

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Física de São Carlos

Trabalho de Conclusão de Curso

Uma Formulação da Mecânica Quântica na Geometria de Kähler

Renato da Silva Alves de Oliveira

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Bacharel em Física com habilitação Teórico-Experimental. Orientador: Prof. Fernando Manfio - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

São Carlos - SP
2025

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Resumo

Este trabalho apresenta uma formulação geométrica da mecânica quântica baseada na estrutura de Kähler do espaço projetivo de Hilbert. Partindo dos fundamentos da geometria riemanniana e simplética, mostra-se que o espaço de estados quânticos pode ser interpretado como uma variedade de Kähler, na qual a métrica, a forma simplética e a estrutura complexa coexistem de modo compatível. Nessa perspectiva, a equação de Schrödinger é reinterpretada como um fluxo hamiltoniano no espaço projetivo, e as probabilidades de transição entre estados são descritas em termos de distâncias geodésicas. Além disso, o postulado de colapso e o princípio da incerteza de Heisenberg emergem naturalmente como propriedades diferenciais e métricas desse espaço. Essa abordagem unifica a mecânica quântica e a geometria diferencial em um mesmo formalismo, evidenciando que a quantização não é uma imposição externa à física clássica, mas o desdobramento natural de uma geometria intrinsecamente complexa e simplética. O formalismo desenvolvido oferece ainda uma base conceitual sólida para extensões em teorias de quantização geométrica, coerente e em campos quânticos sobre variedades curvas.

Palavras-chave: Geometria Diferencial. Geometria Simplética. Geometria de Kähler. Espaço de Hilbert. Mecânica Quântica.

1 Introdução

Derivada do grego *geo-metría*, nasceu como tentativa de traduzir o mundo em medida, proporção e relação, proporcionando uma linguagem em que a ordem da natureza se tornava compreensível ao pensamento. Seguindo esse legado, a geometria diferencial constitui o alicerce conceitual sobre o qual repousa grande parte da física contemporânea. Desde a formulação da relatividade geral, tornou-se claro que as leis fundamentais da natureza podem ser expressas como propriedades geométricas de espaços dotados de estruturas localmente lineares e independentes de coordenadas. Essa mesma linguagem revelou-se indispensável nas abordagens modernas da teoria quântica de campos, sugerindo que a geometrização não é apenas um recurso matemático, mas uma tendência profunda na formulação da física.

Neste trabalho, propõe-se aplicar tal perspectiva à mecânica quântica, reconstruindo-a a partir da geometria de Kähler. O espaço projetivo de Hilbert é então interpretado como uma variedade de Kähler, onde a métrica, a forma simplética e a estrutura complexa se articulam em uma tripla compatível capaz de reproduzir todo o comportamento quântico. Nesse cenário, a evolução temporal surge como um fluxo hamiltoniano, as probabilidades são expressas em termos de distâncias geodésicas e o postulado de colapso adquire formulação puramente geométrica. Essa visão não apenas unifica os aspectos algébricos e analíticos da teoria, mas revela o espaço de estados como um objeto matemático dotado de significado físico intrínseco, ou ainda, um domínio em que a mecânica quântica deixa de ser vista como uma abstração formal e passa a integrar, de modo natural, o projeto mais amplo de compreender a física como expressão da geometria.

2 Geometria Riemanniana

A geometria riemanniana, usufruindo da definição de métrica, realiza-se ao importar coerentemente a ideia de um produto interno em $\mathbb{R}^n$ para todos os espaços vetoriais tangentes, o que torna possível generalizar a medição de normas e ângulos de vetores, possibilitando a emergência de objetos matemáticos indispensáveis.

Definição 2.1: Em uma variedade suave M , um tensor métrico $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ é um campo tensorial de rank $(0,2)$ que obedece às seguintes propriedades:

- **Simétrico:** Dados dois campos vetoriais $U, V \in \mathfrak{X}(M)$, vale que $g(U, V) = g(V, U)$;
- **Não Degenerado:** Sendo $g^p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ a restrição da métrica em $p \in M$, se $g^p(w, u) = 0$ para todo $u \in T_p M$, temos obrigatoriamente que $w = 0$;
- **Positivamente Definido:** Para todo $p \in M$ e $u \in T_p M$ não nulo, $g^p(u, u) > 0$.

Definição 2.2: Uma variedade riemanniana (M, g) consiste em uma variedade suave M e um tensor métrico g sobre ela definido.

Definição 2.3: Sejam (M, g_M) e (N, g_N) duas variedades riemannianas, um difeomorfismo $\phi : M \rightarrow N$ é dito uma isometria se preserva a métrica, isto é $\phi^*(g_N) = g_M$. Se existe uma isometria entre duas variedades, elas são ditas isométricas.

2.1 Conexão e Geodésicas

Ao estabelecer derivações de campos vetoriais na geometria riemanniana, a métrica desempenha um papel fundamental, permitindo a definição de um operador de derivação único a ela associado.

Definição 2.4: Uma conexão D sobre uma variedade suave M é uma função $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ que obedece:

- **$\mathfrak{F}(M)$ -linearidade:** $D_V W$ é $\mathfrak{F}(M)$ -linear no argumento V ;
- **$\mathbb{R}$ -linearidade:** $D_V W$ é $\mathbb{R}$ -linear no argumento W ;
- **Propriedade de Leibniz:** $D_V(fW) = V(f)W + fD_V W$ para $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Chamamos $D_V W$ de derivada covariante de W com respeito a V para a conexão D .

Teorema 2.5: Em uma variedade riemanniana (M, g) , existe uma única conexão ∇ chamada de conexão de Levi-Civita que cumpre as seguintes propriedades:

- **Livre de torção:** O colchete de Lie segue $[V, W] = \nabla_U V - \nabla_V W$, $\forall U, V \in \mathfrak{X}(M)$;
- **Compatível com a Métrica:** $\nabla_V g = 0$ para todo $V \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 2.6: Em um sistema de coordenadas $(x^1, \dots, x^n) : \mathcal{U} \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ sobre uma vizinhança de uma variedade riemanniana M , indicamos por símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k as funções que obedecem a:

$$\nabla_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Proposição 2.7: Em uma variedade riemanniana (M, g) , sobre um sistema de coordenadas $(x^1, \dots, x^n) : \mathcal{U} \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$, dado $V \in \mathfrak{X}(M)$, podemos expressar a derivada covariante e os símbolos de Christoffel respectivamente por:

$$\nabla_{\partial_i}(\sum_j V^j \partial_j) = \sum_k \left\{ \frac{\partial V^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k V^j \right\} \partial_k, \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left\{ \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right\}.$$

Definição 2.8: Uma geodésica em (M, g) é uma curva suave $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ cuja derivada covariante ao longo de si mesma se anula, isto é, $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$.

Definição 2.9: Dada uma geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ entre pontos $p, q \in M$, sua distância é definida como:

$$\sigma(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt.$$

Definição 2.10: Se $\Gamma = \{\gamma \in C^\infty([0, 1], M) \mid \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$ é o conjunto de todas as geodésicas entre $p, q \in (M)$, a distância geodésica mínima entre esses pontos é:

$$\sigma(p, q) := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sigma(\gamma)$$

2.2 Campos de Killing

Finalizamos esta seção abordando um gênero específico de campos vetoriais, os quais se demonstrarão úteis no formalismo geométrico da mecânica quântica.

Proposição 2.11: Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ e um tensor covariante de segunda ordem $A \in \mathfrak{T}_2^0$, então:

$$L_X A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\psi_t^*(A) - A]$$

Sendo L_X a derivada de Lie, ψ_t o fluxo e ψ_t^* seu pushforward associados ao campo X .

Definição 2.12: Em uma variedade riemanniana M , um campo de Killing é um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ que obedece a $L_X g = 0$.

Proposição 2.13: As seguintes colocações são equivalentes:

- X é um campo de Killing, ou seja, $L_X g = 0$
- $X \langle V, W \rangle = \langle [X, V], W \rangle + \langle V, [X, W] \rangle, \quad \forall V, W \in \mathfrak{X}(M)$
- $\langle \nabla_V X, W \rangle + \langle \nabla_W X, V \rangle = 0, \quad \forall V, W \in \mathfrak{X}(M)$

Proposição 2.14: Um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é de Killing se e somente se os estágios ψ_t de todos os seus fluxos locais são isometrias.

3 Geometria Simplética

A teoria simplética é a linguagem natural para sistematizar geometricamente a mecânica clássica. Sob essa perspectiva, o formalismo hamiltoniano, outrora o cenário usual para a elaboração de problemas mecânicos, cede lugar a uma abstração ainda mais elegante, isto é, a associação, por meio da forma simplética, de funções suaves com campos vetoriais suaves, os quais podem vir a descrever a evolução de sistemas físicos.

Definição 3.1: Em um espaço vetorial m -dimensional real V , chamamos $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ de aplicação simplética se é bilinear, antissimétrica, ou seja, $\Omega(u, v) = -\Omega(v, u)$ para todos $u, v \in V$, e não degenerada, em outras palavras, $\Omega(u, v) = 0, \forall v \in V$ leva a $u = 0$.

Proposição 3.2: Podemos sempre encontrar uma base $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ dita simplética para (Ω, V) de modo que $\Omega(e_i, e_j) = 0 = \Omega(f_i, f_j)$ e $\Omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$. Nessa base, Ω pode ser reapresentada matricialmente por:

$$\Omega(u, v) = \begin{bmatrix} -u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \text{Id}_n \\ -\text{Id}_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ v \\ | \end{bmatrix}$$

Portanto, temos que $\dim(V) = 2n$. Assim, conclui-se que espaços simpléticos têm sempre dimensão par como fruto da aplicação simplética ser não degenerada.

Definição 3.3: Em uma variedade suave M , uma 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ é simplética se a restrição $\omega|_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação simplética para todo $p \in M$ e se $d\omega = 0$.

Definição 3.4: Um conjunto (M, ω) é chamado de variedade simplética. Em particular, pelo visto anteriormente, $\dim(M) = \dim(T_p M)$ é par.

Definição 3.5: Sejam (M, ω) e (M', ω') duas variedades simpléticas $2n$ -dimensionais e $\varphi : M \rightarrow M'$ um difeomorfismo, dizemos que φ é um simpletomorfismo se $\varphi^* \omega' = \omega$.

3.1 Fibrado Cotangente

O fibrado cotangente desempenha um papel central na geometria simplética, pois, pelo o teorema de Darboux, constitui o protótipo local de toda variedade simplética. Através dele, é possível formalizar a estrutura diferencial dos espaços de fases da mecânica clássica, onde coordenadas de posição e momento emergem de modo natural.

Definição 3.6: No fibrado cotangente T^*M , dada uma carta $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n) : T^*U \subseteq T^*M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, estabelecemos a seguinte 2-forma:

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i.$$

Por desenvolvimentos análogos aos anteriores, vemos que ω , denominada forma simplética canônica, provê ao fibrado uma estrutura simplética.

Definição 3.7: No fibrado cotangente T^*M , dada uma carta $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n) : T^*U \subseteq T^*M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, definimos a 1-forma de Liouville ou tautológica como $\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i$.

Teorema 3.1 (Darboux) Dada uma variedade simplética $2n$ -dimensional (M, ω) e um ponto $p \in M$, existe uma carta de Darboux $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ com $p \in U$ tal que:

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i.$$

Portanto, notamos que toda variedade simplética é localmente isomorfa ao fibrado cotangente dotado da forma simplética canônica (T^*M, ω) que estabelecemos anteriormente.

3.2 Campos Vetoriais Hamiltonianos

Veremos agora como a estrutura simplética associa naturalmente funções suaves sobre uma variedade a campos vetoriais, denominados hamiltonianos. Tais campos desempenham um papel central na formulação geométrica da mecânica clássica.

Definição 3.8: Em uma variedade simplética (M, ω) , dada uma função $H \in \mathfrak{F}(M)$, estabelecemos o campo vetorial hamiltoniano $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ como o aquele que satisfaz a:

$$\iota_{X_H} \omega = dH$$

A existência e unicidade de X_H decorrem diretamente da não degenerescência de ω . Desse modo, a aplicação H é muitas vezes denominada energia ou hamiltoniana associada a X_H .

Proposição 3.9: Sendo (M, ω) uma variedade simplética e X_H um campo hamiltoniano, o fluxo ρ_t de X_H preserva a forma simplética, isto é, $\rho_t^* \omega = \omega$ para todo t .

Exemplo 3.10: No fibrado cotangente (T^*M, ω) , com coordenadas globais dadas por $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ tais que $\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$, se $H \in \mathfrak{F}(T^*M)$ é uma função hamiltoniana, temos que o campo associado X_H é definido por $\iota_{X_H}\omega = dH$. Decompondo X_H nas coordenadas (q_i, p_i) , escrevemos:

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left(a_i \frac{\partial}{\partial q_i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right),$$

Onde a_i e b_i são funções a serem determinadas. Assim, aplicando a contração, temos:

$$\iota_{X_H}\omega = \sum_{i=1}^n (a_i dp_i - b_i dq_i) = dH = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i.$$

Ou seja $a_i = \partial H / \partial p_i$ e $b_i = -\partial H / \partial q_i$. Portanto, o campo hamiltoniano assume a forma:

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right),$$

E as ditas equações de Hamilton correspondentes são:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Desse modo, vemos que as equações que caracterizam o formalismo hamiltoniano da mecânica clássica surgem naturalmente da estrutura simplética (T^*M, ω) , mostrando que a dinâmica do sistema é inteiramente determinada pela forma ω e pela Hamiltoniana H .

3.3 Colchete de Poisson

Uma das estruturas mais relevantes associadas à geometria simplética é o colchete de Poisson, que traduz a interação entre funções suaves em uma variedade simplética através da ação dos respectivos campos hamiltonianos.

Definição 3.11: Em uma variedade simplética (M, ω) , dados os campos hamiltonianos $X_F, X_G \in \mathfrak{X}(M)$ associados às funções suaves $F, G \in \mathfrak{F}(M)$, define-se o seu colchete de Poisson como:

$$\{F, G\} = \omega(X_F, X_G).$$

Proposição 3.12: Para quaisquer $F, G \in \mathfrak{F}(M)$, temos que $\{F, G\} = X_G(F) = -X_F(G)$.

Proposição 3.13: Em uma variedade simplética (M, ω) , o colchete de Poisson estabelece em $\mathfrak{F}(M)$ uma estrutura de álgebra de Lie, isto é, satisfaz:

- **(Antissimetria)** $\{F, G\} = -\{G, F\}$;
- **(Regra de Leibniz)** $\{F, GH\} = \{F, G\}H + G\{F, H\}$;
- **(Identidade de Jacobi)** $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$.

Exemplo 3.14: No espaço simplético canônico $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, com $\omega_0 = \sum_i dq_i \wedge dp_i$, temos:

$$X_F = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Logo, o colchete de Poisson assume a forma explícita e já conhecida:

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right).$$

4 Geometria de Kähler

Nesta seção introduziremos o conceito de estrutura complexa e sua compatibilidade com formas simpléticas e métricas riemannianas, culminando na definição de uma variedade de Kähler. As construções aqui apresentadas formam o elo entre a geometria simplética e o formalismo geométrico da mecânica quântica.

4.1 Estruturas Complexas

Como será visto, certos operadores lineares permitem dotar espaços vetoriais reais das mesmas estruturas que caracterizam um espaço vetorial complexo, sendo esta ideia fundamental para a geometria quase complexa e suas aplicações em variedades.

Definição 4.1: Seja V um espaço vetorial real de dimensão $2n$. Uma estrutura complexa em V é uma aplicação linear $J : V \rightarrow V$ tal que $J^2 = -\text{Id}$.

Proposição 4.2: Dada uma base $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ para V , estabelecemos um operador $J : V \rightarrow V$ por meio de:

$$J(e_i) = f_i, \quad J(f_i) = -e_i,$$

Para todo $i = 1, \dots, n$. Desse modo, (V, J) é isomorfo ao espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$ pela identificação $z_i = e_i + if_i$.

Definição 4.3: Em M uma variedade suave, uma estrutura quase complexa é um campo tensorial $J \in \mathfrak{T}_1^1 \cong \text{End}(TM)$ tal que, $\forall p \in M$, $J|_p : T_p M \rightarrow T_p M$ satisfaz:

$$J|_p^2 = -\text{Id}_{T_p M}.$$

Desse modo, o par (M, J) é chamado de variedade quase-complexa.

Definição 4.4: Se (M, J) é uma variedade quase complexa e $[\cdot, \cdot]$ é o colchete de Lie usual, definimos o tensor de Nijenhuis N_J pela expressão:

$$N_J(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Definição 4.5: Uma estrutura quase complexa J é dita integrável se $N_J = 0$.

4.2 Variedades Complexas

Toda variedade complexa induz naturalmente uma estrutura quase complexa canônica. Por outro lado, apenas quando o tensor de Nijenhuis se anula, uma variedade quase complexa permite a introdução de coordenadas holomorfas locais, elevando-a ao status de complexa. Portanto, o estudo das condições de integrabilidade revela o ponto exato em que a geometria quase complexa se torna genuinamente complexa.

Definição 4.6: Uma variedade complexa M com dimensão complexa n é uma variedade suave real $2n$ -dimensional munida de um atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, no qual cada carta $\varphi_\alpha : U_\alpha \subseteq M \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n$ é um difeomorfismo suave sobre sua imagem e as funções de mudanças de coordenadas são biholomorfas. Em outras palavras, o diagrama a seguir

comuta, sendo $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ holomorfa com inversa holomorfa:

$$\begin{array}{ccc}
 & U_\alpha \cap U_\beta & \\
 \varphi_\alpha \swarrow & & \searrow \varphi_\beta \\
 \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) & \xrightarrow{\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}} & \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)
 \end{array}$$

Proposição 4.7: Toda variedades complexa tem estrutura quase complexa canônica.

Teorema 4.8: (Newlander-Nirenberg, 1957) Uma variedade quase complexa (M, J) é também uma variedade complexa se e somente se sua estrutura quase complexa J é integrável, ou seja, $\mathcal{N}_J = 0$.

4.3 Triplas Compatíveis

Avançamos agora para apresentar a compatibilidade entre estruturas complexas, métricas riemannianas e formas simpléticas, começando pelo caso vetorial, mais simples, e estendendo em seguida essas ideias ao contexto mais geral das variedades.

Definição 4.9: Em um espaço vetorial simplético (V, Ω) , uma estrutura complexa J é dita compatível com Ω se podemos estabelecer um mapa $G : V \rightarrow V$ simétrico, positivamente definido e não degenerado por meio de $G(u, v) := \Omega(u, Jv)$ para todos $u, v \in V$.

Definição 4.10: Em uma variedade simplética (M, ω) , uma estrutura quase complexa J é dita ω -compatível se $g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g_p(u, v) = \omega_p(u, Jv)$, $\forall u, v \in T_p M$, é um campo tensorial métrico. Assim sendo, (ω, g, J) é chamada de tripla compatível.

Proposição 4.11: Se (M, ω) é uma variedade simplética e g uma métrica riemanniana, então existe um estrutura quase-complexa J que é ω -compatível.

Proposição 4.12: Seja (ω, J, g) uma tripla compatível, se $\tilde{g}(u) = g(u, \cdot)$ e $\tilde{\omega}(u) = \omega(u, \cdot)$ são os isomorfismos naturais induzidos entre o $T_p M$ e $T_p^* M$, temos que:

$$\omega(u, v) = g(Ju, v), \quad J(u) = \tilde{g}^{-1}(\tilde{\omega}(u)) \quad \text{para } u, v \in T_p M$$

Exemplo 4.13: Dado $\mathbb{R}^{2n}$ com coordenadas globais $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ e estruturas euclidianas naturais $g_0 = \sum dx^i \otimes dx^i + \sum dy^i \otimes dy^i$ e $\omega_0 = \sum dx^i \wedge dy^i$, podemos definir um operador linear J_0 em $T_p \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{R}^{2n}$ tal que:

$$J_0 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad J_0 \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Assim, temos que $J_0^2 = -\text{Id}$ e, pela identificação $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ via $z_i = x_i + iy_i$, o operador J_0 torna $(\mathbb{R}^{2n}, J_0)$ em uma variedade quase complexa. Além disso, não é difícil observar computacionalmente que (ω_0, g_0, J_0) são uma tripla compatível, visto que a seguinte relação é válida:

$$g_0(u, v) = \omega_0(u, J_0(v)), \quad \forall u, v \in T_p \mathbb{R}^{2n}$$

4.4 Variedades de Kähler

As variedades de Kähler representam o encontro natural das estruturas complexas, métricas e simpléticas pela ideia de compatibilidade, consolidando, desse modo, o palco que utilizaremos na formalização geométrica da mecânica quântica.

Definição 4.14: Uma variedade de Kähler é uma variedade simplética (M, ω) munida de uma estrutura quase complexa integrável J que é ω -compatível, ou seja, $g(\cdot, \cdot) := \omega(\cdot, J\cdot)$ é uma métrica Riemanniana. Assim, chamamos (M, g, J, ω) de uma estrutura de Kähler.

Portanto, uma variedade de Kähler reúne consistentemente as três geometrias até aqui trabalhadas. É simplética por construção, riemanniana em razão da ω -compatibilidade e complexa pela integrabilidade de J , conforme o teorema de Newlander-Nirenberg.

Proposição 4.15: Se (M, ω, J, g) é uma variedade de Kähler, a conexão de Levi-Civita ∇ associada a g satisfaz $\nabla J = 0$ e, conseqüentemente, $\nabla \omega = 0$, tornando as três estruturas g , J e ω mutuamente paralelas.

Exemplo 4.16: Na variedade complexa $\mathbb{C}^n$ com coordenadas globais $(z_1, \dots, z_n)$, onde $z_j = x_j + iy_j$, se consideramos a forma simplética $\omega_0 = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j$ e a estrutura quase complexa integrável canônica J , a qual satisfaz $J(\partial_{x_j}) = \partial_{y_j}$ e $J(\partial_{y_j}) = -\partial_{x_j}$, obtemos:

$$\omega_0 = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n (dx_j + idy_j) \wedge (dx_j - idy_j) = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j,$$

$$g_0 = \omega_0(\cdot, J\cdot) = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j(\cdot, J\cdot) = \sum_{j=1}^n (dx_j \otimes dx_j + dy_j \otimes dy_j) = \sum_{j=1}^n (dx_j^2 + dy_j^2).$$

Portanto, ω_0 e g_0 reproduzem a forma simplética e a métrica euclidiana usuais de modo que $(\mathbb{C}^n, \omega_0, J, g_0)$ constitui o exemplo mais trivial de variedade de Kähler.

5 Formulação Geométrica da Mecânica Quântica

Nesta seção apresentaremos uma formulação intrinsecamente geométrica da mecânica quântica. Nosso objetivo é reconstruir o formalismo quântico a partir das estruturas diferenciais que emergem naturalmente de um espaço de Hilbert, mostrando que ele constitui um caso particular de variedade de Kähler. Tal abordagem permite compreender a evolução de Schrödinger como um fluxo hamiltoniano e as incertezas e probabilidades como manifestações riemannianas do espaço de fases quântico.

5.1 Espaço de Hilbert Kähleriano

Antes de reinterpretar a mecânica quântica geometricamente, é necessário compreender a estrutura diferencial e topológica subjacente ao espaço de Hilbert complexo. O objetivo desta subseção é estabelecer as propriedades que permitem tratar o espaço de estados físicos distintos, o espaço projetivo de Hilbert, como uma variedade de Kähler, ou seja, simultaneamente complexa, riemanniana e simplética.

Definição 5.1: Um espaço de Hilbert real é um espaço vetorial real $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ munido de um produto interno simétrico positivo definido dado por:

$$G : \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(\Phi, \Psi) = G(\Psi, \Phi),$$

Satisfazendo as propriedades usuais de linearidade e completude:

$$\|\Psi\|^2 = G(\Psi, \Psi), \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \text{ é completo sob } \|\cdot\|.$$

Analogamente, um espaço de Hilbert complexo é um espaço vetorial complexo $\mathcal{H}$ com produto interno hermitiano $\langle \Phi, \Psi \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, linear no segundo argumento e conjugado-linear no primeiro, tal que $\langle \Psi, \Psi \rangle > 0$ para $\Psi \neq 0$. Além disso, $\mathcal{H}$ é também completo em relação à norma $\|\Psi\| = \sqrt{\langle \Psi, \Psi \rangle}$.

A formulação quântica tradicional opera sobre o corpo dos complexos, mas podemos reconstruí-la em sua inteireza em termos de um espaço vetorial real $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ equipado de uma estrutura complexa $J : \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ a desempenhar o papel da multiplicação por imaginários. Essa reinterpretação será fundamental para a geometrização da teoria.

Proposição 5.2: Dado um espaço de Hilbert complexo $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, podemos considerá-lo como um espaço de Hilbert real $(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}, G)$ munido de uma estrutura complexa J tal que:

$$J(\Psi) = i\Psi, \quad J^2 = -\text{Id}.$$

Reciprocamente, dado $(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}, G, J)$ com $J^2 = -\text{Id}$ e $G(J\Phi, J\Psi) = G(\Phi, \Psi)$, o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ estabelecido por:

$$\langle \Phi, \Psi \rangle := \frac{1}{2\hbar} G(\Phi, \Psi) + \frac{i}{2\hbar} G(J\Phi, \Psi)$$

Define sobre $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ a estrutura de um espaço de Hilbert complexo.

Prova: Dado um espaço de Hilbert complexo $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, consideremos o mesmo conjunto $\mathcal{H}_{\mathbb{R}} := \mathcal{H}$, mas restrito à linearidade real. Por $G(\Phi, \Psi) := 2\hbar \text{Re}\langle \Phi, \Psi \rangle$ estabelecemos um produto simétrico, bilinear sobre $\mathbb{R}$ e positivo-definido como será visto futuramente. Assim, basta tomar $J(\Psi) = i\Psi$, o qual é $\mathbb{R}$ -linear e satisfaz $J^2 = -\text{Id}$. Nota-se que:

$$G(J\Phi, J\Psi) = 2\hbar \text{Re}\langle i\Phi, i\Psi \rangle = 2\hbar \text{Re}\langle \Phi, \Psi \rangle = G(\Phi, \Psi),$$

Reciprocamente, dado $(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}, G, J)$ com $J^2 = -\text{Id}$ e $G(J\Phi, J\Psi) = G(\Phi, \Psi)$, definimos a multiplicação por imaginários como $i\Psi := J\Psi$ e, portanto, tem-se $(a + ib)\Psi := a\Psi + bJ\Psi$. Assim, $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ adquire estrutura de espaço vetorial complexo. Definimos então um produto:

$$\langle \Phi, \Psi \rangle := \frac{1}{2\hbar} (G(\Phi, \Psi) + i G(J\Phi, \Psi)).$$

Segue por computação direta que $\overline{\langle \Phi, \Psi \rangle} = \langle \Psi, \Phi \rangle$ e $\langle \Psi, \Psi \rangle = \frac{1}{2\hbar} G(\Psi, \Psi) > 0$. De modo que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é reconhecido como um produto interno hermitiano. Por fim, resta justificar que a completude de um implica a do outro. As normas induzidas por G e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ satisfazem:

$$\|\Psi\|_G^2 = G(\Psi, \Psi) = 2\hbar \text{Re}\langle \Psi, \Psi \rangle = 2\hbar \|\Psi\|^2.$$

Logo, $\|\cdot\|_G$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes, isto é, induzem a mesma topologia em $\mathcal{H}$. Como a completude é uma propriedade topológica, segue que $\mathcal{H}$ é completo com respeito a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se, e somente se, $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ é completo com respeito a G . $\square$

Teorema 5.3: Seja $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert complexo. Definimos:

$$G(\Phi, \Psi) := 2\hbar \text{Re}\langle \Phi, \Psi \rangle, \quad \Omega(\Phi, \Psi) := 2\hbar \text{Im}\langle \Phi, \Psi \rangle.$$

Desse modo, temos que:

1. G é uma 2-forma bilinear simétrica, positiva definida e não degenerada;
2. Ω é uma 2-forma bilinear antissimétrica e não degenerada, ou seja, simplética;

Prova: Para (1), notamos que G é simétrica pois $\operatorname{Re}\langle\Phi, \Psi\rangle = \operatorname{Re}\langle\Psi, \Phi\rangle$. Como $\langle\Phi, \Psi\rangle \geq 0$, por definição, é também positiva definida. Além disso, para a não degenerescência, se $G(\Phi, \Psi) = 0$ para todo Ψ , então temos $G(\Phi, \Phi) = 2\hbar \|\Phi\|^2 = 0$ e, assim, $\Phi = 0$. Já para (2), reconhecemos que Ω é antissimétrica, uma vez que $\operatorname{Im}\langle\Phi, \Psi\rangle = -\operatorname{Im}\langle\Psi, \Phi\rangle$. Outrossim, se $\Omega(\Phi, \Psi) = 0$ para todo Ψ , então $\Omega(\Phi, i\Phi) = 2\hbar \operatorname{Im}\langle\Phi, i\Phi\rangle = 2\hbar \|\Phi\|^2 = 0$ e, conseqüentemente, $\Phi = 0$. Logo Ω é não degenerada. $\square$

Teorema 5.4: A quádrupla $(\mathcal{H}, J, G, \Omega)$ é uma estrutura complexa compatível, ou seja:

$$G(\Phi, \Psi) = \Omega(\Phi, J\Psi).$$

Prova: Como $\langle\cdot, \cdot\rangle$ é linear no segundo argumento e conjugado-linear no primeiro, temos que:

$$\Omega(\Phi, J\Psi) = 2\hbar \operatorname{Im}\langle\Phi, i\Psi\rangle = 2\hbar \operatorname{Re}\langle\Phi, \Psi\rangle = G(\Phi, \Psi).$$

$\square$

Definição 5.5: Uma variedade de Hilbert complexa é um par $(M, \mathcal{A})$ em que M é um espaço topológico Hausdorff e segundo contável, e $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ é um atlas tal que, para cada α , o mapa de coordenadas $\varphi_\alpha : U_\alpha \subseteq M \rightarrow H_\alpha$ é um homeomorfismo sobre sua imagem aberta em um espaço de Hilbert complexo H_α , e, para toda interseção não vazia $U_\alpha \cap U_\beta$, a função de transição:

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

É holomorfa entre abertos de espaços de Hilbert complexos. Desse modo, $\mathcal{H}$ é trivialmente uma variedade de Hilbert complexa, sendo a aplicação identidade sua carta global.

Definição 5.6: Dado um espaço de Hilbert complexo $\mathcal{H}$, estabelecemos o espaço projetivo de Hilbert como $P(\mathcal{H}) = \{[\Psi] : \Psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}, [\Psi] = \lambda\Psi, \lambda \in \mathbb{C}^*\}$, em outras palavras, o conjunto das retas complexas em $\mathcal{H}$ passando pela origem. Pontos nesse espaço quociente descrevem estados físicos distintos de um sistema, uma vez que o escalonamento complexo da função de onda Ψ é desprovido de significado empírico.

Proposição 5.7: O espaço projetivo $P(\mathcal{H})$ é uma variedade de Hilbert complexa.

Prova: Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo separável e $S(\mathcal{H}) = \{v \in \mathcal{H} : \|v\| = 1\}$ a esfera unitária. Assim, o grupo $U(1)$ atua sobre $S(\mathcal{H})$ por multiplicação escalar por:

$$\rho : U(1) \times S(\mathcal{H}) \rightarrow S(\mathcal{H}), \quad \rho(e^{i\theta}, v) = e^{i\theta}v.$$

Essa ação é livre, contínua, própria e holomorfa. Portanto, pelo teorema da variedade quociente para variedades de Hilbert, o espaço quociente $P(\mathcal{H}) \simeq S(\mathcal{H})/U(1)$ herda naturalmente uma estrutura de variedade de Hilbert complexa. $\square$

Variedades de Hilbert complexas estendem naturalmente as suaves - com dimensão finita ou infinita - e permitem, caso desejado, generalizar sem complicações as estruturas simplética, riemanniana e de Kähler já introduzidas. Assim, esse formalismo geométrico permanece válido na descrição tanto de sistemas com graus de liberdade discretos quanto contínuos, bastando adotar o modelo local hilbertiano adequado em dimensionalidade.

Teorema 5.8: O espaço projetivo de Hilbert $P(\mathcal{H})$ herda de $\mathcal{H}$ uma estrutura de Kähler.

Prova: Dada a fibração $\pi : S(\mathcal{H}) \rightarrow P(\mathcal{H})$, onde $S(\mathcal{H})$ é a esfera unitária, o espaço tangente em $[\Psi] \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, representado por $\Psi \in S(\mathcal{H})$, identifica-se canonicamente com o subespaço horizontal H_Ψ da fibração. Sem dúvidas, como os pontos na esfera são caracterizados por $\langle \Psi, \Psi \rangle = 0$, temos $T_\Psi S(\mathcal{H}) = \{v \in \mathcal{H} \mid \text{Re}\langle \Psi, v \rangle = 0\}$, uma vez que:

$$0 = \frac{d}{dt}(\Psi + tv, \Psi + tv)|_{t=0} = \langle \Psi, v \rangle + \langle v, \Psi \rangle = 2\text{Re}\langle \Psi, v \rangle$$

Além disso, notamos que o subespaço vertical, tangente à ação do grupo unitário, é dado por $V_\Psi = \text{span}_{\mathbb{R}}\{i\Psi\}$, pois seu vetor base tangente é $\frac{d}{dt}(e^{i\theta}\Psi)|_{\theta=0} = i\Psi$. Desse modo, identificamos o subespaço horizontal como o complemento ortogonal complexo de Ψ , em outras palavras, $H_\Psi = \{v \in \mathcal{H} \mid \langle v, \Psi \rangle = 0\} \cong \Psi^\perp$. Como H_Ψ é um subespaço complexo de $\mathcal{H}$, ele herda naturalmente o produto interno Hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$, o qual permite definir a tripla (J, g, ω) sobre $T_{[\Psi]}P(\mathcal{H})$, o qual identificamos antes com H_Ψ , da seguinte forma:

- **(Estrutura Complexa)** Como H_Ψ é um subespaço complexo, a multiplicação por imaginários provê um operador canônico $J : H_\Psi \rightarrow H_\Psi$ tal que $J(v) = iv$. Sem dúvidas, se $\langle v, \Psi \rangle = 0$, então $\langle iv, \Psi \rangle = -i\langle v, \Psi \rangle = 0$ e obtemos $iv \in H_\Psi$. Trivialmente $J^2 = -\text{Id}$. Por fim, visto que $P(\mathcal{H})$ é uma variedade complexa, J é integrável.
- **(Métrica Riemanniana)** Definimos g como a parte real do produto interno Hermitiano restrito a H_Ψ , isto é, $g_{[\Psi]}(u, v) := 2\hbar \text{Re}\langle u, v \rangle$ para todos $u, v \in H_\Psi$. Tendo em vista que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno, concluímos que g é simétrica, positivo definida e não degenerada, ou seja, é uma métrica riemanniana.
- **(Forma Simplética)** De modo análogo, estabelecemos ω como a parte imaginária do produto interno $\omega_{[\Psi]}(u, v) := 2\hbar \text{Im}\langle u, v \rangle$. Essa forma é bilinear, não degenerada e anti-simétrica em H_Ψ , uma vez que $\text{Im}\langle v, u \rangle = -\text{Im}\langle u, v \rangle$. Além disso, ω é fechada ($d\omega = 0$), podendo ser interpretada como a forma de curvatura associada à conexão canônica da fibração $U(1)$. Portanto, ω é uma forma simplética.

Isto posto, para reconhecer que $(\mathcal{P}(\mathcal{H}), J, g, \omega)$ é realmente uma variedade de Kähler, basta verificarmos que vale a relação de compatibilidade da tripla:

$$g_{[\Psi]}(u, v) = 2\hbar \text{Re}\langle u, v \rangle = 2\hbar \text{Im}(i\langle u, v \rangle) = 2\hbar \text{Im}\langle u, iv \rangle = \omega_{[\Psi]}(u, v), \quad \forall u, v \in H_\Psi.$$

□

5.2 Observáveis Extrínsecos

Tendo em vista que, no formalismo usual da mecânica quântica, os observáveis são representados por operadores auto-adjuntos sobre o espaço de Hilbert, podemos, na formulação geométrica, associar a cada um deles uma função suave no espaço projetivo, correspondente ao valor esperado do operador.

Definição 5.9: Em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, chama-se observável todo operador linear auto-adjunto $\hat{F} : \mathcal{D}(\hat{F}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, cujo domínio $\mathcal{D}(\hat{F})$ é denso em $\mathcal{H}$.

Definição 5.10: Dado um observável $\hat{F}$ e $\Psi \in \mathcal{D}(\hat{F}) \setminus 0$, definimos a função expectativa:

$$F(\Psi) := \frac{\langle \Psi, \hat{F}\Psi \rangle}{\langle \Psi, \Psi \rangle} \in \mathbb{R}.$$

Claramente, essa função é homogênea de grau zero, ou seja, $F(\lambda\Psi) = F(\Psi)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$.

Proposição 5.11: A restrição de F à esfera unitária de normalização $S(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ é constante ao longo das órbitas da ação de $U(1)$. Logo, existe uma função bem-definida:

$$f : P(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f([\Psi]) = F(\Psi)$$

Tal que $\pi^* f = F|_{S(\mathcal{H})}$, onde $\pi : S(\mathcal{H}) \rightarrow P(\mathcal{H})$ é a projeção canônica da fibração.

Prova: Se $\Psi \in S(\mathcal{H})$ e a ação de grupo $\rho : U(1) \times S(\mathcal{H}) \rightarrow S(\mathcal{H})$ é estabelecida por $\rho(e^{i\theta}, \Psi) = e^{i\theta}\Psi$ com $\pi(e^{i\theta}\Psi) \in [\Psi] \in P(\mathcal{H})$, então temos:

$$F(e^{i\theta}\Psi) = \frac{\langle e^{i\theta}\Psi, \hat{F}e^{i\theta}\Psi \rangle}{\langle e^{i\theta}\Psi, e^{i\theta}\Psi \rangle} = \frac{e^{-i\theta}e^{i\theta} \langle \Psi, \hat{F}\Psi \rangle}{e^{-i\theta}e^{i\theta} \langle \Psi, \Psi \rangle} = F(\Psi),$$

□

Proposição 5.12: Se $\hat{F}$ é auto-adjunto e limitado em $\mathcal{H}$ (logo $\mathcal{D}(\hat{F}) = \mathcal{H}$), então a função expectativa F é suave em $\mathcal{H} \setminus \{0\}$. Dessa forma, a restrição $F|_{S(\mathcal{H})}$ e a projetada $f : P(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}$ também são suaves.

Prova: Como $\hat{F}$ é linear e limitado, $\Psi \mapsto \langle \Psi, \hat{F}\Psi \rangle$ é polinomial de grau dois e, por consequência, C^∞ em $\mathcal{H}$. Analogamente, $\Psi \mapsto \langle \Psi, \Psi \rangle$ é também C^∞ e positiva em $\mathcal{H} \setminus \{0\}$. Portanto, sua razão define uma função expectativa F suave nesse mesmo conjunto. Assim sendo, a restrição $F|_{S(\mathcal{H})}$ é suave e invariante sob $U(1)$, e como $\pi : S(\mathcal{H}) \rightarrow P(\mathcal{H})$ é uma submersão, a aplicação induzida em $P(\mathcal{H})$ é igualmente suave. □

5.3 Dinâmica de Schrödinger Simplética

Descrevemos agora como a dinâmica dada pela equação de Schrödinger admite uma formulação simplética quando projetada para o espaço projetivo de Hilbert. Trabalhamos com operadores auto-adjuntos limitados de forma que suas funções expectativa sejam suaves, garantindo a boa definição dos campos a elas hamiltonianos associados.

Definição 5.13: Se $\hat{H}$ é um operador auto-adjunto e limitado, a equação de Schrödinger para $\Psi(t) \in \mathcal{H}$ e o campo vetorial de Schrödinger a ela associado são respectivamente:

$$i\hbar \frac{d}{dt}\Psi(t) = \hat{H}\Psi(t), \quad X_{\hat{H}}(\Psi) := -\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Psi \in T_{\Psi}\mathcal{H} \cong \mathcal{H}.$$

Em particular, se $\hat{H}$ é o hamiltoniano, $\Psi(t)$ descreve a evolução temporal do sistema.

Proposição 5.14: Campos de Schrödinger são tangentes à esfera unitária $S(\mathcal{H})$.

Prova: Sabemos que fluxo Φ_t gerado por $X_{\hat{F}}(\Psi) = -\frac{i}{\hbar}\hat{F}\Psi$ é dado pela solução da equação de Schrödinger $\Phi_t(\Psi_0) = \Psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{F}t}\Psi_0$. Assim, se definimos o operador de evolução temporal $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{F}t}$, temos, levando em conta $\hat{F}^\dagger = \hat{F}$, que $U(t)$ é unitário:

$$U(t)^\dagger U(t) = \left(e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{F}t}\right)^\dagger \left(e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{F}t}\right) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{F}^\dagger t} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{F}t} = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{F}t} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{F}t} = e^0 = 1$$

Notamos ainda que o fluxo preserva a norma, pois:

$$\langle \Psi(t), \Psi(t) \rangle = \langle U(t)\Psi_0, U(t)\Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0, U(t)^\dagger U(t)\Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0, \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0, \Psi_0 \rangle$$

Portanto, se $\Psi_0 \in S(\mathcal{H})$, isto é, $\langle \Psi_0, \Psi_0 \rangle = 1$, então $\Psi(t) \in S(\mathcal{H})$ para todo t . Como o fluxo Φ_t deixa $S(\mathcal{H})$ invariante, seu campo gerador $X_{\hat{A}}$ deve ser tangente a $S(\mathcal{H})$. □

Teorema 5.15: (Campos de Schrödinger $\leftrightarrow$ Campos Hamiltonianos) Dado um operador auto-adjunto limitado $\hat{F}$ e sua função expectativa $f : P(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}$, o campo $X_{\hat{F}}$ projeta-se $\pi : S(\mathcal{H}) \rightarrow P(\mathcal{H})$ no campo hamiltoniano X_f por meio de $\pi_*(X_{\hat{F}}) = X_f$.

Prova: Tomamos $v \in T_{\Psi}S(\mathcal{H})$ de modo que $\langle \Psi, v \rangle = 0$ e $\langle \Psi, \Psi \rangle = 1$. Assim, usando de sua pushforward $d\pi_{\Psi}(v) = V \in T_{[\Psi]}P(\mathcal{H})$ e do diferencial de $f(\Psi) = \langle \Psi, \hat{F}\Psi \rangle$, computa-se:

$$df_{[\Psi]}(V) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \Psi(t), \hat{F}\Psi(t) \rangle = \langle v, \hat{F}\Psi \rangle + \langle \Psi, \hat{F}v \rangle = 2 \operatorname{Re} \langle v, \hat{F}\Psi \rangle$$

Isto posto, o vetor $X_{\hat{F}}(\Psi) = -\frac{i}{\hbar} \hat{F}\Psi \in T_{\Psi}S(\mathcal{H})$ tem parte horizontal em $P(\mathcal{H})$ dada por:

$$v_{\hat{F}}^H = X_{\hat{F}} - \langle \Psi, X_{\hat{F}} \rangle \Psi = -\frac{i}{\hbar} \hat{F}\Psi - \left\langle \Psi, -\frac{i}{\hbar} \hat{F}\Psi \right\rangle \Psi = -\frac{i}{\hbar} (\hat{F} - f(\Psi)) \Psi$$

Aplicando as convenções $\omega(V_1, V_2) = 2\hbar \operatorname{Im} \langle v_1^H, v_2^H \rangle$ e $X_{\pi} := \pi_*(X_{\hat{F}})$, obtemos:

$$\begin{aligned} \omega(X_{\pi}, V) &= -2\hbar \operatorname{Im} \langle v, v_{\hat{F}}^H \rangle = -2\hbar \operatorname{Im} \left\langle v, -\frac{i}{\hbar} (\hat{F} - f(\Psi)) \Psi \right\rangle \\ &= 2 \operatorname{Im} \left(i \langle v, (\hat{F} - f(\Psi)) \Psi \rangle \right) = 2 \operatorname{Re} \langle v, (\hat{F} - f(\Psi)) \Psi \rangle \\ &= 2 \operatorname{Re} \left(\langle v, \hat{F}\Psi \rangle - f(\Psi) \langle v, \Psi \rangle \right) \end{aligned}$$

Como v é horizontal, concluímos que $\omega(X_{\pi}, V) = 2 \operatorname{Re} \langle v, \hat{F}\Psi \rangle = df(V)$ e, consequentemente, pela unicidade do campo hamiltoniano, vale $X_{\pi} = X_f$. $\square$

Teorema 5.16: Se $\hat{F}$ é um operador auto-adjunto limitado e f sua função expectativa associada, então o campo hamiltoniano X_f sobre $P(\mathcal{H})$ é um campo de Killing.

Prova: Vimos que o fluxo Φ_t gerado por $X_{\hat{F}}$ em $\mathcal{H}$ é descrito pelo operador de evolução temporal unitário $U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{F}t\right)$, o qual preserva o produto hermitiano $h = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Além disso, o fluxo ϕ_t em $P(\mathcal{H})$ gerado por X_f é a projeção de Φ_t , pois $\pi_*(X_{\hat{F}}|_{S(\mathcal{H})}) = X_f$. Desse modo, como Φ_t preserva h em $\mathcal{H}$, ϕ_t faz o mesmo para $\pi^*h = g + i\omega$ em $P(\mathcal{H})$, onde $\pi : S(\mathcal{H}) \rightarrow P(\mathcal{H})$ é a projeção canônica da fibração. Portanto, já que $\phi_t^*\omega = \omega$ pelas propriedades de campos hamiltonianos, concluímos que $\phi_t^*g = g$. $\square$

5.4 Observáveis Intrínsecos

O resultado a seguir nos motiva a executar uma definição intrínseca de observáveis quânticos no espaço projetivo, isto é, uma formulação independente de operadores auto-adjuntos estabelecidos externamente no espaço de Hilbert.

Teorema 5.17: Se $f : \mathcal{P}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave e X_f é de Killing, então existe um operador auto-adjunto limitado $\hat{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que $\pi^*f = F|_{S(\mathcal{H})}$.

Prova: Seja ϕ_t o fluxo gerado por X_f . A condição de que X_f é um campo de Killing implica pela compatibilidade que ϕ_t preserva a estrutura de Kähler (g, ω, J) . Isto posto, sabemos que grupo de todos esses automorfismos de Kähler em $P(\mathcal{H})$ é o grupo unitário projetivo $PU(\mathcal{H}) = U(\mathcal{H})/U(1)$. Portanto, ϕ_t é um subgrupo a um parâmetro de $PU(\mathcal{H})$.

Pelo Teorema de Stone sobre grupos unitários a um parâmetro, existe um operador auto-adjunto $\hat{F}$ em $\mathcal{H}$ que gera um fluxo unitário $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{F}t}$ em $\mathcal{H}$, tal que ϕ_t é a projeção de $U(t)$. Ou seja, $\pi \circ U(t)|_{S(\mathcal{H})} = \phi_t \circ \pi$. Derivando esta relação em $t = 0$, obtemos que o gerador de $U(t)$ é o campo de Schrödinger $X_{\hat{F}}(\Psi) = -\frac{i}{\hbar}\hat{F}\Psi$ e o gerador de ϕ_t é X_f . Assim, obtem-se que:

$$\pi_*(X_{\hat{F}}|_{S(\mathcal{H})}) = X_f$$

Pelo teorema 5.15, sabemos que $\pi_*(X_{\hat{F}}|_{S(\mathcal{H})})$ é igual ao campo hamiltoniano $X_{f'}$ associado à função expectativa $f'([\Psi]) = \langle \Psi, \hat{F}\Psi \rangle$ e, conseqüentemente, $X_f = X_{f'}$. Como ambos são campos hamiltonianos, $i_{X_f}\omega = df$ e $i_{X_{f'}}\omega = df'$ implicam em $df = df'$, e como $P(\mathcal{H})$ é conexo, $f = f' + c$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. $f([\Psi]) = f'([\Psi]) + c = \langle \Psi, \hat{F}\Psi \rangle + c$. Assim, definimos um novo operador auto-adjunto $\hat{F}_{novo} = \hat{F} + c \text{ Id}$ com função expectativa F_{novo} sobre $S(\mathcal{H})$ dada por:

$$F_{novo}(\Psi) = \langle \Psi, \hat{F}_{novo}\Psi \rangle = \langle \Psi, (\hat{F} + c \text{ Id})\Psi \rangle = \langle \Psi, \hat{F}\Psi \rangle + c\langle \Psi, \Psi \rangle$$

Como $\Psi \in S(\mathcal{H})$, $\langle \Psi, \Psi \rangle = 1$, então $F_{novo}(\Psi) = \langle \Psi, \hat{F}\Psi \rangle + c$ e, assim, temos que $F_{novo}(\Psi) = f([\Psi])$ para todo $\Psi \in S(\mathcal{H})$, ou seja, $\pi^*f = F_{novo}|_{S(\mathcal{H})}$. Resta mostrar que $\hat{F}_{novo}$ é limitado. Seja $Q(\Psi) = \langle \Psi, \hat{F}_{novo}\Psi \rangle$. Como $Q|_{S(\mathcal{H})}$ é contínua e $S(\mathcal{H})$ é compacto na topologia do quociente projetivo, o supremo de $|Q|$ em $S(\mathcal{H})$ é finito, logo existe $M = \sup_{\Psi \in S(\mathcal{H})} |Q(\Psi)| < \infty$ e $|Q(\Psi)| \leq M|\Psi|^2$. Pela identidade de polarização, $\langle \Phi, \hat{F}_{novo}\Psi \rangle$ é combinação linear de valores de Q e, $\exists C > 0$ tal que $|\langle \Phi, \hat{F}_{novo}\Psi \rangle| \leq C\|\Phi\|\|\Psi\|$. $\square$

Definição 5.18: Na variedade de Kähler $(P(\mathcal{H}), g, \omega, J)$, observáveis quânticos são funções reais suaves $f : P(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}$ cujos campos vetoriais hamiltonianos X_f são de Killing.

5.5 Incerteza de Heisenberg

Podemos empregar as estruturas definidas até aqui para derivar o princípio da incerteza de Heisenberg como uma repercussão da geometria do espaço projetivo de Hilbert.

Definição 5.19: Dada uma variedade de Kähler (K, g, ω, J) e funções $a, b \in \mathfrak{F}(K)$, definimos seu colchete de Poisson e colchete de Riemann respectivamente por:

$$\{X_a, X_b\}_\omega = \omega(X_a, X_b), \quad \{X_a, X_b\}_g = \frac{\hbar}{2}g(X_a, X_b)$$

Definição 5.20: Sendo $\hat{C} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador observável, sua incerteza obedece a:

$$(\Delta C)^2(\Psi) = \langle \Psi, \hat{C}^2\Psi \rangle - \langle \Psi, \hat{C}\Psi \rangle^2, \quad \forall \Psi \in \mathcal{H}.$$

Lema 5.21: Se $\hat{C} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é um operador observável e $c : P(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}$ sua função expectativa associada, então temos que $(\Delta c)^2 := (\Delta C)^2|_{P(\mathcal{H})} = \frac{\hbar}{2}g(X_c, X_c) = \{X_a, X_b\}_g$.

Prova: Como vimos antes, se $\Psi \in S(\mathcal{H})$, a componente horizontal do campo de Schrödinger $X_{\hat{C}}(\Psi) = -\frac{i}{\hbar}\hat{C}\Psi$ em $P(\mathcal{H})$ é expressa por:

$$v_H = -\frac{i}{\hbar}\hat{C}\Psi + \frac{i}{\hbar}\langle \Psi, \hat{C}\Psi \rangle \Psi.$$

Logo, levando em conta que $\|\Psi\| = 1$, obtemos:

$$g(v_H, v_H)|_{[\Psi]} = 2\hbar \operatorname{Re}\langle v_H, v_H \rangle = 2\hbar \cdot \frac{1}{\hbar^2} \left(\langle \Psi, \hat{C}^2 \Psi \rangle - \langle \Psi, \hat{C} \Psi \rangle^2 \right) = \frac{2}{\hbar} (\Delta C)^2(\Psi).$$

□

Em particular, se $h : P(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}$ é a função energia de um sistema quântico, notamos que a norma do seu campo vetorial hamiltoniano X_h é proporcional ao quadrado da incerteza energética desse sistema. Portanto, o fluxo de evolução temporal demora-se em regiões de alta incerteza e acelera-se em de baixa.

Teorema 5.22: Em $(P(\mathcal{H}), g, \omega, J)$, se $a, b \in \mathfrak{F}(P(\mathcal{H}))$ são observáveis quânticos com respectivas incertezas $(\Delta a)^2 = g(X_a, X_a)$ e $(\Delta b)^2 = g(X_b, X_b)$, então a seguinte relação, denominada princípio da incerteza de Heisenberg, é válida:

$$(\Delta a)^2 (\Delta b)^2 \geq \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 \{X_a, X_b\}_\omega^2 + \{X_a, X_b\}_g^2.$$

Prova: Pela desigualdade de Cauchy–Schwarz para $h(\cdot, \cdot) = g(\cdot, \cdot) + i\omega(\cdot, \cdot)$, sabe-se:

$$h(X_a, X_a) h(X_b, X_b) \geq |h(X_a, X_b)|^2.$$

Expandindo o lado esquerdo em termos da métrica e forma simplética, temos:

$$|h(X_a, X_b)|^2 = |g(X_a, X_b) + i\omega(X_a, X_b)|^2 = g(X_a, X_b)^2 + \omega(X_a, X_b)^2$$

Já para o lado direito, usufruímos da anti-simetria de ω e do lema para constatar que:

$$\frac{4}{\hbar^2} (\Delta a)^2 (\Delta b)^2 = g(X_a, X_a) g(X_b, X_b) \geq \omega(X_a, X_b)^2 + g(X_a, X_b)^2.$$

□

5.6 Mensurabilidade Quântica

A formulação geométrica da mecânica quântica permite reinterpretar o processo de medição de um observável como uma questão puramente intrínseca ao espaço projetivo. Em vez de tratar autovalores e autoestados como entidades externas ao formalismo, estes emergem como valores e pontos críticos da função expectativa associada. Assim, a estrutura de mensurabilidade é inteiramente descrita pela geometria de Kähler.

Definição 5.23: Sabemos que, para um observável extrínseco $\hat{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ com função expectativa associada $f \in \mathfrak{F}(P(\mathcal{H}))$, seu espectro é expresso por:

$$\operatorname{sp}(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \det(\hat{F} - \lambda \operatorname{Id}) = 0\}.$$

Definição 5.24: Para $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos a função multiplicidade como:

$$n_\lambda : P(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}, \quad n_\lambda(p) := \left[(\Delta f)^2(p) + (f(p) - \lambda)^2 \right]^{-1}.$$

Proposição 5.25: Se $f \in \mathfrak{F}(P(\mathcal{H}))$, então $\lambda \in \operatorname{sp}(f) \iff \lambda$ é ponto crítico de f .

Prova: A função $n_\lambda(p)$ é ilimitada se e somente se seu denominador pode ser arbitrariamente próximo de zero. Contudo $(\Delta f)^2(p) = \frac{\hbar}{2}g(X_f, X_f)(p) \geq 0$ e $(f(p) - \lambda)^2 \geq 0$ de modo que o denominador se anula se e somente se ambos os termos são nulos simultaneamente. Logo, obtemos que:

$$(f(p) - \lambda)^2 = 0 \iff f(p) = \lambda, \quad (\Delta f)^2(p) = \frac{\hbar}{2}g(X_f, X_f)(p) = 0 \iff X_f(p) = 0.$$

Da geometria simplética a relação $\iota_{X_f}\omega = df$ nos leva a $X_f(p) = 0 \iff df(p) = 0$. Portanto, λ é valor crítico de f , sendo p seu ponto crítico. $\square$

Corolário 5.26: Se $f \in \mathfrak{F}(P(\mathcal{H}))$ é um observável, $\lambda \in sp(f) \iff n_\lambda$ é ilimitada.

Definição 5.27: Seja $\Lambda \subset sp(f)$ um conjunto fechado de autovalores, seu autoespaço é:

$$\mathcal{E}_{f,\Lambda} := \{p \in P(H) \mid df(p) = 0 \text{ e } f(p) = \lambda, \forall \lambda \in \Lambda\}.$$

Nessa perspectiva, $\mathcal{E}_{f,\Lambda}$ caracteriza-se como subvariedade, ou melhor, autovariedade de $P(\mathcal{H})$ e seus pontos são denominados autoestados de Λ .

Definição 5.28: Dadas duas funções observáveis $f, h \in \mathfrak{F}(P(\mathcal{H}))$, definimos seu colchete simetrizado, ou produto de Jordan, como a função $\{f, h\}_+ : P(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\{f, h\}_+ := \{f, h\}_g + fh = \frac{\hbar}{2}g(X_f, X_h) + fh.$$

Construímos também $\{f, \dots\}_+^{(n)}$, denominada a n-ésima potência simetrizada de f , como:

$$\{f\}_+^{(1)} := f, \quad \{f, \dots\}_+^{(n)} := \{f, \{f, \dots\}_+^{(n-1)}\}_+.$$

Lema 5.29: A função $f_n(p) := \{f, \dots\}_+^{(n)}(p)$ é a função expectativa do operador $\hat{F}^n$.

Prova: Seja $p = [\Psi]$ e $\langle A \rangle_p := \langle \Psi | A | \Psi \rangle / \langle \Psi | \Psi \rangle$. Já vimos antes que a componente horizontal do campo de Schrödinger é o campo Hamiltoniano $X_f(p) = \frac{i}{\hbar}(\hat{F} - \langle \hat{F} \rangle_p)\Psi$ de forma que:

$$g(X_f, X_h)(p) = \frac{2}{\hbar} \left(\langle \frac{1}{2}(\hat{F}\hat{H} + \hat{H}\hat{F}) \rangle_p - \langle \hat{F} \rangle_p \langle \hat{H} \rangle_p \right).$$

Multiplicando por $\hbar/2$ e somando $fh = \langle \hat{F} \rangle_p \langle \hat{H} \rangle_p$, resulta:

$$\{f, h\}_+(p) = \frac{\hbar}{2}g(X_f, X_h)(p) + f(p)h(p) = \frac{1}{2}\langle \hat{F}\hat{H} + \hat{H}\hat{F} \rangle_p,$$

Em particular, $\{f, f\}_+(p) = \langle \hat{F}^2 \rangle_p$. Por indução, supomos $\{f\}_+^{(k)}(p) = \langle \hat{F}^k \rangle_p$ e assim:

$$\{f\}_+^{(k+1)}(p) = \{f, \{f\}_+^{(k)}\}_+(p) = \frac{1}{2} \frac{\langle \Psi | (\hat{F}\hat{F}^k + \hat{F}^k\hat{F}) | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = \langle \hat{F}^{k+1} \rangle_p,$$

$\square$

Proposição 5.30: Se $\Lambda \subset sp(f)$ é fechado e $\Lambda^n = \{\lambda^n \mid \lambda \in \Lambda\}$, então temos:

$$\mathcal{E}_{f,\Lambda} := \{p \in P(H) \mid \{f, \dots\}_+^{(n)}(p) \in \Lambda^n, \forall n \in \mathbb{N}\},$$

Prova: ($\Rightarrow$) Seja $p \in \mathcal{E}_{f,\Lambda}$ com $df(p) = 0$ e $f(p) = \lambda$ para algum $\lambda \in \Lambda$. Como vimos, isto equivale a $p = [\Psi]$ ser um autoestado do operador extrínseco $\hat{F}$ tal que $\hat{F}|\Psi\rangle = \lambda|\Psi\rangle$. Assim sendo, se aplicamos $\hat{F}$ repetidamente, obtemos $\hat{F}^n|\Psi\rangle = \lambda^n|\Psi\rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, segue que $f_n(p) \in \Lambda^n, \forall n$, pois:

$$f_n(p) = \frac{\langle \Psi | \hat{F}^n | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = \frac{\langle \Psi | \lambda^n | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = \lambda^n.$$

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que $f_n(p) \in \Lambda^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, se $n = 1$, então $f(p) = \lambda \in \Lambda$. Outrossim, para $n = 2$, temos $\langle \hat{F}^2 \rangle_p = f_2(p) = \lambda^2 \in \Lambda^2$. Diante do exposto, a equação da incerteza de f em p anula-se:

$$(\Delta f)^2(p) = \langle \hat{F}^2 \rangle_p - \langle \hat{F} \rangle_p^2 = f_2(p) - (f(p))^2 = \lambda^2 - \lambda^2 = 0.$$

Já reconhecemos anteriormente que $(\Delta f)^2(p) = 0$ implica $df(p) = 0$ pela estrutura simplética. Como resultado, p satisfaz a $df(p) = 0$ e $f(p) = \lambda \in \Lambda$. $\square$

Definição 5.31: Para $p \in P(H)$ e $A \subset P(H)$, se $\sigma(\cdot, \cdot)$ é a distância geodésica mínima induzida pela métrica g , estabelecemos a distância entre p e A por:

$$\kappa(p, A) := \inf_{q \in A} \sigma(p, q),$$

Se o ínfimo é atingido e único, denotamos por $\text{proj}_A(p)$ o ponto de A que minimiza a distância. Desse modo, podemos ainda definir as projeções de redução intrínsecas:

$$P_{f,\Lambda} : P(H) \rightarrow \mathcal{E}_{f,\Lambda}, \quad P_{f,\Lambda}(p) := \text{proj}_{\mathcal{E}_{f,\Lambda}}(p).$$

Lema 5.32: Em $(P(\mathcal{H}), g, \omega, J)$, dados $p, q \in P(\mathcal{H})$ com representantes $[\Psi] = p$ e $[\Phi] = q$ na esfera $S(\mathcal{H})$, temos que a distância geodésica mínima $\sigma(p, q)$, satisfaz a relação:

$$|\langle \Psi | \Phi \rangle|^2 = \cos^2 \left(\frac{\sigma(p, q)}{\sqrt{2\hbar}} \right).$$

Logo, minimizar $\sigma(p, q)$ equivale a maximizar a probabilidade de transição $|\langle \Psi | \Phi \rangle|^2$. Essa observação é particularmente relevante, pois evidencia a correspondência entre a ação de $P_{f,\Lambda}$ e a do projetor espectral da mecânica quântica tradicional. De fato, este último se caracteriza por projetar a função de onda sobre o estado de maior probabilidade de medição, isto é, pela projeção direta do vetor sobre o autoespaço espectral associado. Sendo esses o caso, somos naturalmente conduzidos naturalmente ao seguinte resultado:

Teorema 5.33: (Regra de Born Geométrica) Seja $p \in P(H)$ e $\Lambda \subset \text{sp}(f)$ fechado. Além disso, vamos supor que $P_{f,\Lambda}(p)$ esteja bem definido. Assim, a probabilidade de que a medição do observável f no estado p produza um resultado em Λ é:

$$\mathbb{P}_f(\Lambda \mid p) = \cos^2 \left(\frac{\sigma(p, P_{f,\Lambda}(p))}{\sqrt{2\hbar}} \right) = \cos^2 \left(\frac{\kappa(p, \mathcal{E}_{f,\Lambda})}{\sqrt{2\hbar}} \right)$$

No caso discreto $\mathcal{E}_{f,\Lambda} = \{p_\lambda\}$, simplificamos para $\mathbb{P}_f(\{\lambda\} \mid p) = \cos^2 \left(\sigma(p, p_\lambda) / \sqrt{2\hbar} \right)$.

6 Conclusão: Os Postulados Geométricos

Após o desenvolvimento de toda a formulação, podemos agora consolidar os resultados alcançados na forma de um conjunto de postulados geométricos. Tais princípios sintetizam, em linguagem puramente diferencial, a estrutura fundamental da teoria quântica. A partir deles, torna-se possível compreender a dinâmica, a medição e a probabilidade como manifestações da geometria de Kähler que emerge naturalmente do espaço projetivo de Hilbert. Desse modo, apresentamos os fundamentos que encerram e unificam a proposta aqui construída:

1. **Espaço de Estados:** O espaço de estados de um sistema quântico é uma variedade de Kähler $(P(\mathcal{H}), g, \omega, J)$, na qual $P(\mathcal{H})$ denota o espaço projetivo de Hilbert.
2. **Observáveis:** Observáveis quânticos são funções reais suaves $f : P(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}$ cujos campos vetoriais hamiltonianos X_f são de Killing.
3. **Dinâmica:** Estabelecida uma função energética $h \in \mathfrak{F}(P(\mathcal{H}))$, a evolução temporal do sistema é determinada pelo fluxo do campo hamiltoniano X_h a ela associado.
4. **Interpretação Probabilística:** Dados $p \in P(\mathcal{H})$ e $\Lambda \subset \text{sp}(f)$ fechado, a probabilidade da a medição do observável f no estado p produza um resultado em Λ é:

$$\mathbb{P}_f(\Lambda \mid p) = \cos^2\left(\frac{\sigma(p, P_{f,\Lambda})}{\sqrt{2\hbar}}\right) = \cos^2\left(\frac{\kappa(p, \mathcal{E}_{f,\Lambda})}{\sqrt{2\hbar}}\right)$$

No caso discreto $\mathcal{E}_{f,\Lambda} = \{p_\lambda\}$, simplificamos para $\mathbb{P}_f(\{\lambda\} \mid p) = \cos^2(\sigma(p, p_\lambda)/\sqrt{2\hbar})$.

5. **Redução de Estados:** Se $f \in \mathfrak{F}(P(\mathcal{H}))$ é um observável e $\Lambda \subset \text{sp}(f)$ um subconjunto fechado, medições de um estado $p \in P(\mathcal{H})$ consistem em verificar se o valor obtido de f está em Λ . Em caso afirmativo, após a medição, o sistema migra para $P_{f,\Lambda}(p)$ e, em caso negativo, para a projeção no complementar $P_{f,\Lambda^c}(p)$.

A formulação aqui exposta permite reinterpretar a mecânica quântica de modo inteiramente geométrico. Assim como a introdução do espaço de Minkowski representou, na teoria da relatividade restrita, a inserção decisiva da geometria na descrição do espaço-tempo, a identificação do espaço projetivo de Hilbert como uma variedade de Kähler cumpre papel análogo para o domínio quântico. A partir dessa estrutura, conceitos como evolução temporal, observáveis e medições passam a derivar de propriedades diferenciais e topológicas, e não mais de postulados externos e aparentemente arbitrários.

Tal perspectiva evidencia que a quantização não é um acréscimo artificial à física clássica, mas o desdobramento natural de uma geometria mais rica, onde a métrica, a forma simplética e a estrutura complexa coexistem e interagem de modo inseparável. Esse enfoque abre também novas possibilidades de investigação como teorias de quantização geométrica e coerente, campos quânticos em variedades de curvatura não trivial e estudos sobre o papel da curvatura na decoerência e nas transições de fase quânticas encontram aqui uma base conceitual sólida. A crescente intersecção entre geometria diferencial e teoria quântica de campos sugere, portanto, que este formalismo não apenas reformula a mecânica quântica, mas também contribui para o avanço de um dos ramos mais promissores da física matemática contemporânea.

Referências

1. ASHTEKAR, A.; SCHILLING, T. A. Geometrical Formulation of Quantum Mechanics. In: Springer eBooks, 1999. p. 23–65.
2. DA SILVA, A. C. Lectures on Symplectic Geometry. Lecture Notes in Mathematics, v. 1764. Springer, 2001.
3. DO CARMO, M. P. Geometria Riemanniana. Projeto Euclides. IMPA, 1979.
4. LEE, J. M. Introduction to Smooth Manifolds. Graduate Texts in Mathematics, v. 218. Springer, 2002.
5. MCDUFF, D.; SALAMON, D. Introduction to Symplectic Topology. Oxford University Press, 1998.
6. O'NEILL, B. Semi-Riemannian Geometry: With Applications to Relativity. New York: Academic Press, 1983.