



BACHARELADO EM MATEMÁTICA

Eduardo Ventilari Sodré

Introdução à Geometria Riemanniana

São Paulo

2º Semestre de 2022

Eduardo Ventilari Sodré

Introdução à Geometria Riemanniana

Monografia apresentada à disciplina
MAT-0148 — Introdução ao Trabalho Científico,
Departamento de Matemática,
Instituto de Matemática e Estatística,
Universidade de São Paulo.

Processo nº 2021/10816-4,
Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Área de Concentração: GEOMETRIA DIFERENCIAL

Orientador: Claudio Gorodski – IME-USP

São Paulo

2º Semestre de 2022

FOLHA DE AVALIAÇÃO

Aluno: Eduardo Ventilari Sodré
Título: Introdução à Geometria Riemanniana
Data: 2º Semestre de 2022

BANCA EXAMINADORA

Claudio Gorodski – IME-USP (Orientador)
Cristian Ortiz – IME-USP
Ivan Struchiner – IME-USP

*Àqueles que me cuidaram e guiaram,
por sempre acreditarem em mim.*

*E a minhas amigas e meus amigos,
que fazem a vida valer a pena.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço principalmente ao meu orientador e professor Claudio, cujos direcionamentos, questionamentos e apoio foram indispensáveis. Inúmeras discussões frutíferas resultaram de nossas interações.

Agradeço a meus colegas de instituto, que sempre reavivaram meu gosto pelo que estudo, nem que seja por tolerarem me ouvir divagando sobre formigas e curvatura incansavelmente.

Agradeço a meus outros professores, com quem sempre pude ter relações mais que amistosas e sempre se dispuseram a ajudar um aluno da graduação querendo aprender mais matemática.

Por fim, agradeço também ao Instituto de Matemática e Estatística como instituição por ter sido uma fonte inesgotável de materiais na forma de sua biblioteca, e por representar o potencial brasileiro do fomento à pesquisa em matemática num ambiente vibrante e ativo.

*“Equations are just the boring part of mathematics.
I attempt to see things in terms of geometry.”*
S. Hawking

RESUMO

SODRÉ, E. V. **Introdução à Geometria Riemanniana.** 2022. 84 p. Monografia (Bacharelado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2º Semestre de 2022.

Nesta monografia, traçamos um passeio pelos diversos conceitos da geometria riemanniana elementar. Discutimos métricas, conexões, geodésicas, curvatura e subvariedades, assim como teoremas importantes nos temas vistos. Eventualmente engajamos em digressões, apontando tópicos de pesquisa futura e caminhos a serem seguidos ao aprofundar-se na teoria. As referências principais utilizadas foram [Gor22] e [GHL12], com a originalidade do presente texto concentrada na escolha estilística de apresentação dos tópicos, na incorporação de assuntos em artigos e livros buscando enriquecer a discussão, e no cálculo de resultados não necessariamente encontrados nas obras referidas.

Palavras-chave: Geometria riemanniana. conexão de Levi-Civita. Geodésicas. Tensores de curvatura. Subvariedades.

ABSTRACT

SODRÉ, E. V. **Introduction to Riemannian Geometry.** 2022. 84 p. Monografia (Bacharelado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2º Semestre de 2022.

In this monography, we trace a path through many concepts of elementary riemannian geometry. We discuss metrics, connections, geodesics, curvature and submanifolds, as well as important theorems in the themes studied. Eventually we engage in digressions, pointing to topics of future research and routes to be followed when immersing oneself deeper in the theory. The main references utilized were [Gor22] and [GHL12], with the originality of the present text concentrated in the stylistic choice of the presentation of the topics, in the incorporation of subjects from articles and books seeking to enrichen the discussion, and in the calculation of results not necessarily found in the referred texts.

Keywords: Riemannian geometry. Levi-Civita connection. Geodesics. Curvature tensors. Submanifolds.

LISTA DE SÍMBOLOS

$(U, \varphi), (U, (x^i))$	Carta local $\varphi = (x^i) : U \subseteq M \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ de uma variedade suave M
$\dot{\gamma}, \gamma'$	velocidade de uma curva suave ou suave por partes γ
$C^\infty(M)$	Funções suaves $f : M \rightarrow \mathbb{R}$
$T^{(r,s)}M$	Fibrado vetorial dos (r,s) -tensores suaves em M
$\Lambda^k T^*M$	Fibrado dos $(0,k)$ -tensores alternados em M
$\Omega^k(M)$	k -formas diferenciais em M
d	derivada exterior em formas diferenciais
\mathcal{L}_X	Derivada de Lie com respeito a um campo vetorial suave X
$\Gamma(E)$	Seções suaves do fibrado vetorial E sobre uma variedade
(M, g)	Variedade riemanniana M com métrica g
UM	Fibrado unitário em TM com respeito a uma métrica riemanniana
∇	Conexão afim em um fibrado vetorial ou conexão de Levi-Civita
$\frac{\nabla}{dt}$	Derivada covariante ao longo de curvas
R	Tensor de curvatura
K	Curvatura seccional
Ric	Tensor de Ricci
S	Curvatura escalar
$B(p, r), B_r(p)$	Bola aberta de centro p e raio r
$B[p, r]$	Bola fechada de centro p e raio r

Sumário

1	Métricas e Conexões	1
1.1	Métricas Riemannianas	1
1.1.1	O Espaço Euclidiano \mathbb{R}^n	3
1.1.2	A Esfera \mathbb{S}^n	3
1.1.3	O Espaço Hiperbólico \mathbb{H}^n	3
1.1.4	Imersões Isométricas	4
1.1.5	Métricas Produto e Produto Warped	5
1.1.6	Grupos de Lie	6
1.1.7	Recobrimentos Riemannianos	7
1.1.8	Submersões Riemannianas	8
1.1.9	Isomorfismos Musicais	9
1.2	Conexões	10
1.2.1	Transporte Paralelo e Derivadas Covariantes	12
1.3	A Conexão de Levi-Civita	14
1.4	Construções Analíticas	18
2	Geodésicas e Completude	21
2.1	Geodésicas	21
2.2	O Mapa Exponencial	24
2.3	A Distância em M	25
2.4	Completude de Métricas	27
2.5	Cut Distance e Cut Locus	31
2.5.1	Exemplos	33
3	Tensores de Curvatura	35
3.1	Os Tensores de Curvatura	35
3.1.1	O Tensor de Ricci e a Curvatura Escalar	38
3.2	Exemplos	41
4	Cálculo Variacional	45
4.1	Variações da Energia	45
4.2	Campos de Jacobi	48
4.3	Alguns Cálculos de Volumes	52
4.3.1	O Volume de \mathbb{S}^n e \mathbb{H}^n	52
4.3.2	O Volume de Bolas Pequenas	53
4.4	Afastamento de Geodésicas	53
4.5	Expansão da Métrica	56
4.6	Exemplos	58

5	Teoremas e Aplicações	61
5.1	Curvatura Constante	61
5.2	O Teorema de Synge	64
5.3	O Teorema de Bonnet-Myers	66
5.4	Curvatura Não-Positiva	67
5.5	Mais Teoremas de Comparação	70
5.6	Mais Propriedades Métricas	72
6	Geometria das Subvariedades	75
6.1	As Formas Fundamentais	75
6.2	Tipos de Subvariedades	78
6.2.1	Hipersuperfícies	78
6.2.2	Subvariedades Totalmente Geodésicas	79
6.2.3	Subvariedades Totalmente Umbílicas	80
6.3	Mais Resultados	80

Capítulo 1

Métricas e Conexões

“I consequently restrict myself to those manifolds where the line element can be expressed by the square root of a differential expression of the second degree.”

B. Riemann [[Spi99](#), vol. II, p. 157]

Uma métrica riemanniana numa variedade suave é, essencialmente, uma maneira de se calcular comprimentos e ângulos de vetores tangentes, sendo um dos primeiros objetos introduzidos numa variedade que permite realizar contas efetivamente geométricas. Neste capítulo, assumindo as construções topológicas usuais em variedades suaves, introduzimos as métricas riemannianas e definições que seguem delas, e exibimos exemplos de variedades riemannianas. Em sequência, chamamos atenção à noção de conexões em fibrados vetoriais suaves, como maneira de se derivar seções com respeito a campos em analogia ao caso de \mathbb{R}^n , culminando na conexão de Levi-Civita canônica em variedade riemannianas. Discutimos também a relação de conexões com transporte paralelo, derivada covariante e noções correlatas.

1.1 Métricas Riemannianas

Seja M uma variedade suave n -dimensional. Uma *métrica riemanniana* g em M é um $(0, 2)$ -tensor suave simétrico em M e positivo-definido em cada $T_p M$. Em coordenadas locais $(U, (x^1, \dots, x^n))$ para M , escreve-se

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j = \sum_{i \leq j} \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j,$$

onde os coeficientes g_{ij} são funções suaves em M , dadas por

$$g_{ij} = g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right),$$

e $\tilde{g}_{ii} = g_{ii}$, $\tilde{g}_{ij} = 2g_{ij}$ para $i < j$ e $dx^i dx^j = \frac{1}{2}(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i)$. Apesar da definição abstrata, a ideia por trás de uma métrica riemanniana é determinar uma maneira de se medir comprimentos e ângulos de vetores nos espaços tangentes (por meio de produtos internos), para depois transportar estas informações infinitesimais em informações de objetos construídos sobre a própria variedade. O requisito de que o tensor seja suave é para enfatizar que a variação dessa medição ocorre suavemente entre espaços tangentes próximos.

Por argumentos usuais de partições da unidade, definindo métricas riemannianas em cartas locais e somando-as para obter uma global, obtém-se que:

Proposição 1.1.1. *Toda variedade suave M admite uma métrica riemanniana.*

As métricas obtidas em M desta maneira são arbitrárias, e não necessariamente traduzem informações geométricas relevantes à variedade M . Notadamente, uma classe de problemas importantes em geometria riemanniana é identificar quando uma dada variedade suave (a partir de uma métrica inicial ou não) pode ser munida de métricas possuindo propriedades especiais, como por exemplo métricas homogêneas, completas, de curvatura constante, positiva, Einstein, entre outras [Ber02; LP87].

Comenta-se também que uma possível generalização de variedades riemannianas é ao relaxar a suposição de g ser positivo-definida em cada $T_p M$, exigindo apenas que seja não-degenerada. As variedades obtidas são as *semi-riemannianas* ou *pseudo-riemannianas*, e em particular se a assinatura da forma associada for $(-, +, \dots, +)$, a métrica é dita *lorentziana*. Este nome vêm da métrica lorentziana associada ao espaço-tempo de Minkowski da relatividade especial, expressa como

$$-dt^2 + d(x^1)^2 + \dots + d(x^n)^2.$$

No entanto, diferentemente de métricas riemannianas, nem toda variedade admite métricas lorentzianas, existindo obstruções topológicas. Se M é compacta, é necessário e suficiente que a característica de Euler de M se anule, existindo um campo vetorial globalmente definido que não se anula em nenhum ponto.

Um exemplo básico de objeto geométrico possível de se definir é o *comprimento* de curvas suaves por partes $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, dado por

$$L(\gamma) := \int_a^b g_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))^{1/2} ds = \int_a^b \|\dot{\gamma}(s)\| ds$$

com a última expressão utilizando um leve abuso de notação, em que a norma é calculada com respeito à métrica $g_{\gamma(s)}$ de cada espaço tangente.

Se M é orientada, pode-se definir também uma n -forma de orientação canônica, dita o *volume riemanniano* e denotada por vol_g . Ela é unicamente definida pela propriedade que, se (e_1, \dots, e_n) é base ortonormal positivamente orientada de $T_p M$, então

$$\text{vol}_g(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

Em coordendas locais, escreve-se

$$\text{vol}_g = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

onde $|g| = \det(g_{ij})$. Outra notação utilizada para o elemento de volume riemanniano é dV . Define-se o *volume* de (M, g) por $\text{vol}(M) = \int_M \text{vol}_g$, em que, se M é compacta, o volume é finito. O elemento de volume riemanniano permite dar uma formulação preferencial para a integral de funções mensuráveis $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, considerando

$$\int_M f := \int_M (f \text{vol}_g).$$

Mais geralmente, se M é variedade riemanniana não necessariamente orientada, ainda é possível definir uma medida canônica em M dada por uma *densidade*, colando medidas absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue em cartas locais [GHL12, p. 165].

Há uma noção natural de morfismo entre variedades que respeite suas respectivas métricas. Se $(M, g), (N, h)$ são variedades riemannianas, uma *isometria local* de M para N é um mapa suave $F : M \rightarrow N$ tal que, para todo $p \in M$, dF_p seja uma isometria linear entre os espaços tangentes. Em particular, teremos que $g = F^*h$ como pullback de tensores e F será difeomorfismo local, pelo

teorema da função inversa. Ainda, se F for difeomorfismo, dizemos que é uma *isometria* de M para N . Naturalmente, isometrias entre variedades riemannianas preservam todas as suas propriedades geométricas e topológicas, e nos preocupamos em estudar variedades riemannianas a menos de isometrias.

Descrevemos agora diversos exemplos importantes de variedades riemannianas.

1.1.1 O Espaço Euclidiano \mathbb{R}^n

O exemplo básico de métrica riemanniana é a métrica euclidiana usual g_0 em \mathbb{R}^n , dada nas coordenadas globais canônicas (x^1, \dots, x^n) por

$$g_0 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2,$$

ou seja, para $p \in \mathbb{R}^n$,

$$(g_0)_p \left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, w^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = v^1 w^1 + v^2 w^2 + \dots + v^n w^n = v^i w^i,$$

onde utilizamos a notação de Einstein para somatórios. Identificando cada espaço tangente $T_p \mathbb{R}^n$ com \mathbb{R}^n por

$$\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \mapsto (v^1, \dots, v^n),$$

os produtos internos g_p em cada $T_p \mathbb{R}^n$ coincidem com o produto escalar $v \cdot w$ usual em \mathbb{R}^n .

1.1.2 A Esfera \mathbb{S}^n

A esfera n -dimensional $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ também possui uma métrica riemanniana canônica, em que, para cada $x \in \mathbb{S}^n$, seu espaço tangente pode ser concretamente descrito por

$$T_x \mathbb{S}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : v \cdot x = 0\} = (\mathbb{R}x)^\perp,$$

onde $v \cdot x$ é o produto escalar usual em \mathbb{R}^{n+1} . Restringindo o produto escalar a cada espaço tangente e realizando as identificações adequadas, obtém-se esta métrica riemanniana. Com respeito às coordenadas dadas pela projeção estereográfica pelo ponto $N = (1, 0, \dots, 0)$ e projetando no plano $x^0 = 0$, temos a métrica dada esférica dada por

$$g = \frac{4}{(1 + \|x\|^2)^2} ((dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2).$$

1.1.3 O Espaço Hiperbólico \mathbb{H}^n

Outro exemplo de grande importância é o *espaço hiperbólico* \mathbb{H}^n , sendo usualmente descrito por uma das seguintes maneiras. Em uma, considera-se o espaço $\mathbb{R}^{1,n} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ munido de um produto interno lorentziano definido por

$$\langle x, y \rangle = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Com isso, toma-se uma das componentes conexas do hiperboloide de duas folhas:

$$\mathbb{R}\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^{1,n} \mid \langle x, x \rangle = -1, x_0 > 0\}.$$

Cada espaço tangente $T_x \mathbb{R}\mathbb{H}^n$ pode ser visto como subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{1,n}$, e restringindo o produto interno lorentziano a ele, obtém-se uma forma bilinear simétrica positivo-definida.

Tomando-se isso para todo $x \in \mathbb{R}^n$, obtém-se uma métrica riemanniana em \mathbb{R}^n , dita a métrica hiperbólica. Outro modelo dos espaços hiperbólicos é considerando a bola unitária aberta

$$\mathbb{D}^n := \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^n,$$

com $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{1,n}$ dada pela inclusão $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (0, x^1, \dots, x^n)$ e tomando, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, o único ponto em \mathbb{D}^n colinear com x e o ponto $(-1, 0, 0, \dots, 0)$. Tal associação será um difeomorfismo, e transportando a métrica por ele, obtém-se nas coordenadas globais que

$$g = \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} ((dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2)$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma usual em \mathbb{R}^n . Por fim, um terceiro modelo dos espaços hiperbólicos é considerando a inversão da bola em \mathbb{R}^n de centro $(-1, 0, \dots, 0)$ e raio $\sqrt{2}$, levando a bola unitária \mathbb{D}^n no semiespaço superior

$$\mathbb{R}_+^n := \{(x^1, \dots, x^n) \mid x^1 > 0\}$$

e a métrica levada pelo difeomorfismo sendo

$$g = \frac{1}{(x^1)^2} ((dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2).$$

1.1.4 Imersões Isométricas

O exemplo da esfera acima, como subvariedade de \mathbb{R}^{n+1} , pode ser generalizado da seguinte maneira. Se (M, g) é variedade riemanniana, N uma variedade suave e $F : N \rightarrow M$ uma imersão suave (não necessariamente injetora), de modo que para todo $p \in N$ o diferencial $dF_p : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ é injetor, toma-se a métrica *pullback* F^*g em N dada por

$$(F^*g)_p(v, w) = g_{F(p)}(dF_p(v), dF_p(w))$$

como o pullback usual de tensores por mapas suaves. O tensor sobre N resultante será uma métrica riemanniana em N , e dF_p será isometria sobre sua imagem para todo $p \in N$. Em particular, se $N \hookrightarrow M$ é subvariedade imersa em M , a métrica dada pelo pullback pela inclusão é a métrica riemanniana induzida em N .

Esta construção generaliza a geometria das superfícies parametrizadas em \mathbb{R}^3 , em que a métrica riemanniana da superfície é dada por sua primeira forma fundamental: se $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ é uma parametrização local da superfície M , e $p = (u_0, v_0) \in U$, toma-se

$$df_p \left(\frac{\partial}{\partial u} \Big|_{(u_0, v_0)} \right) = f_u(u_0, v_0), \quad df_p \left(\frac{\partial}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)} \right) = f_v(u_0, v_0)$$

como base de $T_{f(p)} M$ e, nesta parametrização, os coeficientes da métrica são $g_{ij} = \langle f_i, f_j \rangle$, com f_i denotando as derivadas parciais.

Calcula-se também explicitamente o exemplo de $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, onde a métrica induzida em S^1 pela euclidiana em \mathbb{R}^2 será

$$\iota^*(dx^2 + dy^2) = (-\sin \theta d\theta)^2 + (\cos \theta d\theta)^2 = d\theta^2,$$

com $d\theta$ a “forma ângulo” na circunferência de acordo com a parametrização $x = \cos \theta, y = \sin \theta$.

Em outra aplicação, calcula-se a área da esfera S^2 com a métrica induzida do \mathbb{R}^3 , representando seu 2-volume riemanniano. Tomando a projeção estereográfica com respeito ao polo norte

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

com inversa

$$(u, v) \mapsto \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{1-u^2-v^2}{-1+u^2+v^2} \right),$$

sabemos que a métrica com respeito a essa parametrização é

$$\frac{4}{(1+u^2+v^2)^2} (du^2 + dv^2).$$

O volume riemanniano correspondente será

$$\frac{4}{(1+u^2+v^2)^2} du \wedge dv,$$

e deste modo, com o pullback de vol_{S^2} para \mathbb{R}^2 ,

$$\text{vol}(S^2) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2} du dv = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{r}{(1+r^2)^2} dr d\theta = 8\pi \left(\frac{-1}{2(1+r^2)} \right) \Big|_{t=0}^{t=\infty} = 4\pi.$$

1.1.5 Métricas Produto e Produto Warped

Dadas duas variedades riemannianas (M, g) e (N, h) , é possível definir a métrica riemanniana $g + h$ em $M \times N$ a partir do isomorfismo

$$T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_p M \oplus T_q N,$$

declarando que em $T_p M$ a métrica é g , em $T_q N$ é h e que os subespaços complementares $T_p M$ e $T_q N$ são ortogonais. Um exemplo básico é (\mathbb{R}^n, g_0) , sendo isométrico ao produto $(\mathbb{R}, g_0) \times \dots \times (\mathbb{R}, g_0)$ n vezes, onde cada g_0 é a métrica euclidiana usual no espaço.

Mais geralmente, se $f \in C^\infty(N)$ e não se anula, considera-se o *produto warped*

$$(M \times N, f^2 g + h),$$

onde cada “fatia” $M \times \{q\}$ é *conforme* a M , ou seja, é isométrica a menos da distorção da métrica pela função f , e cada fatia $\{p\} \times N$ é isométrica a N . O exemplo usual de tais métricas são as de superfícies de revolução em \mathbb{R}^3 , tomando $M = S^1$, $N = (a, b)$ intervalo aberto e a métrica $g = dr^2 + f(r)^2 d\theta^2$.

Em outro exemplo, mostra-se que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ com a métrica euclidiana usual é isométrico ao produto warped $((0, +\infty) \times S^{n-1}, dr^2 + r^2 g)$, onde r denota a coordenada radial em $(0, +\infty)$ e g a métrica riemanniana usual em S^{n-1} . Isto pois, considerando o difeomorfismo $h : (0, \infty) \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dado por $h(r, x) = rx$, analisam-se as imagens de vetores tangentes por dh . Com $T_{(r,x)}((0, +\infty) \times S^{n-1}) \cong T_r(0, +\infty) \oplus T_x S^{n-1}$, todo vetor tangente é da forma $a\partial_r + v$, onde $\langle v, x \rangle = 0$. Então

$$\begin{aligned} dh_{(r,x)}(\partial_r) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} h(r+t, x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (r+t)x = x, \\ dh_{(r,x)}(v) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} h(r, (\cos t)x + (\sin t)v) = rv. \end{aligned}$$

Desta maneira,

$$\left\| dh_{(r,x)}(a\partial_r + v) \right\|^2 = \|ax + rv\|^2 + a^2\|x\|^2 + r^2\|v\|^2 = a^2 + r^2\|v\|^2,$$

mostrando que a métrica é de fato dada por $dr^2 + r^2 g$.

1.1.6 Grupos de Lie

Em um grupo de Lie G , lembramos que há uma identificação natural entre os campos esquerda-invariantes $\text{Lie}(G)$ e o espaço tangente na identidade $\mathfrak{g} = T_e G$, formando álgebra de Lie de dimensão finita com respeito ao colchete de Lie $[\cdot, \cdot]$. Explicitamente, para cada $x \in G$, identifica-se $T_x G$ com o espaço tangente na identidade $T_e G \cong \mathfrak{g}$ por meio da multiplicação à esquerda $L_x : T_e G \rightarrow T_x G$. Em particular isto permite transportar qualquer produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ em $T_e G$ para $T_x G$ por

$$\langle u, v \rangle_x = \langle d(L_{x^{-1}})_x(u), d(L_{x^{-1}})_x(v) \rangle_e,$$

produzindo uma métrica riemanniana suave g em G *invariante à esquerda*, ou seja, tal que para cada $x \in G$ tem-se $(L_x)^* g = g$, em outras palavras, que cada translação à esquerda seja isometria.

Pode-se perguntar então quando um grupo de Lie admite uma métrica *bi-invariante*, ou seja, invariante também por translações à direita $(R_x)^* g = g$. Considerando a conjugação $C_x : G \rightarrow G$ dada por $C_x(y) = xyx^{-1}$ e a representação adjunta $\text{Ad}_x = (C_x)_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, lembra-se que, para $V \in \mathfrak{g}$,

$$(\text{Ad}_x V)_e = d(R_{x^{-1}})d(L_x)V_e = d(R_{x^{-1}})V_x = (d(R_{x^{-1}}) \circ V \circ R_x)(e) = ((R_{x^{-1}})_* V)_e,$$

ou seja, $\text{Ad}_x V = (R_{x^{-1}})_* V$. Isto permite mostrar que, dada uma métrica esquerda-invariante em G , ela será invariante à direita se e somente o produto interno em \mathfrak{g} se é Ad-invariante, ou seja, para todo $x \in G$,

$$g_e(\text{Ad}_x(v), \text{Ad}_x(w)) = g_e(v, w),$$

de modo que $\text{Ad}_x \in \text{O}(\mathfrak{g}) \subset \text{GL}(\mathfrak{g})$.

Teorema 1.1.2. *Se G é grupo de Lie compacto, então G admite métrica riemanniana bi-invariante.*

Demonstração. Tomando uma n -forma de orientação suave esquerda-invariante em G , obtida ao transportar uma tal forma em \mathfrak{g} por translações, e considerando a integral de funções suaves por $\int_G f \omega$, ela será esquerda-invariante:

$$\int_G (f \circ L_x) \omega = \int_G f \omega.$$

Para cada $x \in G$, a n -forma $(R_x)^* \omega$ será também esquerda-invariante, e portanto um múltiplo real não-nulo de ω . Definindo $\lambda(x) = \left| \frac{(R_x)^* \omega}{\omega} \right|$, temos um homomorfismo de grupos de Lie $\lambda : G \rightarrow (0, +\infty)$, tal que

$$\int_G (f \circ R_x) \lambda(x) \omega = \int_G f \omega.$$

Se G é compacto, então $\lambda \equiv 1$, e a integral será também direita-invariante. Dado um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ qualquer em \mathfrak{g} , define-se, para $V, W \in \mathfrak{g}$ a função $b_{V,W} : G \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\langle \text{Ad}_x V, \text{Ad}_x W \rangle_0$, e define-se também a integral

$$\langle V, W \rangle := \int_G b_{V,W} \omega.$$

Mostra-se prontamente que a função obtida será produto interno em \mathfrak{g} e é Ad-invariante, pois

$$\begin{aligned} \langle \text{Ad}_x V, \text{Ad}_x W \rangle &= \int_G b_{\text{Ad}_x V, \text{Ad}_x W} \omega = \int_G \langle \text{Ad}_y \text{Ad}_x V, \text{Ad}_y \text{Ad}_x W \rangle \omega(y) \\ &= \int_G \langle \text{Ad}_{yx} V, \text{Ad}_{yx} W \rangle \omega(y) = \int_G (b_{V,W} \circ R_x) \omega = \int_G b_{V,W} \omega = \langle V, W \rangle. \end{aligned}$$

Transportando tal produto-interno para os espaços tangentes de G por multiplicação à esquerda, obtém-se uma métrica riemanniana bi-invariante em G . \square

Se num grupo de Lie geral vale $\lambda \equiv 1$, dizemos que o grupo é *unimodular*. Nota-se que tal definição independe da n -forma de orientação esquerda-invariante ω tomada, pois todas serão um múltiplo real não-nulo de ω .

1.1.7 Recobrimentos Riemannianos

Um recobrimento suave entre duas variedades riemannianas é dito um *recobrimento riemanniano* se for adicionamente uma isometria local. Seja (\tilde{M}, \tilde{g}) uma variedade riemanniana, e $\Gamma \times \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ uma ação livre e própria de um grupo discreto Γ em \tilde{M} . Sabemos então que o espaço quociente $M = \tilde{M}/\Gamma$ munido da topologia quociente admite uma única estrutura suave tal que a projeção $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ é um recobrimento suave, e em particular difeomorfismo local. Se ainda Γ age por isometrias em \tilde{M} , ou seja, tal que para todo $\gamma \in \Gamma$, $x \mapsto \gamma(x)$ é isometria, induz-se uma métrica riemanniana natural no quociente \tilde{M}/Γ :

Proposição 1.1.3. *Nas condições acima, existe uma única métrica riemanniana g em $M = \tilde{M}/\Gamma$, dita a métrica quociente, tal que $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ é recobrimento riemanniano.*

Demonstração. [Gor22, p. 32]. □

Reciprocamente, dado recobrimento suave $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ e métrica riemanniana g em M , tomando a métrica pullback π^*g em \tilde{M} , teremos que o recobrimento será riemanniano, e as transformações de deck $\gamma : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$, as quais são difeomorfismos satisfazendo $\pi \circ \gamma = \pi$, serão isometrias. Se ainda mais as transformações de deck agirem transitivamente nas fibras do recobrimento, M será isométrica ao quociente \tilde{M}/Γ com a métrica quociente.

Um exemplo de recobrimento riemanniano é dado considerando um reticulado

$$\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^n m_i v_i \mid m_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

em \mathbb{R}^n , onde (v_1, \dots, v_n) é base de \mathbb{R}^n , e o quociente \mathbb{R}^n/Γ é difeomorfo a um n -toro. O reticulado age livremente e propriamente descontinuamente em \mathbb{R}^n por meio de translações por seus elementos, e o quociente herda a *métrica flat* de \mathbb{R}^n , sendo localmente isométrico ao espaço euclidiano. Como \mathbb{R}^n é simplesmente conexo, é o recobrimento universal do quociente, e portanto o grupo fundamental é identificado com Γ . Dois reticulados diferentes, em geral, dão origem a toros não-isométricos, mas ainda localmente isométricos entre si.

Proposição 1.1.4. *Sejam Γ, Γ' dois reticulados em \mathbb{R}^n , com métricas riemannianas quocientes g_Γ e $g_{\Gamma'}$ definidas no n -toro \mathbb{T}^n . Então (\mathbb{T}^n, g_Γ) é isométrico a $(\mathbb{T}^n, g_{\Gamma'})$ se e somente se existe isometria $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(\Gamma) = \Gamma'$.*

Em particular, (\mathbb{T}^n, g_Γ) será isométrico ao produto riemanniano de n cópias de S^1 se e somente se o reticulado é associado a uma base ortonormal de \mathbb{R}^n .

Demonstração. Com $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$ e $\pi' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma'$ os recobrimentos riemannianos associados, suponha que exista isometria $h : \mathbb{R}^n/\Gamma' \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$, com $h(\bar{0}) = \bar{q}$, $\pi'(q) = \bar{q}$. Como \mathbb{R}^n é simplesmente conexo, $h \circ \pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma'$ admite único levantamento suave $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que o diagrama abaixo comuta e $H(0) = q$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\exists H} & \mathbb{R}^n \\ \pi \downarrow & \searrow h \circ \pi & \downarrow \pi' \\ \mathbb{R}^n/\Gamma & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^n/\Gamma' \end{array}$$

Como π e π' são recobrimentos riemannianos, garante-se que H é isometria local. Para mostrar que é difeomorfismo, consideram-se os diagramas:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^n \\ \downarrow \pi' & \nearrow H & \downarrow \pi' \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{h \circ \pi} & \mathbb{R}^n/\Gamma' \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\pi'} & \mathbb{R}^n/\Gamma' \end{array}$$

onde G é o único levantamento de π' com respeito ao recobrimento suave $h \circ \pi$ tal que $G(q) = 0$. Isto implica que $G \circ H$ é levantamento de π' pelo diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^n & \\ G \circ H \swarrow & \nearrow \pi' & \downarrow \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\pi'} & \mathbb{R}^n / \Gamma' \end{array}$$

tal que $G \circ H(0) = 0$, e portanto deve ser a identidade. Isto mostra que H é isometria. Desta maneira, $H(\Gamma) = q + \Gamma'$, pois $H(\Gamma) \subseteq q + \Gamma'$ pelas identificações feitas nas projeções e $H^{-1}(q + \Gamma') \subseteq \Gamma$ já que H é invertível e os diagramas comutam. Basta tomar então $f = \tau \circ H$, onde $\tau(x) = x - q$ é isometria.

Reciprocamente, se existe isometria $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(\Gamma) = \Gamma'$, então $\pi' \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / \Gamma'$ é recobrimento riemanniano que faz as mesmas identificações em Γ , descendo suavemente para $\bar{f} : \mathbb{R}^n / \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n / \Gamma'$. Temos que \bar{f} é bijetora pois $\pi' \circ f$ faz as mesmas identificações que π , e por ser isometria local analisando localmente os mapas, é isometria. \square

Outro exemplo importante de recobrimento é o espaço projetivo $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, dado pelo quociente de \mathbb{S}^n pela ação de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ descrita por $x \mapsto -x$. Com a métrica quociente, será ainda localmente isométrico a \mathbb{S}^n , mas é orientável se e somente se n é ímpar. Similarmente, consideram-se outros quocientes de \mathbb{S}^n e \mathbb{H}^n por ações livres e propriamente descontínuas, produzindo variedades riemannianas topologicamente diferentes, mas localmente isométricas aos seus respectivos recobrimentos.

1.1.8 Submersões Riemannianas

Consideramos agora o caso de uma submersão $\pi : M \rightarrow N$ entre duas variedades suaves, com $\mathcal{V}_p = \ker d\pi_p$ uma distribuição suave em M . Esta é a *distribuição vertical* à submersão, e compreendem os espaços tangentes das fibras de π .

Se M é munida de uma métrica riemanniana g , é possível tomar uma distribuição complementar a \mathcal{V} específica, dita a *distribuição horizontal*, por $\mathcal{H}_p = \mathcal{V}_p^\perp$ o complemento ortogonal. Neste caso, se N possui métrica h , dizemos que $\pi : M \rightarrow N$ é uma *submersão riemanniana* se $d\pi_p|_{\mathcal{H}_p} : \mathcal{H}_p \rightarrow T_{\pi(p)}N$ é, além de isomorfismo linear, isometria.

O exemplo básico é o caso de uma projeção $\pi : M \times N \rightarrow N$ do produto riemanniano em um de seus fatores. Temos também o caso do produto warped, onde $(M \times N, f^2g + h) \rightarrow (N, h)$ é submersão riemanniana.

Uma situação mais elaborada é a de um grupo de Lie G agindo suavemente, livremente e propriamente em uma variedade suave \tilde{M} . Sabemos que o quociente $M = \tilde{M}/G$, com a topologia quociente, admite única estrutura suave tal que $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ é submersão suave [Lee12, p. 544]. Se agora M possui métrica riemanniana \tilde{g} e G age em \tilde{M} por isometrias, temos um resultado análogo ao de recobrimentos:

Proposição 1.1.5. *Nas condições acima, M admite uma métrica quociente g tal que $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ é submersão riemanniana.*

Demonstração. [Gor22, p. 34]. \square

Além dos exemplos já vistos de recobrimentos, podemos considerar também o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, que pode ser descrito pelo quociente de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^\times$, onde identifica-se $x \sim \lambda x$ para $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, ou pelo quociente S^{2n+1} / S^1 , onde a ação de S^1 em $S^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$, é dada por

$$e^{i\theta} \cdot (z_0, \dots, z_n) = (e^{i\theta}z_0, \dots, e^{i\theta}z_n).$$

A métrica quociente induzida em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, tornando-o variedade riemanniana compacta de dimensão $2n$, é dita a *métrica de Fubini-Study*.

Se G é grupo de Lie e $H \subseteq G$ é subgrupo fechado (e portanto subgrupo de Lie), temos que o conjunto das classes laterais G/H é variedade suave com submersão $G \rightarrow G/H$ [Lee12, p. 551]. Há uma ação natural de G em G/H por multiplicação à direita $(g, kH) \mapsto gkH$, sendo a ação livre e transitiva. G/H é dito um *espaço homogêneo* para G . Adicionalmente, sendo M uma variedade suave e G grupo de Lie agindo suavemente e transitivamente em M , para $p \in M$ o subgrupo de isotropia $G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}$ é fechado em G , e M será difeomorfa ao quociente G/G_p [Lee12, p. 552]; Assim, estudar variedades com ações transitivas equivale a estudar espaços homogêneos.

Se G é munido de métrica bi-invariante, então similarmente ao que foi descrito anteriormente, G/H herdará de G uma métrica quociente tal que a submersão será riemanniana e a ação de G em G/H é dada por isometrias. Mais geralmente, basta G ter métrica invariante à esquerda e invariante à direita pela ação de H . De certa maneira recíproca, se M é variedade riemanniana e G grupo de Lie agindo suavemente e transitivamente por isometrias em M , mostra-se que o subgrupo de isotropia G_p de um $p \in M$ é compacto, e M será difeomorfa a G/G_p . Naturalmente, a métrica em M será G -invariante.

Um exemplo claro destas noções é o grupo ortogonal $O(n+1)$ agindo em S^n por isometrias, em que o grupo de isotropia de um dado ponto é isomorfo a $O(n)$. Assim, $S^n \cong O(n+1)/O(n)$. Pode-se também considerar uma situação mais geral, dada pelo seguinte teorema [Lee12, p. 554]:

Teorema 1.1.6. *Seja X um conjunto e G um grupo de Lie agindo transitivamente em X , tal que, para um $p \in X$, o subgrupo de isotropia G_p de p é fechado. Então X tem uma única estrutura suave tal que a ação é suave, e $\dim X = \dim G - \dim G_p$, sendo difeomorfo a G/G_p .*

Considere, por exemplo, o conjunto X das geodésicas maximais em S^2 (conceito a ser visto no próximo capítulo, mas que afirmamos serem as grandes circunferências na esfera). Naturalmente $O(3)$ age transitivamente nelas, e o grupo de isotropia de uma dada geodésica, por exemplo o equador $\{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$, é isomorfo a $O(2) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, considerando as isometrias de uma circunferência com as possíveis inversões no eixo z . Assim, pelo teorema acima, existe uma estrutura suave em X que o torna uma variedade suave de dimensão $3 - 1 = 2$, munido de uma ação suave e transitiva de $O(3)$. Ainda, como $O(3)$ é grupo de Lie compacto, admitindo métrica bi-invariante, existe métrica riemanniana em X tal que $O(3)$ age por isometrias. Ainda mais, existirá uma medida em X invariante pela ação de $O(3)$, dando sentido a expressões como “uma geodésica aleatória em S^2 ”; isto é parte dos objetivos da geometria probabilística e integral [San04], usando noções de espaços homogêneos e simétricos.

1.1.9 Isomorfismos Musicais

Para construir noções que serão relevantes em 1.4 e 3.1.1, desenvolvem-se com mais cuidado algumas ideias de álgebra linear. Em espaços vetoriais de dimensão finita sobre \mathbb{R} , é possível realizar certas identificações entre seus produtos tensoriais e espaços de morfismos (multi-)lineares. Um caso simples é o isomorfismo $V^* \otimes W \cong \text{Hom}(V, W)$ dado por

$$\varphi \otimes w \mapsto (x \mapsto \varphi(x)w)$$

e estendendo multilinearmente. Também podemos encontrar identificações canônicas como $V^* \otimes V^* \cong (V \otimes V)^*$, interpretado como o espaço de formas bilineares $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Ideias similares se aplicam para produtos tensoriais de ordens superiores, considerando $T^{(r,s)}V = \otimes^s V^* \otimes^r V$ como as formas s -multilineares em V a valores em $\otimes^r V$, os (r,s) -tensores em V .

A identificação $V^* \otimes V \cong \text{Hom}(V, V) = \text{End}(V)$ permite ainda explicitar porque o traço de um endomorfismo linear $T \in \text{End}(V)$ é uma expressão independente de bases, sendo definido em $V^* \otimes V$ como a contração $\varphi \otimes v \mapsto \varphi(v)$ e estendendo multilinearmente. Para uma dada

base (e_1, \dots, e_n) de V com base dual (e^1, \dots, e^n) , de fato temos que $\text{tr } T = \sum_{i=1}^n e^i(Te_i)$, e com $e^i(Te_j) = a_j^i$, de modo que T escrito na base é dada pela matriz $(a_j^i)_{ij}$, temos $T = a_j^i e^j \otimes e_i$ com contração resultando em $\sum a_j^i$. O mesmo vale considerando contrações $T^{(r,s)}V \rightarrow T^{(r-1,s-1)}V$ com respeito a certos índices, independendo de escolha de base.

Sabe-se que não há, no entanto, uma identificação canônica entre V e V^* , apesar de serem espaços de mesma dimensão. Isto também é a origem do fato de não ser possível definir precisamente o traço de uma forma bilinear $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, $f \in V^* \otimes V^*$. Se V é munido de uma forma bilinear simétrica não-degenerada $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, ou mais particularmente um produto interno, há de fato um isomorfismo entre V e V^* dado por

$$v \mapsto (x \mapsto g(v, x)).$$

Se (e_1, \dots, e_n) é uma base de V e $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ são os coeficientes do produto interno associados à base, temos os isomorfismos dados por

$$v = v^i e_i \mapsto v^\flat = g_{ij} v^i e^j, \quad \varphi = \varphi_i e^i \mapsto \varphi^\sharp = g^{ij} \varphi_i e_j,$$

em que convencionamos a utilização da notação de Einstein, e $(g^{ij})_{ij} = (g_{ij})^{-1}$ é a matriz inversa, ou seja, tal que $g^{ij} g_{ij} = \delta_{ij}$ como delta de Dirac. Tais isomorfismos $V \cong V^*$ se estendem a todos os produtos tensoriais $T^{(r,s)}V$ com $r+s = k$ fixo, podendo liberalmente interpretar tensores de uma dada ordem como de outra ordem apenas realizando o levantamento ou abaixamento de índices. Tais isomorfismos são coletivamente ditos os isomorfismos musicais. Com eles, podemos definir também o traço (ou contrações mais gerais) de uma forma bilinear simétrica $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, em que, se $B(e_i, e_j) = b_{ij}$, temos que $\text{tr } B = g^{ij} b_{ij}$. Naturalmente, se (e_i) é base ortonormal de V com respeito ao produto interno g , temos que $\text{tr } B = \sum B(e_i, e_i) = b_{ii}$.

No caso relevante para nossos estudos, consideramos M um variedade riemanniana, com a métrica g definindo um isomorfismo entre os fibrados tangente TM e cotangente T^*M :

$$v \mapsto v^\flat \in T^*M, \quad \omega \mapsto \omega^\sharp \in TM.$$

Com respeito a coordenadas locais $(U, (x^i))$ de M e referencial local coordenado $\partial_1, \dots, \partial_n$ de $TM|_U$, lembra-se que os coeficientes $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ que realizam os isomorfismos são funções suaves. Nota-se que em geral não pode-se tomar o referencial local coordenado como sendo ortonormal, pois isto implicaria na nulidade da curvatura da variedade nesse aberto, conceito este que exploraremos no capítulo 3.

1.2 Conexões

Nos espaços euclidianos, todo espaço tangente $T_p \mathbb{R}^n$ é canonicamente identificado com o próprio espaço \mathbb{R}^n pelo isomorfismo

$$\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \leftrightarrow (v^1, \dots, v^n).$$

Isto permite definir a derivada direcional ao longo de $v \in \mathbb{R}^n$ de uma função suave $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$D_v f(p) = Df(p)(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

e também a “derivada direcional” de um campo de vetores suave $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, a aplicação da derivada total de $X = (X^1, \dots, X^n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ num ponto p em uma dada direção:

$$DX(p)(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X(p + tv) - X(p)}{t} = \left(\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial X^1}{\partial x^i}(p), \dots, \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial X^n}{\partial x^i}(p) \right).$$

Em uma variedade suave M , ainda temos a noção de derivadas direcionais de $f \in C^\infty(M)$ pelo diferencial $df \in \Omega^1(M)$, tomando vetores $v \in T_p M$ e retornando suas derivadas direcionais $df(v) = v(f)$. Não há, no entanto, uma maneira óbvia de estender tal definição para campos vetoriais de uma maneira invariante por mudanças de coordenadas; falta uma maneira canônica de identificar vetores em espaços tangentes diferentes para se definir o limite na expressão acima. Pode-se imaginar que a derivada de Lie cumpriria este papel, mas como ela mede a (não-)comutatividade dos fluxos dos campos, dependendo então de todos seus valores numa vizinhança de p , não há como tomá-la apenas numa “direção” $v \in T_p M$.

Uma outra maneira de entender as complicações descritas acima, e num contexto mais geral, é a seguinte. Com $\pi : TM \rightarrow M$ a projeção canônica do fibrado tangente, o núcleo de seu diferencial $d\pi$ define um subfibrado $\mathcal{V}M \subset TTM$, dito o subfibrado vertical, cujas fibras $\mathcal{V}_v M$ são canonicamente isomórfas a $T_{\pi(v)} M$ a partir do diferencial da inclusão $\iota_p : T_p M \rightarrow TM$. Se $X : M \rightarrow TM$ é um campo vetorial, isto é, uma seção de π , temos que $\pi \circ X = \text{Id}_M$, e tomando o diferencial $dX : TM \rightarrow TTM$ em algum $p \in M$, a imagem do pushforward $dX_p : T_p M \rightarrow T_{X_p} TM$ intersecta trivialmente a fibra vertical. Mas como não há uma escolha canônica de subespaço vetorial complementar à fibra vertical (o qual seria isomórfico a $T_p M$), não é imediatamente possível definir uma projeção de volta a $T_p M$ para assim obter uma derivação induzida por X . Esta visão antecipa a ideia de conexão, vista abaixo, também como a escolha de uma distribuição horizontal em TTM .

Com estas explorações, é necessária uma estrutura adicional na variedade M , uma escolha de como derivar campos com respeito a outros campos satisfazendo propriedades análogas a derivação em \mathbb{R}^n . Tal escolha é dita uma conexão. Formalmente, uma *conexão (afim)* é um mapa \mathbb{R} -bilinear $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ tal que

- $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$;
- $\nabla_X f Y = X(f)Y + f \nabla_X Y$, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$.

Como ∇ é $C^\infty(M)$ -linear no primeiro argumento e satisfaz a regra de Leibniz no segundo, o vetor $(\nabla_X Y)_p$ depende apenas dos valores de Y numa vizinhança de p e de X_p , obtendo um endomorfismo linear $v \mapsto (\nabla_v X)_p$ análogo à 1-forma dada pelo diferencial df , representando a derivada direcional na direção v . A diferença entre duas conexões numa variedade é um $(1, 2)$ -tensor, com as conexões formando um espaço afim sobre eles e sendo fechado por combinações convexas. De maneira não correlata, a origem do termo *conexão afim* veio originalmente de Weyl, a partir do que seria uma variedade afimamente conexa, isto é, uma variedade com uma noção de transporte paralelo, com Cartan generalizando a noção para um contexto mais geral [AR93, p. 213].

Em coordenadas locais $(U, (x^i))$ e para $X = X^i \partial_i$, $Y = Y^j \partial_j$, obtemos que

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i,j,k} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

onde $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$. Os coeficientes suaves Γ_{ij}^k são os *símbolos de Christoffel*, e determinam a conexão localmente. Sugestivamente pela expressão acima, os símbolos de Christoffel numa carta representam o quão distante a conexão está de ser uma derivação usual em \mathbb{R}^n .

Além do valor da conexão $(\nabla_X Y)_p$ depender apenas do valor de X em p e de Y numa vizinhança de p , ela na verdade depende apenas dos valores de Y ao longo de uma curva suave $\gamma : I \rightarrow M$ passando por p com velocidade X_p , considerando a expressão local para $(\nabla_X Y)_p$.

Também utilizando argumentos de partições da unidade a partir de conexões definidas localmente em vizinhanças coordenadas, tem-se que:

Proposição 1.2.1. *Toda variedade suave M admite uma conexão.*

Demonação. [Gor22, p. 45]. □

1.2.1 Transporte Paralelo e Derivadas Covariantes

Apesar da definição inicial abstrata, a presença de uma conexão numa variedade, como o nome indica, permite identificar espaços tangentes ligados por uma curva suave, por meio da ideia intuitiva mais concreta do *transporte paralelo* de vetores ao longo de uma curva. Isto é feito inicialmente definindo a *derivada covariante* de campos ao longo dela.

Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva suave. Um *campo ao longo de γ* é uma função suave $X : I \rightarrow TM$ tal que $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$, ou, na linguagem de fibrados vetoriais, uma seção do fibrado pullback γ^*TM . Nota-se que nem todo campo ao longo de uma curva é a restrição de um campo \tilde{X} definido em vizinhança aberta U da curva em M , como é o caso se γ não é injetora ou se γ não é mergulho em M . A conexão ∇ induz naturalmente uma derivação de campos em $\Gamma(\gamma^*TM)$:

Proposição 1.2.2. *Existe um único mapa \mathbb{R} -linear $\frac{\nabla}{dt} : \Gamma(\gamma^*TM) \rightarrow \Gamma(\gamma^*TM)$, dito a derivada covariante ao longo de γ , tal que*

a) $\frac{\nabla}{dt} fX = f'X + f \frac{\nabla}{dt} X$, para $X \in \Gamma(\gamma^*TM)$ e $f \in C^\infty(I)$;

b) Se $t_0 \in I$ e, em vizinhança V de t_0 , existe campo vetorial \tilde{X} definido em vizinhança aberta U de $\gamma(t_0)$ para o qual X é sua restrição a V , então

$$\frac{\nabla}{dt} X(t_0) = (\nabla_{\dot{\gamma}} \tilde{X})_{\gamma(t_0)}.$$

A derivada covariante é um caso particular do pullback de uma conexão ∇ em M por um mapa suave $\varphi : N \rightarrow M$, induzindo uma conexão no fibrado $\Gamma(\varphi^*TM)$ satisfazendo propriedades análogas. Em coordenadas locais, se $X(t) = X^i(t)\partial_i$,

$$\frac{\nabla}{dt} X = \sum_k \left((X^k)' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i X^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Um campo X ao longo de γ é dito *paralelo* se $\frac{\nabla}{dt} X = 0$, e esta definição pode contemplar curvas que são apenas suaves por partes. Como a equação de um campo paralelo em coordenadas locais é uma EDO linear de primeira ordem, sempre existirá campo paralelo V ao longo de I estendendo uma condição inicial $V(t_0) = v$, e dependendo linearmente de v .

Assim, dada curva suave por partes $\gamma : I \rightarrow M$, $t_0, t_1 \in I$ com $p = \gamma(t_0)$, $q = \gamma(t_1)$ e $v \in T_p M$, o campo paralelo V ao longo de γ que estende v nos dá unicamente e linearmente um vetor $w \in T_q M$. O *transporte paralelo* de $\gamma(t_0)$ a $\gamma(t_1)$ ao longo de γ é então um mapa linear invertível $P_{t_1 t_0}^\gamma : T_{\gamma(t_0)} M \rightarrow T_{\gamma(t_1)} M$ tal que

- $P_{t_0 t_0}^\gamma = \text{Id}_{T_{\gamma(t_0)} M}$;
- $P_{t_0 t_1}^\gamma = (P_{t_1 t_0}^\gamma)^{-1}$; e
- $P_{t_2 t_0}^\gamma = P_{t_2 t_1}^\gamma \circ P_{t_1 t_0}^\gamma$.

A partir da propriedade b) da derivada covariante, pode-se recuperar os valores da própria conexão, evidenciando a equivalência entre essas noções. A proposição seguinte mostra que é possível também recuperar a derivada covariante a partir dos transportes paralelos ao longo de curvas suaves, e portanto as três estruturas, numa variedade, transmitem a mesma ideia. Além disso, ela faz referência direta à maneira como define-se a derivada direcional de campos em \mathbb{R}^n .

Proposição 1.2.3. *Seja M variedade suave munida de uma conexão afim ∇ . Se $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é curva suave e X um campo vetorial suave ao longo de γ , então*

$$\left(\frac{\nabla}{dt} X \right) (0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{0 t}^\gamma X(t) - X(0)}{t}.$$

Demonstração. Com $p = \gamma(0)$, tome base (v_1, \dots, v_n) de $T_p M$, e estenda tais vetores a campos paralelos V_1, \dots, V_n paralelos ao longo de γ . Então

$$X(t) = a^1(t)V_1(t) + \dots + a^n(t)V_n(t),$$

em que as funções $a^i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ são suaves. Pela linearidade do transporte paralelo, temos que $P_{0,t}^\gamma X(t) = a^1(t)v_1 + \dots + a^n(t)v_n$, de modo que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{0,t}^\gamma X(t) - X(0)}{t} = (a^1)'(0)v_1 + \dots + (a^n)'(0)v_n.$$

Por outro lado,

$$\left(\frac{\nabla}{dt} X \right)_0 = \left(\sum (a^i)' Y_i + a^i \frac{\nabla}{dt} Y_i \right)_0 = \sum_{i=1}^n (a^i)'(0) v_i,$$

demostrando a igualdade. \square

Proposição 1.2.4. *Seja M variedade com conexão ∇ e X campo vetorial suave ao longo de uma curva suave $\gamma : I \rightarrow M$. Se $\phi : J \rightarrow I$ é difeomorfismo e temos as reparametrizações $\eta = \gamma \circ \phi$ e $Y = X \circ \phi$, então Y é campo suave ao longo de η , e vale*

$$\left(\frac{\nabla}{dt} Y \right)(s) = \left(\frac{\nabla}{dt} X \right)(\phi(s))\phi'(s)$$

para $s \in J$. Em particular, paralelismo de campos independe de reparametrizações da curva.

Demonstração. Sabendo que localmente $\frac{\nabla}{dt} X = \sum_i \left((X^i)' + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i X^j (\gamma^k)' \right) \partial_i$, temos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\nabla}{dt} Y \right)(s) &= \frac{\nabla}{dt} (X \circ \phi)(s) = \\ &= \sum_i \left((X^i \circ \phi)'(s) + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i(\eta(s)) (X^j \circ \phi)(s) (\gamma^k \circ \phi)'(s) \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\eta(s)} = \\ &= \sum_i \left((X^i)'(\phi(s))\phi'(s) + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i(\gamma(\phi(s))) X^j(\phi(s)) (\gamma^k)'(\phi(s))\phi'(s) \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(\phi(s))} = \\ &= \phi'(s) \sum_i \left((X^i)'(\phi(s)) + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i(\gamma(\phi(s))) X^j(\phi(s)) (\gamma^k)'(\phi(s)) \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(\phi(s))} = \\ &= \left(\frac{\nabla}{dt} X \right)(\phi(s))\phi'(s). \end{aligned}$$

e como o resultado é local, isto valerá para todo $s \in J$. \square

Para o que segue, é necessário considerar conexões em contextos mais gerais do que definidas apenas sobre o fibrado tangente de uma variedade. Se $\pi : E \rightarrow M$ é um fibrado vetorial sobre uma variedade suave M , uma *conexão* em E é um mapa \mathbb{R} -bilinear $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ satisfazendo

- $\nabla_{fX}s = f\nabla_Xs$, para $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ e $s \in \Gamma(E)$;
- $\nabla_Xfs = X(f)s + f\nabla_Xs$, para $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ e $s \in \Gamma(E)$.

Na linguagem acima, uma conexão afim ∇ no fibrado tangente TM pode ser unicamente estendida para agir como derivação em tensores arbitrários sobre M , não apenas em campos vetoriais [GHL12, p. 74]. Isto produz unicamente uma família de conexões nos fibrados tensoriais $T^{(r,s)}M$, denotadas coletivamente por ∇ , satisfazendo:

- a. $\nabla_X f = X(f)$, para $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M) \cong \Gamma(T^{(0,0)}M)$;
- b. $\nabla_X Y$ coincide com a conexão definida em TM ;
- c. $\nabla_X(S \otimes T) = \nabla_X S \otimes T + S \otimes \nabla_X T$;
- d. $\nabla_X : \Gamma(T^{(r,s)}M) \rightarrow \Gamma(T^{(r,s)}M)$ comuta com contrações $c : \Gamma(T^{(r,s)}M) \rightarrow \Gamma(T^{(r-1,s-1)}M)$.

Com esta extensão, é possível considerar a *derivada covariante* de tensores como os operadores \mathbb{R} -lineares $\nabla : \Gamma(T^{(r,s)}M) \rightarrow \Gamma(T^{(r,s+1)}M)$, $T \mapsto \nabla T$, dados por

$$\nabla T(X; Y_1, \dots, Y_s) = \nabla_X T(Y_1, \dots, Y_s).$$

Como mencionado anteriormente, se M é munida de conexão afim ∇ e $\varphi : N \rightarrow M$ é função suave, define-se unicamente uma conexão ∇^φ no fibrado pullback φ^*TM sobre N dos campos suaves ao longo de φ , dita a *conexão induzida por φ* , tal que

- a) $\nabla_{fX}^\varphi U = f \nabla_X^\varphi U$, se $X \in \mathfrak{X}(N)$, $f \in C^\infty(N)$ e $U \in \Gamma(\varphi^*TM)$;
- b) Se $U \in \Gamma(\varphi^*TM)$ admite extensão para $\hat{U} \in \Gamma(TM)$ definida em um aberto V de $\varphi(N)$, então

$$(\nabla_X^\varphi U)_p = (\nabla_{d\varphi(X_p)} \hat{U})_{\varphi(p)}.$$

No caso particular de $N = I \subseteq \mathbb{R}$, todo campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ é da forma $f \frac{\partial}{\partial t}$, dando origem à derivada covariante

$$\frac{\nabla}{dt} U := \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\varphi U.$$

1.3 A Conexão de Levi-Civita

É um fato fundamental da teoria que, em uma variedade riemanniana, há uma escolha canônica de conexão, a *conexão de Levi-Civita*. Ela apresenta duas propriedades desejáveis: ser *compatível com a métrica*, e ser *livre de torção*.

Teorema 1.3.1. *Dada uma variedade riemanniana (M, g) , existe uma única conexão afim ∇ em M , dita a conexão de Levi-Civita, tal que*

i. É compatível com a métrica:

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M);$$

ii. É livre de torção:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

A demonstração utiliza um truque de permutação para deduzir a *fórmula de Koszul*

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) - g([Y, Z], X),$$

e a partir dela concluir unicidade, dado que g é não-degenerada, e a existência, mostrando que ∇ satisfaz as propriedades desejadas. O fato de g ser positiva-definida não é necessário para a demonstração, inferindo que este teorema também vale para variedades pseudo-riemannianas, ou seja, aquelas em que o tensor g é definido mas não necessariamente positivo-definido. Explicitamente numa carta local, os símbolos de Christoffel da conexão de Levi-Civita são dados por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}).$$

É interessante comentar que os resultados de existência e unicidade da conexão de Levi-Civita estão inseridos no contexto mais geral de conexões livres de torção e compatíveis com G -estruturas em M , discutindo suas torções intrínsecas, com uma métrica riemanniana interpretada como uma $O(n)$ -estrutura [Cra15, p. 131].

Percebe-se que a condição de compatibilidade com a métrica é equivalente à igualdade $\nabla g = 0$, já que em geral

$$\nabla_X g(Y, Z) = \nabla_X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z).$$

Uma consequência importante da conexão de Levi-Civita ser compatível com a métrica é a fórmula

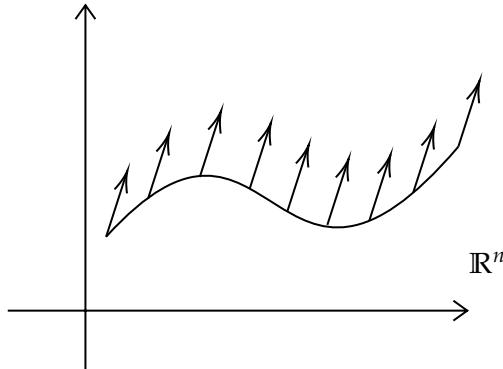
$$\frac{d}{dt}g(X(t), Y(t)) = g\left(\frac{\nabla}{dt}X(t), Y(t)\right) + g(X(t), \frac{\nabla}{dt}Y(t))$$

para campos suaves X e Y ao longo de uma curva suave $\gamma : I \rightarrow M$, e a conclusão de que o transporte paralelo será não só isomorfismo entre os espaços tangentes, mas também isometria.

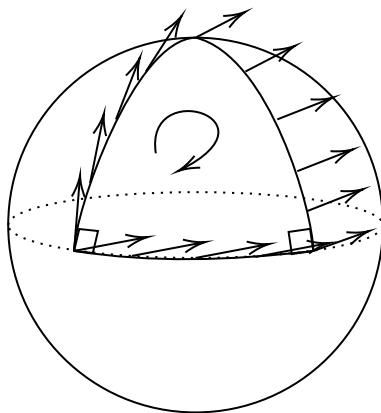
No caso de \mathbb{R}^n com a métrica euclidiana usual g_0 , a conexão de Levi-Civita é dada por

$$\nabla_X Y = X(Y),$$

em que os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k se anulam. Assim, um campo é paralelo ao longo de uma curva em \mathbb{R}^n se e somente se ele é constante, considerando as identificações $T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.



O mesmo não vale na esfera S^2 com a métrica induzida de \mathbb{R}^3 . Observamos que o transporte paralelo do vetor abaixo ao longo de meridianos e do equador faz com que ele retorne ao espaço tangente em ângulo diferente de 0° :



Este fenômeno é indicativo de que o espaço possui *curvatura* não-nula. Dada uma curva suave $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ com $\gamma(0) = \gamma(1) = p$, o transporte paralelo ao longo de γ resulta em endomorfismo de $T_p M$, mais especificamente um elemento de $O(T_p M)$. O conjunto de todos

os automorfismos de $T_p M$ advindos de transportes paralelos por curvas fechadas suaves por partes em p é dito o *grupo de holonomia* da conexão ∇ baseado em p , denotado $\text{Hol}_p(\nabla)$. Mais geralmente, dada uma conexão qualquer em M , é possível definir o grupo de holonomia como acima, visto que ele depende apenas da noção de transporte paralelo, e não necessariamente de uma métrica. Isto justifica a notação $\text{Hol}_p(\nabla)$ utilizada, e apenas nos restringimos ao caso de holonomia dada pela conexão de Levi-Civita.

O estudo de quais grupos de holonomia são obtidos para quais variedades riemannianas é uma área rica e frutífera, com destaque maior ao teorema de classificação de Berger [Joy07, p. 53]. A relação entre holonomia e curvatura é também dada na ideia intuitiva de que a curvatura é a versão infinitesimal da holonomia [Sam89], encapsulada pelo teorema de Ambrose-Singer [AS53].

Proposição 1.3.2. *Seja (M, g) variedade riemanniana, ∇ sua conexão de Levi-Civita, $\varphi : N \rightarrow M$ mapa suave, e ∇^φ a conexão induzida. Então vale*

$$\nabla_X^\varphi(\varphi_* Y) - \nabla_Y^\varphi(\varphi_* X) - \varphi_*[X, Y] = 0,$$

e

$$Xg(U, V) = g(\nabla_X^\varphi U, V) + g(U, \nabla_X^\varphi V),$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ e $U, V \in \Gamma(\varphi^* TM)$.

Demonstração. [Gor22, p. 55]. □

Proposição 1.3.3. *Seja (M, g) variedade riemanniana e ∇ sua conexão de Levi-Civita. Se X é campo vetorial suave em M e φ_t denota seu fluxo local, então*

$$\nabla_v X = \left. \frac{\nabla}{dt} \right|_{t=0} d(\varphi_t)_p(v).$$

Demonstração. Considere a aplicação suave $\Phi : I \times J \rightarrow M$ dada por

$$\Phi(t, s) = \varphi_t(\gamma(s)),$$

onde γ é curva tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Derivando Φ com respeito a s e igualando $s = 0$, obtemos

$$d(\varphi_t)_{\gamma(s)}(\gamma'(s))|_{s=0} = d(\varphi_t)_p(v),$$

e derivando Φ com respeito a t e igualando a 0, temos $X_{\gamma(s)}$. Pela proposição anterior, o pullback da conexão de Levi-Civita para campos ao longo de Φ satisfará propriedade análoga a ser livre de torção, implicando na comutatividade de derivadas covariantes com as derivadas

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Portanto

$$\left. \frac{\nabla}{dt} \right|_{t=0} d(\varphi_t)_p(v) = \left. \frac{\nabla}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \Phi(s, t) = \left. \frac{\nabla}{ds} \right|_{t=0} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{s=0} \Phi(s, t) = \left. \frac{\nabla}{ds} \right|_{s=0} X_{\gamma(s)} = \nabla_v X.$$

□

Um exemplo importante de conexões é o caso de imersões isométricas:

Proposição 1.3.4. *Se $\iota : (M, g) \hookrightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ é imersão isométrica, ∇ é a conexão de Levi-Civita em M e $\bar{\nabla}$ é a conexão em \bar{M} , e X, Y são campos suaves em M admitindo extensões locais \bar{X}, \bar{Y} em \bar{M} , então*

$$(\nabla_X Y)_p = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})_p^\top,$$

onde \top denota a projeção de $T_p \bar{M}$ em $T_p M$.

Demonstração. [Gor22, p. 57]. □

Um campo vetorial suave X é dito *campo de Killing* se seu fluxo local é dado por isometrias de M , ou seja, se $(\varphi_t)^*g = g$. Isto é equivalente a $\mathcal{L}_Xg = 0$, pois

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} ((\varphi_t)^*g)_p = \varphi_{t_0}^*(\mathcal{L}_Xg)_p.$$

Intuitivamente, campos de Killing correspondem a isometrias infinitesimais de M , em que, se completos, correspondem a grupos a um parâmetro de isometrias. Uma outra condição equivalente para X ser campo de Killing é o endomorfismo linear $(\nabla X)_p$ ser antissimétrico em $T_p M$ para todo $p \in M$, ou seja,

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0.$$

Notadamente, os campos de Killing formam uma sub-álgebra de Lie dos campos suaves $\mathfrak{X}(M)$, já que $\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$.

Seja G um grupo de Lie. Lembramos que seus subgrupos a um parâmetro $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ são as curvas integrais maximais de $X \in \text{Lie}(G)$ passando pela identidade, sendo também homomorfismos de grupos, em que todo campo esquerda-invariante é completo. Com isso, tem-se a *exponencial de Lie* como $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ dada por $X \mapsto \gamma_X(1)$, sendo difeomorfismo local e $\gamma_X(t) = \exp(tX)$.

Dada a representação adjunta $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$, derivando-a na identidade obtemos também a representação $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em \mathfrak{g} é *ad-invariante* se, para todo $X \in \mathfrak{g}$, vale

$$\langle \text{ad}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \text{ad}_X Z \rangle = 0,$$

Ou seja, se a representação ad é a valores em $\mathfrak{o}(\mathfrak{g})$, as matrizes anti-simétricas com respeito ao produto interno. Nota-se, na verdade, que será a valores em $\mathfrak{so}(\mathfrak{g})$.

Proposição 1.3.5. *Todo produto interno Ad-invariante em \mathfrak{g} é também ad-invariante, e se G é conexo, vale a recíproca.*

Demonstração. [Gor22, p. 59]. □

Como calcula-se a conexão de Levi-Civita em métricas bi-invariantes? Para $X, Y \in \mathfrak{g}$, temos que $g(X, Y)$ é função constante em G . Pela fórmula de Koszul para a conexão, e pelo fato de que g é ad-invariante, temos que

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Ainda, como \mathfrak{g} é conjunto gerador de $\mathfrak{X}(G)$ como $C^\infty(M)$ módulo, isto permite calcular a conexão em quaisquer campos. Nota-se ainda que $\nabla_X X = 0$, em que, ao estudarmos geodésicas em variedade riemannianas, esta condição mostra que os subgrupos a um parâmetro de G são realmente geodésicas. Em particular, a exponencial riemanniana concorda com a exponencial de Lie em $T_e G$, e as geodésicas de G são da forma $t \mapsto g \exp tX$, para $g \in G$ e $X \in \mathfrak{g}$.

Proposição 1.3.6. *Seja G um grupo de Lie, e g uma métrica em G . Se g é esquerda-invariante, então os campos direita-invariantes são campos de Killing, e se g é direita-invariante, os campos esquerda-invariantes são campos de Killing.*

Reciprocamente, se G é conexo, e todo campo esquerda (direita)-invariante é de Killing, então a métrica g é direita (esquerda)-invariante.

Demonstração. Sabe-se que o fluxo de um campo esquerda-invariante X é dado por $\varphi_t = R_{\exp tX}$, e naturalmente segue que $\varphi_t^*g = g$ para uma métrica invariante à direita. Se agora Y é um campo direita-invariante para uma métrica esquerda-invariante, tem-se que o fluxo de Y é completo e

as curvas integrais passando pela identidade $e \in G$ são subgrupos a 1 parâmetro de G , definindo um mapa exponencial $\bar{\exp}(Y) = \gamma_Y(1)$. Com Y direita-invariante e translações a direita preservando curvas integrais de Y , seu fluxo ψ_t será dado por $L_{\bar{\exp}tY}$, e segue-se também que é Killing.

Agora, com G conexo, se X é esquerda-invariante, o fluxo $\varphi_t = R_{\exp tX}$ é isometria da métrica por X ser Killing. E como G é conexo, ele é gerado por elementos da forma $\exp tX$, de modo que para todo $h \in G$, R_h também será isometria, e assim a métrica é direita-invariante. Os mesmos raciocínios se aplicam no caso análogo de todo campo direita-invariante ser de Killing. \square

1.4 Construções Analíticas

A partir de uma métrica riemanniana e sua conexão de Levi-Civita, é possível dar significado a certos operadores diferenciais presentes no espaço euclidiano para o contexto mais geral de variedades riemannianas.

Dada função $f \in C^\infty(M)$, define-se seu *gradiente* $\text{grad } f := (df)^\sharp$, ou seja, é o campo vetorial tal que

$$g(\text{grad } f, X) = df(X) = Xf, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Observa-se que vale $\text{grad}(f_1 + f_2) = \text{grad } f_1 + \text{grad } f_2$ e $\text{grad}(f_1 f_2) = f_1 \text{grad } f_2 + f_2 \text{grad } f_1$, e em coordenadas locais temos

$$\text{grad } f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, define-se seu *divergente* como a função suave $\text{div } X := \text{tr}(v \mapsto \nabla_v X) = \text{tr } \nabla X$. Como no gradiente, o divergente satisfaz as propriedades $\text{div}(X_1 + X_2) = \text{div } X_1 + \text{div } X_2$ e $\text{div}(fX) = \langle \text{grad } f, X \rangle + f \text{div } X$, para $f \in C^\infty(M)$. Em coordenadas locais, com $X = X^i \partial_i$,

$$\text{div } X = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^i X^j,$$

em que os termos dados pelos símbolos de Christoffel intuitivamente representam a diferença do divergente para o divergente usual em \mathbb{R}^n .

Dada $f \in C^\infty(M)$, define-se também seu *laplaciano* como a função suave $\Delta f := \text{div grad } f$. Vale que

$$\Delta(f_1 f_2) = f_1 \Delta f_2 + \langle \text{grad } f_1, \text{grad } f_2 \rangle + f_2 \Delta f_1,$$

e naturalmente uma função é dita *harmônica* se $\Delta f = 0$. Em coordenadas locais temos

$$\Delta f = \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \Gamma_{ij}^i g^{jk} \frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

Outra formulação local possível do laplaciano é

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right),$$

em que $|g|$ denota o determinante da matriz de Gram $(g_{ij})_{ij}$ dos coeficientes da métrica.

Finalmente, pode-se definir, para $f \in C^\infty(M)$, seu *Hessiano* como o $(0, 2)$ -tensor $\text{Hess } f := \nabla df$, com ∇ sendo a derivada covariante nos tensores:

$$\text{Hess } f(X, Y) = \nabla df(X, Y) = \nabla_X df(Y) = \nabla_X(df(Y)) - df(\nabla_X Y)$$

e então

$$\text{Hess } f(X, Y) = X(Yf) - (\nabla_X Y)(f),$$

sendo simples calcular que é $C^\infty(M)$ -linear nas entradas e é simétrico. É possível mostrar também que $\text{tr } \text{Hess } f = \Delta f$. Uma observação interessante de ser feita sobre os operadores definidos

acima é que, em coordenadas geodésicas (conceito a ser visto a frente) no ponto p , as expressões locais avaliadas em p são as mesmas de \mathbb{R}^n .

Para o que segue, faremos algumas considerações sobre o elemento de volume riemanniano $dV = \text{vol}_g$ numa variedade riemanniana orientada.

Proposição 1.4.1. *dV é paralelo, isto é, $\nabla dV \equiv 0$.*

Demonstração. Dado $p \in M$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, γ curva integral de X passando por p , e E_1, E_2, \dots, E_n campos paralelos ortonormais positivamente orientados ao longo de γ , temos que

$$\nabla_X dV(E_1, \dots, E_n) = X(dV(E_1, \dots, E_n)) - \sum_{i=1}^n dV(E_1, \dots, \nabla_X E_i, \dots, E_n) = 0,$$

pois $dV(E_1, \dots, E_n)$ é constante igual a 1 e os campos são paralelos. Assim, $\nabla_X dV = 0$ para todo X . \square

Proposição 1.4.2. *Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, tem-se que $\mathcal{L}_X dV = (\text{div} X) dV$.*

Demonstração. Para uma k -forma ω , tem-se que

$$\mathcal{L}_X \omega(X_1, \dots, X_k) = \nabla_X \omega(X_1, \dots, X_k) + \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \dots, \nabla_{X_i} X, \dots, X_k).$$

Se $T : V \rightarrow V$ é endomorfismo linear em espaço de dimensão finita, tem-se que seu traço é a constante $\text{tr } T$ tal que, para toda n -forma em V e v_1, \dots, v_n em V , tem-se

$$\sum_{i=1}^n \omega(v_1, \dots, T v_i, \dots, v_n) = (\text{tr } T) \omega(v_1, \dots, v_n).$$

Assim, se ω é n -forma em M , tem-se que $\mathcal{L}_X \omega = (\text{div} X) \omega + \nabla_X \omega$, demonstrando o resultado com o paralelismo de dV . \square

Como $\mathcal{L}_X dV = 0$ se e somente se vale $\varphi_t^* dV = dV$, sendo φ_t o fluxo local de X , tem-se que um campo é *incompressível* (isto é, $\text{div} X = 0$) se e somente se seu fluxo preserva volumes infinitesimalmente.

A partir destas considerações, é possível mostrar que em variedades riemannianas vale uma generalização do teorema do divergente:

Teorema 1.4.3. *Seja Ω domínio em M com borda suave e $\partial\Omega$ orientado por um campo normal unitário ν apontando para fora de Ω . Sendo dS o volume riemanniano de $\partial\Omega$ e X um campo vetorial suave com suporte compacto em M , então*

$$\int_{\Omega} \text{div} X dV = \int_{\partial\Omega} \langle X, \nu \rangle dS.$$

Demonstração. Afirma-se inicialmente que, com $\partial\Omega$ munido da métrica induzida $i_{\partial\Omega}^* g$, onde $i_{\partial\Omega} : \partial\Omega \hookrightarrow \Omega$ denota a inclusão canônica, tem-se $dS = i_{\partial\Omega}^*(\iota_{\nu} dV)$, onde ι_{ν} é a multiplicação interior por ν em formas. De fato, se $p \in \partial\Omega$ e (e_1, \dots, e_{n-1}) é base ortonormal positivamente orientada de $T_p \partial\Omega$ com a orientação induzida na borda, $(\nu_p, e_1, \dots, e_{n-1})$ é base ortonormal positivamente orientada de $T_p \Omega$. Assim

$$i_{\partial\Omega}^*(\iota_{\nu} dV)(e_1, \dots, e_{n-1}) = dV(\nu_p, e_1, \dots, e_n) = 1,$$

concluindo a igualdade $dS = i_{\partial\Omega}^*(\iota_{\nu} dV)$ em todo $p \in \partial\Omega$. Também vale que $i_{\partial\Omega}^*(\iota_X dV) = \langle X, \nu \rangle dV$; decompondo ortogonalmente $X = X^{\perp} + X^{\top}$, onde $X^{\top} = \langle X, \nu \rangle \nu$, tem-se

$$i_{\partial\Omega}^*(\iota_X dV) = i_{\partial\Omega}^*(\iota_{X^{\top}} dV) + i_{\partial\Omega}^*(\iota_{X^{\perp}} dV) = i_{\partial\Omega}^*(\iota_{X^{\top}} dV) + \langle X, \nu \rangle i_{\partial\Omega}^*(\iota_{\nu} dV) = \langle X, \nu \rangle dS,$$

já que na multiplicação interior por X^\perp a forma dV é avaliada em n vetores em $T_p\partial\Omega$, de dimensão $n - 1$.

Com as conclusões acima e a fórmula de Cartan $\mathcal{L}_X dV = \iota_X d(dV) + d(\iota_X dV) = d(\iota_X dV)$,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X dV = \int_{\Omega} d(\iota_X dV) = \int_{\partial\Omega} \iota_X dV = \int_{\partial\Omega} \langle X, \nu \rangle dS.$$

□

O resultado acima tem consequências importantes no estudo do laplaciano de uma variedade riemanniana. Ele permite deduzir, por exemplo, que o laplaciano Δ será um operador (não necessariamente limitado) formalmente adjunto em variedades compactas, e que autofunções do laplaciano associadas a autovalores distintos são ortogonais com respeito à norma L^2 em $C^\infty(M)$.

Capítulo 2

Geodésicas e Completude

“For this purpose, one constructs the system of shortest lines emanating from a given point; the position of an arbitrary point can then be determined by the initial direction of the shortest line in which it lies, and its distance, in this line, from the initial point.”

B. Riemann [[Spi99](#), vol. II, p. 156]

Vimos algumas das estruturas geométricas e afins possíveis de serem definidas em uma variedade riemanniana, como comprimento de curvas, transporte paralelo e volume. Uma estrutura de suma importância que introduzimos agora são as geodésicas, que cumprem papel análogo a retas nos espaços euclidianos. Elas são descritas simultaneamente como curvas que localmente realizam as distâncias entre pontos em seu traço, e também como curvas de “aceleração” nula. Intuitivamente, isto significaria que um ser vivo descrevendo tal percurso no espaço M segue o caminho em “linha reta” mais naturalmente o possível.

Com as geodésicas, é possível discutir um primeiro conceito global em geometria, o de completude de métricas, a partir do mapa exponencial, e suas consequências iniciais.

2.1 Geodésicas

Dada variedade riemanniana (M, g) com conexão de Levi-Civita ∇ , uma curva suave por partes $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ é uma *geodésica* se

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma} = 0,$$

interpretando $\dot{\gamma}$ como um campo suave por partes ao longo de γ . Isto significa que tal campo é paralelo, e como o transporte paralelo é dado por isometrias, isto mostra que $\dot{\gamma}$ tem norma constante. Assim, a curva é parametrizada com velocidade constante. Em coordenadas locais $(U, (x^i))$, as geodésicas $\gamma = (\gamma^i)$ são dadas pelo sistema de equações diferenciais não-lineares de segunda ordem

$$\ddot{\gamma}^i + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Aplicam-se nesse caso resultados de existência, unicidade e suavidade das soluções locais, com respeito as condições iniciais $\gamma(0)$ e $\dot{\gamma}(0)$. Explicitamente, para $p \in M$ e $v \in T_p M$, existe única geodésica $\gamma_v : I \rightarrow M$ tal que $\gamma_v(0) = p$ e $\dot{\gamma}_v(0) = v$, em intervalo suficientemente pequeno, e tal geodésica varia suavemente com p e v .

Ainda mais, as soluções são homogêneas, de modo que se $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ é geodésica, então para todo $\lambda > 0$, a curva $\eta : (a/\lambda, b/\lambda) \rightarrow M$ dada por $\eta(t) = \gamma(\lambda t)$ também é geodésica. Desta maneira, $\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t)$. Isto permite descrever localmente as geodésicas definidas em um intervalo uniforme fixo:

Proposição 2.1.1. *Dado $p \in M$, existe vizinhança U de p e $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $q \in U$ e $v \in T_q M$ com $\|v\| < \varepsilon$, existe uma única geodésica $\gamma_v : (-2, 2) \rightarrow M$ tal que $\gamma_v(0) = q$ e $\dot{\gamma}_v(0) = v$.*

Ainda, o mapa $\Gamma : \bigcup_{q \in U} B(0_q, \varepsilon) \times (-2, 2) \rightarrow M$ dado por $\Gamma(v, t) = \gamma_v(t)$ é suave.

Tal resultado depende do seguinte lema:

Lema 2.1.2. *Dada variedade riemanniana (M, g) , $p \in M$ e o fibrado tangente TM , qualquer vizinhança W de 0_p em TM contém vizinhança da forma*

$$\bigcup_{x \in U} B(0_x, \varepsilon) = \{v \in TM|_U : g_{\pi(v)}(v, v)^{1/2} < \varepsilon\}$$

para uma vizinhança aberta U de p em M .

Demonstração do Lema 2.1.2. Com carta local (V, φ) de M com $\varphi(p) = x_0$ e $d\varphi : \pi^{-1}(V) \subseteq TM \rightarrow \varphi(V) \times \mathbb{R}^n$ carta local de TM , podemos supor $W \subseteq \pi^{-1}(V)$, e tal que $d\varphi(W) = B(x_0, r_1) \times B(0, r_2)$. Definindo $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ por $F(v) = g_{\pi(v)}(v, v)^{1/2}$, a sua expressão local $H = F \circ (d\varphi)^{-1}$ é dada por

$$H(x_1, \dots, x_n, v^1, \dots, v^n) = \left(g_{ij}(\varphi(x)) v^i v^j \right)^{1/2} = \sqrt{v^T G_x v},$$

com G_x matriz simétrica positivo-definida dependendo suavemente de x . Procura-se então vizinhança U' de $(x_0, 0)$ da forma $\{(x, v) \in B(x_0, r) \times \mathbb{R}^n : H(x, v) < \varepsilon\}$ contida em $d\varphi(W)$. Em outras palavras, procuramos r e ε tais que se $x \in B(x_0, r)$ e $H(x, v) < \varepsilon$, então $v \in B(0, r_2)$.

Com $H_x(v) = H(x, v)$, e sendo m_x e M_x o menor e maior autovalor de G_x respectivamente, tem-se $m_x \|v\| \leq H_x(v) \leq M_x \|v\|$. Assim, se $H_x(v) < \varepsilon$, tem-se $\|v\| < \varepsilon/m_x$, e como m_x varia continuamente com x , existe $r \in (0, r_1)$ tal que se $x \in B(x_0, r)$, então $\frac{1}{2}m_{x_0} < m_x < \frac{3}{2}m_{x_0}$. Tomando $\varepsilon < \frac{1}{2}m_{x_0}r_2$, temos que se $(x, v) \in U'$, então

$$\|v\| \leq \frac{H_x(v)}{m_x} < \frac{\varepsilon}{m_x} < \frac{2\varepsilon}{m_{x_0}} < r_2,$$

de modo que $(x, v) \in d\varphi(W)$. Então a vizinhança $(d\varphi)^{-1}(U')$ de 0_p é a desejada. \square

Demonstração da Proposição 2.1.1. Sabemos que existe vizinhança W de 0_p em TM e $\delta > 0$ fixo tal que para $v \in W$, existe única geodésica $\gamma_v : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ com $\gamma_v(0) = \pi(v)$ e $\dot{\gamma}_v(0) = v$, e $\gamma_v(t)$ é suave em v e t . Pela continuidade de g , assume-se W da forma $\{v \in TM|_U : g_{\pi(v)}(v, v)^{1/2} < \varepsilon'\}$, $\varepsilon' > 0$, e pela homogeneidade da equação de geodésicas, multiplica-se o comprimento do intervalo por $2/\delta$, e $\varepsilon = \varepsilon' \frac{\delta}{2}$. \square

A seguinte proposição caracteriza geodésicas a menos de reparametrização como aquelas curvas cuja derivada covariante da velocidade é proporcional à velocidade:

Proposição 2.1.3. *Seja $\gamma : I \rightarrow M$ geodésica, $\phi : J \rightarrow I$ difeomorfismo e $\eta : \gamma \circ \phi$ reparametrização. Então existe uma função suave $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla_{\eta'} \eta' = f \eta'$.*

Reciprocamente, se $\eta : J \rightarrow M$ é tal que $\nabla_{\eta'} \eta' = f \eta'$, então existe difeomorfismo $\phi : J \rightarrow I$ tal que $\gamma = \eta \circ \phi^{-1}$ é geodésica.

Demonstração. Com $\eta'(s) = \phi'(s)\gamma'(\phi(s))$, a partir da Proposição 1.2.4, temos

$$\begin{aligned}\nabla_{\eta'}\eta' &= \frac{\nabla}{dt}\eta' = \frac{\nabla}{dt}(\phi'(\gamma' \circ \phi)) = \phi''(\gamma' \circ \phi) + \phi'\frac{\nabla}{dt}(\gamma' \circ \phi) = \\ &\frac{\phi''}{\phi'}\phi'(\gamma' \circ \phi) + (\phi')^2\left(\frac{\nabla}{dt}\gamma'\right) \circ \phi = \frac{\phi''}{\phi'}\eta' = (\log|\phi'|)\eta'.\end{aligned}$$

Se temos agora $\nabla_{\eta'}\eta' = f\eta'$, procuramos ϕ difeomorfismo tal que $\gamma = \eta \circ \phi^{-1}$ seja geodésica. Tomando $\psi = \phi^{-1}$, devemos ter que

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\nabla}{dt}\gamma' = \frac{\nabla}{dt}(\psi'(\eta' \circ \psi)) = \psi''(\eta' \circ \psi) + \psi'\frac{\nabla}{dt}(\eta' \circ \psi) = \psi''(\eta' \circ \psi) + (\psi')^2\left(\frac{\nabla}{dt}\eta'\right) \circ \psi \\ &= \psi''(\eta' \circ \psi) + (\psi')^2(f \circ \psi)(\eta' \circ \psi) = (\psi'' + (\psi')^2(f \circ \psi))\eta' \circ \psi.\end{aligned}$$

Assim, queremos encontrar ψ difeomorfismo satisfazendo $\psi''(t) + \psi'(t)^2f(\psi(t)) = 0$. É possível resolver a equação explicitamente, considerando F uma antiderivada de f , e g uma antiderivada de e^F . Como $g' = e^F > 0$, é difeomorfismo, existe $\psi = g^{-1}$. Veja que

$$\psi'(t) = (g^{-1})'(t) = \frac{1}{g'(g^{-1}(t))} = \frac{1}{e^{F(\psi(t))}} = e^{-F(\psi(t))},$$

e portanto

$$\psi''(t) = -(F \circ \psi)'(t)e^{-F(\psi(t))} = -f(\psi(t))\psi'(t)e^{-F(\psi(t))} = -f(\psi(t))\psi'(t)^2,$$

de modo que $\phi = g$ é a reparametrização em geodésica desejada. \square

Em algumas variedades riemannianas, é possível calcular e descrever suas geodésicas explicitamente. Nos espaços euclidianos, as geodésicas são simplesmente os segmentos de retas, satisfazendo a equação $\ddot{\gamma} = 0$, podendo estender seus domínios de definição a todo \mathbb{R} .

No caso da esfera \mathbb{S}^n , é possível calculá-las por meio de um argumento de reflexão [Gor22, p. 58], mas também pode-se utilizar conexões em subvariedades. Como \mathbb{S}^n é subvariedade riemanniana mergulhada de \mathbb{R}^{n+1} , dada curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^n$, sua derivada covariante é dada por

$$\frac{\nabla}{dt}X(t) = (X'(t))^\top,$$

onde \top denota a projeção de $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ no espaço tangente $T_{\gamma(t)}\mathbb{S}^n \cong \gamma(t)^\perp$. Em particular, $\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) = (\gamma''(t))^\top$. Assim, para que γ seja geodésica, é necessário e suficiente que sua aceleração seja normal a \mathbb{S}^n , e portanto $\gamma'' = \lambda\gamma$, para $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ suave. Se γ é geodésica, $\|\gamma'(t)\| \equiv c \in \mathbb{R}$, e derivando $\langle \gamma, \gamma' \rangle = 0$, temos

$$\langle \gamma, \gamma'' \rangle = -\langle \gamma', \gamma' \rangle = -c^2.$$

Assim, $\lambda(t) \equiv -c^2$. Com γ satisfazendo a EDO linear de segunda ordem $\gamma'' = -c^2\gamma$ com condições iniciais $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, temos

$$\gamma(t) = \cos(\|v\|t)p + \frac{\sin(\|v\|t)}{\|v\|}v,$$

descrevendo os grandes círculos em \mathbb{S}^n . Argumentos similares mostram que as geodésicas do espaço hiperbólico \mathbb{H}^n são dadas por

$$\gamma(t) = \cosh(\|v\|t)p + \frac{\sinh(\|v\|t)}{\|v\|}v.$$

Proposição 2.1.4. *Dado recobrimento riemanniano $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$, as geodésicas de M são as projeções das geodésicas de \tilde{M} , e as geodésicas de \tilde{M} são os levantamentos das geodésicas de M .*

Demonstração. [Gor22, p. 58]. \square

2.2 O Mapa Exponencial

A partir da Proposição 2.1.1, é possível avaliar uniformemente a tempo $t = 1$ geodésicas de velocidade inicial pequena. Formalmente, unindo as vizinhanças da forma $\bigcup_{q \in U} B(0_q, \varepsilon)$ para $p \in M$, obtemos uma vizinhança aberta Ω da seção nula em TM , de modo que $\gamma_v(1)$ esteja bem definido para $v \in \Omega$. Define-se o *mapa exponencial* por

$$\begin{aligned} \exp : \Omega &\longrightarrow M, \\ v &\longmapsto \gamma_v(1). \end{aligned}$$

Este mapa é suave e satisfaz, para $v \in T_p M$ e $t \in \mathbb{R}$ suficientemente pequenos, $\exp_v(t) = \gamma_{tv}(1) = \exp(tv)$. Define-se também $\exp_p = \exp|_{T_p M} : \Omega \cap T_p M \rightarrow M$ sendo suave.

Proposição 2.2.1. *Seja $p \in M$. Então existe vizinhança de 0_p em $T_p M$ tal que o mapa exponencial a leva difeomorficamente em vizinhança aberta de $T_p M$. Em particular, existe vizinhança U de p e $\varepsilon > 0$ tais que para todo $q \in U$, existe único vetor $v \in T_p M$ com $\|v\| < \varepsilon$ e $\exp_p v = q$.*

Note que a proposição acima não afirma que v é o único vetor de $T_p M$ tal que $\exp_p v = q$, mas sim que v é único satisfazendo $\|v\| < \varepsilon$. De fato, no caso visto da esfera, para $\|v\| = 1$, temos que

$$\exp_p(tv) = \gamma_v(t) = (\cos t)p + (\operatorname{sen} t)v \implies \gamma_v(t) = \gamma_v(t + 2k\pi) = \exp_p((t + 2k\pi)v).$$

Demonstração. Pelo teorema da função inversa, basta ver que $d(\exp_p)_{0_p} : T_{0_p} T_p M \rightarrow T_p M$ é invertível. De fato,

$$d(\exp_p)_{0_p}(v) = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \exp_p(tv) = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \gamma_v(t) = \dot{\gamma}_v(0) = v,$$

considerando a identificação $T_{0_p} T_p M \cong T_p M$, de modo que $d(\exp_p)_{0_p}$ é a identidade. \square

Uma tal vizinhança de p como acima é dita uma *ε -vizinhança normal*, e a carta local (U, \exp_p^{-1}) define as *coordenadas normais* ou *geodésicas* ao redor de p . Tem-se as seguintes propriedades sobre elas [Jos17, p. 27]:

Proposição 2.2.2. *Em coordenadas normais, vale que $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ e $\Gamma_{jk}^i(p) = 0 = \partial_k g_{ij}(p)$, para todos i, j, k .*

No entanto, todas as afirmações com respeito a vizinhanças normais são feitas em termos de geodésicas emanando de p , e torna-se necessário considerar também geodésicas entre quaisquer dois pontos numa dada vizinhança. Com isso, considera-se a noção mais forte de ε -vizinhanças totalmente normais.

Lema 2.2.3. *Seja $\pi : TM \rightarrow M$ a projeção canônica. Então, dado $p \in M$, o mapa $\Phi : \Omega \rightarrow M \times M$ dado por $\Phi(v) = (\pi(v), \exp(v))$ é difeomorfismo local de uma vizinhança W de 0_p em TM sobre uma vizinhança de (p, p) em $M \times M$.*

Demonstração. Para mostrar que $d(\Phi)_{0_p} : T_{0_p} TM \rightarrow T_p M \oplus T_p M$ é isomorfismo, basta mostrar que é sobrejetor. Para isto, analisam-se curvas em TM passando por 0_p , e a imagem de suas velocidades por $d(\Phi)_{0_p}$.

Se $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é a curva $c(t) = tv$ para $v \in T_p M$, então

$$d(\Phi)_{0_p}(c'(0)) = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \Phi(c(t)) = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} (p, \exp_p(tv)) = (0, v),$$

e portanto para todo $v \in T_p M$, $(0, v)$ está na imagem de $d(\Phi)_{0_p}$. Sendo agora $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$ a curva $c(t) = 0_{\gamma(t)}$, onde $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é curva tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = w \in T_p M$, então

$$d(\Phi)_{0_p}(c'(0)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi(c(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\gamma(t), \gamma(t)) = (w, w),$$

e então para todo $w \in T_p M$, (w, w) está também na imagem de $d(\Phi)_{0_p}$. Tais vetores na imagem geram todo o espaço $T_p M \oplus T_p M$, e portanto o mapa linear é sobrejetor. \square

Proposição 2.2.4. *Dado $p \in M$, existem uma vizinhança U de p e $\varepsilon > 0$ tais que:*

- Para $x, y \in U$, existe um único $v \in T_x M$ com $\|v\| < \varepsilon$ tal que $\exp_x(v) = y$;
- Com $\gamma_v(t) = \exp_x(tv)$ o mapa $\psi : U \times U \times [0, 1] \rightarrow M$ dado por $\psi(x, y, t) = \gamma_v(t)$ é suave;
- Para todo $x \in U$, \exp_x é difeomorfismo de $B(0_x, \varepsilon)$ em vizinhança normal de x contendo U .

Uma tal vizinhança como acima é dita uma *vizinhança ε -totalmente normal* de p . Note que não necessariamente a imagem de ψ está contida em U ; para isto é necessária uma condição adicional de convexidade da vizinhança.

Demonstração. Com W vizinhança de 0_p em T_M , podemos assumir que Φ é difeomorfismo de W em vizinhança de (p, p) em $M \times M$. Assumindo ainda W da forma $\bigcup_{x \in V} B(0_x, \varepsilon)$, e tomando U vizinhança de p tal que $U \times U \subseteq \Phi(W)$, verifica-se prontamente que ela satisfaz as condições. \square

Note que, se $f : M \rightarrow M$ é isometria de M , $p \in M$, e $v \in T_p M$ está no domínio do mapa exponencial, então necessariamente temos

$$f(\exp_p(v)) = \exp_{f(p)}(df_p(v)),$$

pois isometrias locais preservam geodésicas. Em particular, se p é ponto fixo de f , então o mapa exponencial conjuga f com seu mapa diferencial df_p em p , que é linear:

$$f = \exp_p \circ df_p \circ \exp_p^{-1}.$$

Este resultado será importante na Proposição 6.3.1.

2.3 A Distância em M

A partir da definição de comprimento de curvas suaves por partes, é possível definir o que virá a ser a distância numa variedade riemanniana. Relembrando que a definição do comprimento de uma curva suave por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é dada por

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt,$$

para $p, q \in M$, define-se a *distância* entre p e q como

$$d(p, q) := \inf\{L(\gamma) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow M, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as curvas γ suaves por partes em M definidas em $[0, 1]$. Temos o seguinte resultado:

Proposição 2.3.1. *Com a distância d definida como acima, (M, d) tem estrutura de espaço métrico, cuja topologia coincide com a topologia em M .*

Para demonstrar isto, é necessário recorrer primeiramente ao lema de Gauss local, que descreve a métrica com respeito ao difeomorfismo $f : (0, \varepsilon) \times S^{n-1} \rightarrow U \setminus \{p\}$ dado por $f(r, v) = \exp_p(rv)$ numa vizinhança normal de p :

Lema 2.3.2 (Gauss, versão local). *A geodésica radial γ_v na direção v é perpendicular às hiperesferas $f(\{r\} \times S^{n-1})$, para $0 < r < \varepsilon$; ou seja,*

$$f^*g = dr^2 + h_{(r,v)},$$

com $h_{r,v}$ a métrica induzida em S^{n-1} por $f : \{r\} \times S^{n-1} \rightarrow M$.

Demonstração. Dado campo vetorial suave X em S^{n-1} , temos o campo $\tilde{X} = f_*X$ induzido em U , e $\tilde{\partial}_r$ o campo coordenado em $(0, \varepsilon)$, e $\tilde{\partial}_r = f_*\partial_r$. Temos que $\dot{\gamma}_v(r) = \tilde{\partial}_r|_{f(r,v)}$, e todo vetor tangente a $f(\{r\} \times S^{n-1})$ é da forma $\tilde{X}|_{f(r,v)}$ para algum campo X em S^{n-1} . É suficiente então mostrar que $g(\tilde{X}, \tilde{\partial}_r) = 0$ em $f(r, v)$. De fato,

$$\frac{d}{dr}g(\tilde{X}, \tilde{\partial}_r) = g(\nabla_{\tilde{\partial}_r}\tilde{X}, \tilde{\partial}_r) + g(\tilde{X}, \nabla_{\tilde{\partial}_r}\tilde{\partial}_r) = g(\nabla_{\tilde{X}}\tilde{\partial}_r, \tilde{\partial}_r) = \frac{1}{2}\tilde{X}g(\tilde{\partial}_r, \tilde{\partial}_r) = 0,$$

em que $g(\tilde{X}, \tilde{\partial}_r)$ é constante como função de r , e como o limite com $r \rightarrow 0$ é 0, já que $\tilde{X}|_{f(r,v)} = d(\exp_p)_{rv}(rX_v) \rightarrow 0$, a função é constante igual a 0. \square

Desta maneira, entende-se g em “coordenadas polares” locais. Note que isto não implica que localmente g é métrica produto, pois a métrica $h_{(r,v)}$ em S^{n-1} depende de r . Isto permite deduzir a relação entre comprimentos e geodésicas em vizinhanças normais:

Proposição 2.3.3. *Seja $p \in M$ e $\varepsilon > 0$ tal que $U = \exp_p(B(0_p, \varepsilon))$ é vizinhança normal de p . Então para todo $x \in U$, existe uma única geodésica γ de comprimento menor que ε conectando p a x . A geodésica é da forma $\exp_p(tv)$, onde $\exp_p(v) = x$, e é a curva suave por partes mais curta conectando p a x , com qualquer outra curva de mesmo comprimento devendo coincidir com ela a menos de reparametrização.*

Demonstração. Já vimos que existe único $v \in T_p M$ com $\|v\| < \varepsilon$ e $\exp_p(v) = x$. Com $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$, seu comprimento é claramente menor que ε . Se agora η é outra curva suave por partes ligando p a x , supomos que η está definida em $[0, 1]$ e $\eta(t) \neq p$ para $t > 0$. Se η está inteiramente contida em U , então, com $\eta(t) = f(r(t), v(t))$ nas notações do lema de Gauss local,

$$\begin{aligned} L(\eta) &= \int_0^1 |\eta'(t)| dt = \int_0^1 (r'(t)^2 + h_{(r(t), v(t))}(v'(t), v'(t)))^{1/2} dt \\ &\geq \int_0^1 |r'(t)| dt \geq |r(1) - \lim_{t \rightarrow 0} r(t)| = L(\gamma). \end{aligned}$$

Se η não está inteiramente contida em U , toma-se $t_0 = \inf\{t \in [0, 1] \mid \eta(t) \notin U\}$, e novamente

$$\eta(t) \geq \int_0^{t_0} |r'(t)| dt \geq r(t_0) = \varepsilon > L(\gamma).$$

A partir das desigualdades, é imediato ver que o caso de igualdade ocorre se e somente se η é reparametrização de γ . \square

Demonstração do teorema 2.3.1. É imediato que d é simétrica, admite apenas valores não-negativos, vale $d(x, x) = 0$ e a desigualdade triangular. Basta mostrar que se $d(x, y) = 0$, então $x = y$, ou equivalentemente, se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$.

Tomando U vizinhança ε -normal de x com $y \notin U$, se γ é curva suave por partes ligando x a y e $t_0 = \inf\{t : \gamma(t) \notin U\}$, então $L(\gamma) \geq L(\gamma|_{[0, t_0]}) \geq \varepsilon$ como consequência da proposição anterior, concluindo a demonstração. \square

Numa variedade riemanniana geral, é possível que o ínfimo na definição da distância entre dois pontos não seja atingido, como por exemplo em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ para os pontos $p = (-1,0)$, $q = (1,0)$. É possível mostrar que qualquer caminho suave por partes ligando tais pontos necessariamente terá comprimento maior que 2.

Podemos aprimorar a Proposição 2.3.3 para vizinhanças totalmente normais:

Proposição 2.3.4. *Sejam $p \in M$ e $\varepsilon > 0$ tais que U é vizinhança ε -totalmente normal de p . Então, para todos $x, y \in U$, existe uma única geodésica de comprimento menor que ε ligando x a y , e γ depende suavemente de x e y . O comprimento de γ é igual à distância entre x e y , e γ é a única curva suave por partes em M a menos de reparametrizações com essa propriedade.*

Discute-se agora a noção de curvas minimizantes, isto é, aquelas que realizam a distância entre suas extremidades. Mais precisamente, uma curva suave por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é *minimizante* se $L(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$. Conclui-se que para qualquer subintervalo $[c, d] \subseteq [a, b]$, $\gamma|_{[c, d]}$ também será minimizante, pois caso não fosse, outra curva η de comprimento menor que $\gamma|_{[c, d]}$ produziria curva de comprimento menor que γ .

Teorema 2.3.5. *Uma curva suave por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é geodésica a menos de reparametrização se e somente se cada arco suficientemente pequeno de γ é minimizante como curva. Em particular, toda curva minimizante é geodésica a menos de reparametrização, e portanto suave.*

Demonstração. Se γ é geodésica, basta cobrir sua imagem $\gamma([a, b])$ por vizinhanças normais onde ela será minimizante pela proposição 2.3.3. Reciprocamente, em vizinhanças pequenas, as curvas suaves por partes de menor comprimento são geodésicas, e ser uma geodésica é uma propriedade local da curva. \square

2.4 Completude de Métricas

Considerando o mapa exponencial $\exp : \Omega \subseteq TM \rightarrow M$ definido em vizinhança aberta da seção nula em TM , pergunta-se em quais situações ele está definido em todo TM , podendo estender geodésicas indefinidamente ao longo da variedade. Tal resultado está intimamente ligado a como M se comporta como espaço métrico, mais especificamente se (M, d) é espaço métrico completo.

Uma variedade riemanniana conexa M é dita (*geodesicamente*) *completa* se toda geodésica de M pode ser estendida a geodésica definida em \mathbb{R} . Equivalentemente, M é geodesicamente completa se, para todo $p \in M$, \exp_p é definido em todo $T_p M$, em que $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$.

Já encontramos alguns exemplos de variedades completas, como por exemplo \mathbb{R}^n , S^n e \mathbb{H}^n , assim como qualquer variedade compacta. Isto pois a vizinhança Ω da seção nula em TM pode ser tomada de modo que existe $\delta > 0$ tal que toda geodésica em M está definida a tempo pelo menos δ , e iterativamente pode-se estender as geodésicas a todo \mathbb{R} . Como exemplos de variedades não-completas, temos $\mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$ com a métrica euclidiana induzida, e igualmente o disco unitário aberto $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ em \mathbb{R}^2 . Enfatiza-se que uma variedade riemanniana ser completa é uma propriedade da métrica riemanniana e não da variedade suave M : o disco $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ com a métrica hiperbólica, por exemplo, é completo.

A relação entre completude geodésica e completude de espaços métricos é explicitada no célebre teorema de Hopf-Rinow:

Teorema 2.4.1 (Hopf-Rinow). *Seja (M, g) variedade riemanniana conexa.*

- Seja $p \in M$. Se \exp_p é definido em todo $T_p M$, então todo ponto de M pode ser ligado a p por pelo menos uma geodésica minimizante.*
- Se M é geodesicamente completa, então quaisquer dois pontos de M podem ser ligados por pelo menos uma geodésica minimizante.*

Observe que a afirmação b) pode ocorrer mesmo se M não for geodesicamente completa, como é o caso do disco $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ com a métrica induzida. E é possível também que a geodésica minimizante não seja única, como é o caso da esfera S^n e pontos antipodais nela.

A demonstração, encontrada em [GHL12], utiliza o lema:

Lema 2.4.2. *Sejam $p, q \in M$ e S a esfera de raio δ centrada em p . Para δ suficientemente pequeno, existe $p_0 \in S$ tal que $d(p, q) = d(p, p_0) + d(p_0, q)$.*

Intuitivamente, suficientemente perto de p encontramos um ponto exatamente “no caminho” entre p e q . Com isto, encontraria-se a direção a partir de p que deve-se seguir para atingir o ponto q . Como consequência do teorema, temos as equivalências:

Corolário 2.4.3. *Para uma variedade riemanniana (M, g) conexa, as afirmações abaixo são equivalentes:*

- (i) (M, g) é geodesicamente completa.
- (ii) Para algum $p \in M$, \exp_p é definido em todo $T_p M$.
- (iii) Para todo $p \in M$, \exp_p é definido em todo $T_p M$.
- (iv) Todo subconjunto fechado e limitado de (M, d) é compacto.
- (v) (M, d) é completo como espaço métrico.

Justificamos rapidamente apenas as implicações (iii) \implies (iv), em que um subconjunto fechado e limitado estaria contido na imagem de uma bola em $T_p M$ pelo mapa exponencial, e (v) \implies (i), em que a completude do espaço permite estender o domínio de definição (a, b) de uma geodésica, se limitado, para $[a, b]$, por sequências de Cauchy, como na demonstração da Proposição 2.4.8 abaixo.

Como consequência particular do resultado, se M é variedade compacta, então ela é completa. Uma forma de recíproca é dada pela proposição abaixo:

Proposição 2.4.4. *Se M é variedade suave, então toda métrica riemanniana em M é completa se e somente se M é compacta.*

Para a demonstração, é necessário introduzir certas definições. Um *raio* emanando de $p \in M$ numa variedade riemanniana completa M é uma geodésica de velocidade unitária $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $d(p, \gamma(t)) = t$, para todo $t \geq 0$.

Lema 2.4.5. *Se M é completa não-compacta, então para todo $p \in M$ existe raio emanando de p .*

Demonstração. Seja $p \in M$, e considere as bolas concêntricas fechadas em p dadas por $B_i = \overline{B(p, i)}$, para $i \geq 1$. Como M é completa não-compacta, temos que $M = \bigcup_{i \geq 1} B_i$, mas $M \neq B_i$ para todo i , e $B_i \subset \text{int } B_{i+1}$. Selecione em cada $B_{i+1} \setminus B_i$ um ponto p_{i+1} , com $p = p_0$. Como M é completa, existe única geodésica $\gamma_{v_i} : \mathbb{R} \rightarrow M$ minimizante em $[0, d(p, p_i)]$ tal que $v_i \in T_p M$, $\|v_i\| = 1$, $\gamma_{v_i}(0) = p$ e $\gamma_{v_i}(d(p, p_i)) = p_i$. Note que $i-1 < d(p, p_i) \leq i$.

A sequência dos vetores v_i é dada em $U_p M$, e como é compacto, existe subsequência convergente a um $v \in U_p M$. Sem perda de generalidade, suponha que $v_i \rightarrow v$. Afirma-se que a geodésica γ_v é raio emanando de p ; para isto, é necessário mostrar que ela é minimizante em todo trecho $[0, T]$, $T \geq 0$. Para índices $i > T$, temos que γ_{v_i} é minimizante em $[0, T]$, de modo que $d(p, \gamma_{v_i}(T)) = T$. Mas pela continuidade da função exponencial e de $d(p, \cdot)$, e como $Tv_i \rightarrow Tv$, temos que

$$T = d(p, \exp_p(Tv_i)) \rightarrow d(p, \exp_p(Tv)) \implies d(p, \exp_p(Tv)) = T \quad \forall T \geq 0,$$

concluindo que γ_v é raio. □

Uma curva suave por partes $\gamma : I \rightarrow M$ é dita *divergente* se a imagem de γ não está contida em nenhum compacto de M .

Lema 2.4.6. *Uma variedade riemanniana M é completa se e somente se toda curva divergente tem comprimento infinito.*

Demonstração. Supondo M completa, afirma-se que se $\gamma : I \rightarrow M$ tem comprimento finito, então sua imagem está contida em um compacto de M . De fato, com $L = L(\gamma)$, e supondo sem perda de generalidade $0 \in I$, consideramos $p = \gamma(0)$ e afirmamos que a imagem de γ está contida em $B[p, L]$. Se $t \in I$, então

$$d(p, \gamma(t)) \leq L(\gamma|_{[0,t]}) \leq L,$$

e portanto $\gamma(t) \in B[p, L]$ (analogamente se $t \leq 0$). Mas como M é completa, temos que $B[p, L]$ é bola fechada e conjunto compacto de M .

Para a recíproca, suponha que M não é completa, e mostremos a existência de uma curva divergente de comprimento finito. De fato, por definição, existe uma geodésica γ em M cujo intervalo de domínio não pode ser estendido a todo \mathbb{R} . Suponha que seja (a, b) , e sem perda de generalidade, $b < +\infty$, com $a \geq -\infty$, e tomemos $a_0 > a$, considerando a geodésica em (a_0, b) .

Naturalmente ela terá comprimento finito $b - a_0$, e para mostrarmos que é divergente, suponha que exista compacto K tal que a imagem dela esteja contida em K . Tomando sequência monótona (t_n) convergindo a b , teremos que $\gamma(t_n)$ é sequência de Cauchy em K , portanto convergente a um ponto p . Neste sentido, a geodésica poderá ser estendida a $(a_0, b]$, com $\gamma(b) = p$, contradizendo nossas suposições. Assim, γ é divergente de comprimento finito. \square

Demonstração da Proposição 2.4.4. Se M não é compacta, mostremos que M admite métrica não-completa. Tome métrica g em M ; se não é completa, não há nada mais a ser feito, então podemos assumir g completa. Para todo $p \in M$, existe um raio $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$ emanando de p , ou seja, geodésica unitária com $\gamma(0) = p$ e $d(p, \gamma(t)) = t$, para $t \geq 0$. Sabemos que γ é divergente, pois se sua imagem estivesse contida num compacto K , com $\text{diam}(K) < +\infty$, deveríamos ter $t = d(p, \gamma(t)) \leq \text{diam}(K)$ para todo $t \geq 0$, uma contradição se $t > \text{diam}(K)$.

Por γ ser raio, temos que $L(\gamma|_{[0,t]}) = t$. Construímos então uma outra métrica em M tal que o comprimento de γ nesta nova métrica seja finito, o que implica que M com esta nova métrica não é completa, já que γ é divergente. Inicialmente, temos que $\text{im } \gamma$ é subvariedade (com bordo) mergulhada em M , mas podemos estender a geodésica para $(-\varepsilon, +\infty)$ e considerar ela como mergulhada em M , ainda com $\gamma[0, +\infty)$ fechada em M . Considerando a função $f : \text{im } \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(\gamma(t)) = e^{-2t},$$

por $\text{im } \gamma$ ser variedade mergulhada, tal função admite extensão suave a vizinhança aberta de $\gamma[0, +\infty)$. Por meio de partições da unidade, modificamos a métrica g tal que, em $\text{im } \gamma$, ela valha fg , e portanto

$$L(\gamma) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt < \infty,$$

mostrando que γ é divergente mas tem comprimento finito, e então $e^{-f}g$ é métrica não completa. \square

O seguinte resultado evidencia que não há obstruções topológicas em uma variedade para que ela admita métricas completas:

Teorema 2.4.7. *Toda variedade suave conexa M admite uma métrica completa.*

Demonstração. Se M é compacta, então toda métrica riemanniana em M é completa. Suponha então M não-compacta, e considere uma função de exaustão $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, suave e tal que, para todo $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $f^{-1}((-\infty, c])$ é compacto. Tal função é construída a partir de

partição da unidade em cobertura por abertos pré-compactos, produzindo uma exaustão de M por compactos. Sem perda de generalidade, podemos assumir $f^{-1}((-\infty, 0]) \neq \emptyset$.

É suficiente construir uma métrica em M tal que, para uma certa exaustão de M por compactos $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$, valha $d(K_i, K_{i+1}^c) \geq 1$, para todo $i \in \mathbb{N}$. De fato, se (p_n) é sequência de Cauchy em M , então existe N tal que, para todo $m, n \geq N$, vale $d(p_n, p_m) \leq 1/2$, e se $p_n \in K_l$, então deve-se ter $p_m \notin K_i$ para $i \geq l+2$ e $m \geq N$. Portanto a sequência toda estará eventualmente contida em K_{l+1} , admitindo subsequência convergente e sendo por sua vez convergente.

Defina os compactos $K_a = f^{-1}((-\infty, a])$ e $C_a = \partial K_a = f^{-1}(\{a\})$, onde $a \geq 0$, e fixe uma métrica riemanniana g_0 em M . Observa-se que, se $0 \leq a < b$, então

$$0 < d(K_a, \partial K_b) = d(K_a, K_b^c) = d(C_a, C_b),$$

e se $a < a' < b' < b$, então

$$d(C_{a'}, C_{b'}) < d(C_a, C_b).$$

Com C_a, C_b compactos disjuntos, temos que a distância $d(C_a, C_b)$ é determinada exclusivamente por como a métrica em questão é no conjunto compacto $f^{-1}([a, b])$. Isto pois

$$d(C_a, C_b) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma(0) \in C_a, \gamma(1) \in C_b\},$$

e podemos assumir que o caminho γ é tal que para $t \in (0, 1)$, tem-se $\gamma(t) \in f^{-1}((a, b))$. Tomando a exaustão de M pelos compactos

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots, M = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n,$$

a ideia da demonstração é modificar a métrica base g_0 em M localmente em certas faixas da forma $f^{-1}([a, b])$ para garantir que, na métrica resultante, tenha-se

$$d(K_i, \partial K_{i+1}) = d(C_i, C_{i+1}) \geq 1, \forall i \geq 0.$$

Tomando $n \in \mathbb{N}$ e estudando a distância $d(C_n, C_{n+1})$, tome $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ tais que $n < a' < a < b < b' < n+1$. Temos que

$$d(C_n, C_{n+1}) > d(C_{a'}, C_{b'}) > d(C_a, C_b) = r > 0.$$

Se $r \geq 1$, nenhuma mudança na métrica é necessária nesta faixa. Se $r < 1$, consideramos o conjunto compacto $L = f^{-1}([a, b])$ e sua vizinhança aberta $U = f^{-1}((a', b'))$, e uma função suave não-negativa $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\rho|_L \equiv 1$ e $\text{supp } \rho \subset U$. Tome agora, em M , a métrica

$$g' = \left(1 + \left(\frac{1}{r^2} - 1\right)\rho\right)g_0,$$

onde em L , vale $g'|_L = \frac{1}{r^2}g_0$, e portanto na nova métrica vale $d(C_a, C_b) = \frac{r}{r^2} = 1$, mas $g'|_{U^c} = g_0$. A mudança na métrica g_0 é feita apenas neste trecho, mantendo as distâncias $d(K_m, \partial K_{m+1})$ para $m \neq n$, e garantindo que

$$d(K_n, \partial K_{n+1}) > d(C_a, C_b) \geq 1.$$

Realizando tais deformações para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos uma métrica bem definida em toda M , e satisfazendo a propriedade desejada. □

Outro resultado importante relaciona a completude da variedade com a completude dos campos de Killing definidos sobre ela:

Proposição 2.4.8. *Se M é completa, então todo campo de Killing é completo como campo de vetores.*

Demonstração. Seja $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ uma curva integral maximal de um campo de Killing X em M , e suponha que $b < \infty$. Temos que

$$Xg(X, X) = 2g(\nabla_X X, X) = -2g(X, \nabla_X X) \implies \frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0,$$

e portanto γ tem velocidade constante $\|\dot{\gamma}\| = c$. Assim, para $t_1 < t_2$ em (a, b) ,

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \leq L(\gamma|_{[t_1, t_2]}) = c|t_2 - t_1|.$$

Pela completude de M , o limite $\lim_{t \rightarrow b^-} \gamma(t)$ existe, de modo que a geodésica pode ser estendida para $(a, b]$. Mas pela existência e unicidade de geodésicas, estende-se ela para $(a, b + \varepsilon)$, uma contradição com o intervalo de definição ser maximal. Então $b = +\infty$, e um argumento análogo mostra que $a = -\infty$. \square

Tem-se também um resultado [Gor22, p. 73] relacionando completude e recobrimentos riemannianos:

Proposição 2.4.9. *Seja $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ uma isometria local. Então \tilde{M} é completa se e somente π é recobrimento riemanniano e M é completa.*

2.5 Cut Distance e Cut Locus

Uma pergunta natural, para uma variedade riemanniana completa M , é até onde uma geodésica é minimizante. No caso da esfera S^n , ela será minimizante até o tempo $t = \pi$, onde encontra outras geodésicas no ponto antipodal ao ponto inicial, mas em \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n , todas as geodésicas são minimizantes. O seguinte Lema representa uma situação geral [Gor22, p. 75]

Lema 2.5.1. *Seja M variedade riemanniana conexa, $\gamma : I \rightarrow M$ uma geodésica com I intervalo aberto e $[a, b] \subset I$.*

- i) *Se existe outra geodésica η de mesmo comprimento que $\gamma|_{[a, b]}$ entre $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$, então γ não é minimizante em $[a, b + \varepsilon]$ para todo $\varepsilon > 0$.*
- ii) *Se M é completa e nenhuma geodésica ligando $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ é mais curta que γ é minimizante em $[a, b]$.*

Com M variedade riemanniana conexa completa e $p \in M$, para todo vetor unitário $v \in U_p M$, toma-se o conjunto

$$I(v) := \{t \geq 0 : d(p, \gamma_v(t)) = t\},$$

ou seja, o conjunto de tempos onde γ_v é minimizante. É imediato que $I(v)$ é intervalo fechado. Toma-se então $\rho(v) := \sup I(v)$, a *cut distance* de v , podendo ser $\rho(v) = +\infty$. Como p admite vizinhanças normais, $I(v)$ contém $[0, \varepsilon]$ para algum $\varepsilon > 0$, e portanto $\rho(v) > 0$. Pela definição, tem-se que γ_v é minimizante em $[0, t]$ para todo $0 \leq t \leq \rho(v)$, e não minimizante para $t > \rho(v)$. Ainda mais, pelo lema anterior, γ_v é a única geodésica minimizante ligando p a $\gamma_v(t)$ para $0 \leq t < \rho(v)$.

Teorema 2.5.2. *Se M é variedade riemanniana completa, a função cut distance $\rho : UM \rightarrow [0, +\infty]$ é contínua.*

Demonstração. Mostremos inicialmente que ρ é semicontínua superiormente em $v \in UM$; para isto, pode-se supor $\rho(v) < +\infty$. Se, por contradição, existe $\varepsilon > 0$ e sequência $(v_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset UM$ tal que $v_i \rightarrow v$ e $\rho(v_i) \geq \rho(v) + \varepsilon$, consideram-se os pontos $p_i = \pi(v_i)$ e $p = \pi(v)$. Pela continuidade da função exponencial, temos que

$$q'_i := \exp((\rho(v) + \varepsilon/2)v_i) \rightarrow \exp((\rho(v) + \varepsilon/2)v) = q'.$$

Sabemos que γ_v não é minimizante em $[0, \rho(v) + \varepsilon/2]$, existindo curva η ligando p a q' com $L(\eta) < \rho(v) + \varepsilon/2$. Como $q'_i \rightarrow q'$ e $p_i \rightarrow p$, existe i suficientemente grande tal que o caminho ligando p_i a p por geodésica minimizante, seguido do caminho η ligando p a q' , seguindo do caminho ligando q' a q'_i por geodésica minimizante, tem comprimento $L = \delta_1 + L(\eta) + \delta_2$, onde δ_1 e δ_2 são arbitrariamente pequenos. Tomando eles tais que $L < \rho(v) + \varepsilon/2$, obtemos que $\gamma_i = \gamma_{v_i}$ deixa de ser minimizante em $[0, \rho(v) + \varepsilon/2]$, uma contradição com $\rho(v_i) \geq \rho(v) + \varepsilon$. Isto conclui que ρ é semicontínua superiormente em $v \in UM$.

Para mostrar que ρ é semicontínua inferiormente, divide-se em dois casos similares, se $\rho(v) < +\infty$ ou $\rho(v) = +\infty$. No primeiro, suponha por contradição que existam $\varepsilon > 0$ e sequência $(v_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset UM$ tal que $v_i \rightarrow v$ e $\rho(v_i) \leq \rho(v) - \varepsilon$. Com $p = \pi(v)$, $p_i = \pi(v_i)$, temos as geodésicas $\gamma_i(t) = \gamma_{v_i}(t) = \exp(tv_i)$, e também

$$q_i = \exp((\rho(v) - \varepsilon/2)v_i) \rightarrow \exp((\rho(v) - \varepsilon/2)v) = q.$$

Temos que γ_i não é minimizante em $[0, \rho(v) - \varepsilon/2]$, e como M é completa, existe geodésica minimizante η_i ligando p_i a q_i com $L(\eta_i) < \rho(v) - \varepsilon/2$. Sabendo que $p_i \rightarrow p$ e $q_i \rightarrow q$, para i suficientemente grande, considera-se o caminho dado pela geodésica minimizante ligando p a p_i , seguindo de η_i , seguindo do caminho dado pela geodésica minimizante ligando q_i a q . Tal caminho terá comprimento $L_i = \delta_1 + L(\eta_i) + \delta_2$, e tomando δ_1 e δ_2 arbitrariamente pequenos, obtem-se que $L_i < \rho(v) - \varepsilon/2$. Mas isto contradiz a hipótese de γ_v ser minimizante em $[0, \rho(v) - \varepsilon/2]$.

No caso de $\rho(v) = +\infty$, suponha por contradição que existe sequência $(v_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset UM$ tal que $v_i \rightarrow v$ e $\rho(v_i)$ é limitado, ou seja, existe $C > 0$ tal que $\rho(v_i) \leq C$. Considerando que γ é minimizante em $[0, C_1]$ para $C_1 > C$, aplicam-se raciocínios análogos ao caso anterior, encontrando geodésicas minimizantes ligando pontos aproximando p e q e encontrando um caminho entre p e q de comprimento menor que γ . \square

Observa-se que na proposição acima, a hipótese de M ser completa aparentemente entra em questão apenas na semicontinuidade inferior, de modo que nos questionamos se esta hipótese pode ser relaxada. Mas na própria definição da cut-distance, é importante que M seja completa; como definir $\rho(v)$ se a geodésica γ_v só está definida até $t < T$? Podemos convecionar (de maneira mais ou menos arbitrária) que, se para todo t no intervalo de definição de γ_v vale que $d(p, \gamma_v(t)) = t$, então $\rho(v) = +\infty$, mesmo que o intervalo de definição seja limitado. Com esta convenção, é possível mostrar que ρ ainda é semi-contínua superiormente, adaptando a primeira parte da demonstração acima.

Definimos agora o *raio de injetividade* em p como

$$\text{inj}_p(M) := \{\inf \rho(v) : v \in U_p M\}, \quad \text{inj}_p(M) \in (0, +\infty],$$

e o *raio de injetividade global* $\text{inj}(M) := \inf_{p \in M} \text{inj}_p(M)$.

Teorema 2.5.3. *O raio de injetividade $\text{inj}_p(M)$ depende continuamente de $p \in M$.*

Demonstração. Mostramos primeiro que $\text{inj}_p(M)$ é semicontínua superiormente. Considera-se sequência $p_i \rightarrow p$ em M ; com $v \in U_p M$, existe também sequência $(v_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset UM$ tal que $v_i \in U_{p_i} M$ e $v_i \rightarrow v$. Mas então $\text{inj}_{p_i}(M) \leq \rho(v_i) \rightarrow \rho(v)$, e portanto $\limsup_{i \in \mathbb{N}} \text{inj}_{p_i}(M) \leq \rho(v)$. Como isto vale para todo $v \in U_p M$, temos que $\limsup \text{inj}_{p_i}(M) \leq \text{inj}_p(M)$, concluindo que é semicontínua superiormente.

Para a semicontinuidade inferior em $p \in M$, suponha inicialmente que $\text{inj}_p(M) < +\infty$ e por contradição que exista sequência $(p_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset M$ e $\varepsilon > 0$ tais que $p_i \rightarrow p$ e $\text{inj}_{p_i}(M) \leq \text{inj}_p(M) - \varepsilon$. Para cada p_i , como ρ é contínua em $U_{p_i} M$ e é conjunto compacto, ρ atinge seu mínimo em um vetor $v_i \in U_{p_i} M$, com $\text{inj}_{p_i}(M) = \rho(v_i)$.

Tomando vizinhança pré-compacta V de p tal que

$$K = \bigcup_{q \in \overline{V}} U_q M$$

é conjunto compacto em TM , e sem perda de generalidade com a sequência $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ contida em V . Assim, existe subsequência convergente $v_{i_k} \rightarrow v \in U_p M$, e, por continuidade de ρ , $\text{inj}_{p_i}(M) \rightarrow \rho(v) \geq \text{inj}_p(M)$. Mas isto contradiz a hipótese de $\text{inj}_{p_i}(M) \leq \text{inj}_p(M) - \varepsilon$, mostrando a semicontinuidade inferior neste caso. O caso de $\text{inj}_p(M) = +\infty$ é análogo. \square

Se M é compacta, nenhuma geodésica é minimizante para $t > \text{diam}(M)$, mostrando que $\text{inj}(M) < +\infty$, e também pode-se cobrir M por finitas vizinhanças ε -totalmente normais, de modo que $0 < \text{inj}(M) < +\infty$. Se M não é compacta, mesmo sendo completa, é possível que $\text{inj}(M) = 0$: um exemplo é dado tomando o espaço hiperbólico \mathbb{H}^2 no modelo do semiplano superior e quocientando ele pela ação de grupo dada pelas translações horizontais $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$.

Define-se agora o *cut locus tangencial*

$$C_p := \{\rho(v)v \in T_p M : v \in U_p M\}$$

e o *cut locus*

$$\text{Cut}(p) = \exp_p(C_p) = \{\gamma_v(\rho(v)) : v \in U_p M\}.$$

Ainda com $D_p = \{tv \in T_p M : 0 \leq t < \rho(v), v \in U_p M\}$ conjunto estrelado, temos que $\partial D_p = C_p$ e $\text{inj}_p(M) = d(p, \text{Cut}(p))$.

Proposição 2.5.4. *Se M é variedade riemanniana completa, então para todo $p \in M$ vale $M = \exp_p(D_p) \sqcup \text{Cut}(p)$.*

Demonstração. Que $M = \exp_p(D_p) \cup \text{Cut}(p)$ é evidente do fato de que, sendo M completa, todo ponto de M é ligado a p por uma geodésica minimizante, estando em $\exp_p(D_p)$ ou no cut locus. Ainda, tais conjuntos são disjuntos, como consequência do lema 2.5.1. \square

2.5.1 Exemplos

Nos casos de \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n e \mathbb{H}^n como variedades riemannianas completas, sabemos como são as geodésicas explicitamente, dadas respectivamente por

$$p + tv, \quad (\cos t)p + (\sin t)v, \quad \text{e} \quad (\cosh t)p + (\sinh t)v,$$

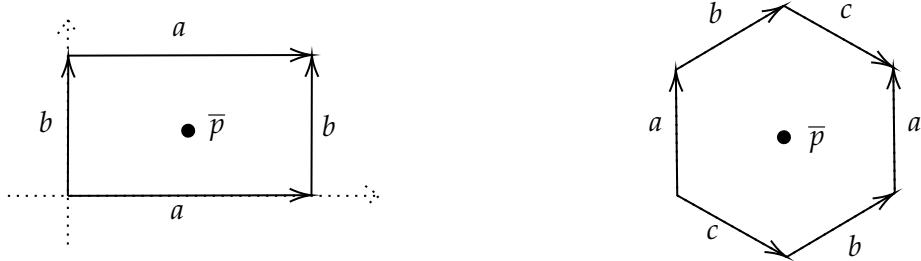
para p ponto da variedade e v vetor tangente unitário. Para \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n , entre quaisquer dois pontos há uma única geodésica os ligando, sendo portanto minimizante; assim, toda geodésica é minimizante, e o cut locus é vazio. Para $p \in \mathbb{S}^n$, é imediato ver que $\text{Cut}(p) = \{-p\}$, o ponto antipodal, sendo o encontro de todas as geodésicas emanando de p em tempo $t = \pi$, com $D_p = B(0_p, \pi)$. Considerando \mathbb{RP}^n como quociente da esfera, obtemos que as geodésicas são minimizantes até o tempo $t = \pi/2$, e de modo que, para $\bar{p} \in \mathbb{RP}^n$, tem-se $\text{Cut}(\bar{p}) = \pi(S^{n-1})$, a imagem do equador da esfera pela projeção π .

Observa-se que variedades riemannianas difeomorfias (e mesmo localmente isométricas) podem ter cut locus distintos, dependendo da métrica num sentido global. Este é o caso dos toros flat; tomando $\Gamma = \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2$, com $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ ortogonais, temos um toro retangular \mathbb{R}^2/Γ . Com $p = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ e $\pi(p) = \bar{p} \in \mathbb{R}^2/\Gamma$, podemos descrever $\text{Cut}(\bar{p})$ sabendo que as geodésicas em \mathbb{R}^2/Γ são exatamente as projeções de geodésicas em \mathbb{R}^2 . Sendo \mathcal{R} o retângulo

$$\mathcal{R} = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 : 0 \leq a_1, a_2 \leq 1\},$$

teremos que $\text{Cut}(\bar{p}) = \pi(\partial\mathcal{R}) \cong S^1 \vee S^1$.

Agora, com $v_1 = (2, 0)$ e $v_2 = (1, \sqrt{3})$, o quociente \mathbb{R}^2/Γ resultará num toro hexagonal flat; mesmo sendo difeomorfo a um toro, teremos que o cut locus de um ponto \bar{p} no centro de um hexágono como domínio fundamental será homeomorfo a $S^1 \vee S^1 \vee S^1$.



Capítulo 3

Tensores de Curvatura

“[This quantity] obviously = zero if the manifold in question is flat, i.e., if the square of the line element is reducible to $\sum dx^2$, and can therefore be regarded as the measure of deviation from flatness in this surface direction at this point. When multiplied by $-\frac{3}{4}$ it becomes equal to the quantity which Privy Councilor Gauss has called the curvature of the surface.”

B. Riemann [[Spi99](#), vol. II, p. 157]

O conceito de curvatura é de central importância no estudo de variedades riemannianas, sendo o principal invariante local pelo qual elas podem ser entendidas. Como o nome sugere, ela mede o quanto um espaço não se comporta como o ambiente euclidiano usual com suas relações métricas, e possui diversas interpretações no nível conceitual.

A maneira usual de se definir a curvatura é por meio do tensor riemanniano de curvatura a partir da conexão de Levi-Civita, sendo possível definir outras quantidades associadas, como a curvatura seccional, a curvatura de Ricci e a curvatura escalar. Um dos principais ramos de investigação da geometria riemanniana é entender como hipóteses sobre a curvatura do espaço podem implicar em informações sobre sua geometria e topologia.

3.1 Os Tensores de Curvatura

Dada variedade riemanniana (M, g) e ∇ sua conexão de Levi-Civita, define-se o *tensor (riemanniano) de curvatura* como o mapa \mathbb{R} -trilinear $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dado por

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = ([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]})Z,$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Com a notação da derivada covariante de tensores e lembrando que

$$\nabla_{X,Y}^2 Z = \nabla \circ \nabla Z(X, Y) = \nabla_X(\nabla Z)(Y) = \nabla_X(\nabla Z(Y)) - \nabla Z(\nabla_X Y) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z,$$

temos a definição equivalente

$$R(X, Y)Z = (\nabla_{X,Y}^2 - \nabla_{Y,X}^2)Z.$$

Em certos textos, a definição utilizada é dada pelo sinal oposto da expressão acima [[GHL12](#)], justificada pela presença de sinais em expressões futuras. Não é prontamente evidente que a expressão acima define um tensor, ou seja, é $C^\infty(M)$ -linear em suas coordenadas; isto é uma consequência das propriedades de uma conexão afim, justificando seu nome. Assim, $R \in \Gamma(T^{(1,3)}M)$, definindo tensor R_p em $T_p M$ para todo $p \in M$.

Em coordenadas locais $(U, (x^i))$ em torno de $p \in M$, o tensor de curvatura é representado pelos coeficientes R_{ijk}^l dados por $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}^l \partial_l$, onde

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l.$$

Nota-se ainda que, pelos isomorfismos musicais, pode-se considerar R como um $(0, 4)$ -tensor em M , dado por

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$$

e pelos abaixamentos de índices $R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}^m$.

A definição do tensor de curvatura dada acima pode justificadamente parecer pouco motivada. Sua aparição, pelo menos em termos de cartas locais, é natural ao se considerar o problema de quando uma variedade riemanniana é localmente isométrica a \mathbb{R}^n . Ou seja, sendo a métrica localmente expressa como $\sum g_{ij} dy^i dy^j$, buscam-se condições sobre os coeficientes g_{ij} tais que possamos encontrar coordenadas locais (x^i) em que a métrica é expressa como $\sum (dx^i)^2$. Isto se torna uma problema de integrabilidade de certas equações diferenciais parciais, com a condição de integrabilidade sendo exatamente o anulamento dos coeficientes R_{ijk}^l definidos acima. Ao observar que eles satisfazem a regra de mudança de coordenadas adequada, eles definem um $(1, 3)$ -tensor em M , algo já indicado pela $C^\infty(M)$ -linearidade nos argumentos de R discutida antes. Tais cálculos são feitos explicitamente e contextualizados nos trabalhos originais de Riemann no capítulo 4, parte D de [Spi99, vol. II].

Proposição 3.1.1. *O tensor de curvatura satisfaz as seguintes simetrias:*

- i. $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$;
- ii. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$;
- iii. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$;
- iv. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$,

Para $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

A identidade (i) sugere interpretar $R(\cdot, \cdot)$ como uma seção de $\Lambda^2 T^* M \otimes \text{End}(TM)$, ou seja, um elemento de $\Omega^2(M, \text{End}(TM))$. Com o colchete de Lie de endomorfismos de TM dado pelo comutador, temos que a curvatura mede exatamente o quanto distante a derivada covariante $X \mapsto \nabla_X$ está de ser um homomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{X}(M) \hookrightarrow \text{End}(TM)$.

A identidade (iv) é dita a *1ª identidade de Bianchi*. As simetrias acima também sugerem interpretar o tensor de curvatura como uma seção de $S^2(\Lambda^2 TM)$, isto é, como um tensor $C^\infty(M)$ -linear simétrico em $\Lambda^2 TM$, tomando

$$\rho(X \wedge Y, Z \wedge W) := \langle R(X, Y)Z, W \rangle.$$

Isto torna mais natural considerar a forma quadrática associada

$$\rho(X \wedge Y, X \wedge Y) = \langle R(X, Y)X, Y \rangle,$$

em que define-se, para $p \in M$ e $E \subseteq T_p M$ um 2-plano em $T_p M$ (assumindo $\dim M \geq 2$), a *curvatura seccional* de M em E por

$$K(E) = K(x, y) := \frac{-\langle R_p(x, y)x, y \rangle}{\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2},$$

onde x, y é base de E . A expressão acima independe da base, e o denominador é simplesmente o determinante da matriz de Gram com respeito aos vetores x e y e a métrica g_p . Este determinante estabelece uma forma quadrática associada a um produto interno em $\Lambda^2 T_p M$, representando uma normalização de $\rho_p(x \wedge y, x \wedge y)$, e mostrando como a curvatura seccional pode ser interpretada como uma função suave no fibrado das 2-grassmannianas de M [GHL12, p. 132].

Proposição 3.1.2. A função curvatura seccional $E \rightarrow K(E)$ e a métrica num ponto $p \in M$ determinam o tensor de curvatura em p .

Apontamos que se M é superfície isometricamente imersa em \mathbb{R}^3 , então como o único 2-plano em $T_p M$ é o próprio espaço tangente, a curvatura seccional é dada unicamente por $K(T_p M)$, sendo igual à curvatura gaussiana da superfície em p .

O tensor de curvatura é um invariante local de uma variedade riemanniana, em que se $f : M \rightarrow N$ é isometria local entre variedades riemannianas, vale que

$$\tilde{R}_{f(p)}(df_p(x), df_p(y))df_p(z) = df_p(R_p(x, y)z)$$

para $p \in M$ e $x, y, z \in T_p M$, e por consequência $\tilde{K}(df_p(E)) = K(E)$ para $E \subseteq T_p M$ um 2-plano. Assim, é natural esperar que as variedades riemannianas mais simples são aquelas que apresentam simplicidade em seu tensor de curvatura. Dizemos que (M, g) tem *curvatura (seccional) constante* igual a κ se $K(E) = \kappa$ para todo $p \in M$ e todo 2-plano $E \subseteq T_p M$, e que M é *flat* se $\kappa = 0$. Numa variedade de curvatura constante, o tensor de curvatura é dado por

$$R(X, Y)Z = -\kappa(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X),$$

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\kappa(\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle) = -\kappa \det \begin{pmatrix} \langle X, Z \rangle & \langle X, W \rangle \\ \langle Y, Z \rangle & \langle Y, W \rangle \end{pmatrix}.$$

Proposição 3.1.3. Se M é variedade riemanniana, $\varphi : N \rightarrow M$ é mapa suave, $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ e $U \in \Gamma(\varphi^* TM)$ é campo ao longo de φ , então

$$R(\varphi_* X, \varphi_* Y)U = \nabla_X^\varphi \nabla_Y^\varphi U - \nabla_Y^\varphi \nabla_X^\varphi U - \nabla_{[X, Y]}^\varphi U,$$

onde ∇^φ é a conexão induzida no fibrado pullback.

Proposição 3.1.4 (2^a Identidade de Bianchi). Se M é variedade riemanniana com tensor de curvatura R , vale

$$\nabla_X R(Y, Z)W + \nabla_Y R(Z, X)W + \nabla_Z R(X, Y)W = 0,$$

para $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. [GHL12, p. 184]. □

Se $\dim M \geq 3$, dizemos que M tem *curvatura isotrópica* em $p \in M$ se $K(E) = \kappa_p$ para todo 2-plano $E \subseteq T_p M$, para $\kappa_p \in \mathbb{R}$. A 2^a identidade de Bianchi permite deduzir:

Lema 3.1.5 (Schur). Se M é variedade riemanniana conexa com $\dim M \geq 3$ e M tem curvatura isotrópica em todos os pontos, então M tem curvatura constante.

Demonstração. Com R^0 o tensor $R^0(X, Y)Z = -(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X)$, e para $\kappa : M \rightarrow \mathbb{R}$ a função suave da curvatura isotrópica, então $R = \kappa R^0$ e

$$\nabla_X R(Y, Z)W = (X\kappa)R^0(Y, Z)W + \kappa \nabla_X R^0(Y, Z)W.$$

Tomando a soma cíclica em X, Y e Z e usando a 2^a identidade de Bianchi, obtemos

$$(X\kappa)R^0(Y, Z)W + (Y\kappa)R^0(Z, X)W + (Z\kappa)R^0(X, Y)W = 0,$$

e para $Y = W$ e $\{X, Y, Z\}$ ortonormais em uma vizinhança em M , temos que $(X\kappa)Z = (Z\kappa)X \implies (X\kappa) = 0$. Como isto vale para todo X , temos que κ é constante. □

3.1.1 O Tensor de Ricci e a Curvatura Escalar

Com a linguagem de contrações e dos isomorfismos musicais, é possível tomar contrações do tensor de curvatura a fim de obter tensores de ordem menor. Eles possivelmente expressam menos informação total sobre a curvatura da variedade, mas são mais fáceis de manipular e relacionar com a geometria.

É o caso do *tensor de Ricci* $\text{Ric}_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ em $p \in M$, dado por

$$\text{Ric}_p(x, y) = \text{tr}(v \mapsto -R_p(x, v)y),$$

ou, em coordenadas locais, por

$$\text{Ric}(X, Y) = -\sum dx^i(R(X, \partial_i)Y).$$

No caso particular de (e_i) ser uma base ortonormal de $T_p M$, temos que

$$\text{Ric}_p(x, y) = -\sum \langle R(x, e_j)y, e_j \rangle.$$

Considerando ainda os coeficientes locais R_{ijk}^l do tensor de curvatura, temos que os coeficientes R_{jk} do tensor de Ricci são dados pela contração $R_{jk} = R_{ijk}^i$.

O tensor de Ricci é simétrico, valendo $\text{Ric}_p(x, y) = \text{Ric}_p(y, x)$. Sendo então Ric e g tensores de mesmo tipo, é interessante compará-los, ou estudar situações em que há alguma relação entre eles. Uma variedade riemanniana M é dita uma *variedade de Einstein* se existe constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\text{Ric} = \lambda g$. Se $\lambda = 0$, a variedade é dita *Ricci-flat*. Evidentemente se M tem curvatura constante, então é de Einstein, e se é flat, é Ricci-flat. Um dos motivos pelos quais variedades de Einstein são objetos importantes de serem estudados é porque aparecem naturalmente como soluções das equações de Einstein para a relatividade geral no vácuo na geometria pseudo-riemanniana.

A partir dos isomorfismos musicais, é possível definir o traço do tensor de Ricci, sendo a *curvatura escalar* $S : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$S(p) = \text{tr } \text{Ric}_p = \sum_{i=1}^n \text{Ric}_p(e_i, e_i),$$

onde (e_i) é base ortonormal de $T_p M$, ou equivalentemente $S = g^{jk}R_{jk}$. Se $x \in T_p M$ é vetor unitário, tomando base ortonormal $(x = e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $T_p M$, é possível descrever o tensor de Ricci e a curvatura escalar em termos da curvatura seccional:

$$\text{Ric}_p(x, x) = \sum_{j=2}^n K(x, e_j), \quad S(p) = \sum_{i \neq j} K(e_i, e_j).$$

Se M tem curvatura constante κ , então calcula-se que $\text{Ric} = (n-1)\kappa g$ e $S = n(n-1)\kappa$. A proposição abaixo mostra como a curvatura escalar é dada por uma média do tensor de Ricci em todas as direções de $T_p M$:

Proposição 3.1.6. *Se $U_p M \cong S^{n-1} \subset T_p M$ denota a esfera unitária em $T_p M$ com respeito a g_p e σ a medida canônica de hipersuperfície nela, então*

$$\frac{1}{\text{vol}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} \text{Ric}_p(v, v) d\sigma = \frac{1}{n} S(p).$$

Demonstração. Basta ver que a expressão da esquerda acima é linear com respeito às formas bilineares simétricas em $T_p M$ como espaço vetorial. Com (e_i) base ortonormal de $T_p M$ e $B \cong e^j \otimes e^i$ para $i \neq j$, a integral em $B(v, v)$ se anula por simetria, considerando a integral

$$\int_{S^{n-1}} x^i x^j d\sigma = 0.$$

Se $B \cong e^i \otimes e^i$, considera-se a integral $\int_{S^{n-1}} (x^i)^2 d\sigma$ onde x^i é a função i -ésima coordenada. Por simetria, $\int_{S^{n-1}} (x^i)^2 d\sigma = \int_{S^{n-1}} (x^j)^2 d\sigma$ para $i \neq j$, e então

$$n \int_{S^{n-1}} (x^i)^2 d\sigma = \int_{S^{n-1}} (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 dx = \int_{S^{n-1}} 1 dx = \text{vol}(S^{n-1}).$$

Desta maneira, a expressão resultante corresponderá ao traço da forma bilinear simétrica integrada, já que $\frac{1}{n} \text{tr } B$ e $\frac{1}{\text{vol}} \int B d\sigma$ coincidem numa base, sendo expressões lineares em B . \square

Dado um tensor contravariante $T \in T^{(r,s)} M$, interpretando-o como operador multilinear $T : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow T^{(r,0)} M$, definimos o seu *divergente* como o $(r, s-1)$ -tensor

$$\text{div } T = \text{tr}_{12} \nabla T,$$

onde o traço é tomado sobre as duas primeiras entradas contravariantes a partir dos isomorfismos musicais. Explicitamente,

$$\text{div } T(Y_1, Y_2, \dots, Y_{s-1}) = \text{tr}_{12} \nabla \cdot T(\cdot, Y_1, \dots, Y_{s-1}) = g^{ij} \nabla_{\partial_i} T(\partial_j, Y_1, \dots, Y_{s-1}).$$

Teorema 3.1.7. *Numa variedade riemanniana (M, g) , vale que*

$$\text{div Ric} = \frac{1}{2} dS.$$

Demonstração. Com Rm o $(0, 4)$ -tensor de curvatura, a 2ª identidade de Bianchi afirma que

$$\nabla_X Rm(Y, Z, W, U) + \nabla_Y Rm(Z, X, W, U) + \nabla_Z Rm(X, Y, W, U) = 0.$$

O valor de $\text{Ric}(X, Z)$ é dado pelo traço de $-Rm(X, Y, Z, W)$ com respeito a Y e W , ou seja, com respeito à 2ª e 4ª entradas, e a curvatura escalar é dada pelo traço de $\text{Ric}(X, Y)$ com respeito a suas únicas entradas. Lembrando que as contrações comutam entre si e também com a derivada covariante, ao tomarmos a contração da expressão acima com respeito a Z e U obtemos

$$\begin{aligned} -\nabla_X \text{Ric}(Y, W) + \nabla_Y \text{Ric}(X, W) + \text{tr}[(Z, U) \mapsto \nabla_Z Rm(X, Y, W, U)] &= 0 \\ \implies \nabla_X \text{Ric}(Y, W) - \nabla_Y \text{Ric}(X, W) &= \text{tr}[(Z, U) \mapsto \nabla_Z Rm(X, Y, W, U)]. \end{aligned}$$

Na expressão acima, tomando o traço com respeito a Y e W , temos

$$\nabla_X S - \text{tr. Ric}(X, \cdot) = \text{tr}_{34} \text{tr}_{15} \nabla_1 Rm(X, 3, 4, 5)$$

onde os números acima são uma notação *ad hoc* para indicar com respeito a que entradas se tomam as contrações. Como elas comutam e o traço é simétrico,

$$\nabla_X S - \text{div Ric}(X) = \text{tr} \nabla \cdot \text{Ric}(X, \cdot) \implies X(S) = 2 \text{div Ric}(X),$$

demonstrando o resultado. \square

Corolário 3.1.8. *Seja M variedade riemanniana conexa de dimensão $\dim M \geq 3$, e tal que exista função suave $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{Ric} = \lambda g$. Então λ é constante, e M é variedade de Einstein.*

Demonstração. Sendo $n = \dim M$ e como $\nabla g = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \text{div Ric} = \text{div}(\lambda g) &= \text{tr}_{12} \nabla_1(\lambda g)(2, \cdot) = \sum_i \nabla_{E_i}(\lambda g)(E_i, \cdot) = \sum_i d\lambda(E_i)g(E_i, \cdot) \\ &= d\lambda \left(\sum_i g(E_i, \cdot)E_i \right) = d\lambda. \end{aligned}$$

Ainda mais, temos que $\frac{1}{2}dS = \frac{1}{2}d(n\lambda) = \frac{n}{2}d\lambda$. Mas com a igualdade $\text{div Ric} = dS$, se $n \geq 3$, necessariamente devemos ter que $d\lambda = 0$, sendo então constante. \square

Proposição 3.1.9. Se M é variedade riemanniana de dimensão 3, então o tensor de Ricci determina completamente o tensor de curvatura, e em dimensão 2, a curvatura escalar determina completamente o tensor de curvatura.

Em particular, se $\dim M = 3$ e M é variedade de Einstein, então M tem curvatura constante, e se $\dim M = 2$ e M tem curvatura escalar constante, então M tem curvatura constante.

Demonstração. Em dimensão 2, para base ortonormal (e_1, e_2) de $T_p M$, a curvatura escalar é dada por $S = 2K(e_1, e_2) = 2K(T_p M)$. Como o tensor de curvatura depende apenas da curvatura seccional de $T_p M$, ele é completamente determinado por S , e se S é constante, naturalmente M terá curvatura constante.

No caso de dimensão 3, sendo (e_1, e_2, e_3) base ortonormal de $T_p M$, temos as expressões para o tensor de Ricci em termos das curvaturas seccionais:

$$\begin{aligned}\text{Ric}(e_1, e_1) &= K(e_1, e_2) + K(e_1, e_3), \\ \text{Ric}(e_2, e_2) &= K(e_1, e_2) + K(e_2, e_3), \\ \text{Ric}(e_3, e_3) &= K(e_1, e_3) + K(e_2, e_3).\end{aligned}$$

Isto é um sistema linear determinado, de modo que saber os valores do tensor de Ricci dá informação completa sobre os termos $\langle R(e_i, e_j)e_i, e_j \rangle$, e por certas manipulações algébricas, para todo o tensor de curvatura R . Se $\text{Ric} = \lambda g$, é fácil concluir também a segunda afirmação. \square

Como mencionado na introdução do capítulo, é possível interpretar a curvatura do espaço como um desvio da geometria euclidiana usual, na qual o transporte paralelo é constante e independe do caminho tomado entre dois pontos. Mais precisamente, temos a seguinte proposição:

Teorema 3.1.10. Seja M uma variedade riemanniana conexa.

- i. Se M possui a propriedade de que, para quaisquer dois pontos $p, q \in M$, o transporte paralelo de p para q ao longo de uma curva suave por partes γ independe da escolha de γ , então M é variedade flat.
- ii. Se M é flat, $p, q \in M$ e γ_0, γ_1 são duas curvas suaves por partes ligando p a q e são suavemente homotópicas com as extremidades fixadas, então seus transportes paralelos coincidem.

Demonstração. Para a primeira afirmação, fixamos $p_0 \in M$ e $v \in T_{p_0} M$, e definimos um campo vetorial (em princípio não necessariamente contínuo) V em M tal que $V_{p_0} = v$ e $V_q = X(1)$, onde X é campo paralelo ao longo de um caminho suave por partes $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ com $\gamma(0) = p_0$, $\gamma(1) = q$ e $X(0) = v$. Como o transporte paralelo independe do caminho tomado, o campo vetorial V é bem definido, dependendo linearmente apenas de $v \in T_{p_0} M$.

Para mostrar que V é suave, considera-se $p \in M$ e vizinhança normal U de p , e $w = V_p \in T_p M$. Para $q \in \exp_p(u) \in U$, o vetor V_q é dado pelo transporte paralelo ao longo do caminho que liga primeiramente p_0 a p , e posteriormente ao longo da geodésica $\exp_p(tu)$ ligando p a q . Pelas equações do transporte paralelo, e como

$$\gamma(t) = \exp_p(tu) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)) = (tu^1, \dots, tu^n),$$

o campo X ao longo de γ é dado pelo sistema de EDOs

$$(X^i)' = - \sum_{j,k} (\Gamma_{j,k}^i \circ \gamma) X^j u^k, \quad i = 1, \dots, n$$

e condições iniciais $X^i(0) = w^i$. Pela existência, unicidade e suavidade de EDOs com respeito a condições iniciais, $X(1)$ é função suave de u^1, \dots, u^n .

Para qualquer caminho suave por partes em M , temos que $\frac{\nabla}{dt}V \equiv 0$, já que é dado pelo transporte paralelo, e portanto $\nabla V \equiv 0$. Para (e_1, \dots, e_n) base ortonormal de $T_{p_0}M$, constroem-se campos paralelos globais E_1, \dots, E_n como acima, formando base ortonormal de todo espaço tangente e gerando $\mathfrak{X}(M)$ por combinações $C^\infty(M)$ -lineares. Assim,

$$R(X, Y)E_i = \nabla_X \nabla_Y E_i - \nabla_Y \nabla_X E_i - \nabla_{[X, Y]} E_i = 0$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, de modo que $R \equiv 0$.

Para a segunda afirmação, considere $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ suave, com $p_0 = \varphi(0, 0)$, e $v \in T_p M$. Considere Y_0 o campo ao longo da curva $\varphi(t, 0)$ que realiza o transporte paralelo de v , obtendo vetores $Y_0(t) \in T_{\varphi(t, 0)}M$. Para cada $t_0 \in [0, 1]$ fixado, considere o campo $X_{t_0}(s)$ ao longo da curva $\varphi(t_0, s)$ que realiza o transporte paralelo de $Y_0(t_0)$. Com isso, obtém-se um campo suave (devido a dependência suave nas condições iniciais) $V(t, s)$ ao longo de φ , em que

$$\frac{\nabla}{ds} V(t_0, s) = 0, \quad \frac{\nabla}{dt} V(t, 0) = 0.$$

Mostremos que, para cada $s_0 \in [0, 1]$ fixado, vale também

$$\frac{\nabla}{dt} V(t, s_0) = 0.$$

Com M flat e ∂_t, ∂_s os campos coordenados em $[0, 1] \times [0, 1]$, e pelas propriedades da conexão induzida, temos que, para um campo U ao longo de φ , vale

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} U = \frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} U.$$

Assim,

$$\frac{\nabla}{ds} \left(\frac{\nabla}{dt} V(t, s) \right) = \frac{\nabla}{dt} \left(\frac{\nabla}{ds} V(t, s) \right) = 0,$$

já que $\frac{\nabla}{ds} V(t, s) = 0$. Isto implica que $\frac{\nabla}{dt} V(t, s)$ é campo paralelo com respeito a s . Ainda, como $\frac{\nabla}{dt} V(t, 0) = 0$, o campo $\frac{\nabla}{dt} V(t, s)$ é constante igual a 0 para todo s . Isto mostra que V é campo paralelo ao longo de φ .

Se agora $H : [0, 1] \times [0, 1]$ é homotopia suave entre γ_0 e γ_1 como no enunciado, valendo $H(t, \cdot) = \gamma_t(\cdot)$, tem-se que $H(t, 0)$ é constante igual a p e $H(t, 1)$ é constante igual a q . Sendo o transporte paralelo de $v \in T_p M$ ao longo de $H(t, 0)$ trivialmente dado por v , construímos como acima um campo suave V ao longo de H . Como o transporte ao longo da curva constante $H(t, 1)$ é também paralelo, o transporte paralelo ao longo de cada uma das curvas homotópicas γ_t coincide em q com o de γ_0 . \square

A demonstração acima conclui mais: se M é variedade flat (ou, mais geralmente, é munido de uma conexão flat) e $\varphi : [0, 1]^n \rightarrow M$ é mapa suave com $p_0 = \varphi(0, \dots, 0)$ e $v \in T_{p_0} M$, é possível estender v a um campo paralelo ao longo de φ , com o caso específico de uma homotopia suave dado acima. Ainda mais geralmente, basta que M seja flat ao longo da imagem de φ , por exemplo se φ for uma imersão totalmente geodésica e flat.

3.2 Exemplos

Como corresponde à nossa intuição, \mathbb{R}^n é variedade flat, onde

$$R(X, Y)Z = X(Y(Z)) - Y(X(Z)) - [X, Y]Z = 0.$$

Ainda, como a curvatura é preservada por isometrias locais, também temos que os toros \mathbb{R}^n/Γ construídos anteriormente são flat. A esfera \mathbb{S}^n , cuja conexão de Levi-Civita é dada por

$\nabla_X Y = X(Y) - \langle X(Y), \mathbf{p} \rangle \mathbf{p}$, onde \mathbf{p} indica a função vetorial de posição em \mathbb{R}^{n+1} , mostra que \mathbb{S}^n tem curvatura seccional constante igual a 1. De fato,

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla_Y Z &= X(\nabla_Y Z) - \langle X(\nabla_Y Z), \mathbf{p} \rangle \mathbf{p} \\ &= X(Y(Z) - \langle Y(Z), \mathbf{p} \rangle \mathbf{p}) - \langle X(Y(Z) - \langle Y(Z), \mathbf{p} \rangle \mathbf{p}), \mathbf{p} \rangle \mathbf{p} \\ &= X(Y(Z) + \langle Z, Y \rangle \mathbf{p}) - \langle X(Y(Z) + \langle Z, Y \rangle \mathbf{p}), \mathbf{p} \rangle \mathbf{p},\end{aligned}$$

já que, como $\langle V, \mathbf{p} \rangle = 0$ para V tangente à esfera, temos que

$$0 = U \langle V, \mathbf{p} \rangle = \langle UV, \mathbf{p} \rangle + \langle V, U\mathbf{p} \rangle = \langle UV, \mathbf{p} \rangle + \langle V, U \rangle.$$

Continuando a conta, temos

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla_Y Z &= X(Y(Z) + \langle Z, Y \rangle \mathbf{p}) - \langle X(Y(Z) + \langle Z, Y \rangle \mathbf{p}), \mathbf{p} \rangle \mathbf{p} \\ &= XY(Z) + X(\langle Y, Z \rangle \mathbf{p}) - \langle XY(Z) + X(\langle Z, Y \rangle \mathbf{p}), \mathbf{p} \rangle \mathbf{p} \\ &= XY(Z) + X\langle Y, Z \rangle \mathbf{p} + \langle Y, Z \rangle X\mathbf{p} - \langle XY(Z), \mathbf{p} \rangle \mathbf{p} - \langle X\langle Z, Y \rangle \mathbf{p} + \langle Z, Y \rangle X\mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \mathbf{p} \\ &= XY(Z) + X\langle Y, Z \rangle \mathbf{p} + \langle Y, Z \rangle X + \langle Y(Z), X \rangle \mathbf{p} - \langle X\langle Z, Y \rangle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \mathbf{p} - \langle \langle Z, Y \rangle X, \mathbf{p} \rangle \mathbf{p} \\ &= XY(Z) + X\langle Y, Z \rangle \mathbf{p} + \langle Y, Z \rangle X + \langle Y(Z), X \rangle \mathbf{p} - X\langle Z, Y \rangle \mathbf{p} \\ &= XY(Z) + \langle Y, Z \rangle X + \langle Y(Z), X \rangle \mathbf{p}.\end{aligned}$$

Calculando o tensor riemanniano de curvatura, teremos no final

$$R(X, Y)Z = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y,$$

e naturalmente desta expressão a curvatura de \mathbb{S} será 1. Similarmente, as esferas $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tem curvatura constante igual a $\frac{1}{r^2}$, e os espaços projetivos \mathbb{RP}^n terão curvatura constante igual a 1. Já o espaço hiperbólico \mathbb{RH}^n , no modelo do hiperboloide em $\mathbb{R}^{1,n}$, tem conexão $\nabla_X Y = X(Y) + \langle X(Y), \mathbf{p} \rangle \mathbf{p}$, onde a métrica ambiente é lorentziana. Assim, ele terá curvatura seccional constante igual a -1 . Futuramente veremos que estes são, a menos de escalonamento da métrica, os únicos exemplos de variedade riemannianas conexas e simplesmente conexas com curvatura constante.

Se $(M, g) = (M_1, g_1) \times (M_2, g_2)$ é produto riemanniano e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ são campos que se decompõem em $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$ para $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ e $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$, então a conexão de Levi-Civita em M se decompõe como $\nabla_X Y = \nabla_{X_1}^1 Y_1 + \nabla_{X_2}^2 Y_2$. Desta maneira, a curvatura também se decompõe como

$$R_p(x, y)z = R_{p_1}^1(x_1, y_1)z_1 + R_{p_2}^2(x_2, y_2)z_2.$$

Isto implica que planos mistos em $T_p M$, ou seja, aqueles não totalmente contidos em $T_{p_1} M_1$ ou em $T_{p_2} M_2$, tem curvatura seccional igual a 0.

Se G é um grupo de Lie com métrica bi-invariante, ou equivalentemente esquerda-invariante e Ad-invariante, temos que, para $X, Y \in \text{Lie}(G) \cong \mathfrak{g}$ a conexão de Levi-Civita é $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$, a partir da fórmula de Koszul. Desta maneira, a curvatura é

$$R(X, Y)Z = -\frac{1}{4}[[X, Y], Z], \quad \langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\frac{1}{4}\langle [X, Y], [Z, W] \rangle,$$

para $X, Y, Z, W \in \mathfrak{g}$. Todo 2-plano em $T_g G$ é gerado por X_g, Y_g para $X, Y \in \mathfrak{g}$, e como L_g é isometria, para calcular as curvaturas seccionais, é suficiente calculá-las na identidade. Se X, Y são ainda ortonormais, temos que

$$K(X, Y) = \frac{1}{4}\|[X, Y]\|^2,$$

de modo que a curvatura seccional de grupos de Lie com métrica bi-invariante é sempre não-negativa. Ainda, para (E_i) base ortonormal de \mathfrak{g} e assumindo $X = E_1$, tem-se

$$\text{Ric}(X, X) = \frac{1}{4} \sum_{j=2}^n \|[X, E_j]\|^2 = -\frac{1}{4} \sum_{j=2}^n \langle \text{ad}_X^2 E_j, E_j \rangle = -\frac{1}{4} \text{tr}(\text{ad}_X^2) \geq 0.$$

Como Ric é simétrico, temos que

$$\text{Ric}(X, Y) = -\frac{1}{4} \text{tr}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y), \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Num grupo de Lie geral, $\text{tr}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y)$ é uma forma bilinear simétrica B em \mathfrak{g} , dita a *forma de Cartan-Killing*. Ela é ad-invariante, e é possível mostrar que, se G é compacto e \mathfrak{g} tem centro trivial, então $-B$ é positiva-definida [Kir08, p. 110]. Ainda, com G conexo, $-B$ induz uma métrica bi-invariante em G de modo que ele será variedade de Einstein. O artigo [Mil76] contém maiores discussões acerca de métricas em grupos de Lie e considerações sobre curvatura.

Capítulo 4

Cálculo Variacional

“Mathematics exists solely for the honor of the human mind.”

C. Jacobi [FHB67]

Nos capítulos anteriores, observamos como geodésicas correspondem simultaneamente às curvas de “aceleração nula” no espaço, e também às curvas que realizam as distâncias em M para arcos suficientemente pequenos. Começamos o capítulo com uma outra descrição delas, sendo os “pontos críticos” do funcional energia com respeito a certas variações, e no propósito de estudar quando geodésicas são mínimos locais para a energia, consideramos a segunda variação da energia e introduzimos os campos de Jacobi. Tais ferramentas permitirão relacionar a curvatura de M com o comportamento minimizante de suas geodésicas com respeito a curvas próximas.

Uma abordagem distinta e frutífera para trabalhar estas noções, que não é feita aqui mas é mencionada por sua beleza, é construir a variedade (de dimensão infinita) $H^1(I, M)$ das curvas $\gamma : I \rightarrow M$ de classe H^1 em termos de espaços de Sobolev. Neste espaço o funcional energia é de fato um mapa suave, e estudam-se seus diferenciais diretamente. Mais especificamente, estudam-se as subvariedades propriamente mergulhadas $\Omega_{p,q}M$ e ΛM , o espaço das curvas H^1 ligando p a q e o espaço das curvas fechadas de classe H^1 , respectivamente. O espaço tangente a uma curva γ em $\Omega_{p,q}M$ pode ser visto como os campos H^1 ao longo de γ se anulando nas extremidades, e a segunda variação da energia é sua Hessiana. Este tratamento da teoria permite uma perspectiva analítica mais profunda, e pode ser encontrado em [Kli82].

4.1 Variações da Energia

Denotaremos por $\Omega_{p,q}$ o conjunto das curvas contínuas e suaves por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ tais que $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$, com $p, q \in M$. Relembra-se a definição de comprimento de uma curva, e introduz-se também a definição de sua energia:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(s)\| ds,$$
$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{\gamma}(s)\|^2 ds.$$

Vale a desigualdade $L(\gamma)^2 \leq 2(b-a)E(\gamma)$, com igualdade se e só se γ é parametrizada com velocidade constante. Nota-se que o comprimento é invariante por reparametrizações, mas não a energia; apesar disto, estudar a energia será mais adequado para os resultados seguintes.

Lema 4.1.1. *Seja $\gamma \in \Omega_{p,q}$.*

(i) *Se γ é minimizante, ou seja, $L(\gamma) = d(p, q)$, então γ é geodésica, a menos de reparametrização.*

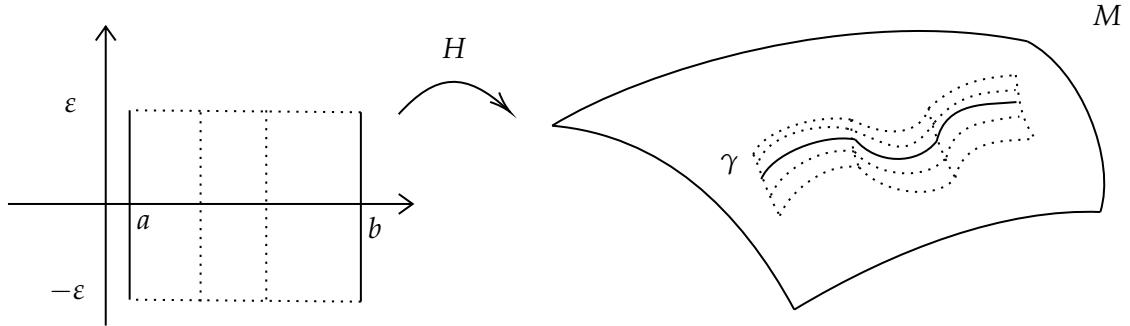
(ii) Se γ minimiza a energia em $E : \Omega_{p,q} \rightarrow \mathbb{R}$, então γ é geodésica minimizante.

Demonstração. [Gor22, p. 100]. □

Dada $\gamma \in \Omega_{p,q}$ para $p, q \in M$, uma variação suave por partes de γ é um mapa contínuo $H : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, para $\varepsilon > 0$, tal que $H(s, 0) = \gamma(s) \forall s \in [a, b]$, e existe subdivisão $a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$ tal que

$$H|_{[s_i, s_{i+1}] \times (-\varepsilon, \varepsilon)} : [s_i, s_{i+1}] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$$

é suave, para $i = 0, \dots, n-1$. Diz-se ainda que H é uma variação que fixa as extremidades se $H(a, t) = p$ e $H(b, t) = q \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, e que H é uma variação por geodésicas se as curvas $H(\cdot, t) = \gamma_t$ são geodésicas.



Denota-se por $\bar{\nabla}$ o pullback da conexão de Levi-Civita em M a $\Gamma(H^*TM)$, e $\bar{\partial}_s, \bar{\partial}_t$ o push-forward dos campos coordenados em $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ ao longo de H . Vê-se que o campo tangencial $\bar{\partial}_s$ é possivelmente descontínuo nos pontos $s = s_i$, e em particular $\bar{\partial}_s|_{t=0} = \dot{\gamma}$, mas os campos $\bar{\partial}_t$ e $\bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t} \bar{\partial}_t$ são contínuos. O campo

$$V(s) = \bar{\partial}_t|_{(s,0)} = \bar{\partial}_t|_{t=0}$$

ao longo de γ é suave por partes, e é dito o campo variacional associado a H . Intuitivamente, ele representa as velocidades dos pontos da curva base γ de acordo com a variação, ou, mais abstratamente, a própria “velocidade” da curva como objeto sendo variado.

Proposição 4.1.2. *Dada curva suave por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, todo campo contínuo e suave por partes V ao longo de γ é o campo variacional associado a uma variação suave por partes H de γ . Adicionalmente, se $V(a) = V(b) = 0$, pode-se tomar variação H que fixa as extremidades.*

Demonstração. Basta tomar a variação

$$H(s, t) = \exp_{\gamma(s)}(tV(s)).$$

□

Teorema 4.1.3 (Fórmula da Primeira Variação de Energia). *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ curva suave por partes. Se H é variação suave por partes de γ com campo variacional associado V , tem-se que*

$$\frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} E(\gamma_t) = \sum_{i=0}^{n-1} \langle V, \dot{\gamma} \rangle|_{s_i^+}^{s_{i+1}^-} - \int_a^b \langle V, \nabla_{\bar{\partial}_s} \dot{\gamma} \rangle ds.$$

Demonstração. Supondo inicialmente H variação suave,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(\gamma_t) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_a^b \langle \bar{\partial}_s, \bar{\partial}_s \rangle ds = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} \langle \bar{\partial}_s, \bar{\partial}_s \rangle ds = \int_a^b \langle \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t} \bar{\partial}_s, \bar{\partial}_s \rangle ds \\ &= \int_a^b \langle \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_s} \bar{\partial}_t, \bar{\partial}_s \rangle ds = \int_a^b \frac{d}{ds} \langle \bar{\partial}_t, \bar{\partial}_s \rangle - \langle \bar{\partial}_t, \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_s} \bar{\partial}_s \rangle ds = \langle \bar{\partial}_t, \bar{\partial}_s \rangle|_a^b - \int_a^b \langle \bar{\partial}_t, \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_s} \bar{\partial}_s \rangle ds. \end{aligned}$$

Avaliando em $t = 0$ e considerando a expressão acima em cada subintervalo de $[a, b]$ onde H é suave, temos a fórmula do enunciado. □

Corolário 4.1.4. *Uma curva suave por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é geodésica se e somente se, para toda variação suave por partes H de γ que fixa extremidades, vale $\frac{d}{dt}|_{t=0}E(\gamma_t) = 0$.*

Demonastração. Se γ é geodésica e H é variação com $V(a) = V(b) = 0$, a fórmula da primeira variação de energia implica em $\frac{d}{dt}|_{t=0}E(\gamma_t) = 0$. Suponha agora que para toda variação suave por partes H que fixa extremidades, valha $\frac{d}{dt}|_{t=0}E(\gamma_t) = 0$. Com $\{a = s_0, s_1, \dots, s_m = b\}$ partição de $[a, b]$ onde γ é suave em cada $[s_i, s_{i+1}]$, considera-se uma função $f \in C^\infty([a, b])$ tal que $f(s) > 0$ se $s \neq s_i$, e $f(s_i) = 0$. Tomando o campo $Y = f \frac{\nabla}{ds} \dot{\gamma}$ suave por partes ao longo de γ e contínuo, a variação induzida por ele satisfaz

$$0 = - \int_a^b f \left\| \frac{\nabla}{ds} \dot{\gamma} \right\|^2 ds,$$

de modo que γ é geodésica em cada subintervalo (s_i, s_{i+1}) . Mas pela suavidade de γ em $[s_i, s_{i+1}]$, também vale que $\frac{\nabla}{ds} \dot{\gamma}|_{s_i} = 0$ no sentido de derivadas laterais.

Com $\dot{\gamma}(s_i^+)$ e $\dot{\gamma}(s_i^-)$ as derivadas laterais de γ em s_i , considere campo suave por partes Y ao longo de γ tal que $Y(a) = Y(b) = 0$ e $Y(s_i) = \dot{\gamma}(s_i^+) - \dot{\gamma}(s_i^-)$, para $i = 1, \dots, n-1$. A primeira variação será

$$0 = - \int_a^b \langle V, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \rangle ds = - \sum_{i=1}^{n-1} \|\dot{\gamma}(s_i^+) - \dot{\gamma}(s_i^-)\|^2,$$

concluindo a igualdade das derivadas laterais, que γ é curva C^1 e, portanto, que γ é geodésica pela unicidade de condições iniciais. \square

Como geodésicas são exatamente os pontos críticos do funcional energia com respeito a variações que fixam extremidades, uma pergunta natural é se elas representam mínimos locais dele (com respeito a curvas C^0 -próximas), como corresponderia nossa intuição. A resposta para este questionamento requer um estudo da segunda variação do funcional energia, análogo à determinação da Hessiana de funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para descrever pontos críticos como mínimos ou máximos locais, ou indeterminados.

Se $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é curva suave por partes em M com $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$, uma variação a dois parâmetros de γ é uma função $H : [a, b] \times U \rightarrow M$, com U vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, tal que $H(s, 0, 0) = \gamma(s)$ para $s \in [a, b]$ e existe partição $\{a = s_0, s_1, \dots, s_n = b\}$ de $[a, b]$ tal que $H|_{[s_i, s_{i+1}] \times U}$ é suave para $i = 0, \dots, n-1$. Diremos que ela fixa extremidades se $H(a, u_1, u_2) = \gamma(a)$ e $H(b, u_1, u_2) = \gamma(b)$, para todos $(u_1, u_2) \in U$. Tal variação dá origem a dois campos variacionais suaves por partes:

$$X(s) = \frac{\partial H}{\partial u_1}(s, 0, 0), \quad Y(s) = \frac{\partial H}{\partial u_2}(s, 0, 0).$$

Analogamente ao caso de um parâmetro, dados campos $X, Y \in \Gamma(\gamma^* TM)$ suaves por partes, tem-se a variação $H(s, u_1, u_2) = \exp_{\gamma(s)}(u_1 X(s) + u_2 Y(s))$ que os admite como campos variacionais (mesmo fixando as extremidades se eles se anulam em a e b).

Da mesma maneira que para estudar a minimalidade local de funções em \mathbb{R}^n restringe-se o estudo a pontos críticos dela, nos restringiremos ao caso apenas de quando γ é geodésica.

Teorema 4.1.5 (Fórmula da Segunda Variação de Energia). *Se $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é geodésica e $H : [a, b] \times U \rightarrow M$ é variação a dois parâmetros com campos variacionais X e Y , vale*

$$\left. \frac{\partial^2 E(\gamma_{(u_1, u_2)})}{\partial u_1 \partial u_2} \right|_{(u_1, u_2) = (0, 0)} = \langle \overline{\nabla}_{\partial_{u_1}} \overline{\partial}_{u_2}|_{u=0}, \dot{\gamma} \rangle|_{s=a}^{s=b} + \int_a^b \langle X', Y' \rangle + \langle R(\dot{\gamma}, X) \dot{\gamma}, Y \rangle ds.$$

Demonstração. Pela fórmula da primeira variação,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2}(\gamma_{(u_1, u_2)}) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial u_1} \langle \bar{\nabla}_{\partial_{u_2}} \partial_s, \bar{\partial}_s \rangle ds = \int_a^b \langle \bar{\nabla}_{\partial_{u_1}} \bar{\nabla}_{\partial_{u_2}} \bar{\partial}_s, \bar{\partial}_s \rangle + \langle \bar{\nabla}_{\partial_{u_2}} \bar{\partial}_s, \bar{\nabla}_{\partial_{u_1}} \bar{\partial}_s \rangle ds \\
 &= \int_a^b \langle \bar{\nabla}_{\partial_{u_1}} \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\partial}_{u_2}, \bar{\partial}_s \rangle + \langle \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\partial}_{u_2}, \bar{\nabla}_{\partial_{u_1}} \bar{\partial}_s \rangle ds \\
 &= \int_a^b \langle \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\partial}_{u_2}, \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\partial}_{u_1} \rangle + \langle \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\nabla}_{\partial_{u_1}} \bar{\partial}_{u_2}, \bar{\partial}_s \rangle + \langle R(\bar{\partial}_{u_1}, \bar{\partial}_s) \bar{\partial}_{u_2}, \bar{\partial}_s \rangle ds \\
 &= \int_a^b \langle \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\partial}_{u_1}, \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\partial}_{u_2} \rangle + \frac{d}{ds} \langle \bar{\nabla}_{\partial_{u_1}} \bar{\partial}_{u_2}, \bar{\partial}_s \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\partial_{u_1}} \bar{\partial}_{u_2}, \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\partial}_s \rangle + \langle R(\bar{\partial}_{u_1}, \bar{\partial}_s) \bar{\partial}_{u_2}, \bar{\partial}_s \rangle ds
 \end{aligned}$$

e avaliando em $(u_1, u_2) = (0, 0)$ tem-se

$$\begin{aligned}
 &\int_a^b \langle X', Y' \rangle + \langle R(X, \dot{\gamma})Y, \dot{\gamma} \rangle + \frac{d}{ds} \langle \bar{\nabla}_{\partial_{u_1}} \bar{\partial}_{u_2} \rangle|_{u=0}, \dot{\gamma} \rangle ds \\
 &= \langle \bar{\nabla}_{\partial_{u_1}} \bar{\partial}_{u_2} \rangle|_{u=0}, \dot{\gamma} \rangle|_{s=a}^{s=b} + \int_a^b \langle X', Y' \rangle + \langle R(X, \dot{\gamma})Y, \dot{\gamma} \rangle ds
 \end{aligned}$$

devido à continuidade de $\dot{\gamma}$ e de $\bar{\nabla}_{\partial_{u_1}} \bar{\partial}_{u_2}|_{u=0}$, e $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$ por γ ser geodésica. \square

É possível ainda reescrever a expressão da segunda variação como

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 E(\gamma_u)}{\partial u_1 \partial u_2} \Big|_{u=0} &= \langle \bar{\nabla}_{\partial_{u_1}} \bar{\partial}_{u_2} \rangle|_{u=0}, \dot{\gamma} \rangle|_{s=a}^{s=b} + \int_a^b \langle X', Y' \rangle + \langle R(\dot{\gamma}, X) \dot{\gamma}, Y \rangle ds \\
 &= \langle \bar{\nabla}_{\partial_{u_1}} \bar{\partial}_{u_2} \rangle|_{u=0}, \dot{\gamma} \rangle|_{s=a}^{s=b} + \sum_{i=0}^{n-1} \langle X', Y \rangle|_{s_i^+}^{s_{i+1}^-} + \int_a^b \langle -X'' + R(\dot{\gamma}, X) \dot{\gamma}, Y \rangle ds
 \end{aligned}$$

por meio de mais uma integração por partes. Se os campos X e Y se anulam nas extremidades, então o primeiro termo do lado direito da equação acima se anula, permitindo definir a *forma do índice*

$$\begin{aligned}
 I(X, Y) &:= \int_a^b \langle X', Y' \rangle + \langle R(\dot{\gamma}, X) \dot{\gamma}, Y \rangle ds \\
 &= - \sum_{i=1}^{n-1} \langle X'(s_i^+) - X'(s_i^-), Y \rangle + \int_a^b \langle -X'' + R(\dot{\gamma}, X) \dot{\gamma}, Y \rangle ds.
 \end{aligned}$$

A forma do índice é uma forma bilinear simétrica, e verifica-se que se X é campo ao longo de γ se anulando nas extremidades e H é variação suave por partes com campo variacional X , tem-se

$$\frac{d^2 E(\gamma_t)}{dt^2} \Big|_{t=0} = I(X, X).$$

4.2 Campos de Jacobi

Para estudar a minimalidade local de geodésicas com respeito à energia, estuda-se a forma do índice como forma bilinear simétrica. Se γ é geodésica e mínimo local da energia, então necessariamente I é positiva semi-definida no espaço de campos contínuos e suaves por partes ao longo de γ se anulando nas extremidades. Denotaremos tal conjunto por Ω_γ . Se, ainda, I for positiva-definida em Ω_γ , gostaríamos de obter como consequência que γ é mínimo local da energia.

A segunda fórmula para a forma do índice sugere a seguinte definição. Um campo contínuo suave por partes X ao longo de uma geodésica γ (mas não necessariamente se anulando nas extremidades) é dito um *campo de Jacobi* se ele satisfaz

$$-X'' + R(\dot{\gamma}, X) \dot{\gamma} = 0.$$

Como os campos de Jacobi são soluções de uma equação diferencial linear de segunda ordem (ou de um sistema de equações, tomando um referencial de campos ortonormais paralelos ao longo de γ), todo campo de Jacobi é suave, e o espaço vetorial \mathcal{J} formado por eles tem dimensão $2n$, sendo unicamente determinados pelas condições iniciais $X(a)$ e $X'(a)$ em $T_p M$. Note também que $\dot{\gamma}(s)$ e $s\dot{\gamma}(s)$ sempre serão campos de Jacobi.

Proposição 4.2.1. *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ geodésica, e \mathcal{J} o espaço dos campos de Jacobi ao longo de γ .*

- Se $X, Y \in \mathcal{J}$, então a função $\langle X', Y \rangle - \langle X, Y' \rangle$ é constante em $[a, b]$. Em particular, $\langle X(s), \dot{\gamma}(s) \rangle = as + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, e se $X \in \mathcal{J}$ é ortogonal a $\dot{\gamma}$ em dois pontos, é ortogonal em todo $[a, b]$.*
- Se $Y_0(s) = \dot{\gamma}(s)$ e $Y_1(s) = s\dot{\gamma}(s)$, então existe decomposição $\mathcal{J} = \mathcal{J}^\perp \oplus \mathbb{R}Y_0 \oplus \mathbb{R}Y_1$, onde \mathcal{J}^\perp denota o conjunto dos campos de Jacobi ortogonais a $\dot{\gamma}$ em todo $[a, b]$.*

Demonstração. [Gor22, p. 104]. □

Os campos de Jacobi que se anulam nas extremidades de γ representam exatamente uma obstrução à forma do índice ser positiva-definida, de acordo com a proposição seguinte. Sua demonstração segue por um argumento análogo à Proposição 4.1.4.

Proposição 4.2.2. *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ geodésica e $X \in \Omega_\gamma$, ou seja, campo contínuo suave por partes ao longo de γ se anulando nas extremidades. Então X é campo de Jacobi se e somente se para todo $Y \in \Omega_\gamma$ vale $I(X, Y) = 0$.*

Adicionalmente, campos de Jacobi emergem naturalmente como os campos variacionais de variações por geodésicas:

Teorema 4.2.3. *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ geodésica.*

- Se $H : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é variação de γ por geodésicas, então o campo variacional X de H é campo de Jacobi.*
- Se X é campo de Jacobi ao longo de γ , existe variação por geodésicas $H : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ cujo campo variacional é X . Ainda, se $X(a) = 0$, pode-se tomar variação por geodésicas que fixa $\gamma(a)$.*

Demonstração. [Gor22, p. 105]. □

O corolário seguinte é de grande importância em aplicações futuras, pois ele indica que podemos utilizar campos de Jacobi para calcular o mapa diferencial da aplicação exponencial.

Corolário 4.2.4. *Sejam $p \in M$, $u, v \in T_p M$. Se γ denota a geodésica $\gamma(s) = \exp_p(sv)$ e Y o campo de Jacobi ao longo de γ satisfazendo $Y(0) = 0$ e $Y'(0) = u$, então*

$$Y(s) = d(\exp_p)_{sv}(su).$$

Demonstração. Tomando a variação por geodésicas $H(s, t) = \exp_p(s(v + tu))$, o campo variacional é dado por

$$Y(s) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{(s,0)} = d(\exp_p)_{sv}(su),$$

Sendo então campo de Jacobi. Verifica-se que $Y(0) = 0$ e

$$\overline{\partial}_s|_{s=0} = d(\exp_p)_0(v + tu) = v + tu,$$

de modo que

$$Y'(0) = \overline{\nabla}_{\partial_s} \overline{\partial}_t|_{(0,0)} = \overline{\nabla}_{\partial_t} \overline{\partial}_s|_{(0,0)} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (v + tu) = u.$$

Pela unicidade dos campos de Jacobi dadas as condições iniciais, tem-se o resultado. □

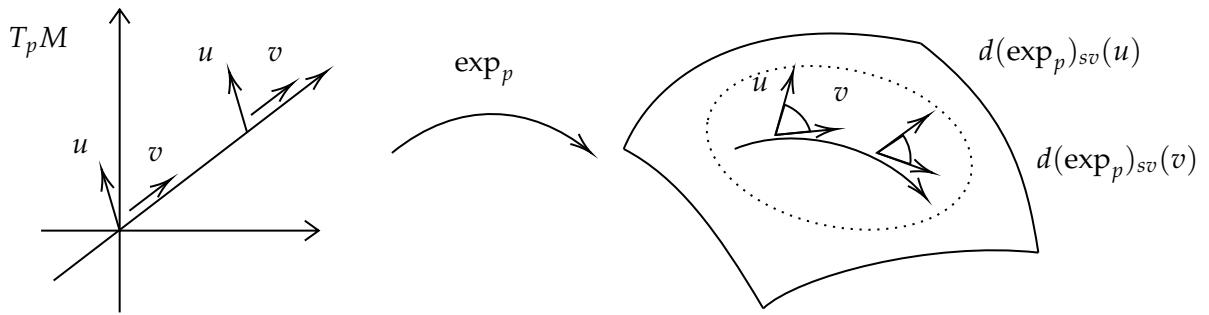
Dada geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ com $p = \gamma(a)$ e $q = \gamma(b)$, dizemos que um ponto $\tau \in [a, b]$ é *valor conjugado a a* (ao longo de γ) se existe um campo de Jacobi W ao longo de $\gamma|_{[a, \tau]}$ tal que $W(a) = W(\tau) = 0$. A *multiplicidade* de τ como valor valor conjugado é a dimensão do subespaço de campos de Jacobi se anulando em a e τ . A multiplicidade é sempre menor ou igual a $n - 1$, considerando a condição inicial $W(a) = 0$ e o campo de Jacobi $(s - a)\dot{\gamma}(s)$ que se anula em a e em nenhum outro ponto.

Corolário 4.2.5. *Se $v \in T_p M$ está no domínio da exponencial \exp_p , então 0 e 1 são valores conjugados ao longo da geodésica $\gamma(s) = \exp_p(sv)$ se e somente se v é ponto crítico de \exp_p .*

O seguinte lema representa uma generalização por campos de Jacobi do lema de Gauss local já visto:

Lema 4.2.6 (Lema de Gauss global). *Sejam $p \in M$, $u, v \in T_p M$ e a geodésica $\gamma(s) = \exp_p(sv)$. Então*

$$g_{\gamma(s)}(d(\exp_p)_{sv}(u), d(\exp_p)_{sv}(v)) = g_p(u, v).$$



Demonação. Temos que $d(\exp_p)_{sv}(v) = \dot{\gamma}(s)$, e seja Y o campo de Jacobi ao longo de γ com $Y(0) = 0$ e $Y'(0) = u$. Pelo corolário 4.2.4, para $s > 0$ vale que $d(\exp_p)_{sv}(u) = \frac{1}{s}Y(s)$. Decompondo ortogonalmente u em $\lambda v + u_1$, com $u_1 \perp v$, criamos campos de Jacobi Y_0 e Y_1 com $Y_0(0) = Y_1(0) = 0$, $Y'_0(0) = \lambda v$ e $Y'_1(0) = u_1$. Assim, $Y_0(s) = \lambda s \dot{\gamma}(s)$ e

$$Y(s) = Y_0(s) + Y_1(s) = \lambda s \dot{\gamma}(s) + Y_1(s).$$

Calculamos então o produto interno

$$g_{\gamma(s)}\left(\frac{1}{s}Y(s), \dot{\gamma}(s)\right) = \lambda g_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) + \frac{1}{s}g_{\gamma(s)}(Y_1(s), \dot{\gamma}(s)) = \lambda g_p(v, v) = g_p(u, v),$$

em que a velocidade de uma geodésica é sempre constante e, como $Y_1(0), Y'_1(0) \perp \dot{\gamma}(0) = v$, temos que Y_1 será campo de Jacobi sempre ortogonal a $\dot{\gamma}(s)$ como visto. \square

Lema 4.2.7. *Sejam $p \in M$ e $v \in T_p M$. Se $\varphi : [0, 1] \rightarrow T_p M$ é o segmento radial $\varphi(s) = sv$ e $\psi : [0, 1] \rightarrow T_p M$ é uma curva suave por partes ligando 0 a v , então*

$$L(\exp_p \circ \psi) \geq L(\exp_p \circ \varphi) = \|v\|$$

com igualdade se e somente se ψ é reparametrização de φ .

Demonação. Podemos assumir ψ suave ao dividir em segmentos suaves, e também supor $\psi(s) \neq 0$ para $s > 0$. Com $\psi(s) = r(s)u(s)$, onde $r(s) \in \mathbb{R}$ e $\|u(s)\| = 1$ são suaves, temos que

$$\psi'(s) = r'(s)u(s) + r(s)u'(s), \quad \langle u(s), u'(s) \rangle = 0.$$

Pelo Lema de Gauss global, temos que

$$\begin{aligned} \|(\exp_p \circ \psi)'(s)\|^2 &= \langle d(\exp_p)_{\psi(s)}(\psi'(s)), d(\exp_p)_{\psi(s)}(\psi'(s)) \rangle \\ &= r'(s)^2 \|d(\exp_p)_{\psi(s)}(u(s))\|^2 + r(s)^2 \|d(\exp_p)_{\psi(s)}(u'(s))\|^2 \geq r'(s)^2 \end{aligned}$$

pois $\|d(\exp_p)_{\psi(s)}(u(s))\|^2 = \|u(s)\|^2 = 1$, e então

$$L(\exp_p \circ \psi) \geq \int_0^1 |r'(s)| ds \geq |r(1) - \lim_{s \rightarrow 0^+} r(s)| = \|v\|.$$

□

Com estes lemas preliminares, conseguimos enfim enunciar o teorema de Jacobi-Darboux, caracterizando sob que condições γ será mínimo local da energia e relacionado isto à presença de pontos conjugados ao longo de γ :

Teorema 4.2.8 (Jacobi-Darboux). *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma geodésica.*

- Suponha que exista $\tau \in (a, b)$ conjugado ao valor a ao longo de γ . Então existe $W \in \Omega_\gamma$ tal que $I(W, W) < 0$. Em particular, γ não é mínimo local para a energia.*
- Se não há valores conjugados ao valor a em $(a, b]$ ao longo de γ , então há uma vizinhança V de γ na topologia C^0 no espaço $\Omega_{p,q}$ (assumindo as curvas parametrizadas em $[a, b]$) tal que $E(\eta) \geq E(\gamma)$ e $L(\eta) \geq L(\gamma)$ para toda $\eta \in V$. Ainda, se $L(\eta) = L(\gamma)$, então γ e η diferem por reparametrização.*

A demonstração ([Gor22]), aqui esboçada, envolve no item a) utilizar o campo de Jacobi para produzir o campo W , e no item b) envolve cobrir a imagem da curva com vizinhanças abertas difeomorfas a abertos de $T_p M$ pelo mapa exponencial na hipótese de não haver pontos conjugados ao longo de γ , e levantar γ para uma curva ψ em $T_p M$, aplicando o lema 4.2.7.

Corolário 4.2.9. *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ geodésica. Se nenhum $\tau \in (a, b]$ é conjugado ao valor a , então para todo $Y \neq 0 \in \Omega_\gamma$ vale $I(Y, Y) > 0$; isto é, I é positiva-definida em Ω_γ .*

Demonstração. Segue do teorema que I será positiva semi-definida, pois se existisse $W \in \Omega_\gamma$ tal que $I(W, W) < 0$, então W induziria uma variação de γ onde γ seria máximo local estrito da energia. Além disso, se W é tal que $I(W, W) = 0$, então para qualquer $X \in \Omega_\gamma$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se

$$0 \leq I(W + \lambda X, W + \lambda X) = 2\lambda I(W, X) + \lambda^2 I(X, X),$$

e como isto vale para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se $I(W, X) = 0$. Mas então W deve ser campo de Jacobi, uma contradição com a não existência de pontos conjugados ao longo de γ . □

O corolário acima destaca a importância da seguinte definição. Dada uma geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ e forma do índice I associada, o índice ind γ da geodésica é a maior dimensão de um subespaço de campos suaves por partes sobre γ em que I é definida negativa. No entanto, não é imediato que, por exemplo, ind $\gamma < +\infty$; informações mais precisas, relacionando o índice de γ com a multiplicidade de valores conjugados, é dada pelo Teorema do Índice de Morse:

Teorema 4.2.10 (Índice de Morse). *Dada geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, o índice de γ é a quantidade de valores conjugados com a em (a, b) , contados com multiplicidade.*

Uma consequência interessante do teorema de Jacobi-Darboux é a a seguinte relação com cut locus, deduzida ao observar que pontos conjugados não podem ocorrer anteriores à cut-distance a partir de um ponto:

Corolário 4.2.11. *Seja M variedade riemanniana completa. Então para todo $p \in M$, o mapa exponencial $\exp_p : D_p \rightarrow M \setminus \text{Cut}(p)$ é difeomorfismo.*

Demonstração. Como valores conjugados não podem ocorrer antes da cut-distance $\rho(v)$, temos que $\exp_p : D_p \rightarrow M \setminus \text{Cut}(p)$ é difeomorfismo local injetor, e portanto difeomorfismo. □

4.3 Alguns Cálculos de Volumes

É possível utilizar campos de Jacobi para calcular volumes em certas variedades riemannianas completas orientáveis, a partir do Corolário 4.2.11.

Lema 4.3.1. *O cut locus $\text{Cut}(p)$ tem medida nula.*

Demonação. Em $T_p M$, cada raio saindo da origem intersecta $C_p = \exp_p^{-1}(\text{Cut}(p))$ em no máximo um ponto, de modo que, vendo em coordenadas polares, C_p tem medida nula, e consequentemente $\text{Cut}(p)$ também. \square

Com vol_M indicando o elemento de volume riemanniano em M , temos então que

$$\text{vol}(M) = \int_M \text{vol}_M = \int_{M \setminus \text{Cut}(p)} \exp_p^* \text{vol}_M.$$

Para calcular o pullback de vol_M pelo mapa exponencial, consideramos geodésica $\gamma(t) = \exp(tv)$ com $v \in T_p M$ e $\|v\| = 1$, e completamos a base ortonormal $(v = e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $T_p M$. Consideramos os campos de Jacobi Y_1, \dots, Y_n ao longo de γ tais que $Y_i(0) = 0$ e $Y'_i(0) = e_i$, assim, para $t \neq 0$,

$$d(\exp_p)_{tv}(v) = \dot{\gamma}(t), \quad \text{e} \quad d(\exp_p)_{tv}(e_i) = \frac{1}{t} Y_i(t), \quad i = 2, \dots, n.$$

Sabemos que, pela lema global de Gauss,

$$g_{\gamma(t)}(d(\exp_p)_{tv}(v), d(\exp_p)_{tv}(e_i)) = g_p(v, e_i),$$

e com as identificações usuais $T_{tv} T_p M \cong T_p M$, tem-se

$$\begin{aligned} (\exp_p^* \text{vol}_M)_{tv}(e_1, \dots, e_n) &= (\text{vol}_M)_{\gamma(t)}(d(\exp_p)_{tv}(e_1), \dots, d(\exp_p)_{tv}(e_n)) \\ &= \sqrt{\det(g(d(\exp_p)_{tv}(e_i), d(\exp_p)_{tv}(e_j)))} \\ &= t^{-(n-1)} \sqrt{\det(g_{\gamma(t)}(Y_i(t), Y_j(t)))}. \end{aligned}$$

Definindo $J(v, t) := t^{1-n} \sqrt{\det(g_{\gamma(t)}(Y_i(t), Y_j(t)))}$, concluímos que

$$\exp_p^* \text{vol}_M = J(v, t) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = J(v, t) t^{n-1} dt dv,$$

com dv a medida canônica na esfera unitária de $(T_p M, g_p)$. Deste modo, $J(v, t)$ independe da escolha de completamento de base e_2, \dots, e_n , e

$$\text{vol}(M, g) = \int_{S^{n-1}} \int_0^{\rho(v)} J(v, t) t^{n-1} dt dv.$$

4.3.1 O Volume de \mathbb{S}^n e \mathbb{H}^n

Na esfera \mathbb{S}^n , se $E_i(t)$ são campos paralelos à geodésica γ com $E_i(0) = e_i$, temos os campos de Jacobi dados explicitamente por $Y_i(t) = \sin t E_i(t)$. Assim, para $n \geq 2$,

$$\text{vol}(\mathbb{S}^n) = \int_{S^{n-1}} \int_0^\pi \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{n-1} t^{n-1} dt dv = \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^\pi (\sin t)^{n-1} dt.$$

Por meio de integração por partes e sabendo que $\text{vol}(\mathbb{S}^1) = 2\pi$, $\text{vol}(\mathbb{S}^2) = 4\pi$, obtemos as fórmulas

$$\text{vol}(\mathbb{S}^{2n}) = \frac{(4\pi)^n (n-1)!}{(2n-1)!}, \quad \text{vol}(\mathbb{S}^{2n+1}) = 2 \frac{\pi^{n+1}}{n!}.$$

Para o espaço hiperbólico \mathbb{H}^n , podemos calcular o volume de bolas riemannianas de um dado raio $R > 0$, lembrando que \exp_p será em verdade um difeomorfismo global. Com os campos de Jacobi dados por $(\operatorname{senh} t)E_i(t)$ para campos paralelos ortonormais $E_i(t)$ ao longo de uma geodésica γ , similarmente obtemos

$$\operatorname{vol}(B_R(p)) = \operatorname{vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^R (\operatorname{senh} t)^{n-1} dt \sim e^{(n-1)R}.$$

4.3.2 O Volume de Bolas Pequenas

Numa variedade riemanniana orientada (M, g) , com $p \in M$ e $\dim M = n$, temos, para $r > 0$ suficientemente pequeno, que

$$\operatorname{vol}(B_r(p)) = \int_{S^{n-1}} \int_0^r J(v, t) t^{n-1} dt dv,$$

conforme visto acima, em que $J(v, t) = t^{1-n} \sqrt{\det(g(Y_i(t), Y_j(t)))}$. Consideramos agora séries de Taylor com respeito aos campos ao longo de γ , em que, para os campos de Jacobi $Y_i(t)$ com $Y_i(0) = 0$, $Y'_i(0) = e_i$, $-Y''_i + R(\dot{\gamma}, Y_i)\dot{\gamma} = 0$ e $Y''_i(0) = 0$, tem-se

$$Y'''_i(0) = \nabla_v R(v, 0)v + R(v, Y'_i(0))v = R(v, e_i)v.$$

Deste modo,

$$Y_i(t) = tE_i(t) + \frac{t^3}{6}R(\dot{\gamma}, E_i)\dot{\gamma} + o(t^3),$$

onde $o(t^3)$ indica termos infinitesimais a t^3 , e

$$g(Y_i(t), Y_j(t)) = t^2\delta_{ij} + \frac{t^4}{3}\langle R(\dot{\gamma}, E_i)\dot{\gamma}, E_j \rangle + o(t^4).$$

Calculando o determinante, temos

$$\begin{aligned} \det(g(Y_i(t), Y_j(t))) &= t^{2n-2} \left(1 + \frac{t^2}{3} \sum_{i=1}^n \langle R(\dot{\gamma}, E_i)\dot{\gamma}, E_i \rangle + o(t^4)\right) = t^{2n-2} \left(1 - \operatorname{Ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \frac{t^2}{3} + o(t^4)\right) \\ \implies J(v, t) &= \sqrt{1 - \operatorname{Ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \frac{t^2}{3} + o(t^4)} = 1 - \operatorname{Ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \frac{t^2}{6} + o(t^2), \end{aligned}$$

e como consequência da Proposição 3.1.6, obtemos as expansões

$$\begin{aligned} (\exp_p^* \operatorname{vol}_M)_v &= \left(1 - \frac{1}{6} \operatorname{Ric}(v, v) + o(|v|^2)\right) \operatorname{vol}_{Euc}, \\ \operatorname{vol}(B_r(p)) &= r^n \operatorname{vol}(B(1)) \left(1 - \frac{S(p)}{6(n+2)} r^2 + o(r^2)\right), \end{aligned}$$

onde vol_{Euc} denota o elemento de volume euclidiano, e $B(1)$ a bola unitária euclidiana em \mathbb{R}^n .

4.4 Afastamento de Geodésicas

Esta seção é largamente baseada em [Mey89]. Sejam $p \in M$ e U vizinhança ε -totalmente normal de p , u, v vetores em $T_p M$ com geodésicas correspondentes $\gamma(t) = \exp_p(tu)$ e $\eta(t) = \exp_p(tv)$, de domínio comum $[-\delta, \delta]$ tal que $\gamma(t), \eta(t) \in U$ para todo t no domínio.

Queremos entender como se dá o afastamento das geodésicas γ e η , calculando os termos da expansão em série de potências de $d(\gamma(t), \eta(t))$. Trabalhamos inicialmente com $d(\gamma(t), \eta(t))^2$.

Lembramos que, por U ser vizinhança ε -totalmente normal, para cada $x, y \in T_p M$, existe único $v \in T_p M$ com $\|v\| < \varepsilon$ com $\exp_x v = y$, e a função

$$\begin{aligned}\psi : U \times U \times [0, 1] &\longrightarrow M \\ (x, y, s) &\longmapsto \exp_x(s \exp_x^{-1}(y))\end{aligned}$$

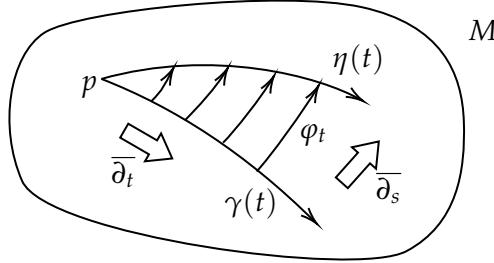
é suave. Consideramos então $H : [0, 1] \times [-\delta, \delta] \rightarrow M$ dada por

$$H(s, t) = \psi(\gamma(t), \eta(t), s).$$

Assim, para cada t , temos que $\varphi_t = H(\cdot, t)$ é a única geodésica de comprimento $< \varepsilon$ ligando $\gamma(t)$ a $\eta(t)$, de modo que

$$f(t) = d(\gamma(t), \eta(t))^2 = L(\varphi_t)^2 = 2E(\varphi_t) = \int_0^1 \langle \dot{\varphi}_t, \dot{\varphi}_t \rangle ds = \langle \dot{\varphi}_t(0), \dot{\varphi}_t(0) \rangle,$$

por φ_t ser parametrizada com velocidade constante.



Relembrando a notação utilizada, $\bar{\partial}_s = dH(\frac{\partial}{\partial s})$ denota o campo ao longo de H dado pelo parâmetro ∂_s , e similarmente $\bar{\partial}_t = dH(\frac{\partial}{\partial t})$. Temos que $\bar{\nabla}_{\bar{\partial}_s} \bar{\partial}_t = \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_s$, e $\bar{\partial}_s|_t = \dot{\varphi}_t$, com velocidade constante já que as curvas $\varphi_t = H(\cdot, t)$ são geodésicas, e em particular $\varphi_0 \equiv p$ é curva constante, $\bar{\partial}_s|_{t=0} = 0$. Ainda, $\bar{\partial}_t|_{s=0} = \dot{\gamma}$ e $\bar{\partial}_t|_{s=1} = \dot{\eta}$. Para cada geodésica φ_t ligando $\gamma(t)$ a $\eta(t)$, o campo ao longo de φ_t dado por $\bar{\partial}_t|_t$ é campo de Jacobi, já que a variação correspondente é exatamente H , dada por geodésicas. Então temos adicionalmente

$$\bar{\nabla}_{\bar{\partial}_s} \bar{\partial}_s = 0, \quad \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_s}^2 \bar{\partial}_t = R(\bar{\partial}_s, \bar{\partial}_t) \bar{\partial}_s.$$

Desta maneira, as derivadas de f são dadas por

$$\begin{aligned}f(t) &= \langle \dot{\varphi}_t, \dot{\varphi}_t \rangle = \langle \bar{\partial}_s, \bar{\partial}_s \rangle|_{s,t} \\ f'(t) &= 2\langle \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t} \bar{\partial}_s, \bar{\partial}_s \rangle|_{s,t} \\ f''(t) &= 2\langle \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t}^2 \bar{\partial}_s, \bar{\partial}_s \rangle|_{s,t} + 2\langle \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_s} \bar{\partial}_t, \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t} \bar{\partial}_s \rangle|_{s,t} \\ f'''(t) &= 2\langle \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t}^3 \bar{\partial}_s, \bar{\partial}_s \rangle|_{s,t} + 6\langle \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t}^2 \bar{\partial}_s, \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t} \bar{\partial}_s \rangle|_{s,t} \\ f^{(4)}(t) &= 2\langle \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t}^4 \bar{\partial}_s, \bar{\partial}_s \rangle|_{s,t} + 8\langle \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t}^3 \bar{\partial}_s, \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t} \bar{\partial}_s \rangle|_{s,t} + 6\langle \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t}^2 \bar{\partial}_s, \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t}^2 \bar{\partial}_s \rangle|_{s,t}\end{aligned}$$

Em geral, teremos, para $k \geq 0$,

$$f^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^k \langle \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t}^{k-i} \bar{\partial}_s, \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t}^i \bar{\partial}_s \rangle|_{s,t}.$$

Queremos avaliar tais derivadas em $t = 0$. Sabemos imediatamente que $f(0) = 0$ e

$$f'(0) = 2\langle \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t} \bar{\partial}_s, \bar{\partial}_s \rangle|_{s,0} = 0.$$

Temos agora que

$$f''(0) = 2\langle \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_s, \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_s \rangle|_{s,0} = 2\langle \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\partial}_t, \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\partial}_t \rangle|_{s,0} = 2\|Y'\|^2,$$

onde Y é o campo de Jacobi ao longo de $\varphi \equiv p$. Temos que $Y(0) = u$ e $Y(1) = v$, e também

$$Y'' = R(\bar{\partial}_s, Y)\bar{\partial}_s|_{t=0} = 0,$$

de modo que Y' é campo paralelo. Mas como Y está totalmente contido em $T_p M$, isto implica que Y' é constante e Y é linear, ou seja, $Y(s) = u + t(v - u)$. Assim $Y'(s) = v - u$, e

$$f''(0) = 2\|v - u\|^2.$$

Para $f'''(0)$, vê-se que, como $\bar{\partial}_t|_{s=0} = \dot{\gamma}$ e $\bar{\partial}_t|_{s=1} = \dot{\eta}$ são geodésicas, obtemos que

$$\bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_t|_{s=0} = 0, \quad \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_t|_{s=1} = 0.$$

Afirma-se que o campo $W = \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_t|_{t=0}$ é tal que $W' = \bar{\nabla}_{\partial_s} W$ é paralelo ao longo da curva constante $\varphi_0 \equiv p$, e portanto existe f linear de coeficiente angular igual a 1 tal que $W = fW'$. Mas como W se anula em dois pontos, deve-se ter $W = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\partial_s} W' &= \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_t \\ &= \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\partial}_t + \nabla_{\partial_s} (R(\bar{\partial}_s, \bar{\partial}_t) \bar{\partial}_t) \\ &= \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\nabla}_{\partial_s}^2 \bar{\partial}_t + R(\bar{\partial}_s, \bar{\partial}_t) \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\partial}_t + \nabla_{\partial_s} (R(\bar{\partial}_s, \bar{\partial}_t) \bar{\partial}_t) \\ &= \bar{\nabla}_{\partial_t} (R(\bar{\partial}_s, \bar{\partial}_t) \bar{\partial}_s) + R(\bar{\partial}_s, \bar{\partial}_t) \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\partial}_t + \nabla_{\partial_s} (R(\bar{\partial}_s, \bar{\partial}_t) \bar{\partial}_t) \end{aligned}$$

e, seguindo com a derivada covariante de tensores e com $\bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\partial}_s = 0$ e $\bar{\partial}_s|_{t=0} = 0$, a equação se anula. Isto conclui com o raciocínio acima que $W = \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_t|_{t=0} = 0$. Mais ainda, $W' = \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_t|_{t=0} = 0$, e

$$\bar{\nabla}_{\partial_t}^2 \bar{\partial}_s = \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\partial}_t = \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_t + R(\bar{\partial}_t, \bar{\partial}_s) \bar{\partial}_t,$$

de modo que $\bar{\nabla}_{\partial_t}^2 \bar{\partial}_s|_{t=0} = 0$. É imediato ver então que $f'''(0) = 0$.

Para $f^{(4)}(0)$, vemos que é suficiente considerar o termo

$$8\langle \bar{\nabla}_{\partial_t}^3 \bar{\partial}_s, \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_s \rangle|_{t=0}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\partial_t}^3 \bar{\partial}_s|_{t=0} &= \bar{\nabla}_{\partial_t}^2 \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\partial}_t|_{t=0} = \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_t|_{t=0} + \bar{\nabla}_{\partial_t} (R(\bar{\partial}_t, \bar{\partial}_s) \bar{\partial}_t)|_{t=0} \\ &= \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_t|_{t=0} + R(\bar{\partial}_t, \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_s) \bar{\partial}_t|_{t=0}, \end{aligned}$$

já que os outros termos se anulariam em $t = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} f^{(4)}(0) &= 8\langle \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_t, \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_s \rangle|_{t=0} + R(\bar{\partial}_t, \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_s) \bar{\partial}_t, \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\partial}_t \rangle|_{t=0} \\ &= 8\langle \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_t, \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\partial}_t \rangle|_{t=0} + 8\langle R(u, v - u)u, v - u \rangle \\ &= 8\langle \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_t, \bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\partial}_t \rangle|_{t=0} + 8\langle R(u, v)u, v \rangle. \end{aligned}$$

O primeiro termo deve ser constante em t , e ele será igual a

$$8\bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\nabla}_{\partial_s} \langle \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_t, \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_s \rangle|_{t=0} = 8\bar{\nabla}_{\partial_s} \bar{\nabla}_{\partial_t} \langle \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_t, \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_s \rangle|_{t=0},$$

e portanto $\bar{\nabla}_{\partial_t} \langle \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_t, \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_s \rangle|_{t=0}$ deve ser linear em s . Mas

$$\bar{\nabla}_{\partial_t} \langle \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_t, \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_s \rangle|_{t=0} = \langle \bar{\nabla}_{\partial_t}^2 \bar{\partial}_t, \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_s \rangle|_{t=0} + \langle \bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\partial}_t, \bar{\nabla}_{\partial_t}^2 \bar{\partial}_s \rangle|_{t=0},$$

e avaliando em $s = 0$ e $s = 1$, se anulará, portanto é nulo. Isto conclui que

$$d(\gamma(t), \eta(t))^2 = \|v - u\|^2 t^2 + \frac{1}{3} \langle R(u, v)u, v \rangle t^4 + O(t^5)$$

e então

$$d(\gamma(t), \eta(t)) = \|v - u\| t + \frac{\langle R(u, v)u, v \rangle}{6\|v - u\|} t^3 + O(t^4).$$

Uma consequência importante da expansão acima é o seguinte resultado, conhecido como o primeiro teorema de Myers-Steenrod:

Teorema 4.4.1. *Sejam M, N variedades riemannianas com distâncias d_M e d_N respectivamente. Se $f : M \rightarrow N$ é mapa que preserva distâncias, ou seja, para $x, y \in M$ tem-se*

$$d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y),$$

então f é isometria local, e em particular suave. Se f for sobrejetora, então é uma isometria.

Demonstração. Por f preservar distâncias, é injetora e contínua. Com $p \in M$, considera-se vizinhança ε -normal U de p e ε' -normal V de $q = f(p)$ tais que $f(U) \subseteq V$ e $\varepsilon < \varepsilon'$. Define-se então um mapa contínuo $T = \exp_q^{-1} \circ f \circ \exp_p : B(0_p, \varepsilon) \rightarrow T_q M$, onde sabemos que $\|T(v)\| = \|v\|$ por preservar distâncias na vizinhança. Queremos mostrar que T é suave.

Afirma-se que $T(tv) = tT(v)$ para $\|v\| < \varepsilon$ e $t \in (0, 1]$; de fato, isto equivale a dizer que $f(\exp_p(tv)) = \exp_q(t(T(v)))$. Com $r = \|v\|$, $w = T(v)$ e para $t_0 \in [0, 1]$, $f(\exp_p(t_0v))$ deve ter distância $t_0r < \varepsilon$ de $f(p)$ e $(1 - t_0)r$ de distância de $\exp_{f(p)}(w)$. Se $f(\exp_p(t_0v))$ não está na geodésica $\exp_{f(p)}(tw)$, há única geodésica minimizante $\eta(t)$ ligando $f(p)$ a $f(\exp_p(t_0v))$, de comprimento t_0r , e igualmente outra $\nu(t)$ entre $f(\exp_p(t_0v))$ e $\exp_{f(p)}(w)$, de comprimento $(1 - t_0)r$. Mas concatenando tais curvas, obteríamos uma curva suave minimizante de comprimento r , e deve então ser reparametrização da própria $\exp_{f(p)}(tw)$. Isto conclui que $f(\exp_p(t_0v))$ está realmente na geodésica, e o único ponto nela a distância t_0r de p é $\exp_{f(p)}(t_0w)$.

Se $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ e $\eta(t) = \exp_p(tu)$ são duas geodésicas passando por p com $\|v\|, \|u\| < \varepsilon$, então $f \circ \gamma(t) = \exp_q(tT(v))$ e $f \circ \eta(t) = \exp_q(tT(u))$, de modo que

$$d(\gamma(t), \eta(t)) = d(f \circ \gamma(t), f \circ \eta(t)) = \|T(v) - T(u)\|t + O(t^2),$$

e pela expansão obtida, temos que $\|T(v) - T(u)\| = \|v - u\|$. Assim, T deve levar o ponto médio $\frac{1}{2}(u + v)$ de u e v no ponto médio de $T(u)$ e $T(v)$ para preservar distâncias, e pela homogeneidade, $T(u + v) = T(u) + T(v)$. Sendo linear em vizinhança da origem, é suave, e portanto f é suave, com diferencial $df_p = T$ sendo isometria na imagem. As outras conclusões seguem naturalmente. \square

4.5 Expansão da Métrica

Com M variedade riemanniana, $p \in M$, $v \in T_p M$ vetor tangente unitário, e U vizinhança ε -normal de p , sendo carta local pelo mapa exponencial, estudam-se também os coeficientes da série de Taylor de $g_{ij}(\exp_p(tv))$, descrevendo a evolução da métrica localmente na direção de v .

Com $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ geodésica e $f(t) = g_{ij}(\gamma(t))$, encontraremos os valores $f(0), f'(0), f''(0)$ e $f'''(0)$. Com respeito a coordenadas geodésicas em p , temos que $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ e $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$, e também

$$g_{ij,k}(p) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(p) = 0.$$

Inicialmente temos que $f(0) = \delta_{ij}$ e

$$f'(0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(\gamma(0))(\gamma^k)'(0) = 0.$$

Considerando os campos $X = \partial_i \circ \gamma$ e $Y = \partial_j \circ \gamma$ ao longo de γ , de modo que $f(t) = \langle X(t), Y(t) \rangle$, $X(0) = e_i$ e $Y(0) = e_j$, tem-se

$$\frac{\nabla}{dt} X(0) = (\nabla_{\dot{\gamma}} \partial_i)_p = \nabla_v \partial_i = v^\alpha \nabla_{e_\alpha} \partial_i = v^\alpha \Gamma_{\alpha i}^\beta(p) \partial_\beta = 0,$$

e analogamente $\frac{\nabla}{dt} Y(0) = 0$. Assim, $f'(t) = \langle X', Y \rangle + \langle X, Y' \rangle = 0$. Para a segunda derivada,

$$f''(t) = \langle X'', Y \rangle + 2\langle X', Y' \rangle + \langle X, Y'' \rangle,$$

em que calculamos $\langle X'', Y \rangle$ em $t = 0$. Vê-se que

$$X(t) = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\gamma(t)} = d(\exp_p)_{tv} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{tv} \right) = d(\exp_p)_{tv}(e_i),$$

de modo que $Z(t) = tX(t)$ é o campo de Jacobi ao longo de γ tal que $Z(0) = 0$ e $Z'(0) = e_i$. Assim $Z' = X + tX'$, e

$$tR(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma} = R(\dot{\gamma}, Z)\dot{\gamma} = Z'' = 2X' + tX'' \implies X'' = R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma} - \frac{2}{t}X',$$

para $t > 0$. Em particular, $\langle X'', Y \rangle = \langle R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma}, Y \rangle - \frac{2}{t}\langle X', Y \rangle$, onde o último termo deve ter limite bem definido com $t \rightarrow 0$.

Calculando-o por L'Hôpital, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2\langle X', Y \rangle}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2\langle X'', Y \rangle - 2\langle X', Y' \rangle}{1} = -2\langle X'', Y \rangle|_0,$$

e então

$$\langle X'', Y \rangle|_0 = \langle R(v, e_i)v, e_j \rangle - 2\langle X'', Y \rangle|_0 \implies \langle X'', Y \rangle|_0 = \frac{1}{3}\langle R(v, e_i)v, e_j \rangle.$$

Isto permite concluir que

$$f''(0) = \frac{1}{3}\langle R(v, e_i)v, e_j \rangle + \frac{1}{3}\langle R(v, e_j)v, e_i \rangle = \frac{2}{3}\langle R(v, e_i)v, e_j \rangle.$$

Para calcular $f^{(3)}(0)$, é suficiente calcular $\langle X''' \rangle$ em $t = 0$. Com $Z = tX$ campo de Jacobi, e portanto $Z'' = R(\dot{\gamma}, Z)\dot{\gamma}$, temos que $Z''' = 3X'' + tX'''$ e

$$Z''' = \nabla_{\dot{\gamma}} R(\dot{\gamma}, Z)\dot{\gamma} + R(\dot{\gamma}, Z')\dot{\gamma},$$

e então

$$\begin{aligned} tX''' &= t\nabla_{\dot{\gamma}} R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma} + R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma} + tR(\dot{\gamma}, X')\dot{\gamma} - 3X'' \implies \\ X''' &= \nabla_{\dot{\gamma}} R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma} + R(\dot{\gamma}, X')\dot{\gamma} + \frac{1}{t}R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma} - \frac{3}{t}X'', \end{aligned}$$

para $t > 0$. Lembrando que como X'' e X''' tem valores bem definidos em $t = 0$, os termos $-\frac{2}{t}X'$ e $\frac{1}{t}R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma} - \frac{3}{t}X''$ tem limites bem definidos em $t = 0$. Com isso,

$$\begin{aligned} \langle X''' \rangle &= \langle \nabla_{\dot{\gamma}} R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma} + R(\dot{\gamma}, X')\dot{\gamma} + \frac{1}{t}R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma} - \frac{3}{t}X'', Y \rangle \\ &= \langle \nabla_{\dot{\gamma}} R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma} + R(\dot{\gamma}, X')\dot{\gamma}, Y \rangle + \frac{1}{t}\langle R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma}, Y \rangle - \frac{3}{t}\langle X'', Y \rangle, \end{aligned}$$

e calculamos o limite dos dois últimos termos por L'Hôpital:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma}, Y \rangle - 3\langle X'', Y \rangle}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle \nabla_{\dot{\gamma}} R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma} + R(\dot{\gamma}, X')\dot{\gamma}, Y \rangle + \langle R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma}, Y' \rangle - 3\langle X''', Y \rangle - 3\langle X'', Y' \rangle}{1} \\ &= \langle \nabla_v R(v, e_i)v, e_j \rangle - 3\langle X''', Y \rangle|_0. \end{aligned}$$

Isto permite concluir que

$$\begin{aligned} \langle X''', Y \rangle|_0 &= \langle \nabla_v R(v, e_i)v, e_j \rangle + \langle \nabla_v R(v, e_i)v, e_j \rangle - 3\langle X''', Y \rangle|_0 \\ \implies \langle X''', Y \rangle|_0 &= \frac{1}{2}\langle \nabla_v R(v, e_i)v, e_j \rangle \end{aligned}$$

e desta maneira

$$f^{(3)}(0) = \frac{1}{2}\langle \nabla_v R(v, e_i)v, e_j \rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla_v R(v, e_j)v, e_i \rangle = \langle \nabla_v R(v, e_i)v, e_j \rangle,$$

com a simetria $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$ do tensor de curvatura preservada pela derivada covariante. Por fim, obtemos a expansão em série de Taylor

$$g_{ij}(\exp_p(tv)) = \delta_{ij} + \frac{1}{3}\langle R(v, e_i)v, e_j \rangle t^2 + \frac{1}{6}\langle \nabla_v R(v, e_i)v, e_j \rangle t^3 + O(t^4).$$

4.6 Exemplos

Em variedades flat, como $R \equiv 0$, a equação de Jacobi é $X'' = 0$, e portanto todo campo de Jacobi ao longo de uma geodésica é da forma

$$X(s) = sE_1(s) + E_2(s),$$

onde E_1, E_2 são campos paralelos arbitrários ao longo de γ . Em \mathbb{R}^n , temos explicitamente os campos da forma $X(s) = u + sv$ para $u, v \in \mathbb{R}^n$; é evidente ver que em variedades flat não há pontos conjugados, dado que se o campo se anula em dois pontos, ele será identicamente nulo.

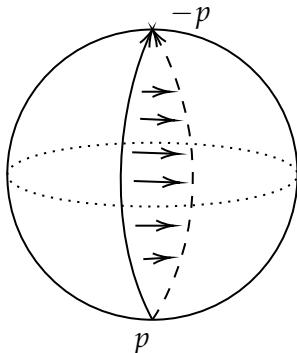
Mais geralmente, para variedades de curvatura seccional constante igual a κ , a equação de Jacobi ao longo de uma geodésica unitária se torna

$$-X'' - \kappa X + \kappa \langle X, \dot{\gamma} \rangle \dot{\gamma} = 0,$$

e se nos restringirmos apenas a campos de Jacobi ortogonais a $\dot{\gamma}$, temos mais simplesmente

$$X'' + \kappa X = 0.$$

Em particular, em \mathbb{S}^n , os campos de Jacobi ortogonais à geodésica serão da forma $Y(s) = (\cos s)E_1(s) + (\sin s)E_2(s)$ para campos paralelos E_1, E_2 ortogonais a $\dot{\gamma}$, e se $Y(0) = 0$, temos $E_1(0) = 0$. Assim, os valores conjugados serão $s = k\pi$, para $k \in \mathbb{N}^*$. O primeiro ponto conjugado a $p \in \mathbb{S}^n$ será $-p$, coincidindo com o cut locus, e ele terá multiplicidade $n - 1$ como valor conjugado, já que $Y'(0)$ pode ser qualquer vetor ortogonal a $\dot{\gamma}$.



Em \mathbb{RP}^n , as informações de curvatura são iguais às de \mathbb{S}^n , de modo que o primeiro ponto conjugado a uma geodésica ocorrerá em $s = \pi$, mesmo que o cut locus ocorra em $s = \pi/2$. Isto mostra a distinção entre o cut locus, expressando uma informação da geometria global da variedade por meio de todas as geodésicas emanando do ponto, e pontos conjugados, relacionados a variações infinitesimais destas geodésicas. Numa intuição básica, isto ocorre em \mathbb{RP}^n pois o cut locus é atingido por outra geodésica emanando do ponto “dando a volta” pela variedade, sem que pequenas variações possam corresponder a essa volta.

Em \mathbb{H}^n , os campos de Jacobi ortogonais a $\dot{\gamma}$ serão da forma

$$X(s) = (\cosh s)E_1(s) + (\operatorname{senh} s)E_2(s)$$

onde $E_1(s)$ e $E_2(s)$ são campos paralelos perpendiculares a $\dot{\gamma}$. Se $X(0) = 0$, então $E_1(0) = 0$, e verifica-se que se $X \neq 0$, não haverá pontos conjugados ao longo da geodésica. Como consequência do teorema de Jacobi-Darboux, toda geodésica é mínimo local da energia em uma vizinhança na topologia C^0 . Veremos no próximo capítulo que isto é um fenômeno que ocorre mais geralmente em espaços de curvatura não-positiva.

Capítulo 5

Teoremas e Aplicações

“The metric relations of these [constant curvature] manifolds depend only on the value of curvature, and it may be mentioned, as regards to the analytic presentation, that if one denotes this value by α , then the expression of the line element can be put in the form

$$\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4} \sum x^2} \sqrt{\sum dx^2}.$$

B. Riemann [[Spi99](#), vol. II, p. 159]

Munidos das ferramentas desenvolvidas até então, com destaque aos campos de Jacobi, podemos retraçar teoremas clássicos da geometria riemanniana. Em geral, descrevem de diversas formas como hipóteses sobre a curvatura, geometria e topologia da variedade M se relacionam e determinam umas as outras.

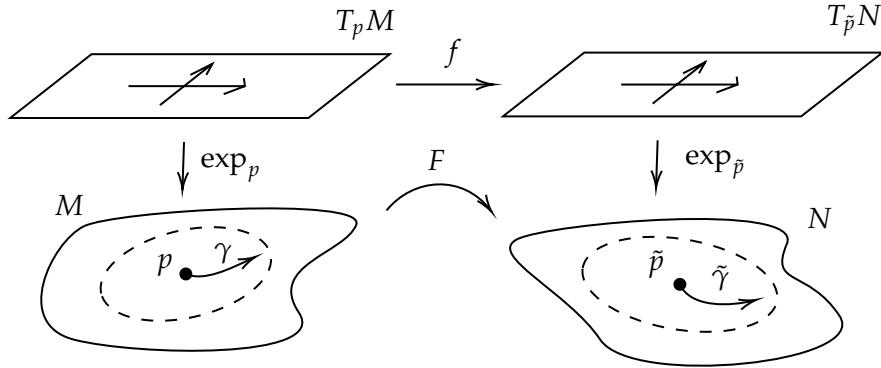
5.1 Curvatura Constante

A partir do princípio que o tensor riemanniano de curvatura é o principal invariante local de uma variedade riemanniana, imagina-se que as variedades riemannianas mais simples de serem estudadas são aquelas que apresentam curvatura seccional constante. Uma *forma espacial* é uma variedade riemanniana (M, g) completa e de curvatura (seccional) constante. Seu recobrimento universal \tilde{M} será também forma espacial, e $M \cong \tilde{M}/\Gamma$ como quociente por ação livre e propriamente descontínua. Para entender e classificar as formas espaciais, começamos então por aquelas que são simplesmente conexas.

O seguinte resultado sintetiza e generaliza num contexto maior, e com a linguagem desenvolvida até o momento, o problema de encontrar quando uma dada variedade riemanniana é localmente flat, que originou conceitualmente o tensor de curvatura riemanniano.

Teorema 5.1.1. *Quaisquer duas variedades riemannianas de curvatura seccional constante κ de mesma dimensão são localmente isométricas.*

Demonstração. Sendo M, N variedades riemannianas como no enunciado, com $p \in M$ e $\tilde{p} \in N$, consideram-se vizinhanças normais V e \tilde{V} de p e \tilde{p} , respectivamente, de modo que $\exp_p : U \subseteq T_p M \rightarrow V$ e $\exp_{\tilde{p}} : \tilde{U} \subseteq T_{\tilde{p}} N \rightarrow \tilde{V}$ são difeomorfismos. Tomando uma isometria linear qualquer $f : (T_p M, g_p) \rightarrow (T_{\tilde{p}} N, \tilde{g}_{\tilde{p}})$, podemos assumir que $f(U) = \tilde{U}$, obtendo difeomorfismo $F = \exp_{\tilde{p}} \circ f \circ \exp_p^{-1} : V \rightarrow \tilde{V}$ tal que $dF_p = f$.



Mostremos que F é isometria. Tomando $q \in V$ com $F(q) = \tilde{q}$, em que $q = \gamma_v(t)$ para algum $v \in T_p M$ unitário, decomponemos o espaço tangente $T_q M$ na soma direta $\mathbb{R}\dot{\gamma}_v(t) \oplus W$, sendo W o complemento ortogonal a $\dot{\gamma}_v$. Similarmente, com $\tilde{v} = f(v)$, temos que

$$F(q) = (F \circ \exp_p)(tv) = (\exp_{\tilde{p}} \circ f)(tv) = \exp_{\tilde{p}}(tf(v)) = \exp_{\tilde{p}}(t\tilde{v}) = \gamma_{\tilde{v}}(t),$$

preservando geodésicas emanando de p , e obtendo a decomposição ortogonal $T_{\tilde{q}} N = \mathbb{R}\dot{\gamma}_{\tilde{v}}(t) \oplus \tilde{W}$. Pelo lema global de Gauss, $d(\exp_p)_{tv} : T_{tv} T_p M \cong T_p M \rightarrow T_q M$ leva a decomposição ortogonal $T_p M = \mathbb{R}v \oplus (\mathbb{R}v)^\perp$ em $\mathbb{R}\dot{\gamma}_v(t) \oplus W$, e igualmente para $d(\exp_{\tilde{p}})_{t\tilde{v}}$. É suficiente então verificar que $dF_q : W \rightarrow \tilde{W}$ é isometria. Se $x \in T_p M$ é ortogonal a v e $\tilde{x} = f(x)$, estendemos tais vetores a campos paralelos X e \tilde{X} ao longo das geodésicas γ_v e $\gamma_{\tilde{v}}$; tomam-se os campos de Jacobi Y e \tilde{Y} com $Y(0) = \tilde{Y}(0) = 0$ e $Y'(0) = x$, $\tilde{Y}'(0) = \tilde{x}$, e explicitamente

$$Y(t) = d(\exp_p)_{tv}(tx), \quad \tilde{Y}(t) = d(\exp_{\tilde{p}})_{t\tilde{v}}(t\tilde{x}).$$

Se a curvatura seccional de M e N é κ , os campos satisfazem as equações $Y'' + \kappa Y = 0$ e $\tilde{Y}'' + \kappa \tilde{Y} = 0$, com

$$Y(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\kappa}t)}{\sqrt{\kappa}} X(t), & \text{se } \kappa > 0; \\ \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{-\kappa}t)}{\sqrt{-\kappa}} X(t), & \text{se } \kappa < 0; \\ tX(t), & \text{se } \kappa = 0, \end{cases}$$

e analogamente para \tilde{Y} e \tilde{X} , em que $\|Y(t)\| = \|\tilde{Y}(t)\|$. Como

$$dF_q(Y(t)) = dF_q(d(\exp_p)_{tv}(tx)) = d(\exp_{\tilde{p}})_{t\tilde{v}}(tf(x)) = \tilde{Y}(t),$$

e o vetor $Y(t) \in W \subseteq T_q M$ pode ser tomado arbitrariamente em W , temos que $dF_q : W \rightarrow \tilde{W}$ será realmente isometria. \square

Na demonstração acima, nota-se em particular que se $\kappa = 0$, tomado $N = T_p M$ como variedade riemanniana flat e $f = \operatorname{Id}_{T_p M}$, como o mapa exponencial em $T_p M$ será a identidade, obtemos que $\exp_p : U \subseteq T_p M \rightarrow V \subseteq M$ é isometria. Se adicionalmente M é completa, temos que $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é isometria local.

Numa forma espacial M , sempre podemos normalizar a métrica para que a curvatura seccional seja igual a 1, 0 ou -1 , dependendo somente do sinal. Com isto, temos o seguinte resultado de classificação:

Teorema 5.1.2 (Killing-Hopf). *Seja M forma espacial simplesmente conexa de curvatura constante κ e dimensão $n > 1$. Então M é isométrica a:*

- o espaço euclidiano \mathbb{R}^n , se $\kappa = 0$;*

- b. a esfera unitária S^n , se $\kappa = 1$;
- c. o espaço hiperbólico \mathbb{H}^n , se $\kappa = -1$.

A ideia da demonstração segue tomando, no teorema anterior, $M = \mathbb{R}^n, S^n$ ou \mathbb{H}^n , com a isometria se estendendo para $F : M \rightarrow N$ ao utilizar considerações de recobrimentos riemannianos por variedades completas, e, no caso de S^n , fazendo a colagem de duas isometrias.

Para estudar formas espaciais não-simplesmente conexas, basta então estudar as ações livres e propriamente descontínuas em \mathbb{R}^n, S^n e \mathbb{H}^n . Um primeiro resultado nesta linha é o seguinte:

Teorema 5.1.3 (Bieberbach). *Uma variedade riemanniana compacta flat é finitamente recoberta por um toro \mathbb{R}^n/Γ .*

É possível obter mais informações no caso de formas espaciais esféricas:

Teorema 5.1.4. *Uma forma espacial esférica de dimensão par é isométrica a S^{2n} ou a \mathbb{RP}^{2n} .*

Demonstração. Temos que $M = S^{2n}/\Gamma$, onde $\Gamma \subseteq O(2n+1)$ a ação é livre, propriamente descontínua e por isometrias. Por ser livre, se um dado elemento $g \in \Gamma$ tem autovalor +1, então deve ser a identidade. Mas temos que $g^2 \in SO(2n+1)$, e sendo matriz ortogonal de ordem ímpar e determinante 1, deve ter um autovalor real igual a 1; assim $g^2 = I$. Isto implica que $g = \pm I$, e portanto $\Gamma = \{I\}$ ou $\Gamma = \{I, -I\}$. \square

No caso de formas espaciais esféricas de dimensão ímpar, temos os exemplos dos *espaços lenticulares*: dados $p, q \in \mathbb{Z}$ com $\text{mdc}(p, q) = 1$, tem-se o espaço $L(p; q) = S^3/\Gamma$, com $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$, e Γ o grupo cíclico de ordem p gerado por

$$(z_1, z_2) \mapsto (\omega z_1, \omega^q z_2), \quad \omega = \exp(2\pi i/p).$$

Tais espaços são interessantes por serem exemplos de espaços com grupos fundamentais isomorfos, mas serem possivelmente não homeomorfos entre si; de fato, vale o seguinte teorema:

Teorema 5.1.5 ([Hat07]). *$L(p; q)$ é difeomorfo a $L(p; q')$ se e somente se $q' \equiv \pm q^{\pm 1} \pmod{p}$.*

O seguinte resultado também limita como pode ser o grupo fundamental de uma forma espacial esférica:

Proposição 5.1.6. *Se G é subgrupo abeliano de uma forma espacial esférica M , então G é cíclico.*

Demonstração. Como S^n é compacta, temos que $\pi_1(M)$ é finito, e $G \subset O(n+1)$ é subgrupo abeliano finito. Sabe-se que existe então uma diagonalização simultânea (possivelmente complexa) dos elementos de G , tal que para $g \in G$, tem-se $g = \text{diag}(\lambda_{g,1}, \dots, \lambda_{g,n+1})$. Sendo $|G| = N$, tem-se $g^N = I$, de modo que cada $\lambda_{g,i}$ é raiz N -ésima da unidade.

Como G age livremente em S^n , se $g \in G$ possui autovalor +1, é igual a identidade. Em particular, dados $g \neq h \in G$, deve-se ter $\lambda_{g,i} \neq \lambda_{h,i}$ para $i = 1, \dots, n+1$. Como há N elementos e N raízes N -ésimas da unidade, vale que, para cada $i = 1, \dots, n+1$ fixado, cada raiz N -ésima ocorre exatamente uma vez dentre os $\lambda_{g,i}$ para $g \in G$. Existe então um $g \in G$ tal que $\lambda_{g,i}$ é raiz primitiva da unidade, e cada um dos elementos $g, g^2, \dots, g^N = I$ terá $\lambda_{g^k,i} = \omega^k$, sendo as N raízes da unidade distintas. Isto implica que todo elemento de G é gerado por g , e portanto o grupo é cíclico. \square

Uma forma espacial de curvatura constante negativa é dita uma *variedade hiperbólica*. O estudo de tais variedades é extenso, com o caso de superfícies sendo o mais clássico. Toda superfície compacta orientável de gênero $g \geq 2$ admite métrica de curvatura constante igual a -1 , relacionando-se intimamente também com a teoria de superfícies de Riemann. É possível descrever espaços de moduli associados a classes de equivalências de métricas hiperbólicas numa superfície compacta orientável de gênero $g \geq 2$, associadas também a classes de estruturas quase-conformes e estruturas complexas nesses espaços [Tro92].

É possível se perguntar o quanto a hipótese de completude no teorema de Killing-Hopf é necessária. Mais precisamente, poderia-se imaginar que se M é uma variedade simplesmente conexa e de curvatura constante (mas não necessariamente completa), então intuitivamente M parece-se com um subespaço aberto de \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n ou \mathbb{S}^n , ou seja, uma subvariedade de codimensão 0, existindo mergulho isométrico $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n, \mathbb{S}^n$.

Percebe-se que M ser simplesmente conexa não pode ser relaxada, também; de fato, tomando um cilindro em \mathbb{R}^3 , ele não admite mergulho isométrico em \mathbb{R}^2 pois ele possui geodésicas fechadas, e toda geodésica fechada em \mathbb{R}^2 é constante.

No entanto, mesmo se M for simplesmente conexa, flat e de dimensão 2, é possível que não haja mergulho isométrico de M em \mathbb{R}^2 . Para isto, considere o disco unitário furado $D^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ em \mathbb{R}^2 com a métrica euclidiana induzida, e $M = \widetilde{D}^*$ seu recobrimento universal. Topologicamente, M será um helicoide, e tomando a métrica pullback pela projeção $\pi : M \rightarrow D^*$ em M , será flat, diferentemente de como imaginamos ser um helicoide em \mathbb{R}^3 .

Suponha que exista $f : M \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ mergulho isométrico. Considerando a curva fechada $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ em D^* para um $0 < r < 1$ fixo, ela é levantada para uma curva ilimitada η em M de comprimento infinito. Assim como γ , a curva η será tal que $\nabla_{\dot{\eta}} \dot{\eta}$ tem norma constante, e tomando sua imagem por f , ela será uma curva de curvatura constante em \mathbb{R}^2 . Mas tais curvas são as circunferências, que têm comprimento finito, uma contradição. Nota-se que $\pi : M \rightarrow D^* \subset \mathbb{R}^2$ é uma isometria local (e na verdade recobrimento riemanniano), mas falha em ser injetora.

Mas geralmente, tem-se como consequência do Teorema fundamental das subvariedades 6.1.6 que se M é variedade de dimensão n simplesmente conexa e de curvatura constante, então existe isometria local $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$ ou \mathbb{S}^n , bastando tomar no teorema o fibrado normal com as fibras tendo dimensão 0, mas em geral f não será injetora.

5.2 O Teorema de Synge

O teorema de Synge reflete a influência que curvatura positiva tem na topologia da variedade. Inicialmente, enuncia-se o seguinte resultado:

Lema 5.2.1 (Cartan). *Seja M uma variedade riemanniana compacta. Suponha que M não é simplesmente conexa. Então toda classe de homotopia livre não-trivial de curvas suaves por partes \mathcal{C} contém uma geodésica fechada de comprimento mínimo em \mathcal{C} .*

Demonstração. Como M é compacta, cobre-se ela por um número finito de bolas $B(p_i, \varepsilon_i/2)$ onde $B(p_i, \varepsilon_i)$ é vizinhança δ_i -totalmente normal de p_i para algum δ_i , e tomamos $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i/2, \delta_i\}$.

Se $l = \inf\{L(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C}\}$, temos uma sequência minimizante $(\eta_j) \subset \mathcal{C}$ tal que $L(\eta_j) \rightarrow l$, supondo η_j parametrizadas em $[0, 1]$ com velocidade constante. Podemos supor também que $L = \sup L(\eta_j) < +\infty$. Tomando subdivisão $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ de $[0, 1]$ tal que $t_{i+1} - t_i < \varepsilon/2L$ para $i = 0, \dots, n-1$, temos que

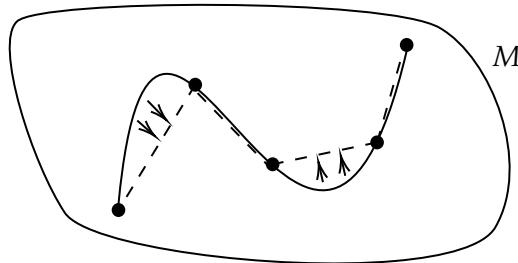
$$d(\eta_j(t_i), \eta_j(t)) \leq \int_{t_i}^t \|\eta'_j(t)\| dt \leq L(t_{i+1} - t_i) < \frac{\varepsilon}{2},$$

se $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Desta maneira, para minimizar o comprimento, podemos supor que em cada trecho $[t_i, t_{i+1}]$, η_j é a geodésica quebrada γ_j que une os pontos $\eta_j(0), \dots, \eta_j(t_i), \dots, \eta_j(1)$.

Ainda mais, γ_j é homotópica a η_j , pois para $t \in [t_i, t_{i+1}]$,

$$d(\gamma_j(t), \eta_j(t)) \leq d(\gamma_j(t), \gamma_j(t_i)) + d(\gamma_j(t_i), \eta_j(t)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

sendo possível construir homotopia suave entre $\eta_j|_{[t_i, t_{i+1}]}$ e $\gamma_j|_{[t_i, t_{i+1}]}$ por geodésicas minimizantes.



Com (γ_j) sequência minimizante de geodésicas quebradas na subdivisão “global” $\{t_0, \dots, t_n\}$, tomamos subsequências tais que $\gamma_j(t_i) \rightarrow p_i$, para $i = 0, \dots, n$. As curvas γ_j vão convergir na topologia C^1 para a geodésica quebrada γ ligando os pontos p_i , pertencendo a \mathcal{C} e tendo comprimento l . Por γ ser localmente minimizante, deve ser geodésica, sendo portanto suave. \square

Teorema 5.2.2 (Synge). *Se M é variedade riemanniana de dimensão par, orientável, e de curvatura positiva, então é simplesmente conexa.*

Demonstração. Suponha M não simplesmente conexa. Pelo lema de Cartan, toma-se geodésica unitária fechada $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ e de comprimento mínimo em sua classe de homotopia. Para $p = \gamma(0) = \gamma(l)$, toma-se o transporte paralelo $P : T_p M \rightarrow T_p M$, sendo elemento de $SO(T_p M)$ devido a M ser orientável. Ainda, $P(\dot{\gamma}(0)) = \dot{\gamma}(0)$, possuindo autovetor associado ao autovalor 1.

Com isso, pode-se considerar a restrição de P a $\dot{\gamma}(0)^\perp$, preservando esse subespaço de dimensão ímpar. Mas então P deve ter um autovetor associado ao autovalor 1 em $\dot{\gamma}(0)^\perp$, digamos u , tal que $Pu = u$. Estende-se u a campo paralelo U ao longo de γ , e constrói-se uma variação de γ por curvas fechadas com U sendo o campo variacional.

Como M tem curvatura positiva, temos que $\langle R(\dot{\gamma}, U)\dot{\gamma}, U \rangle < 0$, assim, pelas fórmulas de primeira e segunda variação, $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E(\gamma_t) = 0$ e $\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} E(\gamma_t) < 0$. Para $t > 0$ suficientemente pequeno, $E(\gamma_t) < E(\gamma)$ e

$$L(\gamma_t)^2 \leq 2lE(\gamma_t) < 2lE(\gamma) = L(\gamma)^2,$$

contradizendo a hipótese de γ ter comprimento mínimo em sua classe de homotopia. \square

É interessante observar como cada uma das hipóteses no enunciado é necessária e suficiente. O espaço \mathbb{RP}^2 tem dimensão par e curvatura positiva, mas não é orientável; o espaço \mathbb{RP}^3 é orientável e tem curvatura positiva, mas não tem dimensão par; e os toros flat \mathbb{R}^2/Γ tem dimensão par e são orientáveis, mas não tem curvatura seccional estritamente positiva.

Vendo o duplo recobrimento orientável \hat{M} de M , tem-se:

Corolário 5.2.3. *Se M é variedade riemanniana compacta de dimensão par e curvatura positiva, então $\pi_1(M) \cong \{e\}$ ou $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Outras consequências topológicas de curvatura positiva em variedades compactas derivam de uma análise do teorema de Gauss-Bonnet em dimensão 2. Ele afirma que

$$\chi(M) = \frac{1}{2\pi} \int_M K,$$

de modo que se M tem curvatura positiva, então a característica de Euler de M é positiva, e portanto M é difeomorfa a uma esfera ou a um plano projetivo. A mesma conclusões sobre a característica de Euler vale para variedades compactas de dimensão 4, e Hopf conjecturou que o mesmo valeria para variedades compactas de qualquer dimensão par [Ber02]. Tal problema continua em aberto até o momento.

Para o caso de variedades de dimensão ímpar, temos um resultado mais fraco, porém similar:

Teorema 5.2.4. *Se M é variedade riemanniana de dimensão ímpar, compacta e de curvatura positiva, então é orientável.*

Demonstração. Se M não é orientável, não é simplesmente conexa, toma-se seu duplo recobrimento orientável \hat{M} , com grupo de recobrimento $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pelo lema de Cartan, toda classe de homotopia livre de curvas suaves por partes admite uma geodésica que minimiza o comprimento nesta classe. Tomando uma tal geodésica fechada γ e considerando o transporte paralelo $P : T_p M \rightarrow T_p M$ para p no traço da geodésica, temos $P \in O(T_p M)$, e como γ é geodésica fechada, $P(\dot{\gamma}(0)) = \dot{\gamma}(0)$.

Tomando uma classe de homotopia tal que o loop inverte a orientação em $T_p M$, podemos assumir que $\det P = -1$. O multiconjunto dos autovalores de P será

$$\{\lambda_i, \overline{\lambda_i}, 1, \dots, 1, -1, \dots, -1\},$$

onde há k pares de autovalores complexos conjugados, r autovalores iguais a 1 e s autovalores iguais a -1 . Assim $2k + r + s$ é ímpar e $r \geq 1$, pois $\dot{\gamma}(0)$ é autovetor. Como o produto dos autovalores é -1 , temos que s é ímpar e portanto r é par, existindo outro vetor $u \in T_p M$ ortogonal a $\dot{\gamma}(0)$ tal que $Pu = u$. Analogamente ao que é feito na demonstração do teorema de Synge, produzimos uma variação de γ por curvas fechadas com campo variacional U estendendo u , e pela fórmula da segunda variação com a hipótese de curvatura seccional positiva, chega-se em contradição. \square

5.3 O Teorema de Bonnet-Myers

O teorema de Bonnet-Myers, na linha de comparações entre curvaturas ditando uma comparação entre as geometrias dos espaços, intuitivamente afirma que variedades riemannianas que curvam mais que uma esfera têm diâmetro menor que o de uma esfera.

Teorema 5.3.1 (Bonnet-Myers). *Seja M uma variedade riemanniana completa de dimensão n . Se existe $r > 0$ tal que, para todo $v \in TM$, vale que*

$$\text{Ric}(v, v) \geq \frac{n-1}{r^2} g(v, v),$$

então

$$\text{diam } M \leq \pi r.$$

Em particular, M é compacta e tem grupo fundamental $\pi_1(M)$ finito.

Lembra-se que, dada a esfera n -dimensional $\mathbb{S}^n(r)$ de raio $r > 0$, seu tensor de Ricci é $R_{\mathbb{S}^n(r)} = \frac{n-1}{r^2} g$, e seu diâmetro é πr . Assim, o teorema acima conclui que se $\text{Ric}_M \geq \text{Ric}_{\mathbb{S}^n(r)}$, então $\text{diam } M \leq \text{diam } \mathbb{S}^n(r)$.

Demonstração. Mostra-se que, para $p, q \in M$, tem-se $d(p, q) \leq \pi r$, essencialmente ao concluir que geodésicas de comprimento maior que πr tem pontos conjugados, não podendo realizar as distâncias entre seus extremos. De fato, seja $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ geodésica unitária minimizante com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(l) = q$. Como γ é minimizante, temos que $I(Y, Y) \geq 0$ para todo campo suave por partes Y ao longo de γ se anulando em 0 e l , onde I é a forma do índice.

Tomando base ortonormal ($\dot{\gamma}(0) = e_1, e_2, \dots, e_n$) de $T_p M$ e estendendo a campos paralelos E_1, \dots, E_n , definem-se os campos $Y_i(s) = \operatorname{sen}(\frac{\pi s}{l}) E_i(s)$. Assim

$$\begin{aligned} I(Y_i, Y_i) &= \int_0^l -\langle Y_i'', Y_i \rangle + \langle R(\dot{\gamma}, Y_i)\dot{\gamma}, Y_i \rangle ds \\ &= \int_0^l \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi s}{l}\right) \left(\frac{\pi^2}{l^2} + \langle R(\dot{\gamma}, E_i)\dot{\gamma}, E_i \rangle\right) ds, \end{aligned}$$

e somando para $i = 2, \dots, n$, tem-se

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i=2}^n I(Y_i, Y_i) &= \int_0^l \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi s}{l}\right) \left(\frac{(n-1)\pi^2}{l^2} - \operatorname{Ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\right) ds \\ &\leq (n-1) \left(\frac{\pi^2}{l^2} - \frac{1}{r^2}\right) \int_0^l \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi s}{l}\right) ds, \end{aligned}$$

e portanto $l \leq \pi r$. Sendo M completa e de diâmetro finito, é compacta, e valendo as mesmas hipóteses para o recobrimento universal \tilde{M} , ele também será compacto, de modo que $\pi_1(M)$ é finito pois sua cardinalidade é a cardinalidade das fibras de $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$. \square

O caso de igualdade no diâmetro é tratado por um teorema de Shiu-Yuen Cheng:

Teorema 5.3.2 ([Che75]). *Seja M variedade riemanniana compacta com tensor de Ricci $\operatorname{Ric}(v, v) \geq \frac{n-1}{r^2}g(v, v)$ para todo $v \in TM$ e diâmetro $d = \pi r$. Então M é isométrica a uma esfera $\mathbb{S}^n(r)$ de raio r .*

5.4 Curvatura Não-Positiva

Variedades riemannianas de curvatura não-positiva possuem propriedades muito desejáveis, o que faz com que suas geometrias sejam similares a de \mathbb{R}^n em alguns sentidos. O primeiro resultado nesta linha é o teorema de Cartan-Hadamard:

Teorema 5.4.1 (Cartan-Hadamard). *Seja M uma variedade riemanniana completa com curvatura secional não-positiva. Então, para todo $p \in M$, o mapa exponencial $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é recobrimento suave. Em particular, se M é simplesmente conexa, M é difeomorfa a \mathbb{R}^n .*

Para isto, temos preliminarmente a proposição seguinte:

Proposição 5.4.2. *Numa variedade riemanniana completa de curvatura não-positiva, não existem pontos conjugados.*

Demonstração. Como M tem curvatura não-positiva, o operador em $T_p M$ dado por $x \mapsto R(v, x)v$ é autodajunto e positivo semi-definido. Se X é campo de Jacobi ao longo de $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ geodésica com $X(a) = X(b) = 0$, então

$$0 = I(X, X) = \int_a^b \|X'\|^2 + \langle R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma}, X \rangle ds \geq \int_a^b \|X'\|^2 ds \geq 0,$$

de modo que $X' = 0$, e como se anula nas extremidades, $X = 0$. \square

Demonstração do teorema 5.4.1. Como M não tem pontos conjugados, o mapa exponencial \exp_p não tem pontos críticos, sendo difeomorfismo local sobre M . Tomando a métrica $\exp_p^* g$ em $T_p M$, de modo que \exp_p é agora isometria local, as geodésicas em $T_p M$ passando por 0_p continuam sendo as retas. Elas naturalmente estão definidas em todo \mathbb{R} , de modo que $(T_p M, \exp_p^* g)$ é variedade riemanniana completa; assim \exp_p é recobrimento riemanniano. \square

Uma variedade riemanniana M completa e simplesmente conexa e de curvatura seccional não-positiva é dita uma *variedade de Hadamard*.

Corolário 5.4.3. *Em uma variedade de Hadamard, para quaisquer $p, q \in M$ existe uma única geodésica ligando p a q .*

Mais geralmente, se M não é simplesmente conexa, cada classe de homotopia terá precisamente uma única geodésica, que será minimizante nesta classe [Jos17, p. 296].

Uma noção de grande importância no estudo de variedades de curvatura não-positiva é a de convexidade. Lembra-se que uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *convexa* se, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $t \in [0, 1]$, vale

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y),$$

ou mais geralmente,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i), \quad \text{para } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1] \text{ tais que } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *estritamente convexa* se, para $t \in (0, 1)$ e $x \neq y$, tem-se $f(tx + (1 - t)y) < tf(x) + (1 - t)f(y)$. Funções convexas são automaticamente contínuas, e se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é função de classe C^2 , ela é convexa se e somente se $f'' \geq 0$. Ainda, sendo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função C^2 , ela será estritamente convexa se $f'' > 0$.

Sendo M variedade riemanniana, uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *convexa* se, para toda geodésica γ de M , tem-se que $f \circ \gamma$ é convexa. Também em analogia com o caso de funções diferenciáveis, se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é suave, ela é convexa se e somente se $\text{Hess } f$ é positivo semi-definido em todo ponto, e é estritamente convexa se $\text{Hess } f$ é positivo definido. A partir desta noção, pode-se traçar algumas propriedades da função distância em M .

Proposição 5.4.4. *Se M é variedade de Hadamard, então, para todo $p \in M$, a função $f_p : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_p(x) = \frac{1}{2}d(p, x)^2$ é suave e estritamente convexa.*

Isto é consequência de que $f_p(x) = \frac{1}{2}\|\exp_p^{-1}(x)\|^2$, e a convexidade estrita vem da fórmula da segunda variação da energia de geodésicas. Uma estimativa mais precisa afirma também que

$$\text{Hess } f_p \geq g$$

em todo ponto de M , como formas bilineares simétricas.

Proposição 5.4.5. *Seja M variedade de Hadamard e γ, η duas geodésicas passando por $p \in M$. Então*

$$t \mapsto d^2(\gamma(t), \eta(t))$$

é função convexa.

Corolário 5.4.6. *Se M é variedade de Hadamard, $d^2 : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é função convexa.*

Sabe-se que toda função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexa e própria admite um mínimo global, e se f é estritamente convexa, tal mínimo é único. Se M é variedade de Hadamard, então isto também vale para funções $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ estritamente convexas e próprias. A soma de funções estritamente convexas e próprias também é estritamente convexa e própria; Élie Cartan utilizou tais ferramentas para provar o seguinte resultado.

Teorema 5.4.7. Se M é variedade de Hadamard, então toda isometria de M com órbita periódica admite um ponto fixo. Isto vale em particular se a isometria tem ordem finita.

Demonstração. Dados pontos $p_1, \dots, p_k \in M$ distintos tais que, para a isometria $\varphi : M \rightarrow M$, tenha-se $\varphi(p_i) = p_{i+1}$ para $i = 1, \dots, k-1$ e $\varphi(p_k) = p_1$, consideram-se as funções f_{p_1}, \dots, f_{p_k} associadas aos pontos, cuja soma $f = f_{p_1} + \dots + f_{p_k}$ é própria e estritamente convexa. A função f é invariante pela composição com φ , e admite único mínimo global p . Mas pela invariância pela isometria, $\varphi(p)$ também deve ser o único mínimo global, de modo que $p = \varphi(p)$ e é ponto fixo da isometria. \square

Corolário 5.4.8. Se M é variedade riemanniana completa de curvatura não-positiva, então $\pi_1(M)$ é livre de torsão.

A construção feita acima para os pontos p_i da órbita introduz intuitivamente uma ideia de “centro de massa” de uma distribuição de pontos em M , dada neste caso pelo mínimo global da soma das funções distância associadas. Generalizando esta noção, toma-se uma variedade de Hadamard M e uma medida de probabilidade μ em M , ou seja, tal que $\int_M d\mu = 1$, e de suporte compacto. Considera-se a função

$$F_\mu(p) = \frac{1}{2} \int_M d(p, x)^2 d\mu(x).$$

Proposição 5.4.9 ([Jos17]). A função F_μ é suave, estritamente convexa, própria e

$$\text{grad } F_\mu(p) = - \int_M \exp_p^{-1}(x) d\mu(x).$$

Um *centro de massa* para μ é um mínimo global de F_μ . A partir das afirmações acima, e como $\inf_{p \in M} F_\mu(p) < +\infty$ por μ ter suporte compacto e F_μ ser coerciva, ou seja, $\lim_{p \rightarrow \infty} F_\mu(p) = +\infty$, μ sempre terá um único centro de massa. Naturalmente, se μ é a medida de Dirac δ_p de $p \in M$, então seu centro de massa será p , e a demonstração do teorema de Cartan utiliza a medida $\frac{1}{k}(\delta_{p_1} + \dots + \delta_{p_k})$. É possível estender tais raciocínios para encontrar mais resultados relacionando as integrais de funções específicas com os centros de massa [Afs01; Kar75; Jos17].

Proposição 5.4.10. Seja M uma variedade de Hadamard, e G um grupo de Lie compacto de isometrias de M . Fixada uma medida de Haar invariante à esquerda μ em G , para todo $p \in M$, a função

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_G d(g \cdot p, x)^2 d\mu(g)$$

é estritamente convexa, e possui um único mínimo global \bar{p} , dito o *centro da órbita* $G \cdot p$. Ainda mais, \bar{p} será ponto fixo de G .

Demonstração. Sendo η geodésica passando por x e $f_p(x) = \frac{1}{2}d(x, q)^2$ estritamente convexa para todo $q \in M$, tem-se

$$\begin{aligned} (F \circ \eta)(t) &= \int_G d(g \cdot p, \eta(t))^2 d\mu(g) \implies \\ (F \circ \eta)''(t) &= \frac{1}{2} \int_G (f_{g \cdot p} \circ \eta)''(t) d\mu(g) > 0, \end{aligned}$$

já que G é compacto. Assim, F é estritamente convexa. Ela é também invariante pela ação de G ; para $h \in G$,

$$F(h \cdot x) = \frac{1}{2} \int_G d(g \cdot p, h \cdot x)^2 d\mu(g) = \frac{1}{2} \int_H d(h^{-1}g \cdot p, x)^2 d\mu(g) = \frac{1}{2} \int_H d(g \cdot p, x)^2 d\mu(g) = F(x).$$

Assim, se \bar{p} é o mínimo global de F , $g \cdot \bar{p}$ também deve ser, de modo que \bar{p} é ponto fixo da ação de G . \square

Um resultado importante sobre como as variedades de curvatura negativa podem ser topologicamente é o seguinte:

Teorema 5.4.11 (Preissmann). *Seja M variedade riemanniana compacta de curvatura negativa. Então todo subgrupo abeliano não-trivial de $\pi_1(M)$ é cíclico infinito.*

A demonstração em [Gor22] utiliza a função de deslocamento $f(x) = d(x, \varphi(x))$ de uma isometria φ e o que seriam os eixos de uma isometria, isto é, suas geodésicas invariantes.

5.5 Mais Teoremas de Comparação

Dadas duas variedades riemannianas M_1 e M_2 , ambas de dimensão n , e geodésicas unitárias $\gamma_i : [a, b] \rightarrow M_i$ para $i = 1, 2$, como os fibrados $\gamma_i^* TM_i$ são ambos triviais sobre $[a, b]$, existe um isomorfismo Φ entre os campos suaves por partes sobre γ_1 e os campos suaves por partes sobre γ_2 tal que

- X' é contínuo em t implica em $\Phi(X)'$ contínuo em t ;
- $\langle X(t), \dot{\gamma}_1(t) \rangle = \langle \Phi(X)(t), \dot{\gamma}_2(t) \rangle$;
- $\|X(t)\| = \|\Phi(t)\|$ e $\|X'(t)\| = \|\Phi(X)'(t)\|$.

Ele pode ser explicitamente definido considerando isometria linear $T_{\gamma_1(a)} M_1 \rightarrow T_{\gamma_2(a)} M_2$ tal que $\dot{\gamma}_1(a) \mapsto \dot{\gamma}_2(a)$. A partir desta identificação, é possível realizar a comparação de geometrias em geodésicas de variedades distintas, a partir de como são suas curvaturas nestas geodésicas.

Teorema 5.5.1. *Sejam M_1, M_2 duas variedades riemannianas de dimensão n , $\gamma_i : [a, b] \rightarrow M_i$ geodésicas unitárias para $i = 1, 2$. Suponha adicionalmente que, para todo $t \in [a, b]$ e para todos 2-planos $E_i \subseteq T_{\gamma_i(t)} M_i$ tenha-se*

$$K_1(E_1) \leq K_2(E_2).$$

Então

$$\text{ind } \gamma_1 \leq \text{ind } \gamma_2.$$

Demonstração. [Spi99, p. 233] □

Em particular, se existe campo W_1 ao longo de γ_1 se anulando nas extremidades tal que $I(W_1, W_1) < 0$, então existe W_2 ao longo de γ_2 com $I(W_2, W_2) < 0$, e se γ_2 não tem valores conjugados $\tau \in (a, b)$, então γ_1 também não tem pontos conjugados.

A demonstração é imediata ao considerar a fórmula

$$I(W, W) = \int_a^b \langle W', W' \rangle + \langle R(\dot{\gamma}, W)\dot{\gamma}, W \rangle ds$$

e concluindo que $I(W, W) \geq I(\Phi(W), \Phi(W))$. Assim, se V é subespaço onde I é negativa definida, $\Phi(V)$ também será.

Se $M_2 = \mathbb{S}^n(r)$, recuperamos:

Corolário 5.5.2 (Morse-Schoenberg). *Seja M variedade riemanniana de dimensão n , $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ geodésica unitária, e $r > 0$ constante.*

- i. *Se $K(E) \leq \frac{1}{r^2} = K(\mathbb{S}^n(r))$ para todo 2-plano $E \subseteq T_{\gamma(t)} M$ e γ tem comprimento $l < \pi r$, então γ não tem pontos conjugados.*
- ii. *Se $K(E) \geq \frac{1}{r^2} = K(\mathbb{S}^n(r))$ para todo 2-plano $E \subseteq T_{\gamma(t)} M$ e γ tem comprimento $l > \pi r$, então γ tem valor conjugado $\tau \in (0, l)$ a 0, e γ não é minimizante.*

Nota-se que a afirmação *ii.* é uma forma enfraquecida do teorema de Bonnet-Myers.

O seguinte teorema de comparação é devido a Rauch:

Teorema 5.5.3 (Rauch). *Sejam M_1, M_2 variedades riemannianas de dimensão n , $\gamma_i : [0, l] \rightarrow M_i$ geodésicas unitárias e W_i campos de Jacobi ao longo de γ_i tais que:*

- *Nenhum $\tau \in (0, l]$ é conjugado a 0 ao longo de γ_1 e γ_2 ;*
- $W_1(0) = W_2(0) = 0$;
- $\|W'_1(0)\| = \|W'_2(0)\|$; e
- $W_i \perp \dot{\gamma}_i$;
- *para todo $t \in [0, l]$ e 2-planos $E_i \subseteq T_{\gamma_i(t)} M_i$, $K_1(E_1) \leq K_2(E_2)$.*

Então vale:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|W_1(t)\|}{\|W_2(t)\|} = 1, \quad \|W_1\| \geq \|W_2\|, \quad \text{e} \quad \left(\frac{\|W_1\|}{\|W_2\|} \right)' \geq 0.$$

Demonstração. [Spi99, p. 236]. □

Adaptando o teorema acima para o caso de M_2 ter curvatura constante positiva κ , temos:

Teorema 5.5.4. *Seja M variedade riemanniana cuja curvatura seccional é limitada superiormente por κ , e $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ geodésica unitária. Se Y é campo de Jacobi ao longo de γ tal que $Y \perp \dot{\gamma}$, então a função $\|Y\|$ satisfaz*

$$\|Y\|'' + \kappa \|Y\| \geq 0$$

no conjunto de zeros de Y em $(0, l)$. Ainda, se ψ é a solução de

$$\psi'' + \kappa \psi = 0$$

em $[0, l]$ tal que $\psi(0) = \|Y\|(0)$ e $\psi'(0) = \|Y\|'(0)$, e ψ não se anula em $(0, l)$, então Y não se anula em $(0, l)$ e

$$\left(\frac{\|Y\|}{\psi} \right)' \geq 0, \quad \|Y\| \geq \psi$$

em $(0, l)$. Ainda mais, a igualdade em um $s_0 \in (0, l)$ vale se e somente se as curvaturas seccionais $K(\dot{\gamma}, Y)$ forem constantes iguais a κ em $[0, s_0]$, e existe campo paralelo unitário E tal que $Y = \psi E$ em $[0, s_0]$.

Uma aplicação do teorema de comparação de Rauch é demonstrar a existência de vizinhanças fortemente convexas [Gor22, p. 131]. Um conjunto $C \subseteq M$ em uma variedade riemanniana M é dito *fortemente convexo* se, para todos $p, q \in \overline{C}$, existe uma única geodésica minimizante $\eta : [0, 1] \rightarrow M$ com $\eta(0) = p$, $\eta(1) = q$ e $\eta((0, 1)) \subset C$.

Teorema 5.5.5 (Whitehead). *Seja M variedade riemanniana e $p \in M$. Dada vizinhança compacta K de M , sejam ι o ínfimo do raio de injetividade inj em K e κ o supremo das curvaturas seccionais em K . Se $r > 0$ é tal que $r < \frac{1}{2} \min\{\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}, \iota\}$ e $B(p, r) \subseteq K$, então $B(p, r)$ é fortemente convexa. Se $\kappa \leq 0$, assume-se $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} = +\infty$.*

5.6 Mais Propriedades Métricas

Uma variedade riemanniana M é dita *homogênea* se, para quaisquer dois pontos p e $q \in M$, existe uma isometria $F : M \rightarrow M$ tal que $F(p) = q$. Intuitivamente, isto diz que a geometria de M independe do ponto na variedade; e equivalentemente, significa que o grupo de isometrias $\text{Isom}(M, g)$ age transitivamente em M .

Teorema 5.6.1. *Toda variedade homogênea é completa.*

Demonstração. Sabe-se que toda isometria preserva geodésicas. Com $p \in M$ e $U \subseteq M$ uma ε -vizinhança normal de p , sabe-se que toda geodésica unitária passando por p está definida em pelo menos $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Mas pela homogeneidade, para todo $q \in M$ tem-se que as geodésicas passando por q também estão definidas em pelo menos $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Assim, para toda geodésica γ em M , pode-se estender ela de $\varepsilon/2$ em $\varepsilon/2$ uniformemente para pontos em sua imagem, estando assim definida em todo \mathbb{R} e mostrando que M é completa. \square

Uma variedade riemanniana M é dita *homogênea a dois pontos* se, dados dois pares (p, q) e (p', q') de pontos em M com $d(p, q) = d(p', q')$, existe uma isometria que leva o par (p, q) em (p', q') . Ainda mais, M é dita *isotrópica* se, para qualquer $p \in M$ e $v, w \in T_p M$ com $\|v\| = \|w\|$, existe isometria F de M fixando p e tal que $df_p(v) = w$.

Teorema 5.6.2. *Se M é variedade isotrópica, então M é homogênea a dois pontos, e em particular homogênea e completa. Reciprocamente, toda variedade homogênea a dois pontos é isotrópica.*

Demonstração. Sendo M isotrópica, $p \in M$ e γ geodésica passando por p definida em $(-r, r)$, a isotropia de M implica que toda geodésica unitária passando por p também está definida em $(-r, r)$. Sendo $q = \gamma(r/2)$ e $w = \dot{\gamma}(r/2)$, considera-se a isometria $F : M \rightarrow M$ que fixa q e leva $-w$ em w . A partir dela, a geodésica $\gamma_w(t) = \exp_q(tw)$, estando inicialmente definida em $(-3r/2, r/2)$, pode ser estendida para $(-3r/2, 3r/2)$ por meio da isometria, e realizando-se tal operação sucessivamente nos pontos de γ assim obtidos, tem-se que toda geodésica passando por p está definida em \mathbb{R} , sendo M completa.

Para mostrar que M é homogênea, consideram-se $p, q \in M$ e geodésica unitária minimizante $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma(l) = q$. Sendo $x = \gamma(l/2)$, considera-se a isometria fixando x e levando o vetor $w = \dot{\gamma}(l/2)$ em $-w$. Deste modo a geodésica $\gamma_w(t) = \exp_x(tw)$ é levada na geodésica γ_{-w} preservando os tempos, e também γ_{-w} é levada em γ_w . Então $f(p) = f(\exp_{-w}(l/2)) = \gamma_w(l/2) = q$, e M é homogênea.

Para que M seja homogênea a dois pontos, sendo $(p, q), (p', q')$ dois pares equidistantes de pontos em M , existe isometria levando p em p' ; é suficiente então mostrar para o caso de $p = p'$. Com $q = \exp_p(tv)$ e $q' = \exp_p(t'v')$, em que $v, v' \in T_p M$ são unitários, como $d(p, q) = d(p, q')$ tem-se $t = t'$. Pela isotropia de M , tem-se isometria F de M fixando p e levando v em v' , e portanto

$$F(q) = F(\exp_p(tv)) = \exp_p(tdf_p(v)) = \exp_p(tv') = q'.$$

Reciprocamente, se M é homogênea a dois pontos e $p \in M$, $v, w \in T_p M$ com $\|v\| = \|w\|$, basta considerar $q = \exp_p(tv)$ e $q' = \exp_p(tw)$ para tempo $t > 0$ suficientemente pequeno, e isometria levando o par (p, q) em (p, q') . Como a isometria deve preservar geodésicas, necessariamente o diferencial em p levará v em w . \square

Este resultado nos diz que uma variedade riemanniana é isotrópica se e somente se o grupo de isometrias $\text{Isom}(M, g)$ age transitivamente no fibrado unitário UM a partir dos mapas diferenciais. Intuitivamente, uma variedade isotrópica é uma em que a geometria é a mesma independendo tanto do ponto na variedade como da direção considerada a partir deste ponto. Por este motivo, na Física procura-se entender quais possíveis configurações de espaço, supondo homogêneas e isotrópicas, podem corresponder ao nosso espaço cosmológico observável.

Uma variedade riemanniana M é dita (*globalmente*) *simétrica* se, para todo $p \in M$, existe isometria $F : M \rightarrow M$ fixando p tal que $dF_p = -\text{Id}_{T_p M}$. Analisando a demonstração 5.6.2, observa-se que toda variedade globalmente simétrica é homogênea e completa. Uma variedade riemanniana é *localmente simétrica* se, para todo $p \in M$, existe vizinhança V de p e isometria $F : V \rightarrow V$ fixando p tal que $dF_p = -\text{Id}_{T_p M}$.

Teorema 5.6.3. *Uma variedade riemanniana é localmente simétrica se e somente se seu tensor de curvatura é paralelo, isto é, $\nabla R \equiv 0$.*

Demonstração. Sendo M variedade localmente simétrica e $f : M \rightarrow M$ isometria, lembra-se que

$$\nabla_{f_* X} f_* Y = f_*(\nabla_X Y), \quad R(f_* X, f_* Y) f_* Z = f_*(R(X, Y) Z),$$

com $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e f_* o pushforward pelo diferencial df . Tomando a derivada covariante da expressão na curvatura, obtemos

$$\nabla_{f_* X} R(f_* Y, f_* Z) f_* W = f_*(\nabla_X R(Y, Z) W).$$

Se agora $F : M \rightarrow M$ é isometria fixando p e tal que $dF_p = -\text{Id}_{T_p M}$, obtemos que

$$\begin{aligned} (\nabla_{-X_p} R)_p(-Y_p, -Z_p)(-W_p) &= -(\nabla_{X_p} R)_p(Y_p, Z_p)W_p \\ \implies (\nabla_{X_p} R)_p(Y_p, Z_p)W_p &= -(\nabla_{X_p} R)_p(Y_p, Z_p)W_p \\ \implies (\nabla_{X_p} R)_p(Y_p, Z_p)W_p &= 0, \end{aligned}$$

e como isto vale para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos que $\nabla R \equiv 0$.

Para a recíproca, afirma-se inicialmente que R é paralelo se e somente se para toda curva suave γ em M e campos X, Y, Z, W paralelos ao longo de γ , $\langle R(X, Y)Z, W \rangle$ é constante. Isto é prontamente observável tomando a derivada covariante ao longo da curva, e também estendendo vetores definidos em $T_p M$ para campos paralelos ao longo de uma curva integral.

Se temos $\nabla R \equiv 0$, por raciocínios análogos aos acima temos que para quaisquer campos X, Y, Z paralelos ao longo de uma curva suave γ , o campo $R(X, Y)Z$ também será paralelo. Tomando $\gamma = \gamma_v$ uma geodésica unitária passando por $p \in M$, consideramos referencial ortonormal paralelo E_1, \dots, E_n ao longo de γ estendendo $v = e_1$ em $T_p M$. Então a equação de Jacobi

$$-X'' + R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma} = 0,$$

com $\dot{\gamma} = E_1$ e $Y = y^i E_i$, tomando o produto interno com cada E_i , se torna

$$-(y^i)'' + \sum_j \langle R(E_1, E_j)E_1, E_i \rangle y^j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Pelo que foi deduzido acima, temos constantes $c_{ij} = \langle R(E_1, E_j)E_1, E_i \rangle$, e a equação de Jacobi se torna o sistema

$$-(y^i)'' + \sum_j c_{ij}y^j = 0,$$

tendo coeficientes constantes.

Tome agora $p \in M$ e a isometria linear $f = -\text{Id}_{T_p M} : T_p M \rightarrow T_p M$; nota-se que ela preseva a curvatura seccional de 2-planos em $T_p M$, levando $E \subset T_p M$ em $-E = E$. Com $\exp_p : B(0_p, \varepsilon) \rightarrow V$ uma vizinhança ε -normal de p , temos o difeomorfismo $F = \exp_p \circ f \circ \exp_p^{-1} : V \rightarrow V$. Com $dF_p = f$, afirma-se que F é a isometria desejada.

Imita-se a demonstração do teorema 5.1.1, considerando geodésica unitária $\gamma_v : [0, \varepsilon) \rightarrow M$ passando por p e com velocidade v tal que $\gamma_v(t_0) = q$, e estendendo v a base ortonormal

$(v = e_1, \dots, e_n)$ de $T_p M$ e campos paralelos E_1, \dots, E_n . Decompõe-se ortogonalmente o espaço tangente $T_q M$ em $\mathbb{R}\dot{\gamma}_v(t_0) \oplus W$, em que pelo lema de Gauss global,

$$W = [d(\exp_p)_{t_0 v}(e_1), \dots, d(\exp_p)_{t_0 v}(e_n)].$$

Com $\tilde{q} = F(q) = \gamma_{\tilde{v}}(t_0)$, onde $\tilde{v} = f(v) = -v$, temos similarmente vetores $\tilde{e}_i = f(e_i) = -e_i$, estendendo-se a campos paralelos ortonormais \tilde{E}_i ao longo de $\gamma_{\tilde{v}}$, e a decomposição ortogonal $T_{\tilde{q}} M = \mathbb{R}\dot{\gamma}_{\tilde{v}} \oplus \tilde{W}$. Basta mostrar então que $dF_q : W \rightarrow \tilde{W}$ é isometria.

Com $u \in T_p M$ ortogonal a v e $f(u) = \tilde{u} = -u$, consideramos os campos de Jacobi Y ao longo de γ_v e \tilde{Y} ao longo de $\gamma_{\tilde{v}}$ dados pelas condições iniciais $Y(0) = \tilde{Y}(0) = 0$ e $Y'(0) = u$, $\tilde{Y}'(0) = \tilde{u}$, de modo que

$$Y(t) = d(\exp_p)_{t v}(t u), \quad \tilde{Y}(t) = d(\exp_p)_{t \tilde{v}}(t \tilde{u}),$$

e obtemos que

$$dF_q(Y(t)) = dF_q \circ d(\exp_p)_{t v}(t u) = d(F \circ \exp_p)_{t v}(t u) = d(\exp_p \circ f)(t u) = d(\exp_p)_{t \tilde{v}}(t \tilde{u}) = \tilde{Y}(t).$$

Como visto, a equação de Jacobi com respeito ao referencial ortonormal se torna

$$-(y^i)'' + \sum_j c_{ij} y^j, \quad i = 1, \dots, n$$

onde $c_{ij} = \langle R(E_1, E_j)E_1, E_i \rangle$ são constantes ao longo de γ_v . Mas também obtemos constantes $\tilde{c}_{ij} = \langle R(\tilde{E}_1, \tilde{E}_j)\tilde{E}_1, \tilde{E}_i \rangle$ ao longo de $\gamma_{\tilde{v}}$, expressando a equação de Jacobi análoga para \tilde{Y} . Como f preserva a curvatura seccional dos 2-planos em $T_p M$ e eles, junto com a métrica, determinam a curvatura R em p , temos que $\tilde{c}_{ij} = c_{ij}$, sendo as mesmas constantes, e portanto as soluções dos sistemas serão tais que $\|Y(t)\| = \|\tilde{Y}(t)\|$. Assim, dF_q preservará a norma do vetor arbitrário $Y(t_0)$ em W , e conclui-se que é isometria. \square

Como exemplos, é imediato observar que formas espaciais serão homogêneas, isotrópicas e globalmente simétricas, bastando tomar isometrias adequadas a partir de um ponto distinguido de \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n ou \mathbb{H}^n . Verifica-se também que grupos de Lie com métrica bi-invariante são globalmente simétricos; de fato, sabemos que a inversão $i : G \rightarrow G$ dada por $i(g) = g^{-1}$ é isometria, e $di_e(v) = -v$ para $v \in T_e G$. Compondo com translações à esquerda, obtemos inversões isométricas em cada $g \in G$: toma-se $F = L_g \circ i \circ L_{g^{-1}}$, de modo que é isometria, $F(g) = g$ e, para $v \in T_g G$,

$$dF_g(v) = d(L_g \circ i \circ L_{g^{-1}})(v) = d(L_g)_e(-d(L_{g^{-1}})(v)) = -d(L_g \circ L_{g^{-1}})_g(v) = -v.$$

Em dimensão 2, há ainda o seguinte resultado:

Proposição 5.6.4. *Se M é localmente simétrica e $\dim M = 2$, então M tem curvatura seccional constante.*

Demonstração. Lembra-se que em dimensão 2, o tensor de curvatura é completamente determinado (localmente) pelo coeficiente $R_{1212} = \langle R(\partial_1, \partial_2)\partial_1, \partial_2 \rangle$ com respeito a um referencial local (∂_1, ∂_2) . Assim, $Rm = -R_{1212}R^0$, onde R^0 é o tensor dado por

$$\langle R^0(X, Y)Z, W \rangle = -\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle + \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle = -\det \begin{pmatrix} \langle X, Z \rangle & \langle X, W \rangle \\ \langle Y, Z \rangle & \langle Y, W \rangle \end{pmatrix}.$$

Com $\nabla R_m = \nabla R^0 \equiv 0$, temos que $dR_{1212} = 0$, de modo é constante, e curvatura seccional de M é constante. \square

De maneira muito mais geral, comenta-se que Cartan classificou completamente todos os espaços riemannianos simétricos a partir da teoria de Lie [Gor21].

Capítulo 6

Geometria das Subvariedades

“In the conception of surfaces, the inner metric relations [...] are always bound up by the way the surfaces are situated with respect to points outside them. We may, however, abstract from external relations by considering deformations which leave the lengths of lines within the surfaces unaltered [...] of such surfaces, and by regarding all surfaces obtained from one another in this way as equivalent.”

B. Riemann [[Spi99](#), vol. II, p. 157]

Imitando o desenvolvimento da geometria diferencial de superfícies em \mathbb{R}^3 , cujas geometrias em princípio dependem de como elas estão mergulhadas dentro do espaço ambiente, estenderemos agora nosso estudo para o caso de subvariedades de uma dada variedade riemanniana. Encontraremos extensões da primeira e segunda formas fundamentais, assim como das equações clássicas de Gauss, Codazzi e Mainardi, descrevendo a geometria destes objetos. Em sequência, estuda-se o teorema fundamental da geometria das subvariedades, descrevendo quando pode-se realizar uma variedade como subvariedade de uma forma espacial, assim como hipersuperfícies, subvariedades totalmente geodésicas e totalmente umbílicas.

6.1 As Formas Fundamentais

Sendo $(M, g), (\bar{M}, \bar{g})$ variedades riemannianas, lembra-se que uma *imersão isométrica* de M em \bar{M} é uma função suave $f : M \rightarrow \bar{M}$ tal que $f^* \bar{g} = g$, ou seja, uma isometria local, de modo que será imersão suave e

$$\bar{g}_{f(p)}(df_p(v), df_p(w)) = g_p(v, w),$$

para $p \in M$ e $v, w \in T_p M$. Embora imersões isométricas possam, em geral, não serem injetoras, toda imersão é localmente um mergulho. Como num primeiro momento estaremos trabalhando apenas com aspectos locais de imersões isométricas e objetos infinitesimais definidos sobre as variedades (como tensores e conexões), podemos inclusive assumir que o mergulho local $f : M \rightarrow \bar{M}$ é uma inclusão, imaginando a M como estando dentro do espaço ambiente \bar{M} .

Ainda mais, duas imersões isométricas $f : (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$, $f' : (M, g') \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ são ditas *congruentes* se existe uma isometria φ do espaço ambiente \bar{M} tal que $\varphi \circ f = f'$. Isto imediatamente implica que $g' = f'^* \bar{g} = f^* \varphi^* \bar{g} = f^* \bar{g} = g$, e portanto a métrica induzida em M é a mesma. Como desejam-se estudar imersões isométricas a menos de congruências do ambiente, temos como invariante a *primeira forma fundamental* de uma imersão, a métrica $g = f^* \bar{g}$ induzida em M .

Sendo f (localmente) uma inclusão, temos ainda a decomposição ortogonal do espaço tangente de \bar{M} sobre M por

$$T\bar{M}|_M = TM \oplus TM^\perp = TM \oplus \nu M,$$

onde mais geralmente $T\bar{M}|_M$ denotaria o fibrado pullback $f^*T\bar{M}$ sobre M , νM é *fibrado normal* a M em \bar{M} e tem-se projeções ortogonais associadas $\top : T\bar{M} \rightarrow TM$ e $\perp : T\bar{M} \rightarrow TM^\perp$.

Se ∇ e $\bar{\nabla}$ são respectivamente as conexões de Levi-Civita em M e \bar{M} , vimos anteriormente que

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\top, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

onde \bar{X} e \bar{Y} são extensões locais quaisquer de X e Y sobre \bar{M} . Neste contexto, a *segunda forma fundamental* da imersão é o mapa $B : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM^\perp)$ dado por

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\perp.$$

Afirma-se que B é simétrico e $C^\infty(M)$ -linear em suas entradas, definindo um tensor B , para todo $p \in M$, forma bilinear $B_p : T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M^\perp$. Segue tautologicamente a *fórmula de Gauss*

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= (\bar{\nabla}_X Y)^\top + (\bar{\nabla}_X Y)^\perp \\ &= \nabla_X Y + B(X, Y), \end{aligned}$$

com a componente tangencial sendo uma conexão em TM e a componente normal sendo tensorial, e também com o abuso de notação de identificar X e Y com suas extensões locais arbitrárias a \bar{M} .

Já que B é um $(0, 2)$ -tensor simétrico a valores em νM , é possível tomar seu traço com respeito à métrica g em TM , obtendo o *vetor curvatura média* $H = \frac{1}{n} \operatorname{tr} B$. Uma subvariedade cujo vetor curvatura média se anula em todos os pontos é dita uma *subvariedade mínima*; o estudo de subvariedades mínimas é extenso e belo, sendo também caracterizadas como ponto críticos de um dado funcional (o volume da imersão) em caráter similar aos métodos variacionais utilizados para a energia de curvas [DT19].

Como se comporta então a conexão $\bar{\nabla}$ com respeito a seções de νM , na decomposição $T\bar{M} = TM \oplus \nu M$? Para $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$, teremos a decomposição ortogonal

$$\bar{\nabla}_X \xi = (\bar{\nabla}_X \xi)^\top + (\bar{\nabla}_X \xi)^\perp.$$

Veremos que a componente tangencial na expressão acima é tensorial com respeito a X e ξ , e a componente normal definirá uma conexão em νM .

Proposição 6.1.1. *Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \Gamma(\nu M)$, então o vetor $(\bar{\nabla}_X \xi)_p^\top \in T_p M$ satisfaz*

$$\langle (\bar{\nabla}_X \xi)_p^\top, Y_p \rangle = \langle (\bar{\nabla}_X \xi)_p, Y_p \rangle = -\langle \xi_p (\bar{\nabla}_X Y)_p, \forall Y_p \in T_p M,$$

e portanto o vetor $(\bar{\nabla}_X \xi)_p$ depende só de X_p e ξ_p .

Mais concisamente, para $\xi \in T_p M^\perp$, define-se o *operador de Weingarten* (ou *operador forma*) por $A_\xi : T_p M \rightarrow T_p M$,

$$\langle A_\xi(u), v \rangle = \langle B(u, v), \xi \rangle,$$

sendo operador linear autoadjunto. Seus autovalores são ditos as *curvaturas principais* em ξ .

Lema 6.1.2. *Se $\hat{\xi}$ é extensão local de ξ a um campo normal a M , então $A_{\hat{\xi}}(u) = -(\bar{\nabla}_u \xi)^\top$, para $u \in T_p M$.*

Assim, $(\bar{\nabla}_X \xi)^\top$ de fato é um tensor, e define mapas bilineares $T_p M \times T_p M^\perp \rightarrow T_p M$ para todo $p \in M$.

Proposição 6.1.3. A componente ortogonal $(\nabla_X \xi)^\perp$ define uma conexão $\nabla^\perp : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\nu M) \rightarrow \Gamma(\nu M)$ no fibrado normal νM , dita a conexão normal da imersão, compatível com a métrica em νM induzida de $T\bar{M}$.

Assim, temos a decomposição ortogonal

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X \xi &= (\bar{\nabla}_X \xi)^\top + (\bar{\nabla}_X \xi)^\perp \\ &= -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi.\end{aligned}$$

A partir da conexão normal, tem-se a *curvatura normal*

$$R(X, Y)\xi := \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi$$

e a derivada covariante da segunda forma fundamental

$$(\nabla_X^\perp B)(Y, Z) = \nabla_X^\perp (B(Y, Z)) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z).$$

Com elas, podemos descrever as *equações fundamentais de uma imersão isométrica*.

Proposição 6.1.4. Dada uma imersão isométrica $f : (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$, vale, para $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi, \eta \in \Gamma(\nu M)$, vale:

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle - \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle \quad (\text{equação de Gauss})$$

$$(R(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X B)^\perp(Y, Z) - (\nabla_Y B)^\perp(X, Z) \quad (\text{equação de Codazzi-Mainardi})$$

$$\langle \bar{R}(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle - \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle \quad (\text{equação de Ricci})$$

Demonstração. [Gor22, p. 140]. □

No caso de ambientes com curvatura seccional constante igual a κ , temos o seguinte:

Corolário 6.1.5. Dada uma imersão isométrica $f : (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ onde \bar{M} é forma espacial de curvatura κ , as equações fundamentais são:

$$\begin{aligned}\langle R(X, Y)Z, W \rangle &= -\kappa(\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle) \\ &\quad - \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle + \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle \quad (\text{equação de Gauss})\end{aligned}$$

$$(\nabla_X^\perp B)(Y, Z) = (\nabla_Y B)^\perp(X, Z) \quad (\text{equação de Codazzi-Mainardi})$$

$$\langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle \quad (\text{equação de Ricci})$$

Dada uma variedade riemanniana M n -dimensional e um fibrado vetorial E de posto k sobre M com métrica riemanniana em conexão compatível ∇' , assim como um $(0, 2)$ -tensor simétrico B' em TM a valores em E , pode-se perguntar quando tais informações geométricas correspondem ao fibrado normal, à conexão normal e à segunda forma fundamental de uma imersão de M em uma variedade ambiente \bar{M} . O seguinte teorema afirma que isso ocorre exatamente quando são satisfeitas as quações fundamentais:

Teorema 6.1.6 (Teorema Fundamental das Subvariedades). *Seja (M, g) uma variedade riemanniana n -dimensional, munida das seguintes estruturas geométricas:*

- Um fibrado vetorial suave E de posto k sobre M ;
- Uma métrica riemanniana g' em E e uma conexão ∇' em E compatível com esta métrica;
- Um $(0, 2)$ -tensor B' simétrico em TM a valores em E ;

tais que são satisfeitas as equações de Gauss, Codazzi-Mainardi e Ricci no caso formas espaciais para estas estruturas, para alguma constante real $\kappa \in \mathbb{R}$.

Então, para todo $p \in M$, existe vizinhança U de p em M e imersão isométrica $f : U \rightarrow \bar{M}$, onde \bar{M} é forma espacial de dimensão $n+k$ e curvatura κ , tal que:

- g é a métrica induzida em U ;
- $E|_U$ é isomorfo ao fibrado normal da imersão f ;
- g', ∇' e B' correspondem à métrica em νM , à conexão normal e à segunda forma fundamental da imersão por este isomorfismo.

Ainda mais, a imersão isométrica é localmente unicamente definida a menos de congruência do ambiente. E se M é simplesmente conexa, pode-se tomar $M = U$, com f única a menos de congruência, mas f não necessariamente é mergulho global.

A demonstração, encontrada em [Gor22] e aqui apenas esboçada no caso $\kappa = 0$, começa considerando o fibrado $\bar{E} = TM \oplus E$ e o que seria o mapa de Weingarten e a conexão $\bar{\nabla}$ em \bar{E} , mostrando ser compatível com a métrica em \bar{E} e flat. Tomando referencial ortonormal paralelo de \bar{E} em vizinhança simplesmente conexa de p , consideram-se as 1-formas duais, mostrando serem exatas. As funções que integram estas formas seriam as coordenadas locais da imersão. Elas são determinadas a menos de transformações rígidas, indicando a unicidade a menos de congruência.

6.2 Tipos de Subvariedades

6.2.1 Hipersuperfícies

Um dos tipos mais prevalentes de subvariedades, e mais simples de serem estudadas, são as de codimensão 1, ditas as *hipersuperfícies*. Com isso, o fibrado normal νM tem posto 1, cujas seções globais seriam os campos vetoriais normais a M . Sabemos que podem ocorrer restrições topológicas para a existência de tais seções globais, como é o caso de variedades não-orientáveis como a faixa de Möbius. Quando há a presença de orientação, temos o seguinte:

Proposição 6.2.1. *Seja \bar{M} variedade riemanniana orientada, e $M \subset \bar{M}$ uma hipersuperfície orientada. Então existe um único campo vetorial normal unitário a M globalmente definido que determina a orientação em M . Em particular, o fibrado normal é trivial.*

Demonstração. Sendo ω uma n -forma de orientação em M , para cada $p \in M$, existem dois vetores unitários normais a M , nominalmente $\pm \nu_p$. Denotando por $\pm \theta_p$ a 1-forma correspondente pelo isomorfismo musical $T_p M \cong T_p^* M$, toma-se o vetor tal que $\omega_p \wedge \theta_p$ é $(n+1)$ -forma de orientação em $T_p M$ positivamente orientada. Essa escolha pode ser feita suavemente em vizinhança U de p , e pela unicidade da escolha, constrói-se seção global unitária ν em M tal que $\omega \wedge \theta$ é positivamente orientada. \square

Considerando apenas aspectos locais de uma imersão isométrica, pode-se fixar ν campo vetorial normal unitária em M como acima, e o mapa de Weingarten $A_p := A_{\nu_p}$. Novamente temos os autovalores $\lambda_1(p), \dots, \lambda_n(p)$ reais variando continuamente com p , sendo as curvaturas principais de M . Funções simétricas nos autovalores, podendo ser expressas em função dos coeficientes do polinômio característico de A_p , são invariantes da imersão isométrica, possivelmente a menos de sinal no caso de funções de ordem ímpar. Em particular, tem-se a *curvatura média escalar*

$$H = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$$

e a curvatura de Gauss-Kronecker

$$K = \det A = \lambda_1 \dots \lambda_n.$$

Pode-se restringir ainda mais o estudo para o caso de hipersuperfícies das formas espaciais, com destaque a \mathbb{R}^{n+1} . Imitando o desenvolvimento feito para superfícies em \mathbb{R}^3 , identificamos os espaços tangentes $T_q \mathbb{R}^{n+1}$ com \mathbb{R}^{n+1} , e considera-se o *mapa de Gauss*

$$\begin{aligned} N : M &\longrightarrow \mathbb{S}^n, \\ p &\longmapsto \nu_p. \end{aligned}$$

Ainda, com as identificações canônicas $T_{\nu_p} \mathbb{S}^n \cong (\mathbb{R}\nu_p)^\perp \cong T_p M$, considera-se o diferencial $dN_p : T_p M \rightarrow T_p M$ como endomorfismo linear. Mostra-se que $dN_p = -A_p$: sendo $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ curva em M passando por p com velocidade u ,

$$dN_p(u) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\nu \circ \gamma)(t) = \bar{\nabla}_u \nu = (\bar{\nabla}_u \nu)^\top = -A_p(u),$$

justificando porque, em alguns contextos, considera-se $-dN_p$, sendo de fato operador forma. Ainda, sendo (u_1, \dots, u_n) uma base ortonormal de autovetores de $T_p M$ associados às curvaturas principais, temos que $K(u_i, u_j) = \lambda_i \lambda_j$.

No contexto de hipersuperfícies do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , recuperamos o Theorema Egregium de Gauss, o qual afirma que a curvatura gaussiana de uma superfície é um invariante intrínseco da superfície, dependendo apenas da primeira forma fundamental e não de como ela está imersa. Isto é consequência da equação de Gauss, ao identificar a curvatura riemanniana como a curvatura gaussiana da superfície. De fato, se $M \subset \mathbb{R}^3$ é superfície, $p \in M$ e x, y é base de $T_p M$, a equação de Gauss afirma que

$$K(T_p M) = K(x, y) = -\frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{\det B}{\det g},$$

se $B(e_i, e_j) = h_{ij}$ para $e_1 = x, e_2 = y$, considerando B como forma bilinear simétrica a valores em $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}\nu$ e ν a escolha de vetor normal unitário. Ao comparar a segunda forma fundamental no contexto de Gauss e no contexto riemanniano, e como sabemos que $K(T_p M)$ pode ser expresso em termos apenas da métrica de M e suas derivadas parciais, concluímos a afirmação.

6.2.2 Subvariedades Totalmente Geodésicas

Para o estudo de subvariedades em casos mais especiais, pode-se analisar o que acontece quando os objetos definidos a partir da imersão, como a segunda forma fundamental ou a conexão normal, assumem formas específicas.

Uma subvariedade M de \bar{M} é dita *totalmente geodésica* em $p \in M$ se $B_p \equiv 0$, ou seja, se a segunda forma fundamental se anula em p , e M é *totalmente geodésica* se ela se anula em todos os pontos. A motivação para tal definição é advinda do seguinte resultado:

Proposição 6.2.2. *Uma subvariedade M de \bar{M} é totalmente geodésica se e somente se toda geodésica de M é também geodésica de \bar{M} , e se e somente se toda geodésica γ_v de \bar{M} com velocidade inicial $v \in TM$ está contida em M para tempos pequenos.*

Demonstração. [Gor22, p. 144]. □

Como consequência, subvariedades conexas, completas e totalmente geodésicas são completamente caracterizadas por um de seu espaços tangentes, em que $\exp_p^{\bar{M}}(T_p M) = M$ pelo teorema de Hopf-Rinow.

É possível obter uma descrição completa das subvariedades totalmente geodésicas das formas espaciais simplesmente conexas, onde sabemos como são todas as geodésicas:

Teorema 6.2.3. As subvariedades totalmente geodésicas de \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n e \mathbb{H}^n são, respectivamente:

- Os subespaços afins de \mathbb{R}^n ;
- As grandes subesferas de \mathbb{S}^n , isto é, as interseções de \mathbb{S}^n com subespaços lineares de \mathbb{R}^{n+1} ;
- As interseções de $\mathbb{R}\mathbb{H}^n$ com os subespaços lineares de $\mathbb{R}^{1,n}$.

6.2.3 Subvariedades Totalmente Umbílicas

Uma subvariedade M de \bar{M} é dita *umbílica* na direção $\xi \in \nu M$ se A_ξ é mapa múltiplo da identidade, e M é *totalmente umbílica* se todo vetor normal νM é umbílico. Isto ocorre se e somente se $B(X, Y) = g(X, Y)H$, para todos os campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, onde H é o vetor curvatura média. De fato, $A_\xi = \langle \xi, H \rangle I$. É imediato que uma variedade totalmente umbílica e mínima será totalmente geodésica, e vice-versa.

Se M é totalmente umbílica e o vetor curvatura média H , não se anulando em M , é paralelo (com respeito à conexão normal ∇^\perp), diz-se que M é uma *esfera extrínseca*. Tal denominação remete às esferas em \mathbb{R}^n , onde o campo ortogonal unitário (seja apontando para fora ou dentro) é paralelo.

Proposição 6.2.4. Uma subvariedade totalmente umbílica de dimensão $n \geq 2$ em uma forma espacial é uma esfera extrínseca.

Demonstração. Derivando a expressão $B(X, Y) = g(X, Y)H$ com respeito a um campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos que $(\nabla_Z^\perp B)(X, Y) = g(X, Y)\nabla_Z^\perp H$. A equação de Codazzi afirma que $g(X, Y)\nabla_Z^\perp H = g(Z, Y)\nabla_X^\perp H$, e com $\dim M \geq 2$, pode-se escolher $Z \perp Y$ e $Y = X$ de modo que $\nabla_Z^\perp H = 0$. Assim, H é paralelo. \square

Sabemos descrever também quais são todas as subvariedades totalmente umbílicas de \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n e \mathbb{H}^n :

Teorema 6.2.5. As subvariedades conexas, completas, não totalmente geodésicas e totalmente umbílicas de dimensão $n \geq 2$ em \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n e \mathbb{H}^n são, respectivamente:

- As esferas em \mathbb{R}^n ;
- As subesferas pequenas de \mathbb{S}^n , isto é, a interseção de \mathbb{S}^n com subespaços afins não-lineares de \mathbb{R}^{n+1} ;
- As interseções de $\mathbb{R}\mathbb{H}^n$ com subespaços afins não-lineares de $\mathbb{R}^{1,n}$.

Demonstração. [Gor22, p. 146]. \square

6.3 Mais Resultados

A seguinte proposição descreve bem como serão os pontos fixos de uma isometria numa variedade riemanniana:

Proposição 6.3.1. Seja $\varphi : M \rightarrow M$ uma isometria e S o conjunto dos pontos fixos de M . Então toda componente conexa de S é uma subvariedade riemanniana propriamente mergulhada e totalmente geodésica.

Demonstração. Naturalmente S é um conjunto fechado. Seja $p \in S$, U uma vizinhança normal de p onde $\exp_p^{-1} : U \rightarrow T_p M$ seja difeomorfismo, e $S' = S \cap U$. Sabemos que o mapa exponencial conjuga φ com seu diferencial em p , isto é, $\varphi = \exp_p \circ d\varphi_p \circ \exp_p^{-1}$; assim os pontos fixos de φ em U correspondem exatamente aos elementos de $T_p M$ que são fixos por $d\varphi_p$, um mapa linear.

Sendo então $\ker(d\varphi_p - I) \subseteq T_p M$, é subespaço vetorial de $T_p M$, sendo em particular subvariedade mergulhada, e levando a M pela exponencial, temos que S será subvariedade mergulhada, já que \exp_p é uma carta adaptada à subvariedade. Ainda, como S é fechado, é propriamente mergulhada.

Das afirmações acima, temos ainda que $T_p S = \ker(d\varphi_p - I)$. Para mostrar que ela é totalmente geodésica, basta ver que as geodésicas em M passando por p são levadas a retas passando por 0_p em $T_p M$ e que o diferencial da exponencial é a identidade, de modo que $T_p S$ contém todas as suas retas trivialmente. \square

O resultado acima pode inclusive ser estendido para o conjunto de pontos fixos de um grupo arbitrário de isometrias, dado que localmente eles serão expressos em $T_p M$ pela exponencial como interseções de subespaços lineares. Naturalmente o grupo agirá de maneira livre no subespaço aberto complementar ao conjunto dos pontos fixos, onde a ação adquire caráter mais regular.

Os seguintes resultados permitem descrever ponto focais de subvariedades de \mathbb{R}^{n+k} . Dada subvariedade M^n de \mathbb{R}^{n+k} , um *ponto focal* de M é um ponto crítico do mapa exponencial normal $\exp^\perp : \nu M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ levando $\xi \in T_p M$ em $p + \xi$.

Inicialmente, considera-se uma identificação canônica $T_\xi \nu M \cong T_p M \oplus \nu_p M$; isto é feito considerando curvas suaves $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ passando por p com velocidade u , e tomando o transporte paralelo $\hat{\xi}$ de ξ ao longo de γ com respeito a ∇^\perp . Isto define um mapa linear injetor $T_p M \rightarrow T_\xi \nu M$, com a imagem sendo a “velocidade” da curva $\hat{\xi}$ em νM . Dado também $\eta \in \nu_p M$, considera-se a curva $\nu + s\eta$ em νM , definindo igualmente um mapa linear injetor $\nu_p M \rightarrow T_\xi \nu M$. Dada a projeção canônica $\omega : \nu M \rightarrow M$ e a inclusão canônica em p dada por $\iota_p : \nu_p M \hookrightarrow \nu M$, a imagem deste segundo mapa pode ser dada como $\ker d\omega_\xi$ a partir da sequência exata

$$0 \longrightarrow \nu_p M \xrightarrow{d(\iota_p)_\xi} T_\xi(\nu M) \xrightarrow{d\omega_\xi} T_p M \longrightarrow 0.$$

Tais identificações podem, na verdade, ser feitas em qualquer fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ munido de uma conexão ∇ , com $T_\xi E \cong T_p M \oplus E_p$ e a conexão providenciando uma distribuição complementar à distribuição vertical $\mathcal{V} = \ker(d\pi)$.

Retornando ao caso de \mathbb{R}^{n+k} , com $\xi \in \nu_p M$ fixado e tomando $\phi(s) = \xi + s\eta$ para $\eta \in \nu_p M$, temos que $\phi'(0) \in T_\xi \nu M$ é identificado com η , e

$$\exp^\perp(\phi(s)) = p + \xi + s\eta \implies d(\exp^\perp)_\xi(\eta) = \eta,$$

de modo que $d(\exp^\perp)_\xi$ restrito a $\nu_p M$ é a identidade.

Agora, com $u \in T_p M$ e o transporte paralelo normal $\hat{\xi}$ construído como antes, temos que

$$\exp^\perp(\hat{\xi}(s)) = \gamma(s) + \hat{\xi}(s) \implies d(\exp^\perp)_\xi(u) = \gamma'(0) + \hat{\xi}'(0) = u + \hat{\xi}'(0).$$

No lado direito da expressão acima, $\hat{\xi}'(0)$ representa a derivada do campo com respeito à conexão ambiente $\bar{\nabla}$, em que, pela fórmula de Weingarten,

$$\hat{\xi}'(0) = \bar{\nabla}_u \hat{\xi} = -A_\xi u + \nabla_u^\perp \hat{\xi} = -A_\xi u,$$

já que o campo é ∇^\perp -paralelo. Isto implica que $d(\exp^\perp)(u) = u - A_\xi u$, e portanto o diferencial $d(\exp^\perp)_\xi : T_p M \oplus \nu_p M \rightarrow T_p M \oplus \nu_p M$ é expresso como

$$\begin{pmatrix} \text{id} - A_\xi & 0 \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}.$$

Sabemos então que $q = p + t\hat{\xi}$, com $\hat{\xi}$ vetor unitário normal, é ponto focal se e somente se é ponto crítico da exponencial normal, e sua multiplicidade é dada pela dimensão de $\ker(I -$

$A_{t\xi}) = \ker(\frac{1}{t}I - A_\xi)$. Ou seja, isto ocorre se e somente se $\frac{1}{t}$ é autovalor de multiplicidade m de A_ξ . Sendo uma *distância focal* de M ao longo de ξ a distância de p a um de seus ponto focais, temos que d é distância focal se e somente se $\frac{1}{d}$ é uma curvatura principal de A_ξ .

Resultados análogos podem ser traçados no caso de o espaço ambiente ser \mathbb{S}^{n+k} , em que d é distância focal ao longo de ξ se e somente se $\cot d$ é curvatura principal de A_ξ , e também \mathbb{H}^{n+k} , onde d é curvatura principal se e somente se $\coth d$ é curvatura principal de A_ξ .

Referências Bibliográficas

- [Afs01] B. Afsari. "Riemannian L^p center of mass: Existence, uniqueness and convexity". Em: *Proceedings of the American Mathematical Society* (2001), pp. 655–673. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2010-10541-5>.
- [AR93] M. A. Akivis e B. A. Rosenfeld. *Élie Cartan (1869 - 1951)*. Vol. 123. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 1993.
- [AS53] W. Ambrose e I. M. Singer. "A Theorem on Holonomy". Em: *Transactions of the American Mathematical Society* (1953), pp. 428–443. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1953-0063739-1>.
- [Ber02] M. Berger. *Riemannian Geometry during the second half of the Twentieth Century*. American Mathematical Society, 2002.
- [Car20] M. P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. 6^a ed. Projeto Euclides. IMPA, 2020.
- [CE08] J. Cheeger e D. Ebin. *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*. American Mathematical Society, 2008.
- [Che75] S-Y Cheng. "Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications". Em: *Mathematische Zeitschrift* (1975), pp. 289–297. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01214381>.
- [Cra15] M. Crainic. *Mastermath course Differential Geometry 2015/2016*. 2015. URL: <https://webspace.science.uu.nl/~crain101/DG-2015/main10.pdf>.
- [DT19] M. Dajczer e R. Tojeiro. *Submanifold Theory: Beyond an Introduction*. Springer, 2019.
- [FHB67] W. R. Fuchs, H. A. Holstein e H. Bondi. *Mathematics for the Modern Mind*. The Macmillan Company, 1967.
- [GHL12] S. Gallot, D. Hulin e J. Lafontaine. *Riemannian Geometry*. 3^a ed. Universitext. Springer, 2012.
- [Gor20] C. Gorodski. *Smooth Manifolds*. 1^a ed. Compact Textbooks in Mathematics. Birkhäuser, 2020.
- [Gor21] C. Gorodski. *An Introduction to Riemannian Symmetric Spaces*. 2021. URL: <https://www.ime.usp.br/~gorodski/ps/symmetric-spaces.pdf>.
- [Gor22] C. Gorodski. "An Introduction to Riemannian Geometry". 2022. URL: <https://www.ime.usp.br/~gorodski/teaching/mat5771-2021/riem-geom-gorodski-2016.pdf>.
- [Hat07] A. Hatcher. "Notes on Basic 3-Manifold Topology". 2007. URL: <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3Mfds.pdf>.
- [Jos17] J. Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. 7^a ed. Universitext. Springer International Publishing, 2017.
- [Joy07] D. Joyce. *Riemannian Holonomy Groups and Calibrated Geometry*. Oxford University Press, 2007.

- [Kar75] H. Karcher. "Riemannian Center of Mass and Mollifier Smoothing". Em: *Communications on pure and applied mathematics* (1975), pp. 289–297. DOI: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160300502>.
- [Kir08] A. Kirillov Jr. *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*. Cambridge University Press, 2008.
- [Kli82] W. Klingenberg. *Riemannian Geometry*. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1982.
- [Lar12] K. Larsen. *Stephen Hawking: A Biography*. Jaico Publishing House, 2012.
- [Lee12] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2^a ed. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2012.
- [LP87] J. M. Lee e T. H. Parker. "The Yamabe problem". Em: *Bulletin of the American Mathematical Society* (1987). DOI: [10.1090/s0273-0979-1987-15514-5](https://doi.org/10.1090/s0273-0979-1987-15514-5).
- [Mey89] W. Meyer. *Toponogov's Theorem and Applications*. 1989.
- [Mil76] J. Milnor. "Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups". Em: *Advances in Mathematics* (1976), pp. 293–329. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0001-8708\(76\)80002-3](https://doi.org/10.1016/S0001-8708(76)80002-3).
- [Pet16] P. Petersen. *Riemannian Geometry*. 3^a ed. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2016.
- [RW19] B. Riemann e H. Weyl. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zur Grunde liegen*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1919.
- [Sam89] H. Samelson. "Lie Bracket and Curvature". Em: *L'Enseignement Mathématique* (1989). DOI: <http://doi.org/10.5169/seals-57366>.
- [San04] L. A. Santaló. *Integral Geometry and Geometric Probability*. Cambridge University Press, 2004.
- [Spi99] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. 3^a ed. Publish or Perish Inc., 1999.
- [Tro92] A. J. Tromba. *Teichmüller Theory in Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1992.
- [War10] F. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2010.