

ALEXANDRE SALOMON TUDISCO

**Otimização do índice de Sharpe utilizando os modelos de Média Variância
(Markowitz) e o modelo de Black Litterman**

Monografia apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para a obtenção do certificado
de conclusão do curso MBA em
Engenharia Financeira.

Área de Concentração:

Engenharia Financeira

Orientador: Prof. Dr. Oswaldo L.V.
Costa.

São Paulo

MBA-EF
2014
T 8110

583



Escola Politécnica - EPEL



31500023583

M2014AV

Tudisco, Alexandre Salomon

Otimização do índice Sharpe utilizando os modelos de Média Variância (Markowitz) e o modelo de Black Litterman / A. S.

Tudisco - São Paulo, 2015

44 p.

Orientador: prof. Dr. Oswaldo L.V. Costa.

Monografia (MBA em Engenharia Financeira) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

1.Otimização de Carteiras 2.Modelo de Markowitz 3.Modelo de Black Litterman 4.Índice Sharpe I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.

[2014/16617]

2014

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, gostaria de agradecer ao professor Oswaldo L.V. Costa por sua orientação e direcionamento em relação ao trabalho de conclusão de curso.

Gostaria de agradecer a todos os professores do Curso de Engenharia Financeira da PECE – POLI, e a todos os colegas do curso que foram de grande importância para a minha formação.

Agradeço a Convest Consultoria de Investimentos pelo apoio financeiro e principalmente pelo incentivo e a oportunidade de aprimoramento pessoal e profissional.

Por último, gostaria de agradecer imensamente a minha família. Minha esposa Sandra, minhas filhas Sofia e Laura que sempre estiveram ao meu lado, apoiando e incentivando o meu desenvolvimento pessoal e educacional sendo pacientes nos momentos em que estava dedicando tempo aos estudos. Ao meu pai Abraham, a minha mãe Eliete (in memoriam), aos meus avós: Geraldo e Esther (in memoriam) que sempre foram e são modelos e exemplos a quem pude ter em minha formação de vida. Ao meus irmãos, sobrinhos e a Teresa que sempre foram muito importantes em minha vida.

RESUMO

O trabalho realiza uma otimização do índice sharpe de uma carteira de investimentos pelos modelos de média variância (Markowitz) e pelo modelo de Black Litterman. O estudo envolveu simulações de portfólios ótimos utilizando os dois modelos e comparando o índice sharpe, analisando qual modelo apresentou a melhor relação risco retorno para o portfólio ótimo.

Palavra Chave: índice Sharpe, Markowitz, Black Litterman, Otimização de carteiras.

ABSTRACT

This work presents a Sharpe index optimization of an investment portfolio by the mean variance models (Markowitz) and by Black Litterman model. The study involved simulations of asset allocation of a stock portfolios using the two models and compares the Sharpe index, analyzing which model presented the best risk return to the optimal portfolio

Keywords: indice Sharpe, Markowitz, Black Litterman, portfolio optimization

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	16
Figura 2	28
Figura 3	30
Figura 4	31
Figura 5	33
Figura 6	33
Figura 7	34
Figura 8	34
Figura 9	35
Figura 10	36
Figura 11	36
Figura 12	37
Figura 13	37
Figura 14	38

Sumário

1 INTRODUÇÃO	11
1.1 Objetivo.....	11
1.2 Justificativa.....	12
1.3 Estrutura.....	13
2. MODELO MARKOWITZ	13
2.1 LIMITANTES DO MODELO MARKOWITZ.....	16
3. MODELO BLACK LITTERMAN	19
3.1 Estatística Bayesiana na decomposição do modelo de B&L.....	21
3.2 Estruturação do modelo Black Litterman	22
3.3 Retorno de Equilíbrio Π , otimização reversa.....	23
3.4 Especificações das opiniões: Matriz P, Matriz Q e a Matriz Ω	25
4. OTIMIZAÇÃO DO INDICE SHARPE PARA UMA CARTEIRA DE AÇÕES 29	
4.1 Aplicação.....	29
4.2 Série Histórica.....	29
4.3 Metodologia de Aplicação	30
4.4 Implementação das equações.....	32
4.4.1 Matriz de correlação	33
4.4.2 Matriz de covariância dos excessos de retorno.....	33
4.4.3 Cálculo de Π e visões	34
4.5 Análise dos resultados	34
4.6 Back Test das carteiras.....	36
4.6.1 Volatilidade das carteiras.....	37
5. CONCLUSÃO	39
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	40
ANEXOS	42

1 INTRODUÇÃO

1.1 Objetivo

Em 1952 o artigo apresentado por Harry Markowitz mudou a forma de análise de carteiras de investimentos, dando início a teoria moderna de portfólios onde o método básico de alocação de ativos ou a seleção de carteiras é uma solução de otimização entre: a média (retorno) e a variância (risco). Markowitz (1952) definiu um processo de otimização para a construção de portfólios eficientes em termos de média-variância dos retornos dos ativos financeiros onde estabelece entre o conjunto de resultados a fronteira eficiente para as carteiras de investimentos. De acordo com o critério do modelo, uma carteira eficiente é aquela que procura maximizar o retorno esperado para um dado nível de risco ou o que é o mesmo, minimizar o nível de risco para um dado retorno de modo que o portfólio seja tão diversificado quanto possível.

Ao longo dos anos com aplicações práticas do modelo muitos investidores encontraram dificuldades, pois as carteiras obtidas eram pouco diversificadas, bastante instáveis, pouco evidentes e parciais, pois ativos que apresentam covariâncias baixas ou altas entre si geram inconsistências no modelo. O modelo tende a selecionar ativos com características mais atraentes, ou seja, alta rentabilidade e baixo risco/correlação e vender a descoberto ou desfavorece ativos com características opostas, gerando até mesmo portfólios concentrados.

Investidores se sentem desconfortáveis com este tipo de modelo e acabam adicionando restrições ao modelo para controlar a instabilidade das carteiras resultantes e tentar torná-las mais aderentes as suas expectativas. Contudo, embora tais restrições possam tornar o processo de otimização mais ajustado as expectativas, elas também criam um impasse: quando impomos restrições às vendas descobertas ou a qualquer outro ativo implica numa redução da utilização de diversificação, ou seja, diluindo as próprias vantagens de se utilizar o otimizador.

Fischer Black e Robert Litterman (1991, 1992) desenvolveram um modelo para estimar os retornos dos ativos chamado modelo de Black Litterman. Este modelo contrapõe os problemas enfrentados pelo modelo de Markowitz. Eles basearam-se em métodos bayesianos, combinando várias dados de informação. O modelo pressupõe dois dados de informações sobre os retornos futuros: a) expectativas ou viés pessoal dos investidores e b) equilíbrio de mercado.

O trabalho tem por objetivo fazer uma otimização do Índice Sharpe calculado pelo modelo de Média Variância (Markowitz) e pelo modelo de Black Litterman e verificar se a utilização deste modelo, introduzindo o viés de opiniões dos investidores supera da carteira do modelo Markowitz.

1.2 Justificativa

Atualmente enfrentamos um dilema na gestão de ativos no que diz respeito ao portfólio eficiente, aquele que otimiza a média e variância, ou seja, maximiza o retorno esperado para um dado nível de risco. Qual modelo que melhor explica o comportamento das volatilidades dos ativos para que chegue na carteira ótima.

Nos anos 50 com o artigo pioneiro de Harry Markowitz (1952), definiu um processo de otimização para a construção de portfólios ótimos em termos de média e variância dos retornos dos ativos financeiros. Isso serviu de base conceitual para a análise de carteiras de investimentos, fundando as bases da teoria moderna de portfólios.

Ao longo dos anos outras metodologias foram propostas com o objetivo de aprimorar o processo de otimização de portfólios e de solucionar problemas encontrados na utilização do modelo Markowitz (1952).

Em 1992 o modelo de Black Litterman que estudaremos, calcula os retornos esperados de mercado como uma combinação de um conjunto de

expectativas específicas de cada investidor e um ponto de referência neutro (carteira de mercado).

Este trabalho visa apresentar o Modelo de Markowitz, e apresentar os fundamentos do modelo de B&L, buscando apontar e aprimorar as limitações existentes em Markowitz.

1.3 Estrutura

A organização deste trabalho está dividida em cinco capítulos o qual adiante detalharemos a estrutura.

O primeiro capítulo é a introdução. Neste capítulo englobamos o objetivo do trabalho, justificativa e sua estruturação.

No segundo capítulo os fundamentos teóricos do modelo Markowitz e as críticas que faz- se ao modelo.

No terceiro capítulo os fundamentos teóricos do modelo de Black Litterman. Neste capítulo tratamos também da teoria bayesiana uma abordagem natural para interpretar o modelo de Black Litterman e do modelo CAPM que será o ponto de partida para a carteira de equilíbrio de mercado.

No quarto capítulo trata-se da aplicação prática dos modelos na construção de um portfólio através da utilização do software Excel.

Por último o quinto capítulo faremos as interpretações sobre os resultados obtidos e a conclusão final.

2. MODELO MARKOWITZ

Em artigo publicado no The Journal of Science em 1952, intitulado Portfolio Selection, Markowitz estabelece o que chamamos de Teoria Moderna

de Carteiras. Conforme dito por Costa e Assunção (2007), o modelo de Markowitz (1952) segue a premissa de que o valor esperado e a variância das taxas de retorno em um determinado período são as únicas variáveis levadas em consideração quando investidores tomam decisões de alocação de capital nos ativos que compõem a carteira, ou seja, caso obtivessem carteiras com o mesmo valor de retorno esperado optariam pela de menor risco o que adicionalmente também é outra hipótese do modelo onde os investidores não são tomadores de risco.

Muitos estudos foram realizados com o tema de otimização de carteiras, para padronizar as notações matemáticas que utilizarei ao longo do trabalho, tomarei como base as utilizadas por Costa e Assunção (2007).

Markowitz identificou a necessidade de se considerar às características individuais dos ativos para montar uma carteira.

Considerando uma carteira com n ativos:

P = retorno carteira;

R_1 = retorno do ativo 1

R_2 = retorno do ativo 2

R_n = retorno do ativo n

r_1 = retorno esperado do ativo 1

r_2 = retorno esperado do ativo 2

r_n = retorno esperado do ativo n

Σ = matriz de covariância

Aloca-se um peso w_i no ativo com retorno R_i de modo que:

$$P = \sum_{i=1}^n w_i R_i, \sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (2.1)$$

Notação vetorial

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = E(R) = \begin{pmatrix} E(R_1) \\ \vdots \\ E(R_n) \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \text{cov}(R) = E((R - r)(R - r)'). \quad (2.2)$$

Segue que a média do retorno P , denotada por μ , é dado por:

$$\mu = E(P) = E(w' R) = w' E(R) = w' r \quad (2.3)$$

e a variância de P , denotada por σ^2 , é dado por

$$\sigma^2 = w' \Sigma w \quad (2.4)$$

Deseja-se então resolver os seguintes problemas de otimização:

Para um dado valor de μ (rentabilidade esperada)

$$\text{Min } w' \Sigma w \quad (2.5)$$

Ou

Para um dado valor de σ^2 (variância)

$$\text{Max } w' R \quad (2.6)$$

ambos sujeitos a

$$w' r = \mu \quad (2.7)$$

$$w' e = 1 \quad (2.8)$$

$$w \in \mathbb{R}^n \quad (2.9)$$

No modelo acima os investidores levam em consideração a correlação dos movimentos que são as covariâncias dos ativos. Os investidores têm função de utilidade quadrática, ignorando neste caso a não normalidade e levando em conta que os retornos são multivariadamente normais. De acordo com Markowitz (1952) os inputs necessários para criar uma carteira eficiente são: excesso de retorno de cada ativo, a variância de cada ativo e covariância entre todos os ativos usados pelo modelo.

Assume-se nesse modelo querer sempre o maior retorno esperado dado o menor nível de risco.

O conjunto de pontos determinados pela combinação do risco – retorno do que chamamos de fronteira eficiente no quadro abaixo têm se fronteira em diferentes graus de correlação entre ativos.

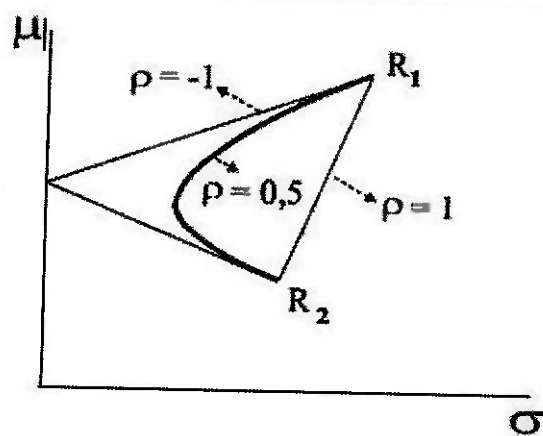


figura 1

2.1 LIMITANTES DO MODELO MARKOWITZ

No artigo *The Markowitz optimization Enigma: Is "Optimized" Optimal?* (1989), Michaud discute os problemas práticos encontrados no modelo. Michaud (1989) analisou em seu paper tanto pontos positivos quanto negativos porém priorizou as limitações do modelo, principalmente na questão que o modelo de média-variância maximiza os erros de estimação dos parâmetros na medida em que se obtém médias amostrais a partir de dados históricos, substituindo o retorno esperado pela média amostral. Para Michaud a instabilidade do modelo faz com que pequenas alterações nos dados de entrada pode causar alterações significativas na composição da carteira. O ponto é que a otimização quase sempre recomenda carteiras com enormes pesos negativos em diversos ativos, e nem sempre gestores, alocadores e investidores têm a permissão para tomar posições vendidas.

A distribuição estatística de uma série histórica de retorno nem sempre segue uma distribuição normal gaussiana, dado o contexto macroeconômico o preço do ativo oscila/ muda bastante.

Por ser um modelo de otimização quadrática com restrições tem de utilizar o método multiplicado de lagrange para obter a solução.

- Os investidores pelo modelo têm função utilidade quadrática, caso em que ignoram a não normalidade dos dados.
- Os retornos são multivariadamente normais, caso em que a função utilidade específica do investidor é irrelevante.

Para Michaud (1989), o modelo, muitas vezes, leva a carteira eficiente sem relevância, e estudos ao longo do tempo mostraram que mesmo adotando pesos iguais aos ativos pode ser superior ao modelo de otimização de Markowitz. No artigo Michaud elenca outras limitações, elas são:

- A otimização maximiza erros. Dado que os preços dos ativos oscilam e muito sem ter uma previsibilidade exata e correta dos retornos, das variâncias e covariâncias, as estimativas baseadas em séries históricas estão sujeitas a erro. O modelo acaba colocando mais peso em ativos com alto retorno e correlação negativa, e coloca menos peso em ativos com baixa expectativa de retorno e correlação positiva.
- Michaud diz que usar dados históricos para gerar uma média e utilizar essa média como retorno esperado ajuda a maximizar o erro do modelo.

Markowitz não leva em conta a participação de mercado dos ativos, o Market cap. Caso o ativo com baixa capitalização, porém com alto retorno e correlação negativa com outros ativos da carteira, o modelo sugere um alto peso para ele. Esse tipo de critério torna-se um problema principalmente quando se coloca restrições a posições shorts (venda de ativos).

O modelo de média-variância não diferencia diferentes níveis de incerteza associados as estimativas imputadas no modelo tornando os modelos instáveis. Qualquer pequena mudança no retorno utilizado na carteira gera grandes mudanças.

Estimar a covariância pode também ser um grande problema. Para carteiras com muitos ativos, o número de variância torna-se também muito grande como também a matriz de covariância, dificultando a estimativa.

Desta forma, obtém-se carteiras instáveis com elevada sensibilidade a estimativas de retornos esperados, gerando muitas vezes portfólios altamente concentrados.

Portanto, o resultado são carteiras pouco diversificadas, e por vezes bem concentradas em determinados ativos.

Embora existam várias desvantagens no uso do modelo de média-variância de Markowitz, a idéia de maximizar retorno ao menor nível de risco possível determinou padrões na teoria moderna de carteiras estabelecendo um modo intuitivo. A constante busca por aperfeiçoar o modelo e torná-lo mais estável continua. O modelo a seguir que iremos explicar foi um deles, o modelo de Black Litterman (1992).

3. MODELO BLACK LITTERMAN

O modelo B&L foi publicado por Fischer Black e Robert Litterman em 1990, é uma ferramenta quantitativa que combina a visão do investidor e uma carteira de equilíbrio de mercado. O modelo estima o equilíbrio de retorno dos ativos, combinando esses retornos com a visão do investidor para derivar uma nova estimativa atualizada.

B&L surgiu como proposta de diminuição dos problemas enfrentados no modelo de Markowitz.

O modelo BL fornece um ponto de partida neutro e intuitivo uma vez que o equilíbrio de longo prazo pode ser considerado o comportamento do investidor que representa o mercado como um todo. Uma vez os investidores tendo as mesmas opiniões.

Essas estimativas de retorno podem ser alimentadas por uma ferramenta de otimização de portfólio para traçar uma nova fronteira eficiente. O que o modelo de B&L fez foi combinar idéias do modelo Markowitz e o CAPM – Capital Asset Pricing Model, modelo desenvolvido por John Lintner e William Sharpe de precificação de ativos pelo mercado em equilíbrio e baseado num modelo de otimização de média-variância. Pelo CAPM, todos os investidores assumem o mesmo modelo de otimização por média-variância estabelecendo uma carteira de mercado formada por carteiras de mínima variância com pesos, retornos e variância de mercado.

O modelo B&L foi desenvolvido para prover pesos neutros aos investidores que podem ser ajustados de acordo com suas opiniões. O que B&L fez foi partir da carteira de equilíbrio de mercado e criar inputs ao modelo que seriam a visão do investidor. Caso o investidor não tenha uma opinião formada a respeito do retorno do ativo ele pode ficar neutro ou utilizar os valores neutros gerados pela carteira de equilíbrio de mercado. Caso o investidor tenha opinião sobre o retorno do ativo ele calibra de acordo com sua convicção, dando mais ou menos peso ao ativo.

Enquanto Markovitz gera pesos em uma carteira para os ativos através de um processo de otimização, B&L parte de uma carteira de mercado em equilíbrio de longo prazo (CAPM).

O modelo também permite ao investidor expressar suas visões de curto prazo, fornecendo uma estrutura para poder combinar de forma consistente as variáveis: carteira equilíbrio mercado e visão do investidor, gerando um conjunto de retornos esperados, a partir do qual os pesos em cada um dos ativos são fornecidos.

Modelo B&L na verdade é uma combinação entre os modelos de Markovitz e CAPM pois ele parte de uma carteira de equilíbrio de mercado originada pela fronteira eficiente e com as visões do investidor para cada ativo vai calibrando para mais ou menos o ativo ou se não fica neutro.

Segundo Jay Walters (2014) o modelo trouxe duas significativas contribuições à teoria de alocação de carteiras.

1º) o lado intuitivo, o equilíbrio de mercado, como ponto de partida para estimar o retorno dos ativos.

- Trabalhos similares têm como ponto de partida uma distribuição uniforme "uninformativa".

- otimização reversa gera distribuições estáveis do retorno do equilíbrio da carteira de mercado

2º) modo claro de mensurar a visão específica do investidor

- visão do investidor pode ser parcial ou total

O retorno dos ativos seguem a mesma distribuição de probabilidade (normalmente a distribuição normal é selecionada mas os investidores podem escolher qual a distribuição que mais se adequa).

3.1 Estatística Bayesiana na decomposição do modelo de B&L

Para então decompor o modelo B&L utilizaremos a abordagem da teoria estatística Bayesiana, onde é possível combinar informações de diferentes fontes e modelar a incerteza inerente a essa informação (Herold, 2003).

A abordagem Bayesiana (distribuição condicional) permite incorporar a informação prévia e o que será considerado informação amostral o intuito é misturar as informações de mercado, com informações do investidor, entretanto faz-se necessário definir o que será considerado informação prévia e informação amostral. Satchell e Scowcroft assim como Christoudoulakis e Cass, usam as opiniões dos investidores como informações prévias e a informação de mercado (retorno de equilíbrio) como informação amostral para atualizar a informação prévia gerando o retorno esperado a posteriori, ou seja, a visão dos investidores seria a informação prévia e a carteira de equilíbrio de mercado ou o retorno de equilíbrio seria informação amostral.

Sob a ótica da Teoria de Bayesiana, o modelo é assim construído, considerando duas possibilidades de eventos:

A = retorno esperado

B = retorno de equilíbrio

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A) \Pr(A)}{\Pr(B)}$$

Considera-se:

- $\Pr(A)$ probabilidade a priori de A, corresponde as hipóteses sobre a distribuição da média dos retornos. Nesse caso a distribuição a priori está relacionada à incerteza em se estimar a média dos retornos e não a variância dos retornos;

- $\Pr(B)$ probabilidade a priori de **B**, seria a distribuição do investidor, e que não será modelada pois desaparece como constante de integração;
- $\Pr(B|A)$ é a probabilidade a posteriori de **B** condicional a **A**. Neste caso seria a função densidade probabilidade do retorno de equilíbrio a visão do investidor, dada à informação obtida do equilíbrio de mercado de longo prazo CAPM;
- $\Pr(A|B)$ é a probabilidade a posteriori de **A** condicional a **B**. Seria a função densidade probabilidade do retorno esperado, dada a informação obtida pela visão do investidor

3.2 Estruturação do modelo Black Litterman

Os retornos esperados a partir da equação de longo prazo (CAPM) podem ser obtidas através da otimização reversa:

$$\text{Max}_{\omega} = \left\{ \omega' \Pi - \frac{\delta \omega \Sigma \omega}{2} \right\} \text{ cuja solução é dada por:} \quad (3.1)$$

$$\omega^* = (\delta \Sigma)^{-1} \Pi \text{ a partir do qual se pode obter} \quad (3.2)$$

$$\Pi = \delta \Sigma \omega \quad (3.3)$$

Onde:

Π = retornos implícitos na equação de mercado

Σ = matriz de covariância

ω = composição da carteira de mercado

δ = coeficiente de aversão ao risco

O resultado é obtido por “otimização reversa” e Π traz os retornos esperados implícitos na equação de mercado, que servirão como ponto de partida neutro para incorporar as visões dos investidores a respeito de retornos futuros.

Segundo Wolfgang Dobretz: “Intuitivamente este procedimento está proximamente ligado ao CAPM. Este modelo prediz que preços vão se ajustar até que, em equilíbrio de mercados os retornos serão tais que a demanda por estes ativos seja exatamente a oferta disponível”.

De forma que:

$$r \sim N(\mu, \Sigma) \quad (3.4)$$

$\mu = \Pi + \epsilon^{(e)}$ sendo por hipótese $\epsilon^{(e)} \sim N(0, \Sigma \Pi)$

3.3 Retorno de Equilíbrio Π , otimização reversa

Para determinar a carteira de equilíbrio de mercado utilizaremos a fórmula do modelo CAPM:

$$E(R) \text{ ou } \mu = r_f + (\mu_M - r_f) \beta + Z; \quad (3.5)$$

$$\text{onde } \beta = \frac{\text{cov}(P_M, P)}{\sigma^2_M} \quad (3.6)$$

Onde:

r_f = taxa livre de risco

$(\mu_M - r_f)$ = excesso de retorno do portfólio de mercado

β = coeficiente de regressão

de aversão ao Z = resíduo, ou excesso de retorno de ativos específicos

O modelo de B&L segundo Izdorek (2002) utiliza o retorno de equilíbrio como um ponto de partida neutro. Eles são derivados utilizando uma otimização reversa. Para isso definimos a seguinte função de utilidade quadrática:

$$U = \omega^T \Pi - \left(\frac{\delta}{2}\right) \omega^T \Sigma \omega \quad (3.7)$$

U = Função utilidade investidor

ω^T = vetor de pesos investidos em cada ativo

Π = vetor de retornos equilíbrio de excesso de retorno para cada ativo

δ = coeficiente de aversão ao risco médio de mercado

Σ = matriz de covariância de ativos

Usando uma função côncava, terá um máximo global único, maximizando a utilidade teremos uma solução fechada.

$$\frac{dU}{d\omega} = \Pi - \delta \Sigma \omega = 0 \quad (3.8)$$

Resolvendo a equação por Π , multiplica-se ambos os lados da equação por w' e chega no coeficiente risco (δ), para depois chegar em Π

$$w' \Pi = \delta w' \Sigma w, \text{ portanto}$$

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{w'\Pi}{w'\Sigma w} = \\ &= \Pi = \delta \Sigma w\end{aligned}\quad (3.3)$$

A fim de utilizar a fórmula é preciso ter um valor para o coeficiente de aversão ao risco (δ):

$\mu_m - r_f = \delta \sigma_m^2$ com isso o coeficiente de aversão ao risco, δ é determinado como:

$$\delta = \frac{\mu_m - r_f}{\sigma_m^2} \quad (3.9)$$

onde:

$(\mu_m - r_f)$ = excesso de retorno de mercado

σ_m^2 = variância carteira de mercado

Uma vez que temos valores para δ , inserimos w , δ , Σ na equação $\Pi = \delta \Sigma w$ e geramos o vetor de retornos de equilíbrio dos ativos.

A fórmula $\Pi = \delta \Sigma w$ é a solução fechada para o problema de otimização reversa de ativos, gerando retornos dos ativos para uma carteira ótima de média-variância sem restrições.

Observa-se que as informações históricas não influenciam diretamente na determinação de Π . Portanto a distribuição prévia para o modelo de B&L é representada por $\mu \sim N(\Pi, \tau \Sigma)$, e representa a estimativa da média da distribuição dos excessos de retornos.

A partir da fórmula para o excesso de retorno esperado (Π) é possível obter o vetor de pesos ótimos:

$$w = \Pi [\delta(1+\tau)\Sigma]^{-1} \quad (3.10)$$

na equação acima surge o parâmetro escalar (τ) que é o grau de incerteza do investidor sobre a validade do CAPM. Pode também ser interpretado como um parâmetro que representa a incerteza sobre a precisão com que se estima o vetor Π . Um pequeno valor de τ equivale a um alto nível de confiança nas estimativas de retorno de equilíbrio.

Izdorek (2004) estabelece um valor entre 0,01 e 0,05. Assim os pesos atribuídos aos ativos são menores em $[1/(1+\tau)]$ do que os pesos de mercado CAPM. Isso se deve pois o investidor bayesiano é incerto em sua estimativa da prévia e portanto não quer estar 100% investidos em ativos de risco.

3.4 Especificações das opiniões: Matriz P, Matriz Q e a Matriz Ω

Os investidores, gestores de recursos e alocadores possuem suas próprias opiniões sobre o comportamento do ativo e seu retorno. Estas opiniões podem divergir dos retornos implicitamente determinados pelo mercado. A idéia por trás de B&L é combinar o retorno de equilíbrio com as visões (opiniões) específicas dos agentes sobre o retorno de mercado. Essas opiniões são definidas como distribuição condicional.

O modelo permite que estas visões sejam inseridas no modelo tanto em termos absolutos quanto em termos relativos.

Para a construção, é importante que cada opinião seja não correlacionada com as outras. Isto fará da distribuição condicional a propriedade que a matriz de covariância seja diagonal e com todas as entradas fora da diagonal igual a zero. Não é exigida uma opinião sobre todos os ativos. As visões são independentes uma das outras. Porém o modelo exige disciplina e coerência pois serão levados em consideração para a obtenção da carteira ótima. Então o investidor tem um conjunto de K opiniões representadas por relações lineares.

Uma opinião é expressa de forma que o retorno esperado de uma carteira P é normalmente distribuído com média Q e um desvio padrão w.

As n opiniões com seus respectivos retornos são representados como:

$$P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$$

$$Q = [Q_1, Q_2, \dots, Q_n]$$

As opiniões são expressas:

$$P.\mu = Q + \epsilon \quad (3.11)$$

$$Q + \epsilon = \begin{bmatrix} Q1 \\ \vdots \\ Qk \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon1 \\ \vdots \\ \epsilon k \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Onde:

P, matriz (K x n) dos pesos das visões de cada ativo (para visões relativas à soma dos pesos = 0; para visões absolutas a soma será = 1);

Q, vetor (Kx1) dos retornos de cada visão;

ϵ – vetor aleatório Kx1, normalmente distribuído com $\mu = 0$, média zero e matriz diagonal das covariâncias Ω , ou seja, $P.\mu \sim N(Q, \Omega)$

Onde Ω , matriz diagonal (K x K) de covariância das visões (a variância é inversamente relacionada com a confiança dos investidores nas visões).

Segundo Litterman (2003) não existe um método padrão para determinar a matriz de covariância das visões, Ω .

Cabe ao investidor saber esses parâmetros e de maneira intuitiva ver se faz ou não, sentido. Caso o investidor não esteja muito convicto de sua opinião, a carteira então perderá para a carteira de equilíbrio. Agora caso o investidor esteja convicto de sua opinião a composição de sua carteira final terá um peso relevante das opiniões e a carteira se distanciará da carteira de equilíbrio de mercado.

Existem diversas formas de se calcular Ω , uma delas é assumir que a variância das visões é proporcional a variância dos retornos dos ativos, assim como a variância de distribuição de referencia.

Neste caso, segundo He e Litterman (1999),

$$\Omega = \text{diag}(P.(T\Sigma).P')$$

Suponha um universo de investimento com três ativos: X, Y e Z e as seguintes opiniões:

- o ativo X apresentou um retorno de 5%;
- o ativo Y irá exceder o Z em 3%.

A primeira visão é absoluta e a segunda relativa. Os elementos de uma linha da matriz P que é a absoluta deverá somar 1 enquanto a relativa deverá somar 0. De acordo com o citado acima, temos:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para casos que se tenha K visões e n ativos a matriz de covariância das visões assume o formato abaixo

$$\Omega = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & w_k \end{bmatrix}$$

Conceitualmente, o modelo B&L é uma média ponderada do vetor de excesso de retorno de equilíbrio implícito (Π) e do vetor visões(Q), e seus relativos pesos são uma função escalar (τ) e as incertezas de visões (Ω).

Fórmula do Retorno Esperado do modelo de Black Litterman

O modelo combina o equilíbrio de mercado com as opiniões dos investidores de acordo com uma abordagem bayesiana para que se possa gerar a distribuição a posterior dos retornos esperados $E(R) = \mu$, dada por:

$$E(R) = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1} P]^{-1} \cdot [(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1} Q] \text{equação n.}$$

Onde:

$E(R)$ = nova distribuição combinada do vetor de retorno

τ = escalar = 1

Σ = matriz de covariância de $(R_i - r_i)$

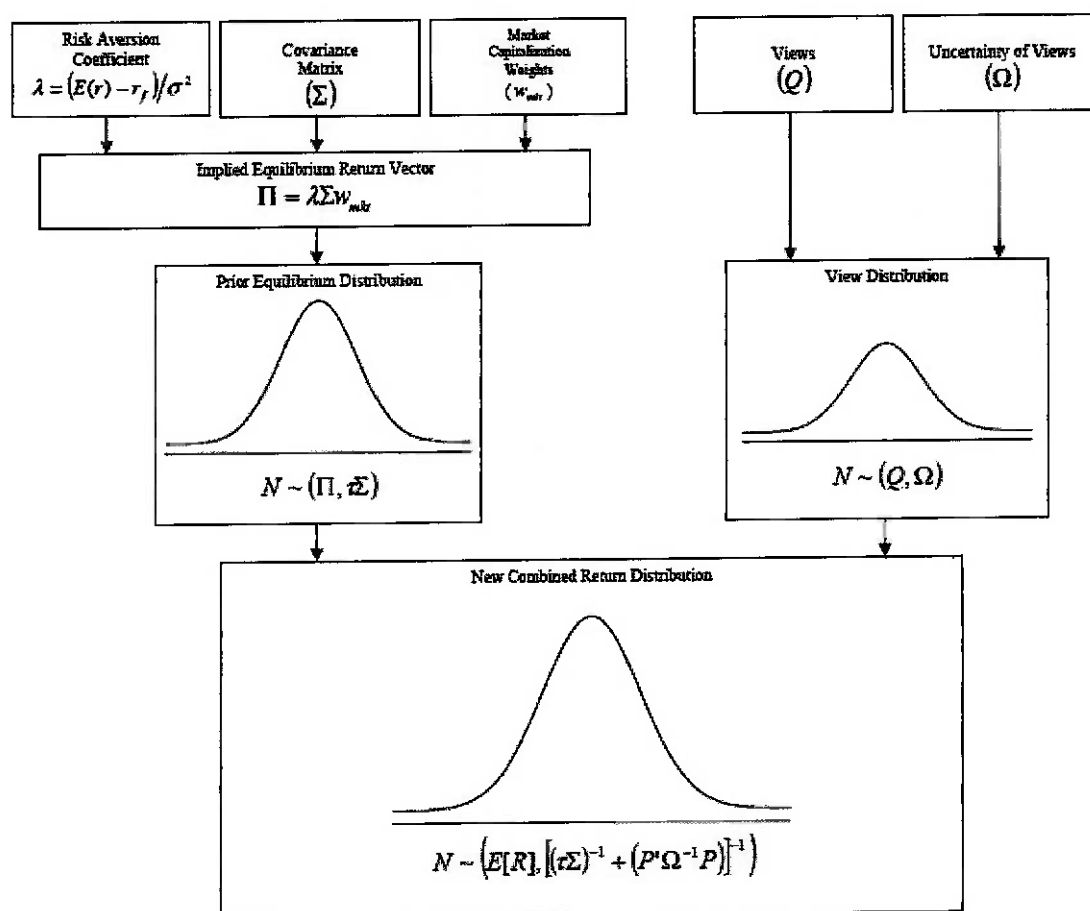
P = matriz de identificação dos ativos que possuem opiniões

Ω = diagonal da matriz de covariância das opiniões. Nível de confiança da opinião.

Π = vetor de retornos implícitos de equilíbrio

Q = vetor das visões

A figura abaixo resume o processo de combinar as duas fontes de informação, o equilíbrio de mercado + visão do investidor



* The variance of the New Combined Return Distribution is derived in Satchell and Scowcroft (2000).

Figura 2.

Fonte: Izdorek, 2004

4. OTIMIZAÇÃO DO ÍNDICE SHARPE PARA UMA CARTEIRA DE AÇÕES

4.1 Aplicação

Neste capítulo será detalhado de forma prática o passo a passo da teoria de Markowitz (1952) e Black Litterman (1992) abordada nos capítulos 2 e 3, otimizando o Índice Sharpe para uma carteira com sete ações.

Toda a aplicação foi desenvolvida utilizando planilha Excel e seu suplemento solver.

4.2 Série Histórica

Para a execução da otimização foram utilizados preços históricos de sete ações listadas na BM&F Bovespa e obtidos pelo sistema Bloomberg. O período da série é de 05/10/2011 até 31/12/2014.

Vale destacar que os valores históricos obtidos das 07 ações são preços ajustados, corrigidos por proventos, ou seja, mesmo que tenham ocorrido eventos como pagamento de dividendos, grupamentos (*inplits*) e desdobramentos (*splits*) durante o período determinado, os resultados da simulação serão íntegros, ou seja, não serão distorcidos em função dos eventos mencionados acima.

As ações foram:

- Cielo ON = CIELO3, setor de serviços financeiros.
- Equatorial Energia ON = EQTL3, setor energia elétrica.
- Banco Bradesco PN = BBDC4, setor de bancos.
- Kroton ON = KROT3, setor de educação.
- Souza Cruz ON = CRUZ3, setor consumo não cíclico.
- Lojas Renner ON = LREN3, setor consumo cíclico.
- Brasil Foods ON = BRFS3, setor carnes e derivados.

Além das ações capturamos a série histórica de preços do Índice Bovespa, CDI e o preço de capitalização de mercado de cada uma das ações. Todos os preços são de fechamento.

4.3 Metodologia de Aplicação

A metodologia para o desenvolvimento da otimização seguiu as seguintes etapas:

- Obtenção dos preços de fechamento histórico;
- Determinação dos intervalos de datas a serem analisados;
- Implementação de todos os cálculos e algoritmos no software Excel com a utilização do Solver;
- Outputs de tabelas e gráficos com os retornos, volatilidade, Índice de Sharpe e Backtest das carteiras.
- Análise comparativa dos resultados

Toda a otimização para maximização do IS seguiu janelas de tempo agrupadas em 252 dias, deslocando esse grupo de 252 dias sempre em D+1, p.ex. de 05/10/2014 até 08/10/2012 depois 06/10/2011 até 09/10/2012 e assim por diante até que o último grupo tenha como data término o dia 31/12/2014. Isso foi feito tanto para o modelo de média variância quanto para B&L.

A dinâmica da otimização é implementar através do Solver do software Excel uma maximização do IS com os parâmetros abaixo:

Média Historica (Markowitz)

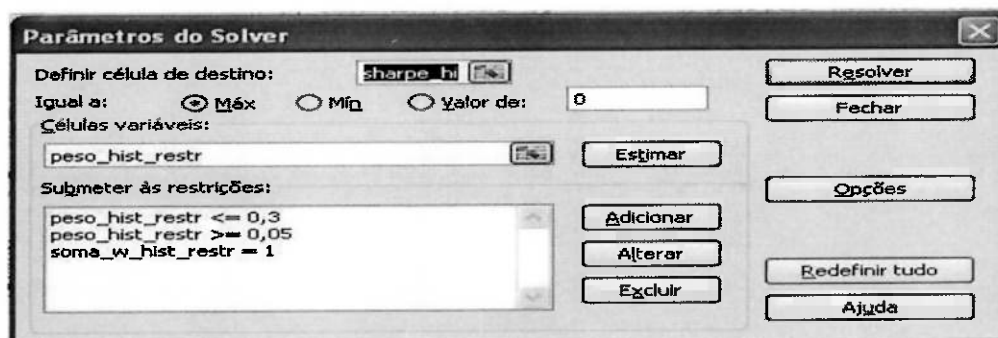


Figura 3

Black - Litterman

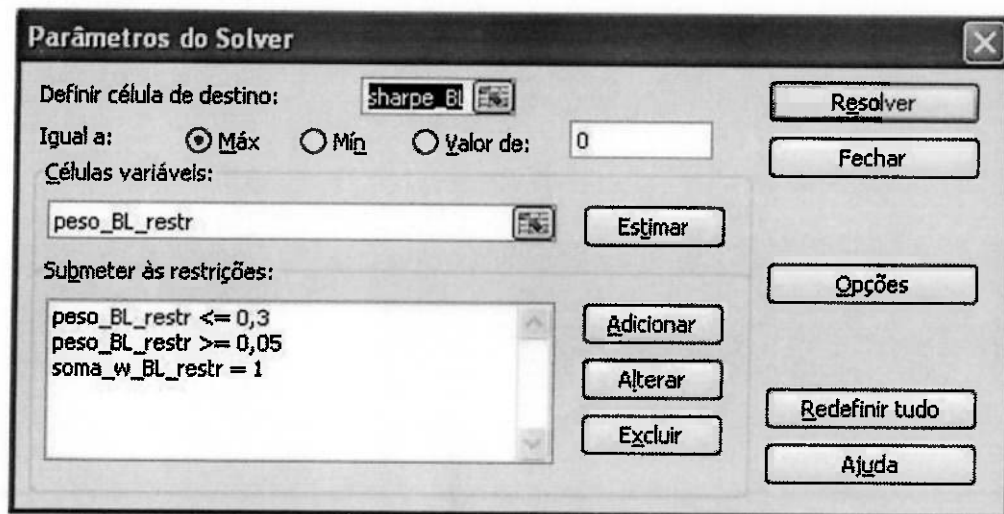


Figura 4

Os parâmetros utilizados foram iguais em ambos modelos:

- Maximizar o IS a relação risco retorno que na planilha é a fórmula $IS = \frac{(\mu - rf)}{\sigma}$ (4.1)
- Variando os pesos
- Com as seguintes restrições: os pesos por ativo não podem ser menores que 5% e nem maiores do que 30%;
- A soma dos pesos tem de ser igual a 1

Uma vez estabelecidos os parâmetros e restrições, calcula-se para cada janela de 252 dias os: excessos de retornos para média histórica que compreende $(\mu - rf)$, Σ (matriz de covariância) e a variância e para o modelo de Black Litterman se aplica à fórmula (3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14) que compreende não somente a distribuição dos retornos implícitos de equilíbrio Π mas também a distribuição das visões na matriz Q e Ω .

Cria-se a partir de então um processo de otimização onde para cada janela de 252 dias obtemos um IS maximizado, o que por consequência nos gera um peso para cada janela que nos gera um resultado de risco e retorno.

Após a obtenção dos resultados, realizamos um backtest das carteiras utilizando os pesos gerados por ação para podermos analisar o comportamento da rentabilidade da carteira.

4.4 Implementação das equações

Para a média variância as equações utilizadas foram as equações 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4 e para Black Litterman o ponto de partida dos pesos foi o market cap das ações, ou seja, a média do valor de mercado para cada janela de 252 dias. Aí tínhamos o valor de mercado de cada ação no período, a somatória desse valor de mercado das 7 ações compunham o valor total de mercado da carteira e encontrávamos o peso de cada um dividindo o valor de mercado de cada ação pelo da somatória da carteira. Chegamos então num peso de cada ação na carteira.

O modelo de B&L combina a carteira de equilíbrio de mercado, mas também a visão do investidor, então definimos duas condições de visões para o modelo:

- a) A ação da Kroton outperforma, ou seja, supera a ação da Souza Cruz em 20% a.a. trazida em um dia útil;
- b) A ação da Equatorial Energia outperforma, ou seja, supera a ação das Lojas Renner em 15% a.a. trazida em um dia útil.

Todas as variáveis foram calculadas na base diária.

A partir dessa visão aplicamos a 3.14 e obtemos uma nova distribuição combinada de retorno esperado.

Um fator importante no modelo de B&L é o δ (coeficiente de aversão ao risco) neste caso conforme a literatura utilizamos o valor de 1,5.

4.4.1 Matriz de correlação

Para calcular a matriz de correlação utilizamos a janela do período total de observações que foi do dia 05/10/2011 ate 31/12/2014

Correlação	CIELO3	EQTL3	BBDC4	KROT3	CRUZ3	LREN3	BRFS3
CIELO3	1,00						
EQTL3	0,18	1,00					
BBDC4	0,32	0,26	1,00				
KROT3	0,25	0,16	0,32	1,00			
CRUZ3	0,22	0,18	0,30	0,20	1,00		
LREN3	0,22	0,20	0,426	0,30	0,29	1,00	
BRFS3	0,19	0,09	0,40	0,18	0,23	0,31	1,00

Figura 5

4.4.2 Matriz de covariância dos excessos de retorno

Para calcularmos a matriz dos excessos de retornos utilizamos agrupamentos de janelas de 252 dias úteis e a média dos produtos dos desvios de cada ativo calculados diariamente

	Matriz VariânciaCovariância $\sum (S)$						
	CIELO3	EQTL3	BBDC4	KROT3	CRUZ3	LREN3	BRFS3
CIELO3	0,0002502	0,0000458	0,0000937	0,0000740	0,0000562	0,0000643	0,0000455
EQTL3	0,0000458	0,0002472	0,0000756	0,0000475	0,0000466	0,0000574	0,0000218
BBDC4	0,0000937	0,0000756	0,0003360	0,0001079	0,0000900	0,0001439	0,0001121
KROT3	0,0000740	0,0000475	0,0001079	0,0003452	0,0000611	0,0001031	0,0000525
CRUZ3	0,0000562	0,0000466	0,0000900	0,0000611	0,0002734	0,0000889	0,0000581
LREN3	0,0000643	0,0000574	0,0001439	0,0001031	0,0000889	0,0003395	0,0000892
BRFS3	0,0000455	0,0000218	0,0001121	0,0000525	0,0000581	0,0000892	0,0002369

Figura 6

4.4.3 Cálculo de Π e visões

Para utilizar a fórmula do vetor de retornos implícitos de equilíbrio (Π) foi necessário especificar o valor de coeficiente de aversão ao risco (δ), neste exercício utilizamos o valor de 1,5. Aplicamos a fórmula 3.3

$$\Pi = \mu - r_f = \delta \sum \omega$$

excesso de retorno esperado:	visões incorporadas	Π
CIELO3	0,020%	0,014%
EQTL3	0,029%	0,022%
BBDC4	0,004%	0,017%
KROT3	0,017%	0,009%
CRUZ3	-0,001%	0,011%
LREN3	-0,004%	0,011%
BRFS3	0,003%	0,009%

Figura 7

view positivo	view negativo	outperform
Kroton	souza cruz	20% a.a
equatorial	renner	15% a.a

Figura 8

4.5 Análise dos resultados

Os resultados obtidos com a otimização podem ser observados na figura 9 abaixo.

Estabelecemos três variáveis para acompanhar:

- retorno esperado;
- volatilidade;
- Índice Sharpe

Dependendo das janelas observadas temos um desempenho predominante da média variância (trataremos por MH) em outras janelas o desempenho predomina B&L já em outros temos retornos melhores obtidos por MH em outros por B&L e assim para a volatilidade e para o IS.

Em 12 janelas de observação tivemos para o retorno esperado 8 vezes para MH e somente 4 para B&L o que mostra que os melhores retornos obtidos predominaram o modelo de MH.

Para a volatilidade tivemos duas janelas para a MH e 10 para o modelo de B&L o que corrobora com o já mencionado de que a carteira gerada pelo modelo B&L mesmo não obtendo retornos melhores apresenta um nível melhor de diversificação e por consequência menores volatilidades.

Para o Índice de Sharpe que trataremos como tivemos um empate com 6 observações positivas para o modelo MH e outras 6 para o modelo B&L.

período		MÉDIA HISTÓRICA			BLACK LITTERMAN			Desempenho		
início	fim	E(R)	Vol a.a	IS MH	E(R)	Vol a.a	IS BL	> E(R)	< Vol a.a	> Sharpe
05/10/2011	03/10/2012	1,03%	18,79%	0,17	1,02%	21,43%	0,08	MH	MH	MH
07/11/2011	05/11/2012	1,43%	15,26%	0,46	1,55%	16,92%	0,37	BL	MH	MH
05/12/2011	03/12/2012	1,05%	14,92%	0,27	1,04%	14,85%	0,24	MH	BL	MH
08/01/2012	07/01/2013	1,12%	13,13%	0,83	1,10%	11,07%	0,92	MH	BL	BL
06/02/2012	06/02/2013	0,03%	15,38%	0,19	0,06%	13,57%	0,17	BL	BL	MH
05/03/2012	06/03/2013	0,31%	10,25%	0,51	0,56%	9,92%	0,51	BL	BL	BL
05/04/2012	09/04/2013	0,38%	18,53%	0,06	0,56%	16,61%	0,06	BL	BL	BL
07/05/2012	08/05/2013	0,36%	16,83%	0,51	0,26%	13,36%	0,59	MH	BL	BL
05/06/2012	07/06/2013	1,00%	15,11%	0,01	-0,87%	14,16%	-0,06	MH	BL	MH
01/10/2013	30/09/2014	0,90%	22,79%	-0,44	0,90%	19,31%	-0,46	MH	BL	MH
02/12/2013	28/11/2014	1,10%	28,48%	0,35	0,13%	26,00%	0,40	MH	BL	BL
03/01/2014	31/12/2014	0,00%	26,41%	-0,38	0,00%	22,90%	-0,37	MH	BL	BL
		0,73%	17,99%	0,21	0,53%	16,68%	0,20			

Figura 9

Trabalhamos com duas janelas móveis, uma com 21 dias úteis e a outra com 63 dias úteis e podemos observar graficamente o comportamento, muito parecido.

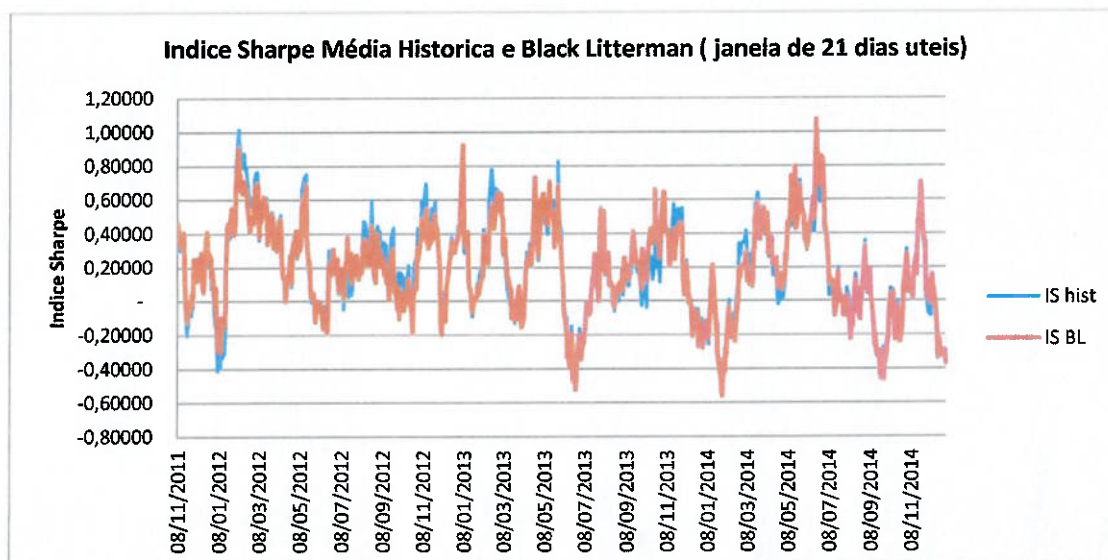


Figura 10

Assim também para janelas de 63 dias úteis.

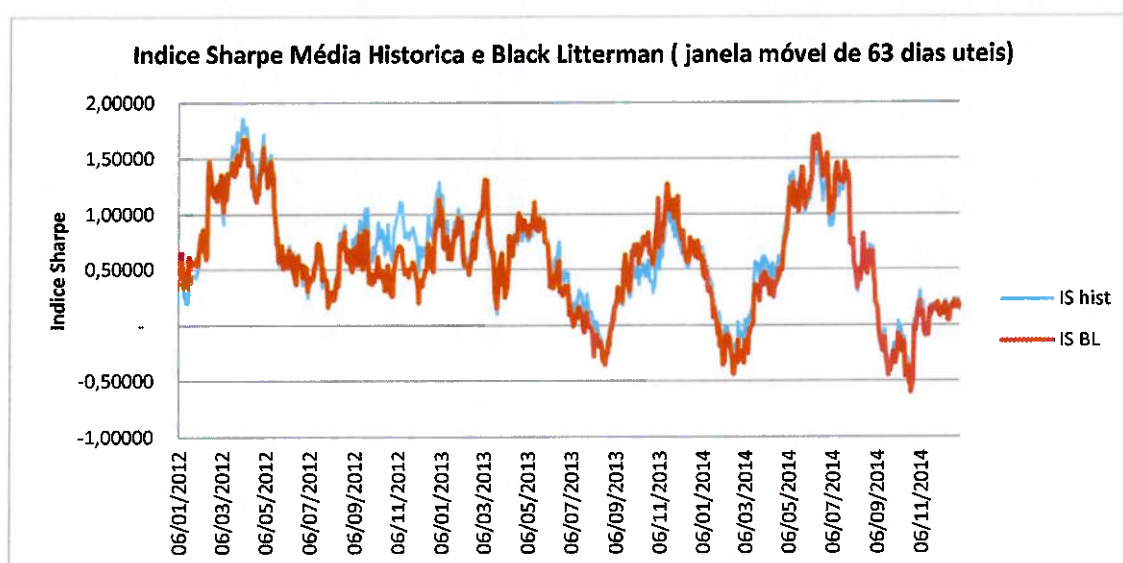


Figura 11

4.6 Back Test das carteiras

Dados os pesos da otimização resolvemos aplicar o backtest da carteira com os respectivos benchmarks: o índice Bovespa e o CDI.

Percebemos que a evolução da rentabilidade da carteira com média variância performou melhor que a carteira do modelo de Black Litterman com uma correlação de 0,99 entre as carteiras.

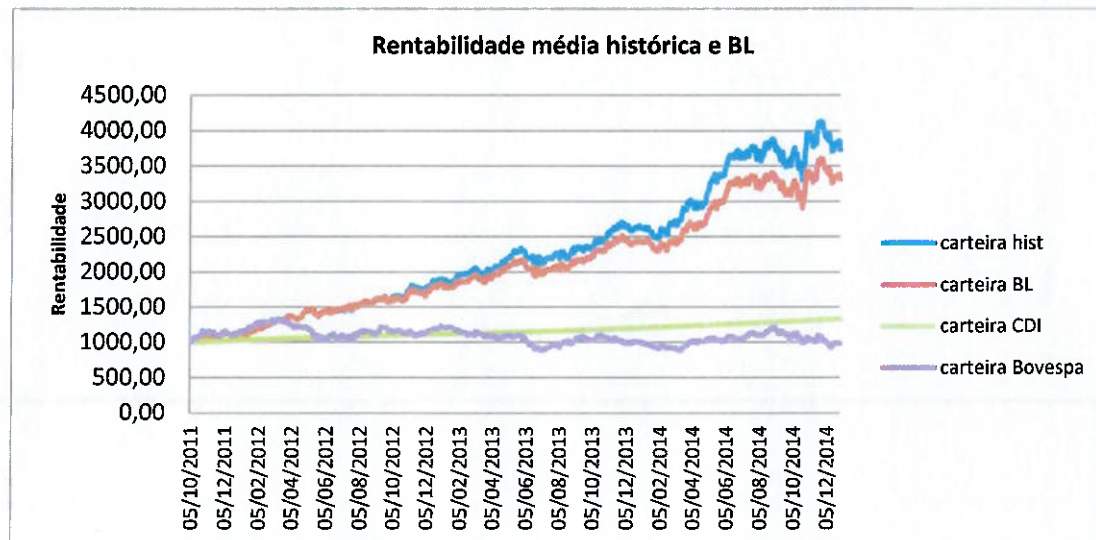


Figura 12

4.6.1 Volatilidade das carteiras

Já a volatilidade resolvemos estabelecer dois critérios de janela móvel para entender com 21 dias úteis e com 63 dias úteis e em ambas janelas o modelo Black Litterman mostrou-se uma carteira ligeiramente menos volátil do que a da média variância.

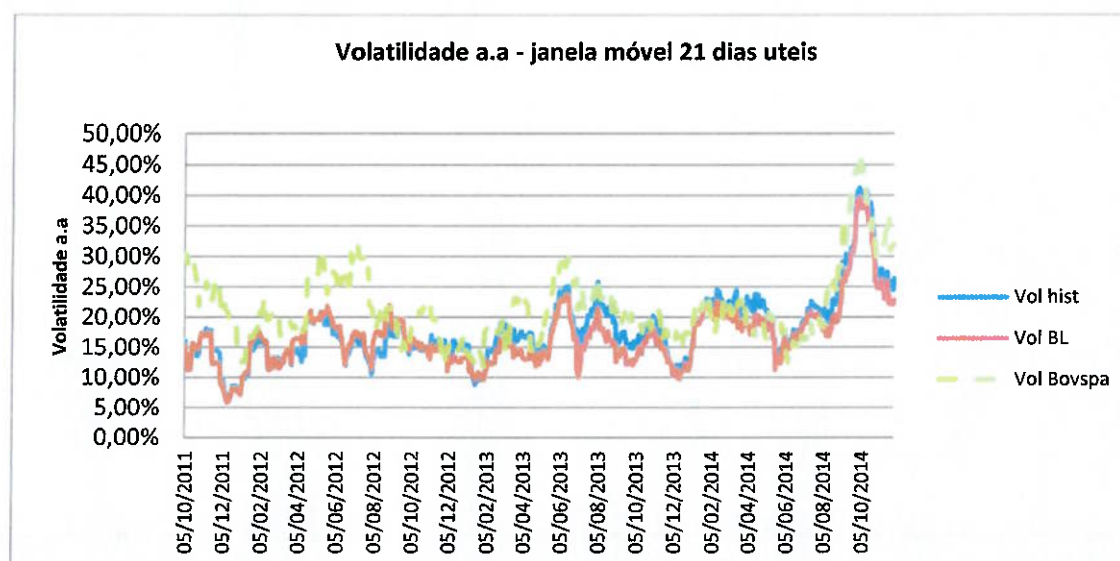


Figura 13

Com uma janela móvel de 63 dias úteis percebe-se uma curva mais suave, porém com um aumento de volatilidade maior para o período que compreende o ano de 2014 que aumentou muito o risco em decorrência das eleições:

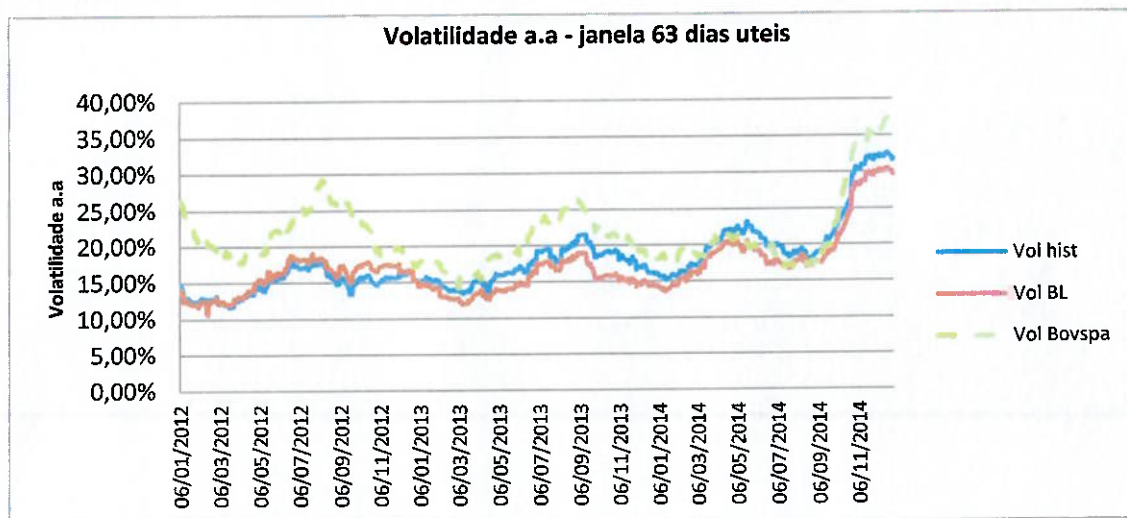


Figura 14

5. CONCLUSÃO

O modelo de Black Litterman na atualidade surge como uma ferramenta a mais no auxílio aos investidores, onde este traz a possibilidade de inserir suas opiniões, não aceitando de fato o comportamento do preço médio histórico e sua volatilidade.

O modelo tem uma fundamentação teórica bem sólida, abordando pontos como a incorporação das opiniões do investidor e da utilização da carteira de mercado com o enfoque bayesiano, o qual permite criar vetores de pesos e a matriz de covariância que deve ser usada para fazer a otimização da carteira e conseqüentemente o índice de Sharpe. É através das opiniões que o peso da carteira de mercado, considerado o ponto de equilíbrio, é modificado, aceitando o investidor ou não os retornos implicitamente obtidos do mercado de equilíbrio e partindo dessa carteira inserir suas opiniões.

Um dos maiores benefícios do modelo é trazer as decisões de investimento um método sistemático e transparente, combinando aspectos que são controlados no processo de investimento com recomendação de alocações táticas disciplinadas consistentes com a expectativa que investidor espera do comportamento de preço do determinado ativo.

No exemplo da carteira demonstrada no capítulo anterior faz-se necessário calibrar o modelo até que os resultados expressem de fato a visão do investidor, o modelo permite que se tenha uma exata idéia de como as opiniões interferem diretamente no portfólio. Os resultados mostraram uma carteira bem mais diversificada e com mais baixa volatilidade.

Portanto apesar das imperfeições do modelo e das conseqüentes hipóteses que devem ser realizadas, o modelo Black Litterman é uma ferramenta muito útil para a tomada de decisões de alocações de carteiras ótimas de investimentos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANBIMA.2014a. São Paulo. Classificação ANBIMA de Fundos. Disponível em <http://portal.anbima.com.br/fundos-de-investimento/classificacao-de-fundos/classificacaoanbima-de-fundos/Pages/classificacao.aspx>. Acesso em 10 jan. 2015.
- BEVAN, A. and WINKELMANN, K. (1998) 'Using the Black-Litterman Global Asset Allocation Model: Three Years of Practical Experience', Fixed Income Research, Goldman Sachs.
- BLACK, F., & LITTERMAN, R. (1992). *Global Portfolio Optimization*. *Financial Analysts Journal*
- COSTA, O. L. V.; ASSUNÇÃO, H.G.V. *Análise de Risco e Retorno em Investimentos Financeiros*. São Paulo: Manole, 2005.
- CHRISTODOULAKIS, G.A. & J.C. CASS, (2002) "Bayesian Optimal Portfolio Selection: the B-L Approach." Notes for Quantitative Asset Pricing MSc Mathematical Trading and Finance.
- DROBETZ, WOLFGANG. "How to Avoid The Pitfalls in Portfolio Optimization? Putting The Black-Litterman Approach At Work" *Journal of Financial Markets and Portfolio Management*, Vol. 15, nº. 1, 2001: 59–75
- HE, G. and LITTERMAN, R. (1999) 'The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios', Goldman Sachs Quantitative Resources Group.
- HEROLD, U. (2003) "Portfólio Construction with Quantitative Forecast" *The Journal of portfolio construction*, fall, 61-72.
- IZDOREK, T. (2004) 'A Step-By-Step Guide to the Black-Litterman Model: Incorporating user specified confidence levels', Zephyr Associates.
- MARKOWITZ, H. M. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1959.
- MARKOWITZ, H. M. *Portfolio Selection*. *Journal of Finance*, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.
- MICHAUD, RICHARD O. (1989) "The Markowitz Optimization Enigma: Is 'Optimized Optimal?'" *Financial Analyst Journal*, vol. 45, no. 1 (January/February), pp. 31-42.
- SATCHELL, S. and SCOWCROFT, A. (2000) 'A Demystification of the Black-Litterman Model: Managing Quantitative and Traditional Portfolio Construction', *Journal of Asset Management*, Vol. 1, 2, 138-150.

SHARPE, W. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risks. *Journal of Finance*.

WALTERS, J. (2008) 'The Black-Litterman Model: A detailed exploration', working paper

Dados Bloomberg preço e ações. Acesso em 14 jan. 2015

ANEXOS

Amostra do resultado obtido da otimização do IS com os respectivos pesos

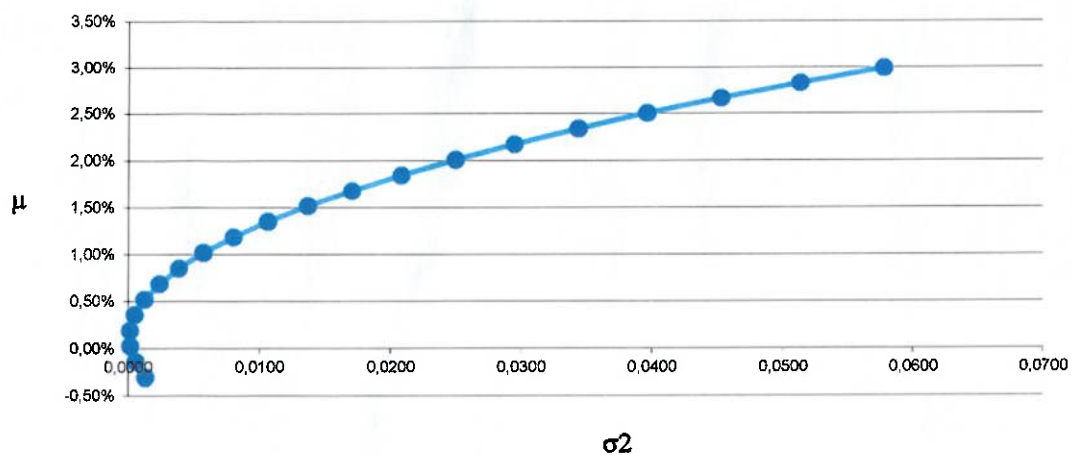
período			2	3	4	5	6	7	8	23	28	33
Início	fim		CELO3	EQT13	BBDC4	KROT3	CRUZ3	UREN3	BRS3	Retorno Carteira	Volatilidade a.a	Índice Sharpe Esperado
05/10/2011	03/10/2012	ω MH	20,84%	21,09%	3,67%	38,18%	4,32%	4,58%	7,32%	1,03%	18,79%	0,17
07/11/2011	05/11/2012	ω MH	20,05%	20,95%	3,45%	40,10%	3,98%	4,48%	7,01%	1,43%	15,26%	0,46
05/12/2011	03/12/2012	ω MH	21,04%	18,95%	3,75%	39,58%	4,71%	4,63%	7,34%	1,05%	14,92%	0,27
08/01/2012	07/01/2013	ω MH	20,76%	18,21%	3,60%	41,17%	4,30%	4,28%	7,67%	1,12%	13,13%	0,83
06/02/2012	06/02/2013	ω MH	19,29%	18,88%	3,29%	43,02%	4,27%	4,10%	7,15%	0,03%	15,38%	0,19
05/03/2012	06/03/2013	ω MH	19,22%	19,17%	3,21%	43,64%	3,96%	3,79%	7,01%	0,31%	10,25%	0,51
05/04/2012	09/04/2013	ω MH	20,26%	18,71%	3,29%	42,93%	3,92%	3,67%	7,22%	0,38%	18,53%	0,06
07/05/2012	06/05/2013	ω MH	19,77%	18,22%	3,06%	44,67%	3,44%	3,58%	7,25%	0,36%	16,83%	0,51
05/06/2012	07/06/2013	ω MH	19,43%	17,90%	2,91%	45,71%	3,26%	3,44%	7,35%	1,00%	15,11%	0,01
01/10/2013	30/09/2014	ω MH	17,78%	13,27%	1,95%	58,07%	1,40%	2,13%	5,41%	0,90%	22,79%	0,44
02/12/2013	28/11/2014	ω MH	17,09%	13,06%	1,93%	59,25%	1,28%	2,00%	5,38%	1,10%	28,49%	0,35
03/01/2014	31/12/2014	ω MH	17,91%	14,33%	1,89%	56,61%	1,33%	2,22%	5,70%	0,00%	26,41%	0,38
media										0,73%	17,99%	0,21

período			9	10	11	12	13	14	15	24	27	34
Início	fim		CELO3	EQT13	BBDC4	KROT3	CRUZ3	UREN3	BRS3	Retorno Carteira	Volatilidade a.a	Índice Sharpe Esperado
05/10/2011	03/10/2012	ω B&L	27,37%	30,10%	3,76%	26,01%	4,41%	4,68%	3,67%	1,02%	21,43%	0,08
07/11/2011	05/11/2012	ω B&L	26,53%	30,13%	3,55%	27,53%	4,10%	4,61%	3,54%	1,55%	16,92%	0,37
05/12/2011	03/12/2012	ω B&L	28,00%	27,40%	3,88%	27,32%	4,88%	4,79%	3,73%	1,04%	14,85%	0,24
08/01/2012	07/01/2013	ω B&L	27,93%	26,63%	3,77%	28,74%	4,51%	4,49%	3,94%	1,10%	11,07%	0,92
06/02/2012	06/02/2013	ω B&L	26,09%	27,76%	3,47%	30,19%	4,49%	4,31%	3,70%	0,06%	13,57%	0,17
05/03/2012	06/03/2013	ω B&L	26,02%	28,19%	3,38%	30,63%	4,17%	3,99%	3,63%	0,56%	9,92%	0,51
05/04/2012	09/04/2013	ω B&L	27,34%	27,45%	3,46%	30,06%	4,11%	3,85%	3,73%	0,56%	16,61%	0,06
07/05/2012	08/05/2013	ω B&L	26,95%	26,99%	3,24%	31,59%	3,65%	3,80%	3,78%	0,26%	13,36%	0,59
05/06/2012	07/06/2013	ω B&L	26,65%	26,70%	3,11%	32,53%	3,48%	3,67%	3,85%	-0,87%	14,16%	0,06
01/10/2013	30/09/2014	ω B&L	25,90%	21,01%	2,20%	43,88%	1,59%	2,41%	3,01%	0,90%	19,31%	0,46
02/12/2013	28/11/2014	ω B&L	25,09%	20,84%	2,21%	45,11%	1,46%	2,28%	3,02%	0,13%	26,00%	0,40
03/01/2014	31/12/2014	ω B&L	25,86%	22,49%	2,13%	42,39%	1,49%	2,49%	3,15%	0,00%	22,90%	0,37
media										0,53%	16,68%	0,20

Foi estabelecido um intervalo de retorno e rodamos a carteira ótima para os modelos media histórica e B&L.

μ	
inicial	-0,30%
final	3,00%
σ^2	μ
0,0013	-0,30%
0,0005	-0,14%
0,0001	0,03%
0,0001	0,20%
0,0005	0,36%
0,0012	0,53%
0,0024	0,69%
0,0039	0,86%
0,0057	1,02%
0,0080	1,19%
0,0106	1,35%
0,0136	1,52%
0,0170	1,68%
0,0208	1,85%
0,0250	2,01%
0,0295	2,18%
0,0344	2,34%
0,0397	2,51%
0,0453	2,67%
0,0514	2,84%
0,0578	3,00%

Fronteira Eficiente - Média Histórica



μ	
inicial	-0,30%
final	3,00%
σ^2	μ
0,0327	-0,30%
0,0091	-0,14%
0,0002	0,03%
0,0058	0,20%
0,0261	0,36%
0,0610	0,53%
0,1105	0,69%
0,1746	0,86%
0,2534	1,02%
0,3467	1,19%
0,4547	1,35%
0,5773	1,52%
0,7145	1,68%
0,8663	1,85%
1,0327	2,01%
1,2138	2,18%
1,4095	2,34%
1,6198	2,51%
1,8447	2,67%
2,0842	2,84%
2,3383	3,00%

