

YAN RODRIGO DE CARVALHO VIEIRA

Método dos vórtices discretos em Python aplicado à Engenharia de Petróleo

**São Paulo
2019**

YAN RODRIGO DE CARVALHO VIEIRA

Método dos Vórtices Discretos em Python aplicado à Engenharia de Petróleo

Trabalho de Formatura em Engenharia de Petróleo do curso de graduação do departamento de Engenharia de Minas e de Petróleo da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Orientador: Prof. Dr. Rafael dos Santos Goria

São Paulo

2019

YAN RODRIGO DE CARVALHO VIEIRA

Método dos Vórtices Discretos em Python aplicado à Engenharia de Petróleo

Trabalho de Formatura em Engenharia de Petróleo do curso de graduação do departamento de Engenharia de Minas e de Petróleo da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Área de concentração: Simulação - Método dos Vórtices Discretos (MVD)

Orientador: Prof. Dr. Rafael dos Santos Goria

São Paulo

2019

FICHA CATALOGRÁFICA

Vieira, Yan Rodrigo de Carvalho

Método dos Vórtices Discretos em Python aplicado à Engenharia de Petróleo / Y. R. C. Vieira -- São Paulo, 2019.

40 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Minas e Petróleo.

1. Método dos Vórtices Discretos I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Minas e Petróleo II.t.

VIEIRA, Y. R. C. Método dos Vórtices Discretos em Python aplicado à Engenharia de Petróleo. São Paulo. 2019. 40 p. Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Autor e Doador da vida que me sustentou na difícil peleja da graduação. Foram anos que superei não só desafios acadêmicos, mas de vida e daqui para frente sigo mais forte e feliz.

À minha mãe, pela paciência, carinho, instruções e incentivo. Esse trabalho é o selo de anos de expectativa e sonho.

Ao meu pai, que mesmo não estando mais entre nós seguiu comigo até metade da graduação fisicamente e seus ensinos e amor serão levados pelo resto da vida.

À Ana Quiqueto que além de participar ativamente na revisão do texto, aguentou meus lamentos e me empurrou em meio aos desânimos da caminhada.

Ao meu orientador, pela compreensão, ajuda e incentivo durante não só este trabalho, mas toda a graduação. Desejo que a educação da nossa nação esteja nas mãos de professores semelhantes a ele.

Não sabendo que era impossível foi lá e fez.

Jean Cocteau

RESUMO

A exploração de hidrocarbonetos em águas profundas, como os campos do pré-sal brasileiro, submete os *risers* (tubulações que conectam a cabeça de poço à plataforma) às forças da natureza como ondas e correntes marítimas além de efeitos causados pela movimentação da plataforma à qual ele se conecta.

Neste trabalho apresenta-se um algoritmo para simular os efeitos das correntezas do ambiente offshore nos *risers*. Isso é de grande auxílio na indústria já que, devido às suas grandes dimensões, realizar testes reais torna-se caro e inviável.

O Método dos Vórtices Discretos (MVD) foi adotado porque não necessita de malhas e por ter um custo computacional menor que outras técnicas mais tradicionais como Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Elementos Finitos (MEF) e Método dos Volumes Finitos (MVF) apesar de ter uma representação simplificada da física do escoamento.

A contribuição é um algoritmo do MVD escrito em Python, linguagem de programação cada vez mais em uso, visando um código de baixo custo computacional que possibilita testar diferentes modelos e com recurso de visualização.

Os resultados obtidos foram comparados com a literatura e se apresentaram satisfatórios. Foram avaliados os efeitos do número de Reynolds e da velocidade da correnteza sobre o escoamento e sobre os coeficientes de arrasto e sustentação.

Palavras-Chave: Engenharia de Petróleo. Simulação. Método dos Vórtices Discretos. Computação Fluido Dinâmica.

ABSTRACT

Hydrocarbons exploration in deep waters, such as the pre-salt fields in Brazilian coast, requires risers (very long pipes that connect the wellhead platform) that are subjected to ocean environment loads, such as waves and currents, and to stresses caused by the movement of the platform to which risers are connected.

In this manuscript, an algorithm to simulate the effects of offshore ocean current loads on risers is presented. This is of great help in the industry since real or scale testing may become expensive and unfeasible due to its large dimensions and quick estimates requirements.

The Discrete Vortex Method (DVM) is chosen for this task because it does not require the description of meshes and it is computationally more efficient than other more widespread methods such as Finite Difference Method (FDM), the Finite Element Method (FEM) and the Finite Volume Method (FVM), although it is based in a simplified flow model.

The main contribution is a DVM algorithm written in Python aiming a low computational cost that enables quick testing of different models and visualization resources. The simulations were compared with the literature and they presented satisfactory results. Effects of changing Reynolds number and current velocity on the flow behavior and on lift and drag coefficients were evaluated for comparison.

Keywords: Petroleum Engineering. Simulation. Discrete Vortex Method. Computational fluid dynamics.

SUMÁRIO

1	Introdução	10
2	Objetivos.	13
2.1	Justificativa.	13
3	Revisão da Literatura	14
4	Materiais e Métodos	19
4.1	Método dos Vórtices Discretos.	19
4.2	Esteira de uma aeronave	22
4.3	Aplicação do MVD em <i>risers</i>	23
5	Resultados	31
5.1	Esteira de uma aeronave	31
5.2	Aplicação do MVD em <i>risers</i>	33
6	Conclusões	40
7	Referências	41

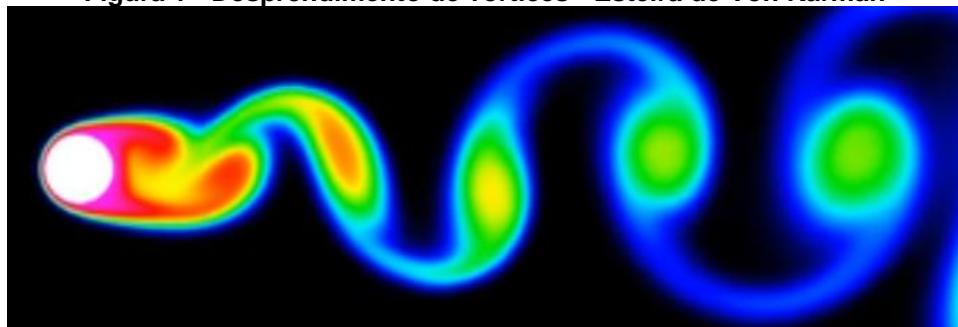
1. Introdução

A Engenharia de Petróleo se destaca por mergulhar nos profundos e gigantes desafios da extração do “ouro negro”. Entre os tantos enfrentados, a exploração de hidrocarbonetos em águas profundas, como os campos do pré-sal brasileiro, submete os *risers* (tubulações que conectam a cabeça de poço à plataforma) às forças da natureza como ondas e correntes marítimas além da movimentação da plataforma à qual ele se conecta.

Essas tubulações são usadas na prospecção de campos de petróleo que podem ter sua vida útil na ordem de algumas décadas. Em águas profundas, a corrente adquire uma grande importância no que se refere a danos aos *risers*. O presente trabalho trata de escoamento ao redor de *riser* onde não há vibração da estrutura, portanto, sem vibrações. Todavia, vale o comentário a respeito da Vibração Induzida por Vórtices (VIV).

Essa vibração ocorre quando um cilindro, como um *riser*, por exemplo, é submetido a uma força de escoamento, no caso, a correnteza do oceano. Essa interação cilindro-correnteza faz surgir uma esteira instável de vórtices como é exemplificado na Figura 1. Esses vórtices se desprendem da estrutura em uma frequência definida pela lei de Strouhal, que leva em conta a velocidade do escoamento e o diâmetro do cilindro, fazendo o corpo vibrar, ou seja, ocorre a VIV (Violette e Szydlowski, 2007). O cálculo e simulação dessas vibrações não são realizados no presente trabalho, todavia o MVD é um meio para conseguir simular essas forças oscilatórias.

Figura 1 - Desprendimento de vórtices - Esteira de Von Karman



Fonte: DolfynNet (2010)

Apesar dessas vibrações não serem apresentadas nos resultados do presente, fazem parte da motivação, pois, o algoritmo aqui desenvolvido pode ser usado futuramente para simulações da VIV.

Na engenharia de petróleo a VIV ocorre nos *risers* com alta razão de aspecto submetidos a escoamentos que variam de intensidade com a profundidade (Filho, 2012). A razão de aspecto é a relação entre comprimento e largura da estrutura. No caso do *riser*, a largura corresponde ao diâmetro. Considerando um duto de 8" (0,2032m) e um comprimento suspenso de 1.500m a razão de aspecto seria de 7.382 (Santos, 2011).

Importante salientar a questão da variação da correnteza de acordo a profundidade, pois, no presente trabalho os resultados apresentam a simulação de uma única seção do *riser*. Para dimensionar completamente esses dutos se faz necessária a simulação de várias seções, para assim, contemplar todo o comprimento do *riser* e consequentemente todas as variações de correntezas às quais ele está sujeito. Isso agrupa muito custo computacional o que justifica o uso de *clusters* para simular várias seções. Depois os resultados das seções são usados em outras simulações, usando método como Elementos Finitos, por exemplo, para determinar a vida útil à fadiga dessas tubulações.

Portanto é de grande importância a existência de códigos de baixo custo computacional para que a simulação de cada seção não se torne um problema na tarefa de dimensionar um *riser*.

A intenção das simulações computacionais é obter dados que auxiliem no dimensionamento dessas estruturas, pois, os métodos experimentais são quase sempre descartados pelo seu alto preço, difícil implementação e pouca precisão de resultados. Dentre os métodos numéricos, a simulação completa do escoamento envolvendo *risers* com grande razão de aspecto é, ainda, computacionalmente inviável se utilizarmos as técnicas convencionais da CFD (*Computational Fluid Dynamics*) que utilizam malhas para discretização do volume de controle no qual o escoamento se desenvolve. (Lima, 2011). A simulação de dinâmica de fluidos computacional completa com modelos estruturais pode ser mais detalhada, todavia é extremamente custosa e por vezes, devido suas limitações, usa números Reynolds nas simulações fora da realidade que existe no ambiente *offshore* (Bourguet et al., 2011). A abordagem poderia ter sido feita pelo modelo semi-empírico

fenomenológico, que tem baixo custo computacional, todavia, tal modelo possui representatividade física limitada. (Facchinetti et al., 2003)

O presente trabalho apresenta o Método dos Vórtices Discretos (MVD) como ferramenta para simular às condições e os comportamentos dos *risers* quando submetidos a uma correnteza. O Método dos Vórtices Discretos ganha espaço na fluido dinâmica computacional por não necessitar da descrição de malhas e ser computacionalmente mais eficiente do que outros métodos mais difundidos como Método de Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Volumes Finitos (MVF). Ele se baseia basicamente na descrição de vórtices no espaço e esses vórtices interagem a cada passo de tempo entre si e com estruturas próximas.

O diferencial presente aqui é o desenvolvimento do método em *Python*, uma linguagem de programação muitas vezes ensinada na graduação e que pode ser aplicada também para projetos envolvendo fluido dinâmica computacional.

2. Objetivos

O trabalho objetiva a implementação do Método dos Vórtices Discretos (MVD) em Python para simular o escoamento ao redor de *risers* usados na extração do petróleo *offshore*. Tem-se como objetivos secundários que a implementação tenha um baixo custo computacional que seja modular para poder testar variações da técnica de Método dos Vórtices Discretos.

2.1. Justificativa

O MVD é um método de maior riqueza física do que o modelo fenomenológico e é menos custoso do que a simulação de dinâmica de fluidos computacional completa (CFD). A implementação do código de maneira modular possibilita testes de diferentes modelos de vórtices, de uma variedade de métodos de marchas temporais, e de métodos específicos associados ao MVD, como a forma de calcular forças hidrodinâmicas.

Posteriormente, há a possibilidade de associação do método implementado à uma análise estrutural possibilitando a modelagem de vibrações induzidas por vórtices.

3. Revisão da Literatura

Segue abaixo uma revisão de trabalhos relevantes a respeito do MVD e do seu embasamento teórico. Os estudos a respeito de vorticidade vêm de alguns séculos atrás e se estendem até a atualidade. Alguns trabalhos como Lima (2011), Flatschart (2007) e Ricciardi (2016) trazem exemplos do uso do método para simulação de perfis de escoamento e forças oscilatórias assim como o presente trabalho faz.

Rayleigh (1896) obteve alguns resultados através de experimentos com as vibrações da corda de um violino. Ele mostrou que a corda vibrava transversalmente ao escoamento do ar que passava ao redor dela, e com isto, definiu um parâmetro adimensional, o número de Strouhal (St), que relaciona velocidade do escoamento com a frequência da emissão de vórtices conforme a Equação 1:

$$S_t = \frac{fL}{V} \quad (1)$$

Onde S_t é o adimensional número de Strouhal, f é a frequência de emissão de vórtices, L é o “comprimento característico (por exemplo o diâmetro hidráulico) e V é a velocidade do fluido. Por mais que seus estudos tenham focado mais em vibrações de objetos imersos no ar, suas descobertas são de grande valia para o estudo dos fenômenos de vibrações em outros meios.

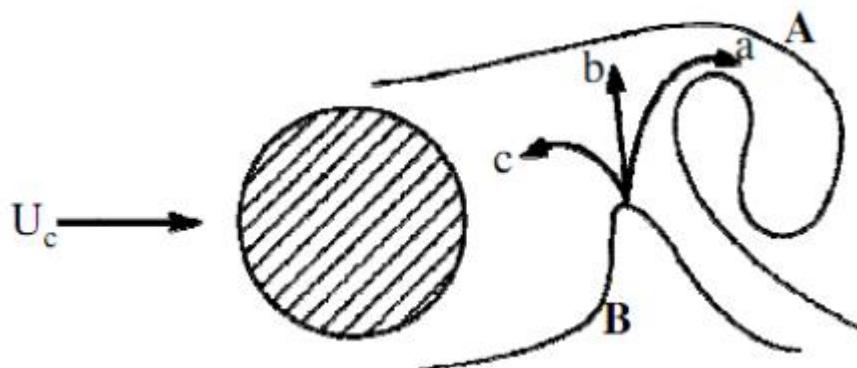
Von Kármán (1911) provou através da análise da estabilidade da esteira de vórtices que o modo de desprendimento de vórtices está diretamente ligado com a periodicidade da emissão dos vórtices que formam a esteira e isso está intimamente ligado ao número de Reynolds que rege o escoamento (Passos e Siqueira, 2011). O foco do trabalho foi as características da esteira formada a jusante de um corpo, feita através de uma representação por vórtices potenciais.

Bishop e Hassan (1964) foram um dos pioneiros na investigação da frequência de emissão de vórtices quando um cilindro circular oscila forçadamente na

direção transversal ao escoamento, tendo como base o trabalho de Rayleigh (1896). Eles descobriram que a aproximação entre frequência de oscilação do cilindro e a frequência associada ao número de Strouhal resultava numa sincronização entre a frequência de oscilação do corpo e a frequência de oscilação do coeficiente de sustentação. Notaram também que quando a frequência de oscilação do corpo variava próximo à frequência de emissão de vórtices, ocorria uma variação brusca do ângulo de fase entre a força transversal e o deslocamento do corpo. Devido a isso, a amplitude de oscilação aumentava de maneira abrupta.

Gerrard (1966) mostrou que o principal elemento no processo de formação dos vórtices da esteira deve ser a interação mútua entre as duas camadas cisalhantes geradas pelo desprendimento da camada limite. Além disso, mostra que um vórtice irá crescer devido à circulação oriunda da camada cisalhante a qual ele está conectado. Em um dado instante, o vórtice aumenta de tal forma que pode atrair a camada cisalhante oposta, que apresenta vorticidade com sinal oposto. A interação do vórtice em formação com a camada cisalhante oposta encerrará a alimentação de circulação do vórtice que estava em crescimento, sucedendo assim seu desprendimento para a esteira a jusante do corpo como mostra a Figura 2.

Figura 2 - Processo de desprendimento de vórtices



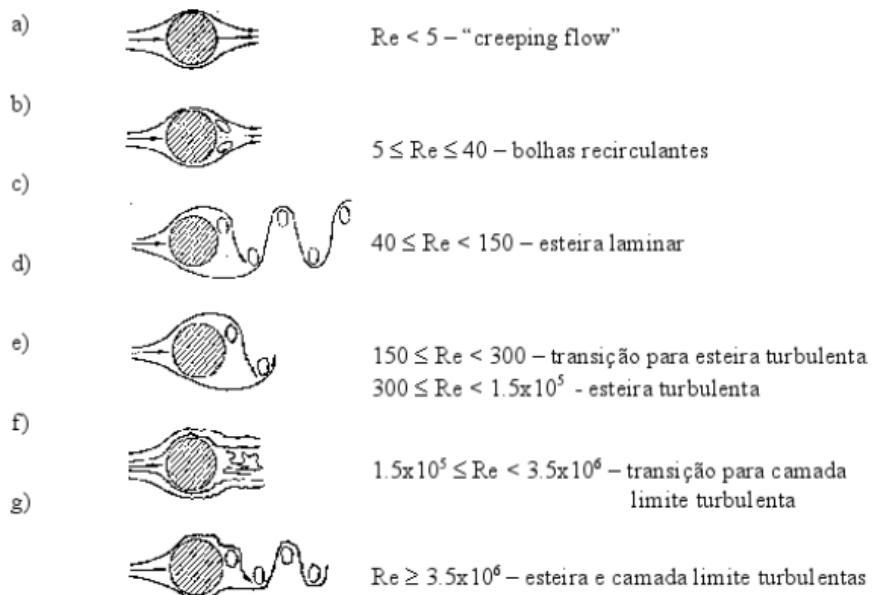
Fonte: Gerrard (1996)

As setas (a), (b) e (c) indicam partes do fluxo do fluido da camada cisalhante oposta interagindo com o vórtice que está sendo formado (A). O fluxo do fluido que segue na direção (a) se incorpora ao vórtice (A) e aumenta o tamanho dele e diminui sua circulação, dado que tem vorticidade contrária à presente no vórtice. O fluxo que segue na direção (b) contribui para o desprendimento do vórtice (A) pois

cancela a alimentação dele. Por último, o fluxo na direção (c) gerará o futuro vórtice (B), produzindo um novo vórtice que será alimentado e desprendido.

A Figura 3 mostra como a esteira formada depende do número de Reynolds. Para Reynolds baixo o fluxo é laminar e não se formam vórtices. Conforme esse número cresce o fluxo passa por uma esteira laminar e depois começa a se tornar turbulento. Portanto fica clara a dependência do perfil da esteira com número de Reynolds. Sabendo disso, posteriormente, nos resultados desse trabalho, perfis de escoamento serão comparados tendo como parâmetro a variação do número de Reynolds.

Figura 3 - Regime de Emissão de vórtices para cilindros lisos



Fonte: BLEVINS (1990, apud Flatschart, 2007)

Flatschart (2007) analisou numericamente a resposta dinâmica de um riser marítimo devido à geração e desprendimento alternado de vórtices. Os resultados são comparados com resultados obtidos experimentalmente. Processamento paralelo é empregado para melhorar a performance do método. As simulações são realizadas através de uma metodologia mestre-escravo, utilizando MPI *Message Passing Interface* para explorar o paralelismo. Isso foi feito porque ele

analisou várias seções do *riser*, o que demandava mais custo computacional, diferente do presente trabalho em que apenas uma seção. O trabalho representa o desenvolvimento de um simulador que permite, efetivamente, a análise dinâmica de um *riser* com características e dimensões representativas das condições reais encontradas em campo, a um custo computacional factível para seu uso como uma ferramenta de engenharia. Isto é obtido por meio da técnica de processamento paralelo, aliada à solução do escoamento através de um método eficiente de CFD Método dos Vórtices Discretos e à solução da estrutura através do Método dos Elementos Finitos.

Lima (2011) abordou o escoamento ao redor de cilindros flexíveis que vibram (diferente do que será abordado nesse trabalho que simula escoamento sem vibração da estrutura), representando os *risers* utilizados na E&P em águas profundas. O método dos vórtices discretos foi utilizado para estimativa dos coeficientes hidrodinâmicos nas seções correspondentes, depois, para resolver essa dinâmica, foi aplicado o método dos elementos finitos implementado no código Anflex desenvolvido pela Petrobras. Processamento paralelo foi utilizado para acelerar o desempenho do método numérico, o que evidencia a grande demanda computacional dessas simulações. As seções hidrodinâmicas são igualmente divididas ao longo dos nós de um cluster de computadores utilizado nos cálculos e cada nó resolve o escoamento nas seções hidrodinâmicas necessárias. Uma das contribuições desse trabalho foi possibilidade de análise de *risers* em regime pós-crítico (caso (g) da Figura 3), através da imposição do ponto de separação da camada-limite baseado em resultados experimentais, e da modelagem de casos com *risers* em *tandem*. O resultado foi a criação de uma ferramenta alternativa no projeto de *risers* de grande razão de aspecto, como uma forma de avaliação do comportamento dinâmico da estrutura submetida a diferentes perfis de corrente e, consequentemente, a estimativa do tempo de sua vida útil.

Passos e Siqueira (2011) estudaram o escoamento bidimensional ao redor de um cilindro circular estacionário ou oscilando forçadamente na mesma direção deste escoamento através de simulações numéricas utilizando o Método de Vórtices Discretos. Evidenciaram o grande interesse no meio tecnológico, uma vez que o entendimento da formação e desprendimento de vórtices (*vortex shedding*) a

partir de um simples cilindro oscilando forçadamente apresenta fenômenos tão complexos quanto aqueles que se manifestam nas geometrias mais complicadas. Descreveu-se o escoamento não-permanente que se desenvolve a jusante do corpo que induz flutuações nas forças de arrasto e de sustentação, o que pode faz a estrutura eventualmente vibrar, caso haja sincronização com uma das frequências naturais do corpo; fenômeno conhecido como Vibração Induzida por Vórtices (V.I.V.). A contribuição consistiu em agregar resultados aos poucos disponíveis na literatura para oscilações do cilindro circular na mesma direção deste escoamento.

Filho (2012) apresenta dois modelos fenomenológicos para predição de vibração induzida por vórtices em *risers*. O trabalho merece destaque pela clareza e simplicidade com que explica a VIV. Um código em *Matlab* foi implementado para resolver o sistema e apresentar os resultados da VIV. O trabalho comparou a estrutura de um *risers* a um sistema massa-mola equivalente e apresentou resultados coerentes.

Ricciardi (2016) discutiu um pouco mais a fundo os métodos usados para modelar os efeitos da difusão; como o método do passo aleatório, método do crescimento do núcleo e método da troca de intensidade. Os termos de convecção foram resolvidos pela utilização da derivada material para evitar termos não-lineares. Além disso, discorreu sobre o dispendioso passo de convolução com $O(N^2)$ operações, que impõe restrição no uso do método para a solução de problemas típicos de engenharia, sobretudo aqueles com muitas estruturas diferentes próximas. Como alternativa para otimizar o grande custo computacional e consequentemente de tempo fez uso do método de multipolos rápidos, *FMM* (*Fast Multipole Method* em inglês), considerado um dos 10 melhores algoritmos do século 20 para a solução da interação gravitacional entre N corpos. O algoritmo consiste no agrupamento da influência de elementos próximo entre si, e então calcula-se a interação em regiões distantes, como por exemplo o centro de outro agrupamento. Esta operação tem custo computacional de ordem $O(N)$ para um número N suficientemente grande. Importante salientar que nesse trabalho o FMM não foi implementado, sendo assim uma sugestão para trabalhos futuros.

4. Materiais e Métodos

4.1 Método dos Vórtices Discretos

O MVD simula escoamentos ao redor de corpos rombudos modelando as camadas cisalhantes, regiões do escoamento portadoras de elevado gradiente vorticidade. Para o nosso caso, foi usado um sistema Lagrangiano de referência, assim como em Lima (2011). Em escoamentos ao redor de corpos rombudos, a geração de vorticidade nas paredes do corpo é um efeito viscoso. A modelagem dos efeitos viscosos, incluindo a difusão, é necessária, pelo menos, na região da camada-limite ao redor dos corpos. A equação da continuidade de acordo com a descrição Lagrangiana de partículas fluidas é dada pela Equação 2:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{u} \quad (2)$$

Em que ρ é a massa específica do fluido, u é o campo de velocidades do escoamento. Como para as simulações do presente trabalho o fluido é incompressível, $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ logo $\rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$ também. A equação de Navier-Stokes para um fluido incompressível e Newtoniano é dada pela equação 3.1:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (3.1)$$

Sendo p a pressão e ν a viscosidade cinemática. Tomando-se o rotacional da Equação 2 e dado que $\nabla \times \vec{u} = \vec{\omega}$, sendo $\vec{\omega}$ a vorticidade, temos a Equação 3.2 denominada transporte de vorticidade:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (3.2)$$

O termo $(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u}$ é igual a 0, pois nas simulações o escoamento é bidimensional, sendo assim a Equação 3.2 pode ser escrita da seguinte forma (Equação 3.3):

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = v\nabla^2\vec{\omega} \quad (3.3)$$

As velocidades induzidas locais que causam o deslocamento dos vórtices discretos são avaliadas pela lei de Biot-Savart, isso significa que no MVD os vórtices são convectados por um campo de velocidades gerados por uma linha de corrente. Isso ficará mais claro quando for explicado o tratamento dado a correnteza oceânica. A cada passo de tempo o campo de velocidades se modifica, assim como a intensidade da circulação dos vórtices que regem o escoamento.

Para convectar os vórtices é necessário o uso de algum método de marcha no tempo como: Euler (Equação 5), Runge-Kutta ordem 2 (Equação 6), e Runge-Kutta ordem 4 (Equação 7) (HIRSCH, 2007).

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad (5)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n)) \quad (6)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (7)$$

Onde y é o vetor posição, h é o intervalo de tempo entre os passos adotado na simulação, k_1, k_2, k_3 e k_4 estão, respectivamente definidos nas Equações 8, 9, 10 e 11, f é um operador, que no presente trabalho é a velocidade induzida no vórtice pelos demais vórtices, como mostra a Equação 12. O estilo de vórtice usado que é baseado no modelo *blob* (Krasny, 1986, apud Ricciardi, 2016).

$$k_1 = f(t_n, y_n) \quad (8)$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \quad (9)$$

$$k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2) \quad (10)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + h k_3) \quad (11)$$

$$f(t_n, y_n) = \frac{\Gamma_j}{2\pi r_{ij}^2} [i(x_i - x_j) + (y_i - y_j)] \quad (12)$$

Sendo Γ_j a rotação do vórtice j , r a distância entre os dois vórtices i e j e x, y as posições no plano xy dos vórtices. A cada passo de tempo h , é necessário que um vórtice induza velocidade em todos os outros e seja induzido por todos. Isso encarece o método em termos computacionais pois um aumento n no número de vórtices aumenta o número de simulações em n^2 .

Um dos grandes desafios desse trabalho foi elaboração de um código em Python que pudesse ser leve para simular casos simples em poucos minutos. É interessante ressaltar que todas as simulações, portanto, foram realizadas em um *notebook* comum, 4,00 GB de memória Ram e processador de 2 núcleos, com frequência de 2.20 GHz e os tempos de simulação apresentados nos resultados tem como base esse referencial.

Para facilitar a validação do código primeiro foi realizado um caso em que não há paredes interagindo com o escoamento. O caso simula a esteira de uma aeronave em movimento e foi retirado de Ricciardi (2016). Nesse caso foram implementados os 3 métodos de marcha acima apresentados: Euler, Runge-Kutta ordem 2 e Runge-Kutta ordem 4. Depois desse primeiro, foi implementado o caso em que há parede (no caso o *riser*) interagindo com o escoamento, nesse segundo caso apenas Euler foi usado.

Isso facilita a validação pois no primeiro caso foi possível testar as etapas de convecção e difusão no algoritmo e analisar se estavam funcionando como o esperado. Depois ao realizar a aplicação em *risers* foi possível testar como o código estava reagindo quando havia geração de vórtices na parede a cada passo de tempo e os parâmetros de amalgamação, tendo a certeza que as etapas de difusão e convecção estavam funcionando perfeitamente.

4.2 Esteira de uma aeronave

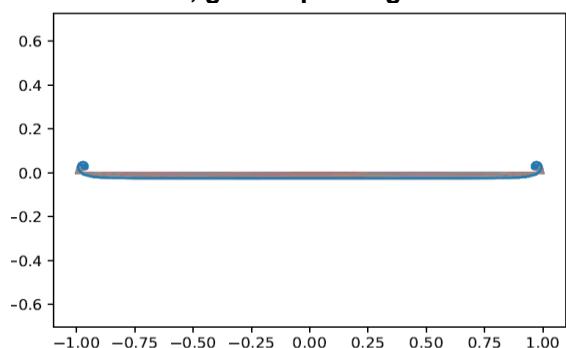
Nesse primeiro caso, para validação do MVD e teste dos métodos numéricos iterativos, foi simulado o perfil formado pelo escoamento de uma asa de um avião em movimento. Empiricamente, tem se o conhecimento que a asa de um avião em movimento causa uma estrutura vorticial por onde passa. O objetivo do programa é simular a formação dessa estrutura, como pode ser visto na Figura 4 e representado em sequência no plano bidimensional na Figura 5.

Figura 4 - Exemplo de vórtices formados pela asa de um avião em movimento



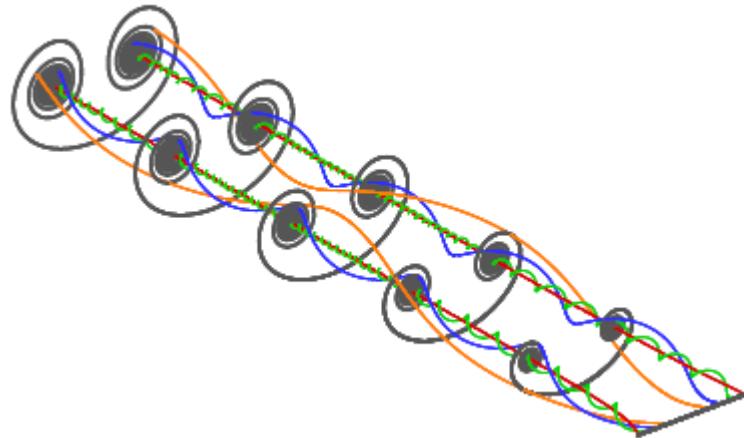
Fonte: Chemtrailbrasil (2015)

Figura 5 - Escoamento simplificado de asa de avião, gerado pelo algoritmo



O MVD resolve a evolução temporal do escoamento dos vórtices (Figura 6). O problema do valor inicial modela a vorticidade causada pela asa. (Ricciardi, 2016). Esta figura também apresenta os caminhos para diferentes partículas de vórtice obtidas pelo MVD. Como pode-se ver, os caminhos próximos para o centro do vórtice têm frequências angulares mais altas com pequena amplitude, enquanto partículas mais longe da ponta apresentam frequências mais baixas, mas maior amplitude.

Figura 6 - Evolução Temporal do vórtice. Linhas com diferentes cores representam diferentes caminhos possíveis.



Fonte: Ricciardi (2016)

No algoritmo o escoamento é plotado em um plano bidimensional, pela facilidade de analisar os resultados e menor custo computacional. A asa do avião no algoritmo é representada por uma esteira de 1000 vórtices em linha, posicionados entre -1 e 1 no eixo x, ou seja, o comprimento da asa do avião foi normalizada para um eixo que varia de -1 a 1. A força de sustentação da asa é dada pela derivada da circulação ao longo do eixo x, que representa a envergadura do avião, então a circulação é dada pela Equação 13. Dessa forma consegue-se estimar a circulação inicial dos vórtices (Ricciardi, 2016).

$$\frac{d\Gamma}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (13)$$

4.3 Aplicação do MVD em *risers*

Para aplicação em *risers* elaborou-se o caso de um cilindro submetido a uma correnteza constante. A intenção é simular um *riser offshore* submetido à correnteza marinha. De maneira simplificada, o algoritmo funciona da seguinte forma:

- Vórtices têm sua posição e circulação inicial descrita pela condição de aderência à parede existente no escoamento em questão;

- A circulação de cada vórtice induz velocidade nos outros de forma a convecá-los. Utiliza-se o método de Euler para realizar a movimentação deles para uma nova posição a partir da velocidade induzida;
- Dado a nova posição os vórtices novamente, com suas respectivas circulações, induzem velocidade nos outros.
- Vórtices não podem penetrar na parede do *riser* portanto, ao ocorrer essa condição eles são eliminados e sua circulação é incorporada ao sistema.
- Quando o número de vórtices se torna elevado, aumentando o custo computacional, eles são amalgamados.
- Novos vórtices são criados na parede do corpo a cada passo de tempo (Figura 7) e o processo se repete;

De acordo com Lima (2011), para modelar o escoamento, deve-se realizar a sobreposição dos efeitos da velocidade da correnteza do oceano e das velocidades que são induzidas pelos vórtices a cada passo de tempo. Além disso, o *riser* é considerado rígido e fixo, portanto, sua posição inicial permanece constante e, a cada passo de tempo qualquer vórtice que “entrar” nessa posição deve ser eliminado e sua circulação incorporada no próximo passo de tempo. Para um escoamento incompressível, a linha de corrente pode ser definida como:

$$\vec{u} = \nabla_x \vec{\Psi} \quad (14)$$

Os casos apresentados no presente trabalho foram desenvolvidos no plano bidimensional *xy*, portanto teremos apenas a componente perpendicular ao plano para a função linha de corrente. Portanto, o campo de velocidade *u* pode ser definido como o vetor gradiente da função corrente em *y* e em *x*.

Como já dito, os vórtices são, no algoritmo, partículas que são convectadas pelo escoamento. Por conseguinte, a velocidade induzida por um vórtice pontual, com circulação Γ é, em coordenadas polares, dada pela Equação 15:

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (15)$$

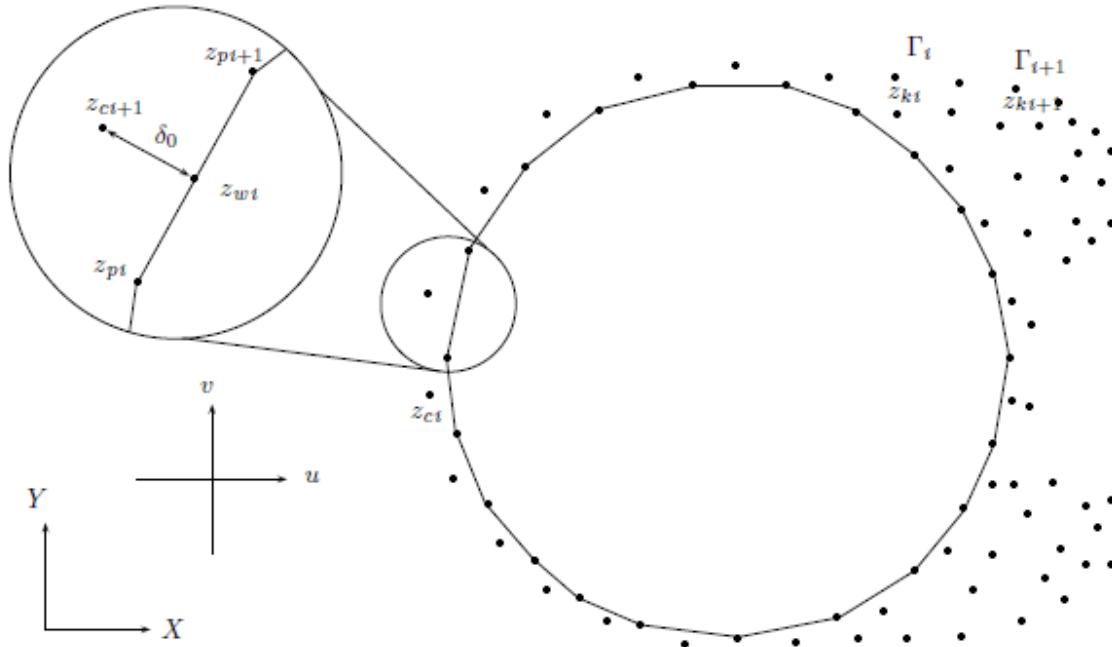
Sendo r a distância entre o vórtice e o ponto no qual se deseja calcular a velocidade induzida (Lima, 2011). De acordo Park e Higuchi (1989) (Citado em Lima, 2011) para $r=0$ existiria uma descontinuidade na Equação 14, portanto para tratar isso e adicionar o efeito de viscosidade, a distância r é tratada como na Equação 16:

$$\frac{1}{r} = \frac{r}{r^2 + \sigma^2} \quad (16)$$

Desta forma, a cada passo de tempo o valor do fator σ pode ser aumentado para simular o efeito de dissipação viscosa do tamanho do núcleo do vórtice. Além disso faz com que o vórtice seja um corpo rígido de raio sigma. O erro do método é proporcional à $O(\sigma^2)$, portanto, se há um crescimento indefinido desse valor, perde-se o controle sobre o erro das simulações. (Leonard, 1980, apud Ricciardi, 2016).

O corpo é descrito por painéis, neste trabalho as simulações foram feitas com 32 painéis, valor usado em Flatschart (2007), Lima (2011) e Ricciardi (2011), no centro de cada painel um novo vórtice é criado a cada passo de tempo, como pode ser visto na figura 7. Como a intenção é representar um *riser* circular, faz-se necessário um número alto de painéis formando um polígono fechado. Todavia, o aumento desse número influencia diretamente no custo computacional dado que, a cada passo de tempo, novos vórtices vão sendo inseridos no sistema e, caso não sejam removidos por amalgamação (conceito exposto um pouco a frente), interagirão com todos os outros existentes a cada passo de tempo.

Figura 7 Discretização do *riser* por painéis e surgimento de vórtices a partir do centro de cada painel



Fonte: Lima (2011)

Para a etapa de criação dos vórtices é definida a função corrente, dada pela soma das contribuições da função da corrente livre, da função corrente dos vórtices criados e da função corrente dos vórtices já existentes. As equações abaixo, extraídas de Lima (2011), mostram a definição da função corrente e, dessa forma, constrói-se um sistema linear que é resolvido a cada passo de tempo a fim de descobrir as novas circulações que são responsáveis pela indução das velocidades no sistema:

- Função corrente livre:

$$\Psi_{c.l} = \text{Im}[z_{w_i}(u - iv)] \quad (17)$$

- Função corrente dos vórtices criados:

$$\Psi_{v.c} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{n_w} \Gamma_j \ln(\left|z_{w_i} - z_{c_j}\right|^2 + \sigma_o^2) \quad (18)$$

- Função corrente dos vórtices existentes:

$$\Psi_{v,e} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{n_v} \Gamma_j \ln(\left|z_{w_i} - z_{k_j}\right|^2 + \sigma_j^2) \quad (19)$$

A variável $\Psi_{c,l}$ representa a função corrente livre, $\Psi_{v,c}$ a função corrente dos vórtices criados, $\Psi_{v,e}$ a função corrente dos vórtices existentes, Γ o vetor circulação, z_k a posição dos vórtices existentes, z_w a posição dos vórtices criados, u a componente real da velocidade da correnteza e v a componente imaginária. Dessa forma, assumindo que o corpo é uma linha de corrente e não pode ser penetrado, constrói-se um sistema linear que é resolvido a cada passo de tempo, dado por:

$$[A]\{\Gamma\} = \{B\} \quad (20)$$

Sendo a matriz A,

$$a_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{\left|z_{w_{i+1}} - z_{c_j}\right|^2 + \sigma_o^2}{\left|z_{w_i} - z_{c_j}\right|^2 + \sigma_o^2}\right) \quad (21)$$

E a matriz B,

$$b_i = \text{Im}[z_{w_i}(u - iv)] - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{n_v} \Gamma_j \ln\left(\frac{\left|z_{w_{i+1}} - z_{k_j}\right|^2 + \sigma_j^2}{\left|z_{w_i} - z_{k_j}\right|^2 + \sigma_j^2}\right) \quad (22)$$

A matriz $[A]$ portanto é dada pela geometria do corpo e faz dele uma linha de corrente. Sendo assim, o corpo é impermeável. A influência da corrente e dos vórtices pré-existentes são consideradas na matriz B. A cada passo de tempo as circulações são calculadas e depois os vórtices são convectados de acordo a Equação 15.

Visando a redução de custo computacional, reproduziu-se um mecanismo de amalgamação, presente em Lima (2011). De forma simples, são estabelecidos alguns critérios que, se satisfeitos, juntam dois vórtices em um. Isso também tem custo computacional, dado que, a cada passo de tempo os vórtices precisam ser examinados par a par. Todavia, como também a cada passo, n novos vórtices são criados, a amalgamação se justifica pois diminui em muito o tempo de

simulação e não exerce grande influência sobre os resultados. A seguinte condição deve ser satisfeita para que haja amalgamação:

$$\frac{\Gamma_i \Gamma_j}{|\Gamma_i + \Gamma_j|} \frac{|Z_i - Z_j|^2}{|D_0 + d_i|^{1.5} |D_0 + d_j|^{1.5}} < V_0 \quad (23)$$

Este critério amalgama vórtices próximos entre si e distantes do *riser*, afetando pouco a região do escoamento próxima ao corpo. Quando a condição é satisfeita, dois vórtices se tornam um e sua posição, circulação e núcleo são definidos por, respectivamente:

$$\Gamma = \Gamma_i + \Gamma_j \quad (24)$$

$$Z = \frac{Z_1 \Gamma_1 + Z_2 \Gamma_2}{\Gamma} \quad (25)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_1 \Gamma_1 + \sigma_2 \Gamma_2}{\Gamma} \quad (26)$$

Sendo d_i e d_j as menores distâncias entre os vórtices localizados nos pontos Z_i e Z_j e a fronteira do corpo. D_0 e V_0 são parâmetros que podem ser alterados a fim da amalgamação ser mais ou menos criteriosa. Altos valores de V_0 mantêm o número de vórtices constante após um dado intervalo de tempo e os valores de D_0 são proporcionais à distância do ponto em que ocorrerá amalgamação da parede mais próxima.

Desta forma, há um controle sobre o número de vórtices no escoamento e o custo computacional pode ser pouparado visto que, quanto mais vórtices presentes no escoamento, mais custosa, em termos de tempo, é a simulação.

De acordo Lima (2011), a velocidade induzida no vórtice é máxima quando $r = \sigma$ e, utilizando essa informação, temos que, para tratamento do termo viscoso, a taxa de crescimento do núcleo do vórtice é dada pela equação 27, esta é a etapa difusiva do MVD.

$$\sigma_{n+1}^2 = \sigma_n^2 + 4.946 v dt \quad (27)$$

A esteira formada (esteira de Vón Karman) gera um desprendimento alternado de vórtices, causando um gradiente de pressão oscilatório na parede do cilindro. Essas pressões podem ser expressas como uma força resultante. Esta é a grande utilidade do MVD quando se fala de *risers*. Pois, através dele, é possível medir essas forças e assim ter mais subsídios para dimensionar essas estruturas de forma que elas não se fadiguem durante sua vida útil.

A variação de pressão ao longo da parede do corpo pode ser descrita como a aceleração do corpo na direção tangencial dos painéis (como estamos tratando de um corpo rígido, é zero) e do fluxo de circulação nos painéis. Tal força pode ser decomposta nas componentes de arrasto e de sustentação. Cada painel é considerado uma linha de corrente e, portanto, impermeável; cada vórtice que “entra” no painel deve ser eliminado e sua circulação incorporada no próximo passo da simulação. A distribuição de pressão ao longo da parede do corpo em função da variação da circulação e aceleração é, de acordo Lima (2011), dada pela equação 28.

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\rho \frac{\Delta \Gamma}{\Delta t \Delta s} - \rho \vec{a}_{corpo} \vec{e}_s \quad (28)$$

\vec{e}_s é o versor tangencial ao painel. Integrando a pressão ao longo da parede do corpo, obtém-se a força resultante. Na prática, somam-se as contribuições de colisão dos vórtices, que é $\Delta \Gamma$ em cada painel que é Δs . Esses valores são salvos durante as simulações do programa de forma que seja possível plotar os coeficientes de arrasto e sustentação posteriormente.

Na literatura (especificamente em Ricciardi (2016), Flatschart (2007) e Lima (2011)), os resultados de simulações semelhantes são reproduzidos em função dos coeficientes de arrasto e sustentação. De forma a validar os resultados do presente trabalho, fez-se uso da mesma notação, dadas nas Equações 29 e 30 para depois adimensionalizar a força e comparar com os resultados obtidos com a literatura.

$$C_D = \frac{\vec{F}_{total} \vec{e}_x}{\frac{1}{2} \rho U^2 D L} \quad (29)$$

$$C_L = \frac{\vec{F}_{total} \vec{e}_y}{\frac{1}{2} \rho U^2 D L} \quad (30)$$

Considerando para os casos bidimensionais, L uma envergadura unitária.

5. Resultados

5.1 Esteira de uma aeronave

As figuras 8 a 13 abaixo mostram os resultados obtidos para diferentes passos de tempo dt e métodos marcha no tempo. Eles mostram claramente o quanto o refinamento do resultado é afetado pelas mudanças nos métodos de iteração. Todas as simulações têm 0,5 segundo de tempo e o passo de tempo (definido como dt) foi alterado ao longo das simulações, assim como o método iterativo. Ambos eixos são normalizados. O eixo x representa o eixo no qual a asa do avião se encontra. O plano xy fornece o *plot* bidimensional da estrutura vortical formada e eixos xy não estão na mesma escala, a fim de facilitar a visualização.

Figura 8 - Euler $dt=1e-04$ Tempo gasto para simulação: 36.676 segundos

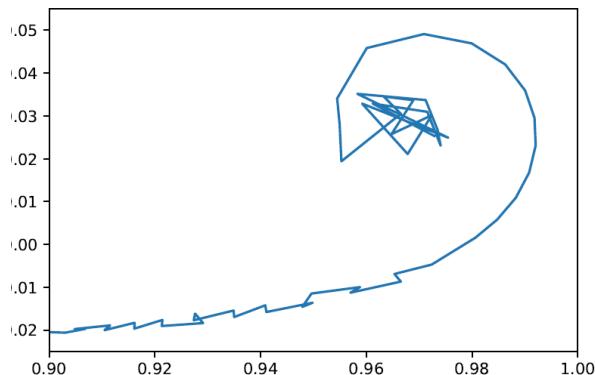


Figura 9 - Euler $dt=1e-05$ Tempo gasto para simulação: 370.873 segundos

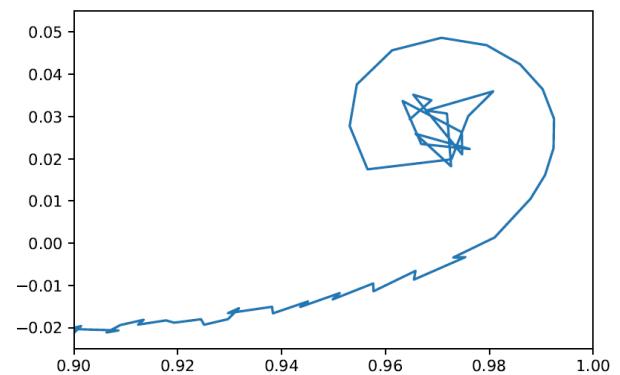


Figura 10 - RK2 $dt=1e-04$ Tempo gasto para simulação: 66.192 segundos

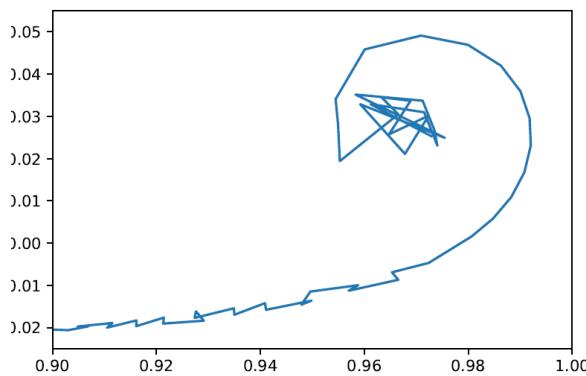


Figura 11 - RK2 $dt=1e-05$ Tempo gasto para simulação: 401.635 segundos

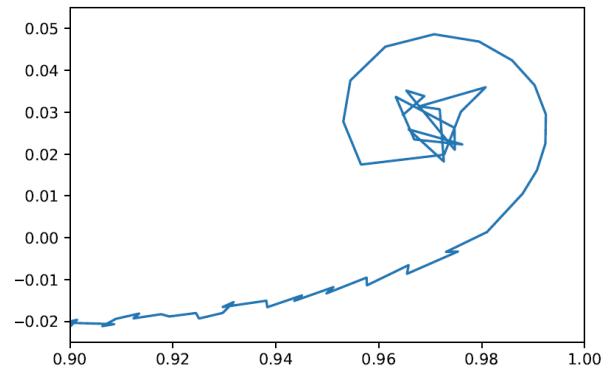


Figura 12 - RK4 $dt=1e-04$ Tempo gasto para simulação: 228.538 segundos

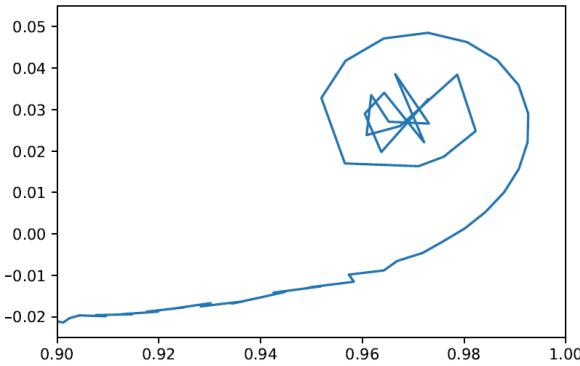
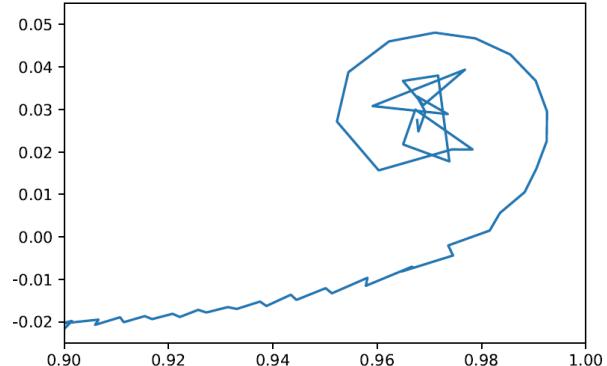


Figura 13 - RK4 $dt=1e-05$ Tempo gasto para simulação: 1160.257 segundos



Como pode-se notar, os resultados obtidos pelo método de Euler são tão sujeitos a ruído quantos os demais, ou seja, no enrolamento dos vórtices o caminho percorrido é mais contínuo e uniforme. Além disso, requerem muito menos recurso computacional. Todavia, o enrolamento deles é mais aleatório do que nos métodos de Runge-Kutta de segunda e quarta ordem. Pode-se notar que na figura 8 por exemplo, a estrutura mal começa a formar a curva e já se enrola totalmente no que tende a ser o centro do vórtice. Já nos métodos RK2 e RK4 isso demora um pouco mais para acontecer.

O método de segunda ordem fica no meio do caminho e não consegue oferecer muitas melhorias no resultado quando comparado a Euler nestes casos apresentados e, além disso, exige mais tempo computacional. Já o método de quarta ordem, sobretudo com menor dt , apresenta um enrolamento mais fiel e, como pode ser visto, tem o maior custo computacional. Para as simulações que serão ainda apresentadas, envolvendo *risers*, o custo computacional é uma variável importantíssima. Portanto, o método de Euler se mostrou mais adequado para a presente demanda, caso seja necessária maior precisão é preferível diminuir o dt do que mudar o método iterativo.

Vale aqui o comentário que o maior agregador de custo computacional é o cálculo das velocidades induzidas, que ocorre a cada passo dt . Como pode ser observado por exemplo nas figuras 8 e 9, uma redução de 90% no dt implica em um aumento de aproximadamente 900% no tempo de simulação.

5.2 MVD aplicado a *risers*

Para caracterizar diferentes casos de análises foram realizados testes alterando as seguintes variáveis:

- Número de Reynolds
- A velocidade da correnteza oceânica

A escolha do número de Reynolds se deu porque, conforme exposto anteriormente, ele governa o regime do escoamento (Figura 3). Logo com a alteração desse parâmetro é possível obter diferentes perfis de escoamento e diferentes comportamentos dos coeficientes de arrasto e sustentação. Já a alteração da velocidade da correnteza oceânica serve como visualização de como os vórtices são convectados pelo método.

Para todas as simulações foram usados: 100 unidades de tempo de escoamento, que se mostrou um valor suficiente para formação da esteira de vórtices e haver base comparativa com a literatura. 32 painéis para representação do *riser*, valor usado também em Flatschart (2007) e Lima (2011). Raio do vórtice igual a $0.015625 \left(\frac{1}{(2 * n_{painéis}^o)}\right)$ e o tempo de simulação não ultrapassou os 10 minutos em nenhum dos casos apresentados. Os padrões de amalgamação foram, $V0 = 1.25 * 10^{-7}$ e $D0 = 1 * 10^{-6}$ extraídos de Lima (2011).

As figuras de 14 a 17 mostram o efeito do Número de Reynolds no perfil do escoamento, todas as simulações feitas com raio do *riser* $r=0.5\text{ m}$, $dt=0.25\text{ s}$ e velocidade da correnteza= 1.00 m/s . Esses parâmetros são apenas uma base, pois o que rege o escoamento é o número de Reynolds. Todavia, a visualização do perfil com o *riser* nesse raio se mostrou boa, o dt permitiu resultados consistentes e com baixo custo computacional e a velocidade da correnteza foi escolhida com objetivo de não convectar os vórtices nem muito rapidamente nem muito lentamente, como poderá ser visto em resultados mais a frente nas figuras 22, 23 e 24. A cor azul nos resultados de perfil de escoamento significa rotação horária e a vermelha, anti-horária e o raio dos vórtices não estão representados nas imagens.

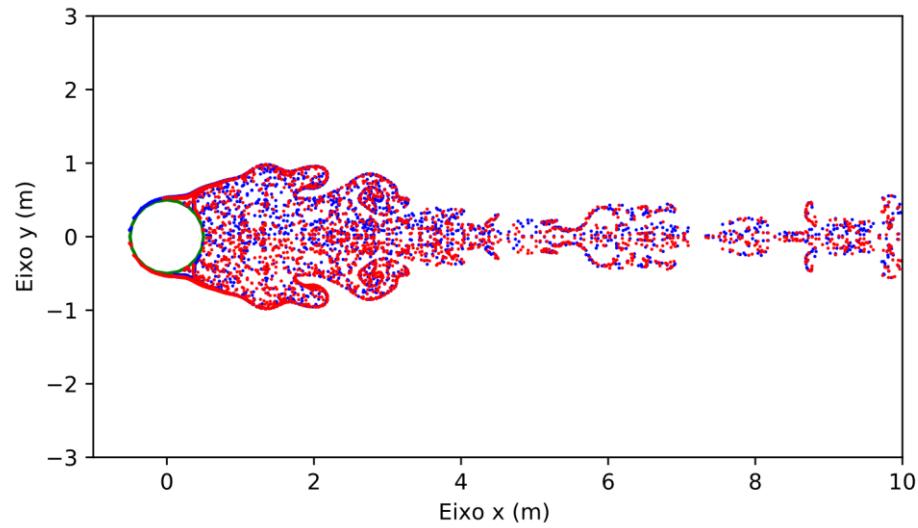
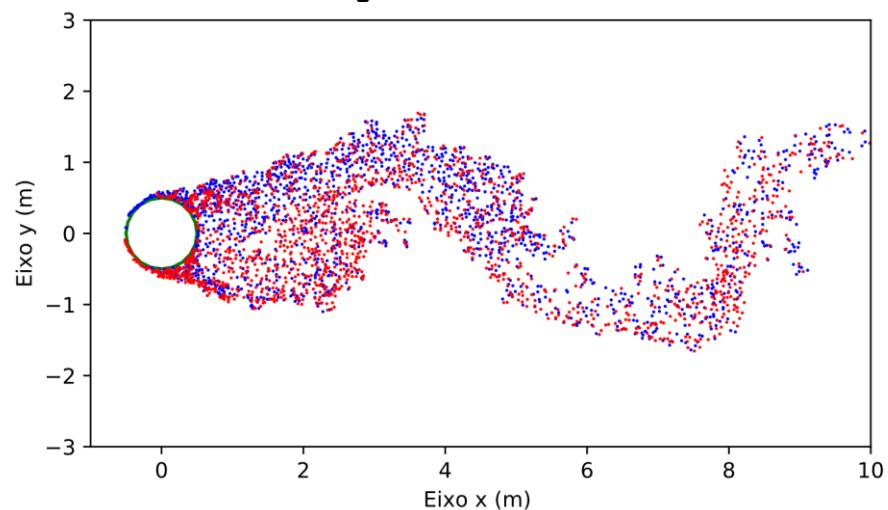
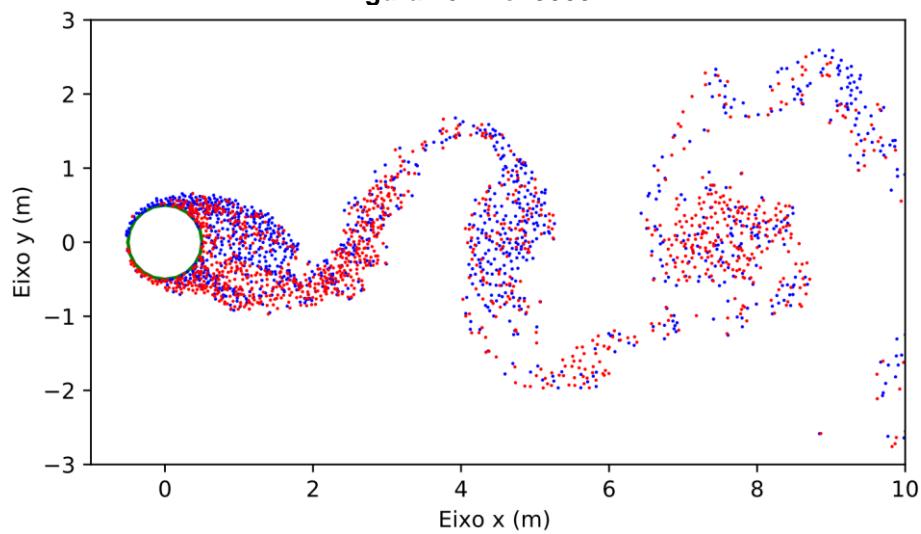
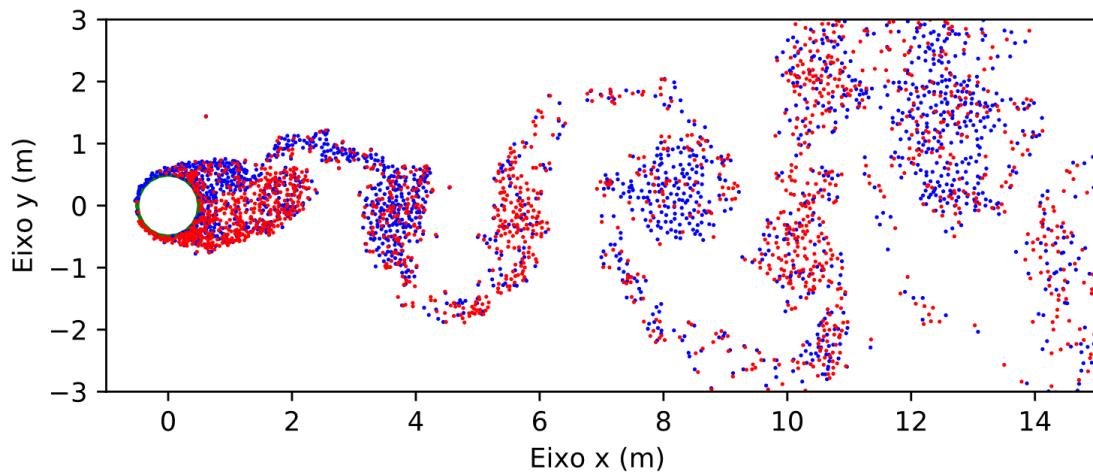
Figura 14 - Re=10**Figura 15 - Re=500****Figura 16 - Re=5000**

Figura 17 - $Re = 20000$



Os perfis de escoamento se diferem pela mudança no número de Reynolds e, como a velocidade do escoamento e o diâmetro dos vórtices se mantiveram constantes, a mudança no escoamento significa diretamente uma mudança na viscosidade.

Escoamentos laminares como da Figura 14 não acontecem em situações de engenharia *offshore*, todavia sua simulação mostra como seria um perfil sem formação de uma esteira alternada e serve como reforço para mostrar que o regente do perfil de escoamento é o número de Reynolds. Escoamentos como das Figuras 15, 16 e 17 acontecem nos ambientes em que os *risers* são utilizados.

Quanto menor o número de Reynolds, mais o escoamento se aproxima do laminar e a esteira é mais estável (Figuras 14 e 15), conforme esse número aumenta, a taxa de aglomeração e frequência dos vórtices também aumenta (Figuras 16 e 17). Assim como o diferencial de pressão em torno do *riser*, e por consequência, as forças às quais ele está sujeito se alteram juntamente.

As figuras 18 e 19 mostram a diferença entre o escoamento com número de Reynolds iguais a 10 e 10000 respectivamente, em função dos coeficientes de arrasto e sustentação. O valor de 10 foi escolhido pois o perfil dele apresentou uma

esteira praticamente estável. Já o valor de 10000 foi usado por se aproximar um pouco mais da realidade do ambiente *offshore*.

Figura 18 - Série temporal dos coeficientes de força para Reynolds=10, raio riser=0,25m e correnteza=0,25m/s

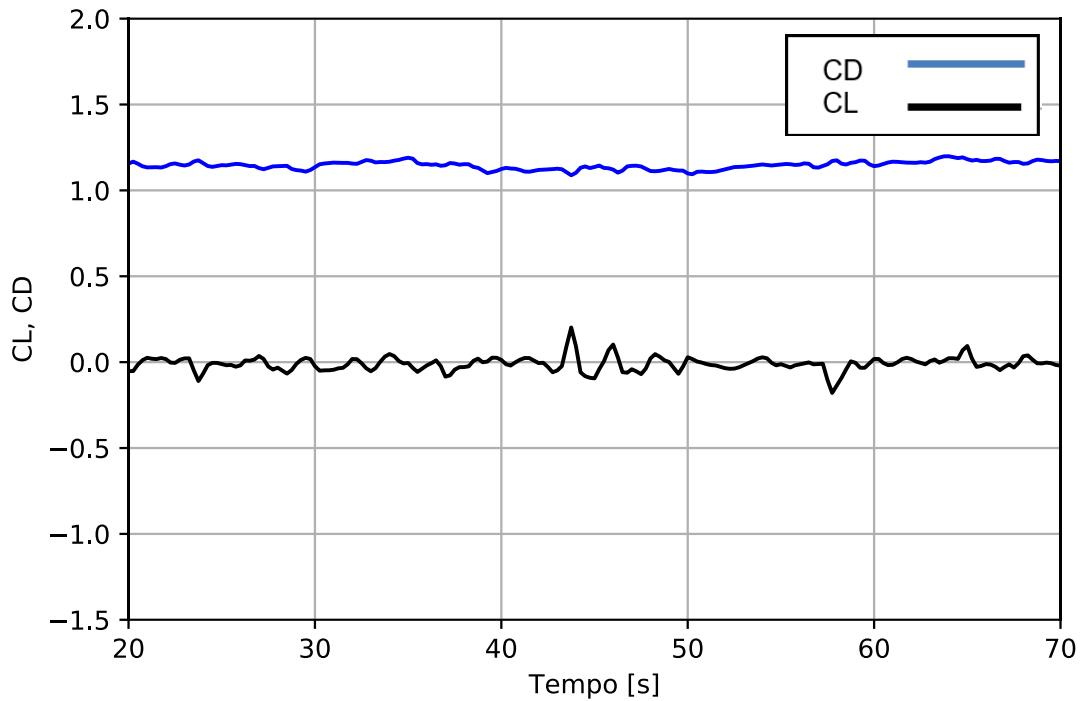
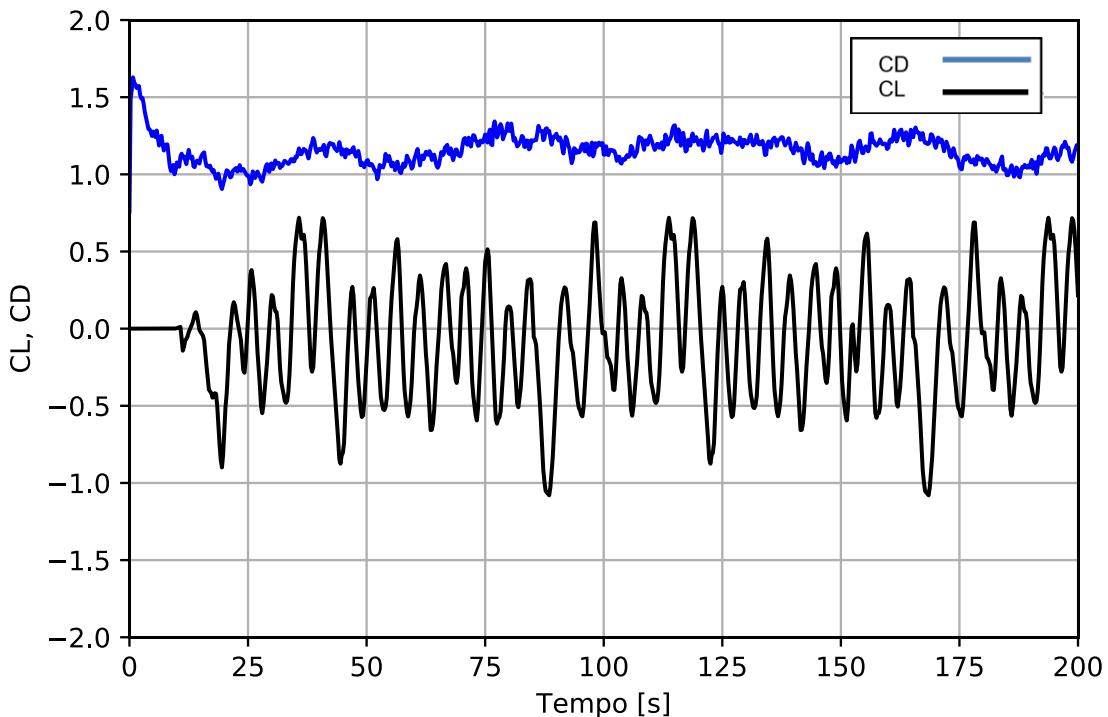


Figura 19 - Série temporal dos coeficientes de força para Reynolds=10000



Como pode-se notar, o aumento no número de Reynolds causa uma drástica mudança no comportamento dos coeficientes de sustentação. Como o *dt*

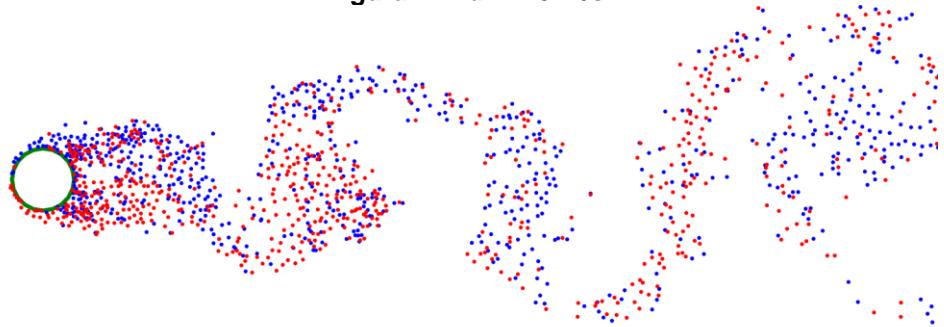
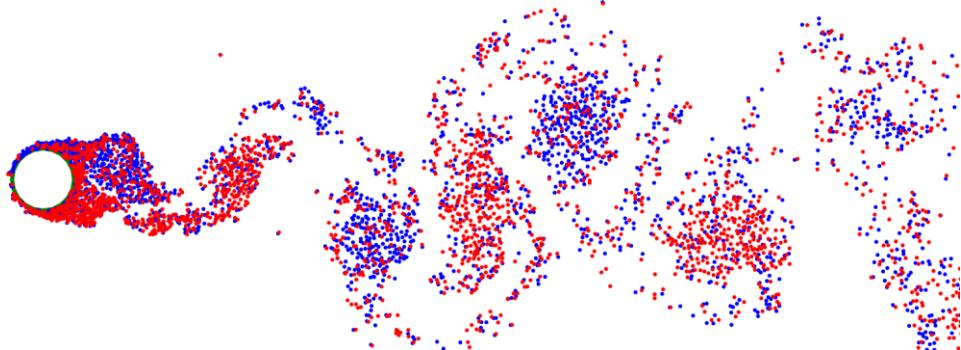
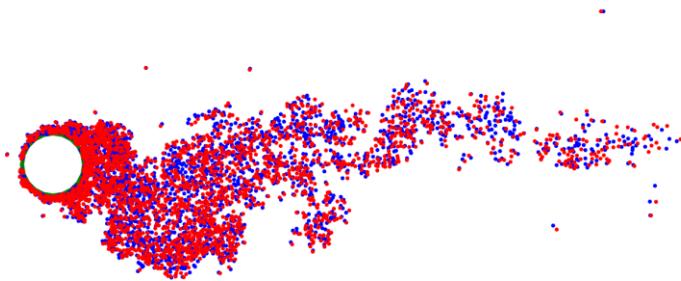
adotado nas simulações é relativamente grande, devido ao objetivo proposto de simulações de baixo custo computacional, acabam ocorrendo algumas diferenças em relação aos casos da literatura em que existe maior refinamento do dt , todavia, o método mostra resultados consistentes.

Vale comentar que para melhor visualização dos coeficientes de arrasto e sustentação (sobretudo, sustentação) é aplicado um filtro nos gráficos das Figuras 18 e 19.

Norberg (2003) ao estudar sobre o coeficiente de sustentação calcula valores para a média quadrática dessa grandeza entre 0 e 0,52 variando Reynolds entre 47 e 2×10^5 , os resultados simulados não seguem fielmente esses números. Na Figura 19 por exemplo a média quadrática do CL foi igual a 0,86. Todavia, além de na simulação o cilindro não vibrar, o que difere dos casos na literatura, o valor do coeficiente de sustentação pode variar dependendo da fase entre força e vibração.

Já a média do coeficiente de arrasto na Figura 18 foi de 1,1546 e na Figura 19 de 1,1645. Flatschart (2007) encontra em seu trabalho valores que vão de 1,09 até 1,2. Portanto a simulação se mostrou condizente com os resultados obtidos em outros experimentos.

As figuras 22 a 24 demonstram como a velocidade da correnteza influencia os perfis de escoamento. Para essas simulações foram considerados, raio do *riser* igual a 0,25 m e Reynolds igual a 5000, mudando-se a viscosidade para compensar a alteração de velocidade.

Figura 22 - $u = 1.0 \text{ m/s}$ **Figura 23 - $u = 0.5 \text{ m/s}$** **Figura 24 - $u = 0.15 \text{ m/s}$** 

Nas figuras 22, 23 e 24 fica claro que o aumento da velocidade da correnteza convecta, ou seja, carrega os vórtices mais rapidamente. O que acontece quando há alteração da velocidade da correnteza no algoritmo sem mudar o passo de tempo é que a escala de tempo entre as simulações deixa de ser equivalente. Ou seja, nas simulações temos uma escala de tempo adimensional. Portanto, para velocidades mais baixas a esteira de vórtices não se desenvolve nas 100 unidades de tempo definidas para o escoamento. Logo, nas simulações é necessário escolher uma velocidade que permita uma boa visualização da esteira. Não pode nem ser muito devagar, pois assim a esteira demora para se formar, nem muito rápida, porque assim os vórtices são rapidamente convectados para longe do cilindro o que piora a

visualização do perfil de escoamento. Um bom exemplo de resultado foi o obtido na Figura 23 com velocidade igual a 0.5 m/s.

6. Conclusões

O trabalho buscou a elaboração de um algoritmo de baixo custo computacional que se utiliza o MVD, e tal objetivo foi cumprido, dado tanto os tempos mostrados para as simulações das figuras 8 a 13 como nas simulações dos *risers* sujeitos a escoamento, dado que nenhuma delas ultrapassou os 10 minutos.

Foi realizada uma análise do resultado simulado e do método, desde seu desenvolvimento, implementação e execução. Os testes para o caso inicial da esteira de uma aeronave serviram para testar os métodos iterativos que foram usados devido ao baixo recurso de processamento empregado neles. Concluiu-se que o método de Euler realmente não prejudica a fidelidade dos resultados e poupa custo computacional. Em particular, no caso do *riser* quando se usa amalgamação e há geração de vórtices.

Tratando do caso aplicado à Engenharia de Petróleo, as simulações corresponderam à literatura. Foram mostrados os perfis de escoamento para baixas velocidades de correnteza e número de Reynolds baixo, e suas graduações até chegar em escoamento mais turbulentos, todos com tempo de simulação abaixo de 10 minutos, o que é ótimo mediante outros projetos da CFD e tudo isso sem perder muita qualidade quando comparado aos resultados presentes na literatura.

Para trabalhos futuros, propõe-se a implementação do FMM (Ricciardi, 2016) para otimização ainda maior do custo computacional e realizar testes com RK2 e RK4 aplicados a *riser*, sobretudo para plotar os gráficos dos coeficientes de sustentação e compará-los com Euler. Além disso, poderiam ser implementados outros formatos para os corpos imersos, não os restringindo a círculos, sendo assim, o método e o algoritmo poderiam ser usados também no estudo de hidrofólios e seções de embarcações sujeitas a situações semelhantes às dos *risers*.

7. Referências

BISHOP, R.E.D., HASSAN, A.Y. The Lift and Drag Forces on a Circular Cylinder Oscillating in a Flowing Fluid. **Proceedings Royal Society**, 227, pp. 51-75, Series A, 1964.

BLEVINS, R. D. **Flow-Induced Vibration**. Van Nostrand Reinhold 2^a. ed. pp. 488, New York, 1990.

BOURGUET, REMI, GEORGE E. KARNIADAKIS, AND MICHAEL S.TRIANTAFYLLOU. Vortex-induced Vibrations of a Long Flexible Cylinder in Shear Flow. **Journal of Fluid Mechanics**, 677, pp.342-382. Cambridge University Press 2011

CHEMTRAILBRASIL. **Vortices não são chemtrails aprenda**. 2015. Disponível em: <<http://chemtrailbrasil.blogspot.com/2015/01/vortices-nao-sao-chemtrails-aprenda.html>>. Acesso em 31 de maio de 2019

DOLFYNNET. **Von Karman Vortex Street**. 2010. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=IDeGDFZSYo8>>. Acesso em 07 de abr. 2019.

FACCHINETTI, M. de LANGRE, E., BOLLEY, F., 2004 Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations. **Journal of Fluids and Structures**, Vol.19, pp. 123 – 140.

FLATSCHART, R. B. **Simulação Numérica Paralela do Escoamento ao Redor de Risers**. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, 2007.

FILHO, P. M. F. **Análise da vibração induzida por vórtices em tubos flexíveis utilizando modelo fenomenológico**. Dissertação em Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília, 2012.

GERRARD, J.H. The Mechanisms of the Formation Region of Vortices behind Bluff Bodies. **Journal of Fluid Mechanics**, Vol. 25, nº Part 3, pp. 401-413, 1966.

HIRSCH, C. **Numerical Computation of Internal & External Flows**, Second Edition, 2007.

KRASNY, R. A study of singularity formation in a vortex sheet by the point-vortex approximation. **Journal of Fluid Mechanics**, vol 167, 65-93, 1986.

LEONARD, A. Computing three-dimensional incompressible flow with vortex elements. **Annual Review of Fluid Mechanics**, vol. 17, 523-559, 1985.

LIMA, A. A. de. **Estudo Numérico do Escoamento ao Redor de Cilindros Flexíveis**. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, 2011.

RICCIARDI, T. R. **Fast Multipole Discrete Vortex Method Applied to Unsteady Flow Simulations**. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, 2016.

PARK, W.; HIGUCHI, H. **Computation of flow past Single and Multiple Bluff Bodies by a Vortex Tracing Method**. Minneapolis USA, 1989.

PASSOS, B. O., SIQUEIRA S. **Formação de Vórtices em um Corpo que Oscila na mesma Direção do Escoamento Incidente**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Itajubá, 2011.

RAYLEIGH, J.W.S. **The Theory of Sound**. Vol. I and II, 1896.

VIOLETTE, R., d. L. E., e Szydlowski, J., **Computation of vortex-induced vibrations of long structures using a wake oscillator model: Comparison with DNS and experiments**. Computers & Structures Volume 85, Issues 11–14, Pages 1134-114, 2007.

VON KÁRMÁN, T. **Über den Mechanismus des Widerstandes den ein Bewegter Körper in einer Flüssigkeit Erfährt**". Gottinger Nachrichten Math-Phys. Klasse, 509-517, 1911.