmatrix} k_1(l_{ij}^d - l_{ij}) \\ k_2(\psi_{ij}^d - \psi_{ij}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix}, \text{ onde } k_1 \text{ e } k_2 \text{ são constantes.}$$

A entrada  $u_j$  foi projetada dessa maneira afim de se cancelar as influências das não linearidades presentes no sistema. Tal fato pode ser comprovado ao se substituir a entrada  $u_j$  (equação (2.2)) na saída  $z_{ij}$  (equação (2.1)) como é mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{ij} &= G_1 G_1^{-1}(p_1 - F_1 u_i) + F_1 u_i \\ \dot{z}_{ij} &= p_1 - F_1 u_i + F_1 u_i \\ \dot{z}_{ij} &= p_1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

No entanto para a linearização acima ser verdadeira, o sistema precisa ser estável quando nele se aplica a entrada  $u_j$  escolhida (equação (2.2)). Para provar que o sistema é estável assumem-se os seguintes erros:

---


$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{ij}^d - l_{ij} \\ \psi_{ij}^d - \psi_{ij} \\ \theta_i - \theta_j \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Se cada um dos erros de (2.4) forem estáveis, então o sistema também é estável. Portanto tem-se que provar a estabilidade de cada erro.

## 2.1 Estabilidade de $e_1$

Considerando  $e_1$  como mostrado acima, tem-se que:

$$p_{11} = k_1 e_1 = \dot{l}_{ij} \quad (2.5)$$

$$l_{ij} = l_{ij}^d - e_1. \quad (2.6)$$

Derivando a equação (2.6) em relação ao tempo tem-se que:

$$\dot{l}_{ij} = \dot{l}_{ij}^d - \dot{e}_1 \quad (2.7)$$

Substituindo a equação (2.7) na equação (2.5) chega-se a seguinte expressão:

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1 + \dot{l}_{ij}^d \quad (2.8)$$

Portanto tem-se a seguinte condição: Se  $k_1 > 0$  então o autovalor  $\gamma = -k_1$  será menor que zero implicando na estabilidade de  $e_1$ .

## 2.2 Estabilidade de $e_2$

Seguindo o mesmo raciocínio da seção anterior, considera-se o erro  $e_2$

$$p_{12} = k_2 e_2 = \dot{\psi}_{ij} \quad (2.9)$$

$$\psi_{ij} = \psi_{ij}^d - e_2. \quad (2.10)$$

Tomando a derivada temporal da equação (2.10) obtém-se

$$\dot{\psi}_{ij} = \dot{\psi}_{ij}^d - \dot{e}_2. \quad (2.11)$$

Substituindo a equação (2.11) na equação (2.9) consegue-se o seguinte resultado:

$$\dot{e}_2 = -k_2 e_2 + \dot{\psi}_{ij}^d. \quad (2.12)$$

Ao analisar a equação (2.12) verifica-se que para  $e_2$  ser estável é necessário que o autovalor  $\gamma$  seja menor que zero e isso é válido, apenas, para  $k_2 > 0$ .

## 2.3 Estabilidade de $e_3$

Agora que já foi demonstrado que os erros  $e_1$  e  $e_2$  são estáveis, basta que se prove que o erro  $e_3$  é estável. Para isso precisa-se escrever a expressão de  $e_3$  na forma  $\dot{x} = f(x)$  [7]. Sendo o erro  $e_3$  igual a

$$e_3 = \theta_i - \theta_j$$

tem-se que a derivada com relação ao tempo do erro  $e_3$  é

$$\dot{e}_3 = \omega_i - \omega_j. \quad (2.13)$$

Então tem-se que encontrar uma relação entre  $\omega_j$  e as demais variáveis. Para isso toma-se a

expressão projetada para  $u_j$  (ver equação (2.2)), substitui-se as matrizes e realiza-se as operações matriciais indicadas, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} u_j &= G_1^{-1}(p_1 - F_1 u_i) \\ u_j &= \begin{bmatrix} \cos\gamma_{ij} & -l_{ij}\sin\gamma_{ij} \\ \frac{\sin\gamma_{ij}}{d} & \frac{l_{ij}\cos\gamma_{ij}}{d} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} k_1 e_1 \\ k_2 e_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\cos\psi_{ij} & 0 \\ \frac{\sin\psi_{ij}}{l_{ij}} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{bmatrix} v_j \\ \omega_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 e_1 \cos\gamma_{ij} + v_i \cos\psi_{ij} \cos\gamma_{ij} - l_{ij} k_2 e_2 \sin\gamma_{ij} + v_i \sin\psi_{ij} \sin\gamma_{ij} - l_{ij} \omega_i \sin\gamma_{ij} \\ \frac{k_1 e_1 \sin\gamma_{ij}}{d} + \frac{v_i \sin\gamma_{ij} \cos\psi_{ij}}{d} + \frac{k_2 e_2 l_{ij} \cos\gamma_{ij}}{d} - \frac{v_i \sin\psi_{ij} \cos\gamma_{ij}}{d} + \frac{\omega_i l_{ij} \cos\gamma_{ij}}{d} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Da equação (2.15) pode-se tirar uma relação entre  $\omega_j$  e  $\omega_i$ , juntamente com as outras variáveis, como destacado abaixo

$$\begin{aligned} \omega_j(\omega_i, e_1, e_2, e_3) &= \frac{k_1 e_1 \sin\gamma_{ij}}{d} + \frac{v_i \sin\gamma_{ij} \cos\psi_{ij}}{d} + \frac{k_2 e_2 l_{ij} \cos\gamma_{ij}}{d} - \frac{v_i \sin\psi_{ij} \cos\gamma_{ij}}{d} \\ &\quad + \frac{\omega_i l_{ij} \cos\gamma_{ij}}{d} \end{aligned} \quad (2.16)$$

sendo que  $\gamma_{ij} = e_3 + \psi_{ij}$ . Obtida, então, uma relação entre  $\omega_j$  e as demais variáveis, tem-se agora que substituir a equação (2.16) na equação (2.13), de onde sai que:

$$\dot{e}_3 = \omega_i - \frac{k_1 e_1 \sin\gamma_{ij}}{d} - \frac{v_i \sin\gamma_{ij} \cos\psi_{ij}}{d} - \frac{k_2 e_2 l_{ij} \cos\gamma_{ij}}{d} + \frac{v_i \sin\psi_{ij} \cos\gamma_{ij}}{d} - \frac{\omega_i l_{ij} \cos\gamma_{ij}}{d}. \quad (2.17)$$

Através do uso das identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \sin(a + b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \\ \cos(a + b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \end{aligned}$$

desenvolve-se e simplifica-se a expressão em (2.17) obtendo o resultado abaixo

$$\dot{e}_3 = -\frac{v_i}{d} \sin(e_3) + \omega_i \left( 1 - \frac{l_{ij}}{d} \cos\gamma_{ij} \right) - \frac{1}{d} (k_1 e_1 \sin\gamma_{ij} + k_2 e_2 l_{ij} \cos\gamma_{ij}). \quad (2.18)$$

Como  $\dot{e}_3$  está na forma  $\dot{e}_3 = f(e_3) + g(\omega_i, e_2, e_3) - h(e_1, e_2, e_3)$  e considerando que  $g$  e  $h$  são perturbações, considerando que  $\omega_i < W_{max}$  e portanto limitado, tem-se que as perturbações são limitadas. Pela teoria de estabilidade absoluta [7], se as condições mencionadas anteriormente forem válidas e  $f(e_3)$  for uniformemente e assintoticamente estável, então todo o sistema será estável.

Desta maneira, anulam-se as perturbações mencionadas anteriormente e obtém-se a seguinte expressão:

$$\dot{e}_3 = -\frac{v_i}{d} \operatorname{sen}(e_3). \quad (2.19)$$

Para verificar se o erro em (2.19) é estável usa-se a teoria da estabilidade de Lyapunov [7] e para tanto considera-se a seguinte função de  $e_3$ :

$$V(e_3) = e_3^2. \quad (2.20)$$

Para a função em (2.20) ser uma função de Lyapunov, ela deve satisfazer as seguintes condições:

Seja  $F_{(x)}$  uma função de Lyapunov, então:

1.  $F_{(0)} = 0$ ;
2.  $F_{(x)} \neq 0$ , para  $x \neq 0$ ;
3.  $F_{(x)}$  é continua e derivável;
4.  $\dot{F}_{(x)} = \langle \operatorname{grad}(F_{(x)}), \dot{x} \rangle < 0$

No caso da função escolhida (ver (2.20)) os 3 primeiros ítems são satisfeitos integralmente e o quarto item é válido apenas no intervalo em que  $-\pi < e_3 < \pi$ . Sendo assim tem-se que  $V(e_3)$  é uma função de Lyapunov. E como o sistema em (2.19) é autônomo, tem-se que o erro  $e_3$  é uniformemente e assintoticamente estável.

Portanto, como mencionado no início do capítulo, se os erros do sistema descrito em (2.1) são estáveis, então tem-se que o sistema também é estável. Contudo deve se respeitar as condições

---

impostas durante as explanações das estabilidades, que são resumidas a seguir.

Condições para a estabilidade do sistema em (2.1):

1.  $k_1 > 0$ ;
2.  $k_2 > 0$ ;
3.  $\|\omega_i\| < \|W_{max}\|$ ;
4.  $-\pi < e_3 = \beta_{ij} < \pi$ .

## 2.4 Simulação

Nesta sessão mostra-se alguns resultados de uma simulação do sistema linearizado descrito em (2.3). Toda a simulação for feita em MATLAB, usando as ferramentas de controle que este programa oferece.

Para a introdução dos dados no programa de simulação o sistema precisa estar da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{2.21}$$

sendo  $x$  o vetor de estados,  $u$  o vetor de entradas e  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são matrizes constantes. Então, fazendo alguma manipulação algébrica e chega-se ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned}\dot{z}_{ij} &= \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} z_{ij} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} z_{ij}^d \\ z_{ij} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z_{ij} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_{ij}^d.\end{aligned}\tag{2.22}$$

As simulações foram divididas em três partes, de acordo com os valores assumidos para as constantes de ganho  $k_1$  e  $k_2$ , como mostrado a seguir:

1. As constantes  $k_1$  e  $k_2$  possuem o mesmo valor;

2. A constante  $k_1$  é maior que a constante  $k_2$ ;

3. A constante  $k_2$  é maior que a constante  $k_1$ .

Sendo que os valores da entrada  $z_{ij}^d$  aplicados nas simulações foram:

$$z_{ij}^d = \begin{bmatrix} 1 \\ \pi \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

isto é, a separação entre o líder e o seguidor ( $l_{ij}$ ) é de 1m e a direção relativa ( $\psi_{ij}$ ) é de  $\pi$  rad.

#### 2.4.1 As constantes $k_1$ e $k_2$ possuem o mesmo valor

Quando se atribui o mesmo valor a ambas as constantes, tem-se que as saídas se comportam da mesma maneira, como pode ser visto na Fig. 2.2. Verifica-se, também pelos gráficos na Fig. 2.2, que o tempo de subida das duas saídas ( $\psi_{ij}$  e  $l_{ij}$ ) são idênticos e iguais a 1,75s quando se atribui às constantes o valor de  $k_1 = k_2 = 0,7$ .

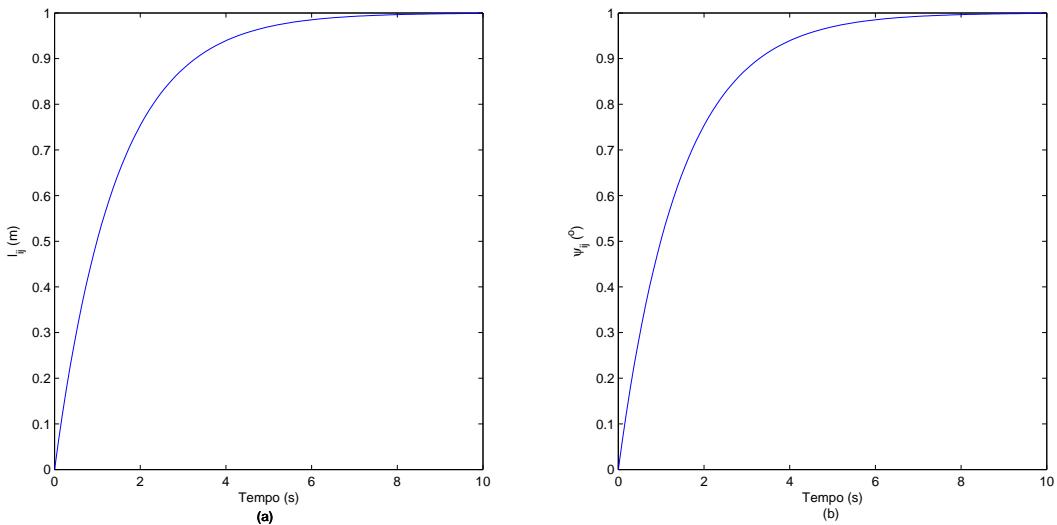


Figura 2.2: (a) Gráfico da resposta de  $l_{ij}$  ao degrau com  $k_1$  e  $k_2$  iguais. (b) Gráfico da resposta de  $\psi_{ij}$  ao degrau com  $k_1$  e  $k_2$  iguais

### 2.4.2 A constante $k_1$ é maior que a constante $k_2$

Se, ao invés de fazer as constantes com valores iguais, agora fixa-se a constante  $k_2$  e aumenta-se o valor de  $k_1$  para um valor relativamente alto, obtém-se os gráficos mostrados na Fig. 2.3. Nota-se que com o aumento da constante  $k_1$  o tempo de subida da separação entre o líder e o seguidor ( $l_{ij}$ ) diminui, ou seja, fazendo-se  $k_1 = 100$  e  $k_2 = 0,7$  obtém-se um tempo de subida para  $l_{ij}$  de 0,012s, enquanto que para a orientação relativa ( $\psi_{ij}$ ) obteve-se praticamente o mesmo tempo de subida (1,7s).

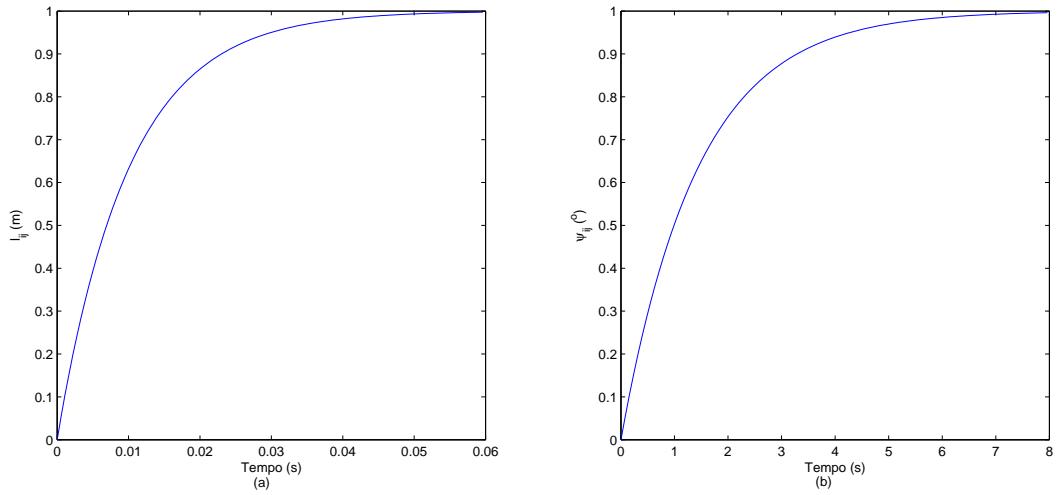


Figura 2.3: (a) Gráfico da resposta de  $l_{ij}$  ao degrau com  $k_1$  alto. (b) Gráfico da resposta de  $\psi_{ij}$  ao degrau com  $k_1$  alto.

### 2.4.3 A constante $k_2$ é maior que a constante $k_1$

Ao contrário do que foi feito na seção anterior, agora faz-se a constante  $k_1$  fixa e aumenta-se a constante  $k_2$ , também para um valor relativamente alto, obtendo-se os gráficos apresentados na figura Fig. 2.4.

Observando-se os gráficos na Fig. 2.4 verifica-se que aumentando-se o valor de  $k_2$  o tempo de subida da orientação relativa ( $\psi_{ij}$ ) diminui, isto é, fazendo-se  $k_1 = 0,7$  e  $k_2 = 100$  tem-se que o tempo de subida de  $\psi_{ij}$  é de 0,012s enquanto que o tempo de subida de  $l_{ij}$  fica em torno de 1,7s (praticamente igual ao da seção 2.4.1).

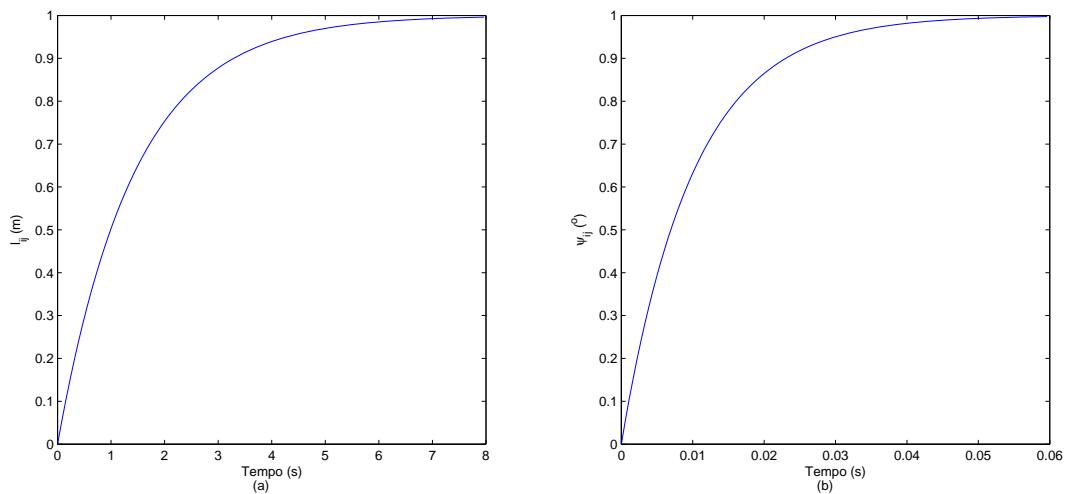


Figura 2.4: (a) Gráfico da resposta de  $l_{ij}$  ao degrau com  $k_2$  alto alto. (b) Gráfico da resposta de  $\psi_{ij}$  ao degrau com  $k_2$  alto.

## Capítulo 3

# Mudança de Liderança

Uma questão importante a ser estudada é o comportamento do sistema de robôs quando se impõe a mudança do robô a ser considerado como líder. Tal problema é primordial na aplicação de robôs móveis em explorações, onde a perda do líder compromete toda a expedição e, portanto, na falha de um dos elementos do grupo algum outro assumiria a posição de líder. Outra aplicação é no uso militar de robôs móveis, onde é interessante que a liderança seja mudada freqüentemente para que não se saiba, em determinado instante, quem é o líder.

A natureza da mudança de liderança pode ser caracterizada de três formas distintas:

- Aleatória e sistemática: a mudança ocorre sistematicamente em períodos de tempo pré-estabelecidos mas o destino da liderança ocorre de forma aleatória, já que não segue um padrão específico;
- Não aleatória e sistemática: da mesma maneira a mudança ocorre em períodos de tempo conhecidos, porém o destino da liderança, agora, segue um padrão;
- Aleatório e não sistemático: a mudança de líder ocorre somente quando é necessário, dependendo das condições ambientais, sendo que o destino da liderança não segue um padrão.

Para que se possa avaliar as saídas do sistema ao se fazer essas mudanças de liderança foi tomado como base o sistema líder seguidor, por ser mais simples. Com isso conseguimos identificar dois estados conforme visto na figura 3.1.

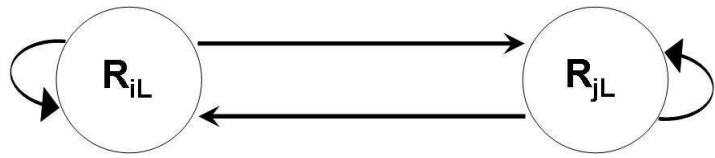


Figura 3.1: Estados possíveis.

Sendo que  $R_{iL}$  representa o estado em que o robô  $R_i$  é o líder e  $R_{jL}$  representa o estado em que o robô  $R_j$  é o líder.

As avaliações foram feitas de dois modos:

1. Usando as equações não linearizadas;
2. Usando as equações linearizadas do sistema.

### 3.1 Usando as equações não linearizadas

Nesta seção será feita uma simulação do sistema Líder-Seguidor descrito no Capítulo 2, para verificar o comportamento das saídas, quando aplicado ao sistema a mudança de liderança, sem o devido tratamento de linearização. Com isto foi utilizado as equações descritas em 2.1 expandidas como mostradas em 3.1 e 3.2.

$$\begin{aligned} \dot{l}_{ij} &= v_j \cos(\beta_{ij} + \psi_{ij}) + d\omega_j \sin(\beta_{ij} + \psi_{ij}) - v_i \cos(\psi_{ij}) \\ \dot{\psi}_{ij} &= -\frac{v_j \sin(\beta_{ij} + \psi_{ij})}{l_{ij}} + \frac{d\omega_j \cos(\beta_{ij} + \psi_{ij})}{l_{ij}} + \frac{v_i \sin(\psi_{ij})}{l_{ij}} - \omega_i \end{aligned} \quad (3.1)$$

---


$$\begin{aligned}
\dot{x}_i &= v_i \cos(\theta_i) \\
\dot{x}_j &= v_j \cos(\theta_j) \\
\dot{y}_i &= v_i \sin(\theta_i) \\
\dot{y}_j &= v_j \sin(\theta_j) \\
v_i &= \sqrt{\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2} \\
v_j &= \sqrt{\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2} \\
\dot{\theta}_i &= \omega_i \\
\dot{\theta}_j &= \omega_j
\end{aligned} \tag{3.2}$$

No entanto para poder usar estas equações na simulação em MATLAB é necessário discretizá-las, conforme mostrado em 3.3 e 3.4:

$$\begin{aligned}
l_{ij(k+1)} &= (v_{j(k)} \cos(\beta_{ij(k)} + \psi_{ij(k)}) + d\omega_{j(k)} \sin(\beta_{ij(k)} + \psi_{ij(k)}) - v_{i(k)} \cos(\psi_{ij(k)})) t_k + l_{ij(k)} \\
\psi_{ij(k+1)} &= \left( -\frac{v_{j(k)} \sin(\beta_{ij(k)} + \psi_{ij(k)})}{l_{ij(k)}} + \frac{d\omega_{j(k)} \cos(\beta_{ij(k)} + \psi_{ij(k)})}{l_{ij(k)}} + \frac{v_{i(k)} \sin(\psi_{ij(k)})}{l_{ij(k)}} - \omega_{i(k)} \right) t_k + \psi_{ij(k)}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
x_{i(k+1)} &= (v_{i(k)} \cos(\theta_{i(k)})) t_k + x_{i(k)} \\
x_{j(k+1)} &= (v_{j(k)} \cos(\theta_{j(k)})) t_k + x_{j(k)} \\
y_{i(k+1)} &= (v_{i(k)} \sin(\theta_{i(k)})) t_k + y_{i(k)} \\
y_{j(k+1)} &= (v_{i(k)} \sin(\theta_{j(k)})) t_k + y_{j(k)} \\
v_{i(k+1)} &= \sqrt{\left( \frac{x_{i(k+1)} - x_{i(k)}}{t_k} \right)^2 + \left( \frac{y_{i(k+1)} - y_{i(k)}}{t_k} \right)^2} \\
v_{j(k+1)} &= \sqrt{\left( \frac{x_{j(k+1)} - x_{j(k)}}{t_k} \right)^2 + \left( \frac{y_{j(k+1)} - y_{j(k)}}{t_k} \right)^2} \\
\theta_{i(k+1)} &= t_k \omega_{i(k)} + \theta_{i(k)} \\
\theta_{j(k+1)} &= t_k \omega_{j(k)} + \theta_{j(k)} \\
\omega_{j(k+1)} &= \theta_{j(k+1)}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Mas deve-se lembrar que para o robô líder a trajetória é conhecida e por consequência suas coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $\theta$ . Portanto, durante a simulação foi definido que a trajetória do líder seria uma reta a  $45^\circ$  do eixo de coordenada  $x$ , sendo que a posição inicial do líder é a origem do

sistema de coordenadas e a posição do seguidor é nas coordenadas  $x = y = -1$ , o que faz com que o ângulo  $\psi_{ij}$  seja igual a  $180^\circ$  como mostra a figura 3.2.

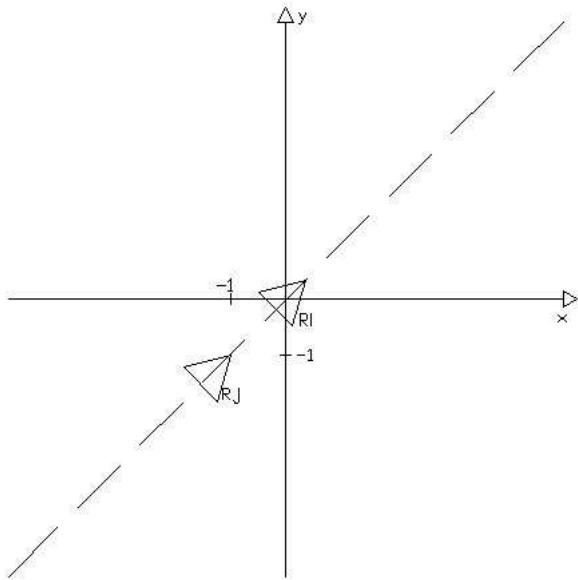


Figura 3.2: Posição inicial dos robôs.

Através das equações em 3.4 e das informações mencionadas acima, pôde-se fazer um programa contendo uma rotina de loop onde estas equações são resolvidas de modo que a cada instante de tempo a liderança é trocada. Os resultados são apresentados em forma de gráficos contendo cada saída do sistema. Tais gráficos são apresentados abaixo:

- Trajetória do líder:

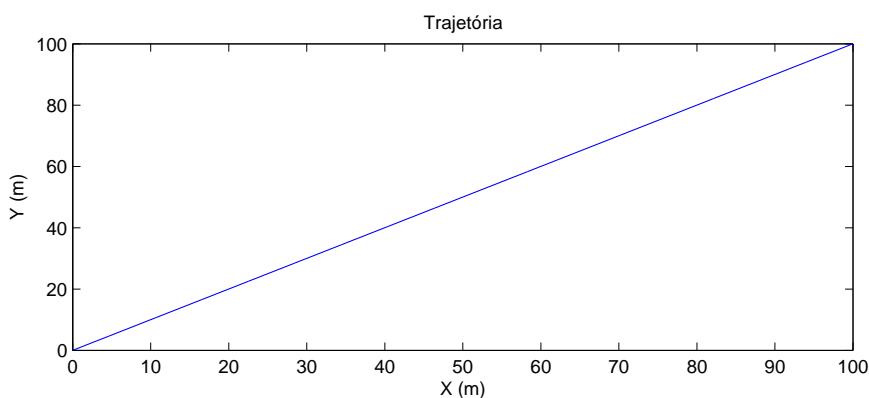


Figura 3.3: Trajeória seguida pelo líder com e sem mudança de liderança.

Observe que em ambos os casos a trajetória é a mesma.

- Distância entre os robôs  $l_{ij}$ :

Como era de se esperar a distância entre os robôs não foi mantida, se tornando instável, pois não há nenhum tipo de controle agindo sobre o sistema.

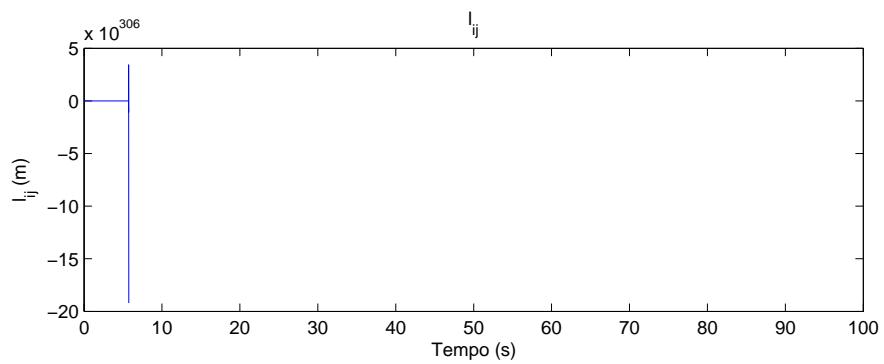


Figura 3.4: Distância mantida entre os robôs tanto para o caso sem mudança de liderança como para o caso com mudança de liderança.

- Orientação do robô  $\psi_{ij}$ :

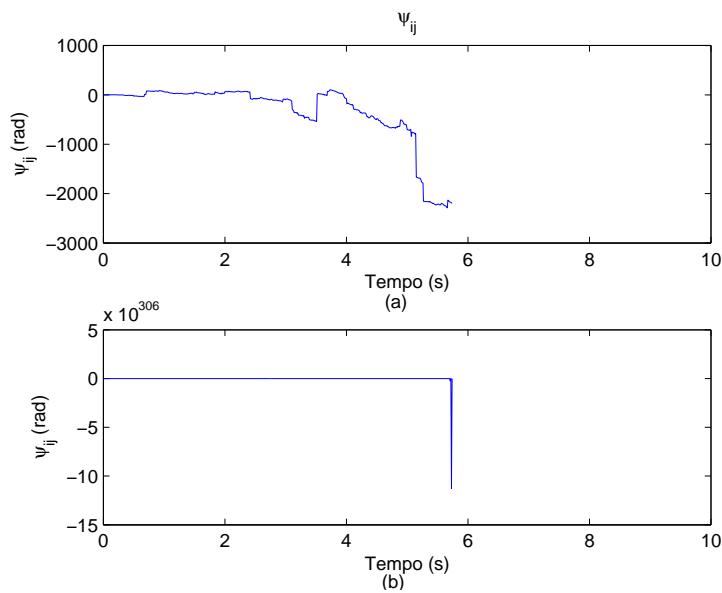


Figura 3.5: Orientação dos robôs, (a) sem mudança de liderança, (b) com mudança de liderança.

Novamente o sistema se tornou instável, agora com relação à saída  $\psi_{ij}$ , pelo mesmo motivo mencionado acima para a distância  $l_{ij}$  entre os robôs.

### 3.2 Usando as equações linearizadas

Nesta seção será usado na simulação as equações linearizadas do sistema que foram descritas em 2.22. Fazendo as devidas manipulações na equação anteriormente referida chega-se as seguintes expressões expandidas:

$$\dot{l}_{ij} = -K_1 l_{ij} + K_1 l_{ij}^d \quad (3.5)$$

$$\dot{\psi}_{ij} = -K_2 \psi_{ij} + K_2 \psi_{ij}^d \quad (3.6)$$

Da mesma forma feita na seção anterior, para que se possa utilizar as equações 3.5 e 3.6 na simulação em MATLAB é necessário que se faça a discretização dessas equações. Após as devidas manipulações de discretização chega-se nas seguintes expressões:

$$l_{ij(k+1)} = \left( -K_1 l_{ij(k)} + K_1 l_{ij}^d \right) t_k + l_{ij(k)} \quad (3.7)$$

$$\psi_{ij(k+1)} = \left( -K_2 \psi_{ij(k)} + K_2 \psi_{ij}^d \right) t_k + \psi_{ij(k)} \quad (3.8)$$

O programa para a avaliação do comportamento das saídas com a mudança de liderança, como descrito anteriormente é feito com um loop para a solução das equações em 3.7 e 3.8, onde a cada intervalo de tempo a variável  $\psi_{ij}$  é substituída pelo valor da variável  $\psi_{ji} = \pi - \psi_{ij}$ . Os resultados são apresentados nos gráficos a seguir, onde uma diferença importante em relação ao sistema não linearizado é notado. A independência da trajetória.

- Distância entre os robôs  $l_{ij}$ :

Verifica-se que a mudança de liderança não afeta a estabilidade da distância  $l_{ij}$ , ou seja, mesmo havendo a troca de líder a cada instante de tempo a distância entre os robôs é mantida no valor desejado.

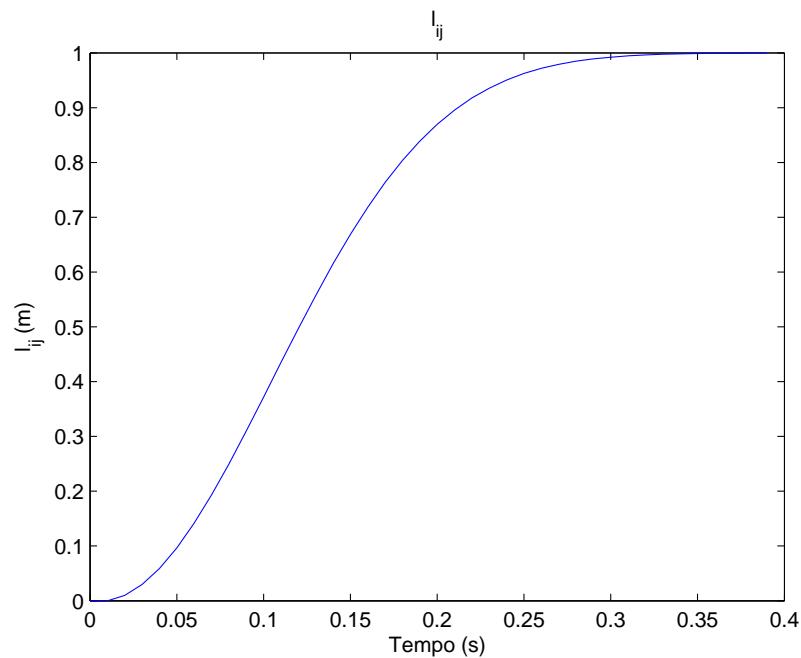


Figura 3.6: Distância entre os robôs com mudança de liderança

- Orientação do robô:

Para a saída  $\psi_{ij}$  percebe-se que a mudança de liderança também não afeta a estabilidade da formação, apesar do comportamento oscilatório, devido a troca de líder e consequentemente do ângulo a ser seguido.

Outro resultado obtido através dessa simulação é que, ao se variar gradualmente a orientação relativa  $\psi_{ij}$  desde zero até 180 graus, o robô seguidor irá descrever uma trajetória circular em torno do líder, sendo este o centro da circunferência, como mostra a figura a seguir:

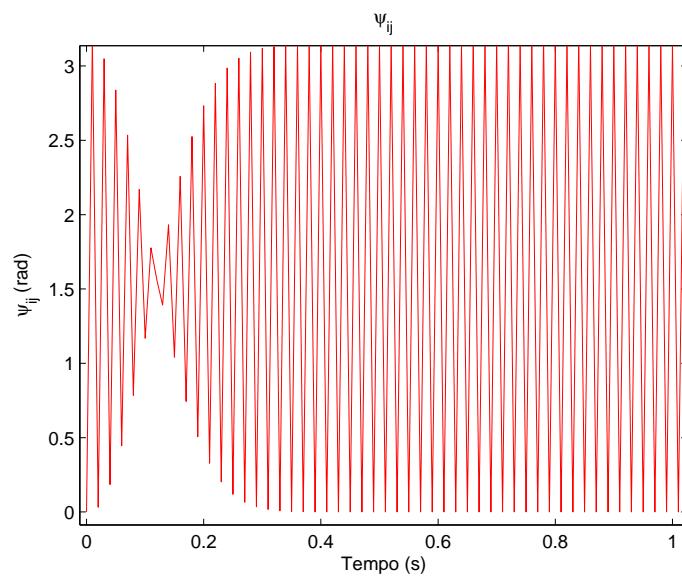


Figura 3.7: Orientação dos robôs com mudança de liderança

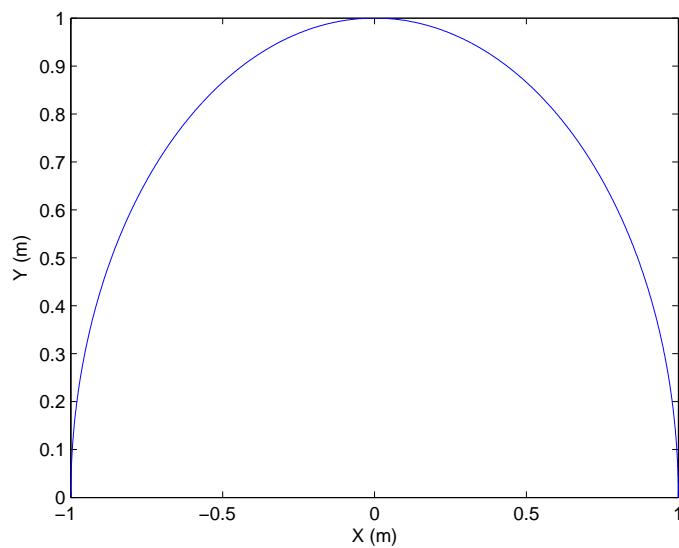


Figura 3.8: Trajetória do seguidor ao se variar a orientação relativa

## Capítulo 4

# Aplicação

Neste capítulo será mostrado a implementação do controle de formação de um grupo de robôs móveis. Para isso o conjunto de robôs é tratado como uma rede (Teoria dos Grafos) e seu controle modelado como tal, sendo a mudança de liderança tratada como um sistema linear sujeito a saltos Markovianos.

### 4.1 Teoria dos Grafos

**Definição:** Estruturas utilizadas para modelar problemas complexos, do ponto de vista computacional, nos quais existe bastante conhecimento matemático sobre suas propriedades e comportamento. Consiste de um conjunto finito de vértices e arestas (ou bordas). Graficamente, aparece representado por uma figura com nós ou vértices, significando os objetos, unidos por um traço denominado aresta configurando uma relação desejada. No entanto, quando as arestas são pares ordenados de vértices, tem-se um grafo orientado (ou dígrafo), neste caso denomina-se de arco a aresta direcionada. Portanto um dígrafo consiste de um conjunto finito de vértices  $\nu$  e um conjunto  $\varepsilon \subseteq V \times V$  (bordas direcionadas). Assume-se que um dígrafo não tem voltas, isto significa que para  $(x, y) \in \varepsilon$  implica  $x \neq y$ .

Um caminho (direcionado) em um dígrafo é uma seqüência finita de bordas  $(a_k, b_k)$   $k = 1, \dots, r$  tal que  $b_k = a_{k+1}$  para  $k = 1, \dots, r - 1$ . Um caminho com vértices distintos é chamado trajeto (direcionado).

Os vértices de um dígrafo possuem:

- Grau de entrada: número de arcos que chegam no vértice (in-degree);
- Grau de saída: número de arcos que partem do vértice (out-degree).

## Matriz Adjacência

Considere um dígrafo  $\Gamma$  com conjunto de vértices  $\nu = (i : i = 1, 2, \dots, N)$  e conjunto de bordas  $\varepsilon$ . A matriz de adjacência  $Q$  de  $\Gamma$  é dada por:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } (j, i) \in \varepsilon \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.1)$$

## Laplaciano

O Laplaciano direcionado de  $\Gamma$  é a matriz definida por:

$$L_\Gamma = D - Q \quad (4.2)$$

onde  $D$  é uma matriz não inversível denominada de matriz diagonal.

## Árvore enraizada

Uma árvore enraizada direcionada é um dígrafo  $T$  com as seguintes propriedades:

1.  $T$  não tem ciclos;
2. Existe um vértice  $v$  (a raiz) tal que há um trajeto direcionado de  $v$  a todos os outros vértices em  $T$ .

## 4.2 Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos (SLSM)

Atualmente existem várias técnicas em desenvolvimento para o tratamento de sistemas dinâmicos sujeitos a mudanças em suas estruturas. Dentre os vários tipos desses sistemas existem aqueles que sofrem alterações abruptas (saltos) em certos instantes. A solução mais comum para esses sistemas é a adoção de modelos múltiplos chaveados, onde se assume que o

sistema admite um número finito de modelos (denominados de modos de operação, sendo que a cada instante há a probabilidade de o sistema chavear de uma modo de operação para outro dependendo apenas do modo atual, ou seja, os saltos nos parâmetros ocorrem de acordo com as transições de uma cadeia de Markov subjacente, de forma que cada estado da cadeia representa um dos possíveis modelos. Neste contexto surgem os denominados sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos (SLSM)).

Esta classe de sistemas generaliza a conhecida classe de sistemas lineares determinísticos e tem sido considerada em diversas aplicações como em sistemas robóticos [9] e [10], em receptores térmicos solares [11] e em sistemas aeronáuticos [12].

### 4.3 Controle de SLSM baseado em Redes

Para entender o problema de alternância de liderança como um SLSM considere 2 robôs, sendo que a liderança pode mudar como descrito no Capítulo 3. Note que ao mudar a liderança entre os robôs essas mudanças são abruptas, tendo comportamentos distintos denominados de modos de operação denotados, segundo a Figura 3.1, por:

- $R_{iL}$ : quando o robô  $i$  é o líder;
- $R_{jL}$ : quando o robô  $j$  é o líder.

Neste caso tem-se, então, uma matriz de probabilidade de transição que expressa essas mudanças de liderança e é denotada por:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

onde cada elemento da matriz  $P$  representa a probabilidade do sistema se transferir de um modo de operação para outro. Note que a diagonal principal da matriz  $P$  representa a probabilidade do sistema se manter no modo de operação atual.

## Modelo

O modelo apresentado a seguir foi baseado nos trabalhos de [13], que considera o modelo estocástico mostrado abaixo.

$$\begin{bmatrix} x_{(k+1)} \\ z_{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\theta(k)} & B_{\theta(k)} \\ C_{\theta(k)} & D_{\theta(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{(k)} \\ d_{(k)} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

onde

- $x_{(k)}$  é o estado;
- $d_{(k)}$  é o vetor de distúrbio;
- As matrizes do estado são funções de uma cadeia de Markov de tempo discreto que assumem valores em um conjunto finito.

Existem diversas maneiras de se analisar a estabilidade desse tipo de sistema, sendo alguns resultados apresentados abaixo, considerando o ponto de equilíbrio  $d = 0$  e  $x = 0$ :

- Quadraticamente estável;
- Estocasticamente estável;
- Quadraticamente exponencialmente estável;
- Quase sempre estável.

Todos sob determinadas condições que não são o objetivo desse estudo.

## 4.4 Modelo da formação

Um dos principais objetivos do controle de formação de robôs móveis, baseado apenas em posição e velocidade é fazer com que os robôs móveis alcancem e mantenham posições e orientações pré-especificadas com relação a cada robô móvel da formação.

Para tal adota-se o seguinte modelo realimentado, baseado em cinemática para a formação:

$$\dot{x} = Ax + BFL(x - h) \quad (4.5)$$

$$z = L(x - h)$$

onde:

1.  $A = I_N \otimes A_{veh}$ , sendo que

$$A_{veh} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

2.  $B = I_N \otimes B_{veh}$ , sendo que

$$B_{veh} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

3.  $x$  é o vetor que descreve os estados de todos os robôs da formação, ou seja, as informações de posição e velocidade de cada um;

4.  $L = L_\Gamma \otimes I_{2n}$ , sendo  $L_\Gamma$  definido em (4.2);

5.  $h$  é o conjunto de informações da formação (localização de cada membro dentro da formação);

6.  $F = I_N \otimes F_{veh}$ , sendo uma matriz de realimentação para estabilizar o sistema da formação.

tendo  $F_{veh}$  a seguinte forma:

$$F_{veh} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_1 & f_2 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

onde  $f_1 < 0$  e  $f_2 < 0$ .

Ou seja, o sistema converge para a formação se e somente se zero tem multiplicidade um como autovalor do Laplaciano do grafo direcionado.

7.  $z$  é a saída do sistema.

## 4.5 Modelo de alternância de Liderança

### Caracterização do líder

O líder de uma formação é caracterizado pelo fato de não receber nenhuma informação de outro robô móvel, ou seja, os outros robôs são forçados a alterar suas posições em resposta ao movimento desse robô denominado de líder. Para que haja este líder o dígrafo de comunicação tem que possuir uma árvore enraizada direcionada definida na Seção 4.1.

### Modelo

Para a simulação do sistema de alternância de liderança será considerado 6 robôs, cuja formação é dada por:

- $h_1 = [6, 0];$
- $h_2 = [3, 2];$
- $h_3 = [3, -2];$
- $h_4 = [0, 4];$
- $h_5 = [0, 0];$
- $h_6 = [0, -4];$

A representação da formação dos robôs é mostrada na Figura 4.1:

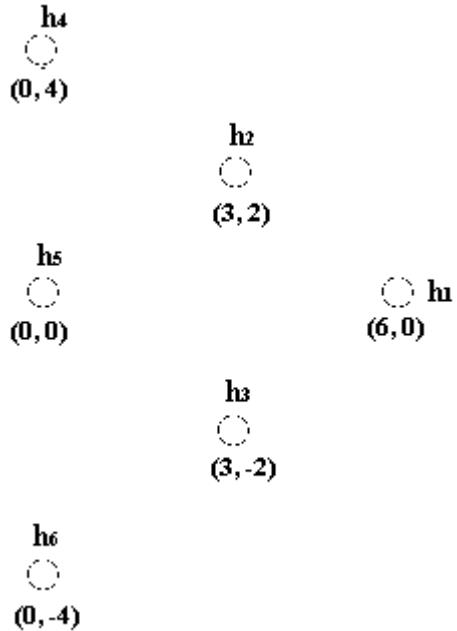


Figura 4.1: Representação da formação dos robôs.

A denominação dos robôs é dada conforme sua posição na formação, ou seja, o Líder 1 será o robô que está na posição  $h_1$ . E a matriz de realimentação  $F_{veh}$  inicialmente utilizada para todos os robôs da formação é dada por:

$$F_{veh} = \begin{bmatrix} -100 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & -100 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Para fazer a simulação de alternância de liderança é necessário a definição de um dígrafo para cada possibilidade de alternância de liderança. No caso deste trabalho montou-se 6 digrafos, um para cada robô sendo considerado como líder. Essas configurações são mostradas a seguir:

### Líder 1

O dígrafo de comunicação, quando o robô 1 esta na liderança é mostrado na Figura 4.2, onde o círculo em vermelho representa o robô líder.

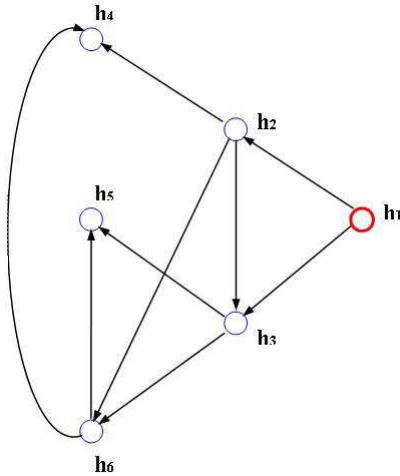


Figura 4.2: Representação do dígrafo de comunicação quando o robô 1 é o líder.

Para este dígrafo tem-se que as matrizes de adjacencia ( $Q$ ) e Diagonal são dadas em (4.10) e (4.11)

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Nota-se que a primeira linha das matrizem em (4.10) e em (4.11) são nulas, caracterizando o robô 1 como líder e a matriz D como não inversível. Logo o Laplaciano direcionado deste dígrafo

é mostrado em 4.12.

$$L_{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Os autovalores do Laplaciano direcionado em (4.12) são  $\lambda = [2; 2; 2; 2; 1; 0]$ .

## Líder 2

Para o robô 2 como líder o dígrafo é mostrado na Figura 4.3.

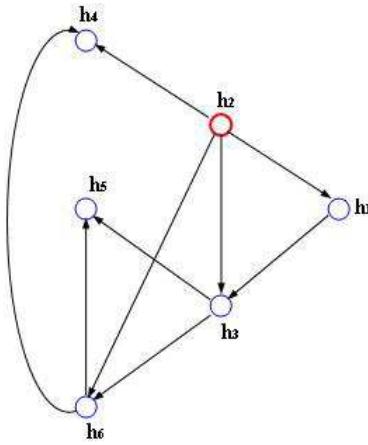


Figura 4.3: Representação do dígrafo de comunicação quando o robô 2 é o líder.

As matrizes de Adjacência e Diagonal para este caso são mostradas nas equações (4.13) e

(4.14).

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Note que agora é a segunda linha das matrizes é que são nulas, indicando que o robô 2 é o líder. Com isso tem-se o Laplaciano direcionado mostrado em (4.15).

$$L_{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Os autovalores do Laplaciano direcionado em (4.15) são  $\lambda = [1; 2; 2; 2; 1; 0]$

### Líder 3

O dígrafo para o robô 3 como líder é mostrado na Figura 4.4.

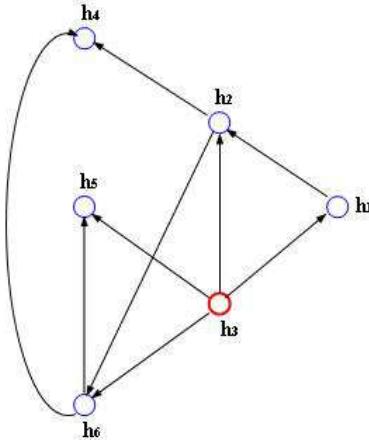


Figura 4.4: Representação do dígrafo de comunicação quando o robô 3 é o líder.

As matrizes de Adjacência e Diagonal para este caso são mostradas nas equações (4.16) e (4.17).

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Verifica-se que a terceira linha das matrizes é que são nulas, indicando que o robô 3 é o líder.

Com isso tem-se o Laplaciano direcionado mostrado em (4.18).

$$L_{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Os autovalores do Laplaciano direcionado em (4.18) são  $\lambda = [2; 2; 2; 2; 1; 0]$ .

#### Líder 4

O dígrafo para o robô 4 como líder é mostrado na Figura 4.5.

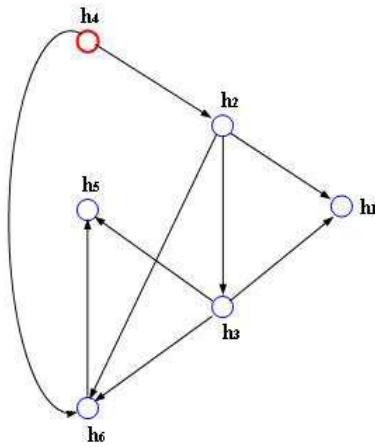


Figura 4.5: Representação do dígrafo de comunicação quando o robô 4 é o líder.

As matrizes de Adjacência e Diagonal para este caso são mostradas nas equações (4.19) e

(4.20).

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Verifica-se que a quarta linha das matrizes é que são nulas, indicando que o robô 4 é o líder. Com isso tem-se o Laplaciano direcionado mostrado em (4.21).

$$L_{\Gamma} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Os autovalores do Laplaciano direcionado em 4.21 são  $\lambda = [2; 2; 2; 1; 1; 0]$

## Líder 5

O dígrafo para o robô 5 como líder é mostrado na Figura 4.6.

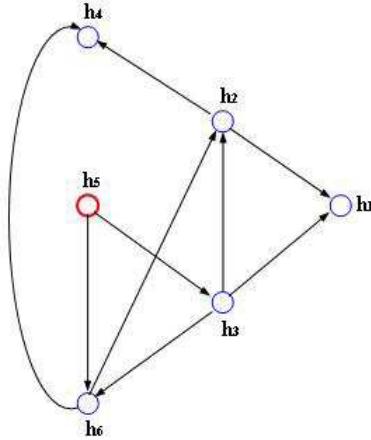


Figura 4.6: Representação do dígrafo de comunicação quando o robô 5 é o líder.

As matrizes de Adjacência e Diagonal para este caso são mostradas nas equações (4.22) e (4.23).

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Nota-se que a quinta linha das matrizes é que são nulas, indicando que o robô 5 é o líder.

Com isso tem-se o Laplaciano direcionado mostrado em (4.24).

$$L_\Gamma = \left[ \begin{array}{cccccc} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right] \quad (4.24)$$

Os autovalores do Laplaciano direcionado em (4.24) são  $\lambda = [2; 2; 2; 2; 1; 0]$ .

## Líder 6

O dígrafo para o robô 6 como líder é mostrado na Figura 4.7.

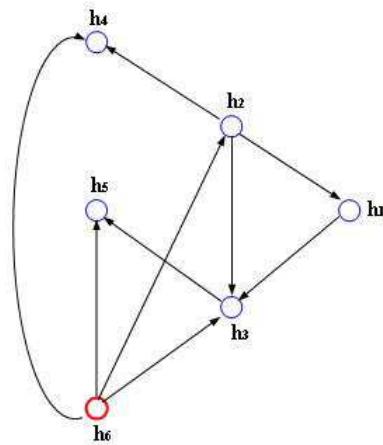


Figura 4.7: Representação do dígrafo de comunicação quando o robô 6 é o líder.

As matrizes de Adjacência e Diagonal para este caso são mostradas nas equações (4.25) e

(4.26).

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Verifica-se que a sexta linha das matrizes são nulas, indicando que o robô 6 é o líder. Com isso tem-se o Laplaciano direcionado mostrado em (4.27).

$$L_{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Os autovalores do Laplaciano direcionado em (4.27) são  $\lambda = [2; 2; 2.2328 + 0.7926i; 2.2328 - 0.7926i; 0.5344; 0]$ .

Para a simulação foi feito um programa em MATLAB, onde foram encontrados os autovalores indicados acima. Ao rodar o programa percebeu-se a convergência do sistema para a formação desejada, conforme mostra o gráfico mostrado na Figura 4.8, onde a cada mudança de liderança uma imagem da formação é congelada mostrando a posição passada da liderança e a atual conforme legenda mostrado na Figura 4.9.

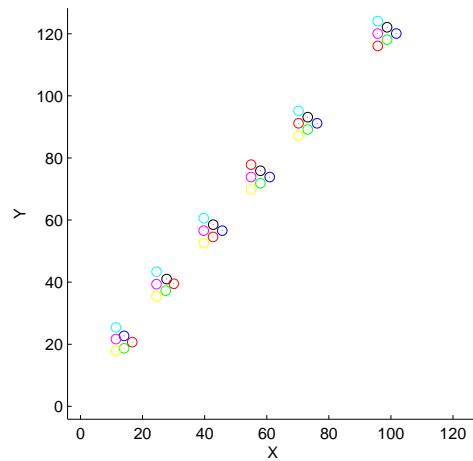


Figura 4.8: Gráfico de trajetória da formação mostrando as transições de liderança.

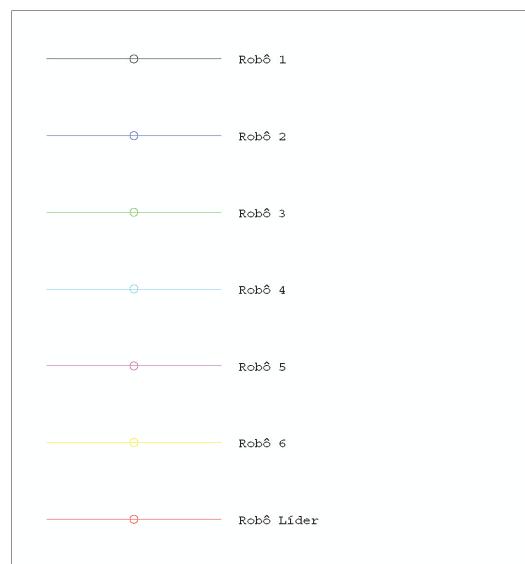


Figura 4.9: Legenda dos robôs nas animação mostrada em 4.8.



## Capítulo 5

# RoboLasi

Os robôs que serão utilizados para implementação do controle de formação são idênticos, sendo uma foto mostrada na Figura 5.1.



Figura 5.1: Foto de um dos robôs que serão utilizados na implementação do controle de formação.

Esses robôs são montados sobre uma plataforma de alumínio, que possuí 2 conjuntos de eixos juntamente com um servomotor e um encoder em cada eixo. A plataforma de alumínio também suporta uma placa eletrônica responsável pelo controle do robô.

A placa controladora é constituída por:

- Um microcontrolador;
- Um módulo de comunicação;

- 20 portas de entrada e saída;
- 8 posições para a instalação de sensores infravermelhos;
- 4 LEDs;
- Interface de programação JTAG, o que permite a gravação de programas no microcontrolador in-circuit.

sendo uma foto da placă mostrada na Figura 5.2.



Figura 5.2: Imagem da placa controladora utilizada nos robôs.

O padrão de comunicação dos robôs é o padrão ZigBee. Este padrão foi desenvolvido recentemente para aplicações em sistemas de sensoriamento e automação. Ele foi criado para suprir os requisitos de baixa latência e baixo consumo de energia, além de visar a uniformização das redes pessoais (PAN) e das redes domésticas (HAN) de última geração, garantindo a confiabilidade, a segurança na comunicação e a maximização do tempo de vida útil das baterias.

## Capítulo 6

### Conclusão

Este trabalho de conclusão de curso mostra que durante esse tempo foram feitos estudos sobre a cinemática de robôs móveis como mostrado no primeiro capítulo. Após esse estudo inicial começou-se, então, a análise do comportamento em relação a cinemática de um conjunto de robôs móveis através de uma simples formação em que um robô segue o outro mantendo uma determinada distância formando um sistema com dois elementos (capítulo dois), que como mostrado é estável. Através de simulações deste sistema verificou-se que as saídas respondem da mesma maneira quando variamos as constantes de ganho, ficando estáveis com os valores das constantes variando de 0 a infinito, sendo que as mudanças ocorridas devido a variação dessas constantes se manifestam no tempo de subida de cada saída quando se observa a resposta delas ao degrau.

No Capítulo 3 foi dado início ao estudo de um problema que é importante para a área de robôs móveis que é a troca de liderança. Como visto acima a troca de liderança pode se dar através de várias maneiras. O comportamento das saídas de interesse foi analisado, por simplicidade, com a formação básica líder-seguidor, onde descobriu-se que, apesar da mudança de liderança a distância mantida entre os robôs e a orientação entre eles não desestabilizam, ou seja, a formação entre os robôs é mantida. Percebeu-se, também que ao variar lentamente essa orientação relativa entre os robôs, o seguidor descreve uma trajetória circular em torno do líder, abrindo a possibilidade de troca de liderança de forma não abrupta, fazendo com que o seguidor chegue até a orientação relativa do líder e assuma a liderança sem perder a estabilidade.

Já no quarto capítulo foi realizado um estudo sobre a aplicação de um controle de formação

com alternância de liderança de 6 robôs realizado através da teoria dos grafos em conjunto com o modelo de sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos. Nesse controle a formação dos robôs é tratada como uma rede de comunicação, sendo que o modelo considera um dígrafo (rede) para cada um dos modos de operação, ou seja, considera-se um dígrafo diferente para cada líder diferente.

No último capítulo é mostrada a estrutura dos robôs onde será implementado o controle de formação. O principal destaque é o sistema de comunicação denominado ZigBee, que irá permitir comunicação sem fio entre os robôs e o computador sem interferência significativa de ruídos externos durante a comunicação.

# Referências Bibliográficas

- [1] H. Kruppa D. Fox, W. Burgard and S. Thrun. “A probabilistic approach to collaborative multi-robot localization”. *Auton. Robots*, pages 325–344, 2000.
- [2] G. Whelan J.S. Jennings and W.F. Evans. “Cooperative search and rescue with a team of mobile robots”. *Proc. IEEE Int. Conf. Advanced Robotics*, pages 193–200, 1997.
- [3] B. Donald D. Rus and J. Jennings. “Moving furniture with teams of autonomous robots”. *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intelligent Robots and Systems*, pages 235–242, 1995.
- [4] M. Nilsson M. Mataric and K. Simsarian. “Cooperative multi-robot box pushing”. *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intelligent Robots and Systems*, pages 556–561, 1995.
- [5] D. Stilwell and J. Bay. “Toward the development of a material transport system using swarms of ant-like robots”. *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pages 766–771, 1993.
- [6] T. Sugar and V. Kumar. “Control and coordination of multiple mobile robots in manipulation and material handling tasks”. *Experimental Robotics VI: Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 250:15–24, 2000.
- [7] J.J.E. Sloutine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1st edition, 1991.
- [8] A. K. Das J. Spletzer R. Fierro V. Kumar, J. P. Ostrowski and C. J. Taylor. “A vision-based formation control framework”. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18(5):813–825, 2002.
- [9] G. N. Saridis. “Intelligent robotic control”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28:547–557, 1983.

- [10] A. A. G. Siqueira and M. H. Terra. “Non linear and markovian  $H_\infty$  controls of underactuated manipulators”. *IEEE Transactions on Control System Technology*, 12(6):811–826, 2004.
- [11] D. D. Swarder and R. O. Rogers. “An LQ-solution to a control problem associated with a solar thermal central receiver”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28(10):971–978, 1983.
- [12] K. P. Dunn C. S. Greene W. H. Lee N. R. Sandeell M. Athans, D. Castonon and A. S. Willsky. “The stochastic control of the F-8C aircraft using a multiple model adaptative control (MMAC) method - Part I: Equilibrium flight”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22:768–780, 1977.
- [13] P. Seiler and R. Sengupta. “An  $H_\infty$  aproach to networked control”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(3):356–364, 2005.