



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

VITOR CAVARETTI DE ARRUDA

**DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE PARA A VERIFICAÇÃO DE PILARES  
DE CONCRETO ARMADO COM SEÇÃO TRANSVERSAL RETANGULAR**

São Carlos

2023





VITOR CAVARETTI DE ARRUDA

**DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE PARA A VERIFICAÇÃO DE PILARES  
DE CONCRETO ARMADO COM SEÇÃO TRANSVERSAL RETANGULAR**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Civil.

Orientador: Prof. Dr. Vladimir Guilherme Haach  
Coorientador: Prof. Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola

São Carlos

2023





## FOLHA DE AVALIAÇÃO OU APROVAÇÃO



## RESUMO

ARRUDA, V. C. **Desenvolvimento de software para a verificação de pilares de concreto armado com seção transversal retangular.** 2023. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

Diante da busca pela eficiência e produtividade dos cálculos que norteiam a confecção de estruturas de concreto armado na área da engenharia civil, é indispensável o uso de recursos computacionais para garantir a precisão dos resultados e permitir a interpretação de forma mais incisiva do comportamento dos elementos estruturais diante dos esforços aos quais estão sujeitos. Assim, o presente trabalho discorre a respeito do desenvolvimento de um *software* em linguagem de programação *Python* para a verificação de pilares de concreto armado com seção transversal retangular abrangendo diferentes métodos, incluindo o método do pilar padrão por rigidez e curvatura aproximada, bem como o método geral, o qual considera de forma mais minuciosa os efeitos de segunda ordem promovidos pela não linearidade física e geométrica desses elementos. O programa ainda permite uma análise da resistência da seção quando submetida à flexo-compressão oblíqua ao promover o traçado de sua envoltória resistente real. Para esclarecer a compreensão dos resultados e facilitar a inserção de dados, ele conta com recursos gráficos e de interface gráfica disponibilizados por bibliotecas da linguagem utilizada. Após sua implementação, ele foi testado e comparado com cálculos realizados de forma algébrica e com dados obtidos de outro programa já existente, apresentando resultados consistentes e coerentes. Em suma, o *software* desenvolvido apresenta-se como uma ferramenta abrangente e eficiente para a verificação de pilares, proporcionando praticidade aos engenheiros civis na análise estrutural.

Palavras-chave: *software*; interface gráfica; verificação; método do pilar padrão; método geral; envoltória resistente real; não linearidade.



## ABSTRACT

ARRUDA, V. C. **Development of software for the verification of reinforced concrete columns with rectangular cross-section.** 2023. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

In the quest for efficiency and productivity in the calculations guiding the design of reinforced concrete structures in civil engineering, the use of computational resources is indispensable to ensure the accuracy of results and enable a more insightful interpretation of the behavior of structural elements under the applied forces. Thus, the present work discusses the development of software in the Python programming language for the verification of reinforced concrete columns with a rectangular cross-section, covering different methods, including the standard pillar method with approximate curvature and stiffness, as well as the general method, which more meticulously considers the second-order effects induced by the physical and geometric non-linearity of these elements. The program also allows an analysis of section resistance when subjected to oblique flexure-compression by plotting its real resistance envelope. To enhance result comprehension and facilitate data input, it features graphical and user interface resources provided by libraries in the language used. After implementation, it was tested and compared with algebraic calculations and data from another existing program, yielding consistent and coherent results. In summary, the developed software emerges as a comprehensive and efficient tool for column verification, providing practicality for civil engineers in structural analysis.

**Keywords:** software; graphic interface; verification; standard pillar method; general method; real resistance envelope; non-linearity.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 - Fluxograma da metodologia do projeto	22
Figura 4.1 - Diagrama parábola-retângulo para concretos com $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$	26
Figura 4.2 - Diagrama retangular	26
Figura 4.3 - Domínios de estado-limite último de uma seção transversal	27
Figura 4.4 - Diagramas de deformação correspondente aos extremos do domínio 1	28
Figura 4.5 - Diagrama de deformação correspondente ao extremo do domínio 2	28
Figura 4.6 - Diagrama de deformação correspondente ao extremo do domínio 3	30
Figura 4.7 - Diagrama de deformação correspondente ao extremo dos domínios 4 e 4a	31
Figura 4.8 - Diagrama de deformação correspondente ao extremo do domínio 5	32
Figura 4.9 - Diagrama tensão-deformação idealizado do concreto	32
Figura 4.10 - Diagrama tensão-deformação idealizado do aço	33
Figura 4.11 - Barras sob carregamento axial	34
Figura 4.12 - Diagramas tensão x deformação para materiais de comportamento linear e não-linear	35
Figura 4.13 - Elemento de barra de comprimento $dx$	37
Figura 4.14 - Diagramas momento interno x curvatura	38
Figura 4.15 - Seção retangular de barra solicitada por força normal e momento fletor	39
Figura 4.16 - Flexão composta oblíqua em uma seção qualquer	43
Figura 4.17 - Superfície de interação	45
Figura 4.18 - curvaturas em uma seção transversal retangular	46
Figura 4.19 - Comprimento equivalente do pilar	48
Figura 4.20 - Comprimentos de flambagem	48
Figura 4.21 - Diagramas de momentos em pilares	50
Figura 4.22 - Envoltória mínima com 2ª ordem	53
Figura 4.23 - Método geral aplicado através do carregamento progressivo	55
Figura 4.24 - Método geral aplicado através de excentricidades progressivas	55
Figura 5.1 - Conexão entre "back-end" e "front-end"	62
Figura 6.1 - Envoltórias para o processo de verificação	68
Figura 6.2 - Regiões de deformação	70
Figura 6.3 - Deformações da região 1	70
Figura 6.4 - Deformações da região 2	71
Figura 6.5 - Deformação da região 3	72
Figura 6.6 - Processo executado pelo método da bissecção	74
Figura 6.7 - Gráfico Momento x Curvatura com consideração do diagrama retangular para a tensão do concreto comprimido	77

<i>Figura 6.8 - Gráfico Momento x Curvatura com consideração do diagrama parábola-retângulo para a tensão do concreto comprimido.</i>	78
<i>Figura 6.9 - Fluxograma referente à função para se obter o gráfico Momento Curvatura</i>	79
<i>Figura 6.10 - Momento solicitante de primeira ordem atuante em pilar biapoiado</i>	79
<i>Figura 6.11 - Sentido de aplicação das curvaturas como carregamento</i>	80
<i>Figura 6.12 - Obtenção dos esforços internos</i>	82
<i>Figura 6.13 - Momento solicitante de segunda ordem atuante em pilar biapoiado</i>	82
<i>Figura 6.14 - Momentos solicitantes (a) de primeira ordem e (b) de segunda ordem</i>	83
<i>Figura 6.15 – Deformações e resultantes em uma seção transversal de concreto armado sem rotação.</i>	87
<i>Figura 6.16 - Deformações e resultantes em uma seção transversal de concreto armado rotacionada em um ângulo <math>\vartheta</math>.</i>	87
<i>Figura 6.17 - Obtenção dos momentos resistentes nas direções de interesse.</i>	88
<i>Figura 7.1 - Interface Gráfica do Usuário (GUI)</i>	91
<i>Figura 7.2 – Funcionalidades da Interface Gráfica do Usuário (GUI) desenvolvida</i>	92
<i>Figura 7.3 - Tratamento de erros</i>	93
<i>Figura 7.4 - Seção transversal exemplo inserida no programa</i>	94
<i>Figura 7.5 – Interface Gráfica do Usuário (GUI) de Resultados</i>	95
<i>Figura 7.6 – Principais botões na GUI de Resultados</i>	96
<i>Figura 7.7 – Tensão e deformação na seção transversal rotacionada em 0° e 90° com a armadura sugerida</i>	97
<i>Figura 7.8 – Tensão/deformação na seção transversal rotacionada em 0° e 90° com a armadura inserida</i>	98
<i>Figura 7.9 - Domínios de estado-limite último exibidos no software</i>	99
<i>Figura 7.10 – Diagramas de momento fletor do pilar nas duas direções considerando os efeitos de segunda ordem pelo método geral.</i>	100
<i>Figura 7.11 – Exibição dos gráficos Momento x Curvatura utilizados no método geral em ambas as direções.</i>	101
<i>Figura 7.12 – Gráfico para verificação de um pilar com a configuração 1</i>	102
<i>Figura 7.13 - Gráfico para verificação de um pilar com a configuração 2</i>	103
<i>Figura 7.14 – Modo de visualização detalhada dos gráficos essenciais para a verificação do elemento estrutural</i>	104
<i>Figura 8.1 – Dimensões dos elementos estruturais (unidades em centímetros).</i>	106
<i>Figura 8.2 - Diagrama de momento fletor característico nas direções x e y.</i>	107
<i>Figura 8.3 - Envoltórias mínimas e esforços solicitantes calculados pelo método do pilar padrão por curvatura aproximada</i>	113

Figura 8.4 - Envoltórias mínimas e esforços solicitantes calculados pelo método do pilar padrão por rigidez aproximada	115
Figura 8.5 – Ábaco para o dimensionamento de peças retangulares de concreto armado	116
Figura 8.6 - Ábaco para o momento resistente de peças retangulares de concreto armado na direção y	117
Figura 8.7 - Ábaco para o momento resistente de peças retangulares de concreto armado na direção x	118
Figura 8.8 - Envoltórias mínimas e esforços solicitantes calculados pelo método do pilar padrão por curvatura aproximada e envoltória resistente	119
Figura 8.9 - Envoltórias mínimas e esforços solicitantes calculados pelo método do pilar padrão por rigidez aproximada e envoltória resistente	120
Figura 8.10 – Exemplo de pilar aplicado no software desenvolvido – Inserção da seção transversal	121
Figura 8.11 - Exemplo de pilar aplicado no software desenvolvido – Resultados obtidos relacionados ao método do pilar padrão	122
Figura 8.12 - Exemplo de pilar aplicado no SECTRANS – Inserção da seção transversal	124
Figura 8.13 - Exemplo de pilar aplicado no SECTRANS – Gráfico Momento x Curvatura para uma força normal de 2590 kN e seção rotacionada de 0°	124
Figura 8.14 - Exemplo de pilar aplicado no SECTRANS – Gráfico Momento x Curvatura para uma força normal de 2590 kN e seção rotacionada de 90°	125
Figura 8.15 - Exemplo de pilar aplicado no software desenvolvido – Deformações e forças resultantes obtidos para duas orientações da seção (0° e 90°)	126
Figura 8.16 - Exemplo de pilar aplicado no software desenvolvido – Classificação do domínio para duas orientações da seção (0° e 90°)	127
Figura 8.17 - Exemplo de pilar aplicado no software desenvolvido – Gráficos Momento x Curvatura para duas orientações da seção (0° e 90°)	129
Figura 8.18 - Exemplo de pilar aplicado no SECTRANS – Configuração deformada da estrutura	131
Figura 8.19 - Exemplo de pilar aplicado no software desenvolvido – Resultados relacionados ao método geral	132
Figura 8.20 - Exemplo de pilar aplicado no SECTRANS – Gráficos de verificação com aplicação do método do pilar padrão por rigidez aproximada	134
Figura 8.21 - Exemplo de pilar aplicado no SECTRANS – Gráficos de verificação com aplicação do método do pilar padrão por curvatura aproximada	134
Figura 8.22 - Exemplo de pilar aplicado no software desenvolvido – Gráficos de verificação com aplicação do método do pilar padrão por rigidez aproximada	135
Figura 8.23 - Exemplo de pilar aplicado no software desenvolvido – Gráficos de verificação com aplicação do método do pilar padrão por curvatura aproximada	135

<i>Figura 8.24 - Exemplo de pilar aplicado no software desenvolvido – Gráfico de verificação com propriedades da seção rotacionada em 0°</i>	137
<i>Figura 8.25 - Exemplo de pilar aplicado no software desenvolvido – Gráfico de verificação com propriedades da seção rotacionada em 90°</i>	137
<i>Figura 8.26 - Exemplo de pilar esbelto aplicado no SECTRANS – Configuração deformada da estrutura</i>	139
<i>Figura 8.27 - Exemplo de pilar esbelto aplicado no software desenvolvido – Resultados relacionados ao método geral</i>	140
<i>Figura 8.28 - Exemplo de pilar esbelto aplicado no SECTRANS – Gráficos de verificação com aplicação do método geral</i>	141
<i>Figura 8.29 - Exemplo de pilar esbelto aplicado no software desenvolvido – Gráficos de verificação com aplicação do método geral</i>	141

## LISTA DE TABELAS

<i>Tabela 4.1 - Valores de <math>\varepsilon_{c2}</math> e <math>\varepsilon_{cu}</math> para os concretos indicados.....</i>	33
<i>Tabela 4.2 - Valores de <math>\alpha_c</math> e <math>\lambda</math> .....</i>	40
<i>Tabela 8.1 – Coordenadas das barras de aço inseridas no software .....</i>	121
<i>Tabela 8.2 - Tabela comparativa dos resultados obtidos de forma algébrica e através do software desenvolvido.....</i>	123
<i>Tabela 8.3 – Comparação de deformações e forças resultantes para a seção rotacionada de 0° entre o software desenvolvido e o SECTRANS.....</i>	128
<i>Tabela 8.4 - Comparação de deformações e forças resultantes para a seção rotacionada de 0° entre o software desenvolvido e o SECTRANS.....</i>	128
<i>Tabela 8.5 – Comparação dos momentos resistentes e curvaturas máximos nos gráficos Momento x Curvatura.....</i>	130
<i>Tabela 8.6 - Comparação dos deslocamentos quando a estrutura deformada atinge o equilíbrio .....</i>	133
<i>Tabela 8.7 - Comparação dos deslocamentos quando a estrutura esbelta deformada atinge o equilíbrio .....</i>	140

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	OBJETIVO	20
3	ESCOPO DO PROJETO	21
4	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	24
4.1	Definições	24
4.2	Hipóteses Básicas	24
4.3	Casos de solicitação	26
4.4	Comportamento dos materiais – Aço e Concreto	32
4.5	Não linearidades	34
4.6	Linha elástica	36
4.7	Pilares submetidos à Flexo-Compressão normal	38
4.8	Pilares submetidos à Flexo-Compressão oblíqua	43
4.9	Método do pilar padrão	47
4.10	Método geral	54
5	CÓDIGO COMPUTACIONAL: FUNDAMENTAÇÃO DE PROGRAMAÇÃO	58
5.1	Linguagem Python	58
5.2	Bibliotecas utilizadas	58
5.3	Estratégia de desenvolvimento	60
5.4	Principais funções definidas	62
6	CÓDIGO COMPUTACIONAL: APLICAÇÃO DOS CONCEITOS DE ESTRUTURAS	66
6.1	Escopo das funções - Método do pilar padrão	66
6.2	Escopo das funções - Dimensionamento e momento resistente	68
6.3	Escopo das funções - Método geral	76
6.4	Escopo das funções – Envoltória resistente real	84
7	CÓDIGO COMPUTACIONAL: INTERFACE GRÁFICA DE USUÁRIO (GUI)	90
8	EXEMPLO DE APLICAÇÃO	106
8.1	Verificação de pilar com índice de esbeltez menor que 90	106
8.2	Verificação de pilar com índice de esbeltez maior que 90	138
9	CONCLUSÕES	143
10	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	147

## 1 INTRODUÇÃO

Os pilares desempenham um papel fundamental na estrutura de uma construção, sendo peças lineares, geralmente posicionadas verticalmente, que sofrem principalmente forças de compressão. Esses elementos possuem grande importância no arranjo estrutural, uma vez que são responsáveis por receber e transmitir às fundações toda a carga acumulada dos pavimentos. Além disso, desempenham um papel crucial no suporte e na estabilidade de toda a edificação.

Tanto o dimensionamento quanto a verificação dos pilares são uma tarefa complexa. Na compressão, essas estruturas enfrentam efeitos que resultam em um equilíbrio instável ao longo da sua extensão, como a flambagem e deslocamentos que geram excentricidades. Essas mudanças na distribuição das cargas criam novas solicitações e alteram as condições de estabilidade, conhecidas como efeitos de segunda ordem. Esses efeitos geram excentricidades adicionais, que, somadas às excentricidades iniciais das peças, induzem momentos que levam o pilar a suportar também forças de flexão. Isso resulta em flexões compostas, que podem ocorrer tanto na direção normal quanto na oblíqua.

De acordo com Pinheiro (2007), a localização do pilar em planta afeta a forma como as cargas verticais são transferidas para ele, levando em consideração as excentricidades e os diferentes tipos de solicitação a que ele estará sujeito, como compressão simples, flexão composta normal ou flexão composta oblíqua. Em pilares onde se encontram vigas contínuas, as rotações transmitidas nas extremidades da seção têm efeitos negativos um sobre o outro, resultando em uma força resultante geralmente insignificante. No entanto, em pilares localizados na extremidade de uma viga (pilares de extremidade) ou de duas (pilares de canto), ocorrem momentos significativos que não podem ser negligenciados.

Os pilares também podem ser classificados quanto à sua esbeltez, ainda segundo Pinheiro (2007). Um pilar é curto quando seu índice de esbeltez ( $\lambda$ ) é menor que um índice de esbeltez limite ( $\lambda_1$ ) estabelecido pela NBR 6118:2014, podendo-se, nesse caso, dispensar a excentricidade de 2<sup>a</sup> ordem. Já pilares

medianamente esbeltos possuem  $\lambda_1 < \lambda \leq 90$ , sendo o cálculo dos efeitos de 2<sup>a</sup> ordem feito de duas formas principais, estabelecidas pela mesma norma, em que a primeira consiste no método do pilar padrão com rigidez  $k$  aproximada e a segunda no método do pilar padrão com curvatura aproximada. Por fim, os pilares podem ser esbeltos, com  $90 < \lambda \leq 140$ , e muito esbeltos, com  $140 < \lambda \leq 200$ , em ambos os casos, é necessário considerar não só os efeitos de 2<sup>a</sup> ordem, mas também as não linearidades (física e geométrica) de uma forma mais condizente com o comportamento real do elemento, o que não leva em conta os métodos aproximados, mas sim, o método geral.

No âmbito profissional, a praticidade e a rapidez para se respeitar prazos exigiram ao longo do tempo a utilização de softwares para se realizar os cálculos estruturais na área da Engenharia Civil. A necessidade de se utilizar ferramentas computacionais vem acoplada à uma maior precisão na obtenção dos resultados de interesse, sendo exemplo disso a consideração da não linearidade dos pilares pelo método geral e o comportamento dos mesmos quando solicitados por uma flexo-compressão oblíqua. Devido à complexidade exigida, os softwares surgem como alternativa, dispensando a utilização de simplificações, e, portanto, alcançando valores mais condizentes com a realidade.

Dessa forma, a área de cálculo estrutural na Engenharia Civil conta com uma ampla variedade de softwares especializados que auxiliam os engenheiros no projeto e na análise de estruturas. Esses softwares desempenham um papel fundamental de fornecer recursos diversos e avançados, facilitando a modelagem, o dimensionamento e a verificação estrutural. Alguns exemplos de softwares bastante difundidos entre os profissionais são o FTOOL, SCIA ENGINEER, REVIT, AUTOCAD, TQS, entre outros. Todas essas ferramentas computacionais apresentam funções das mais diversas, englobando vários ramos na área de estruturas, e possuem em comum a constante atualização e evolução, garantindo a precisão e a conformidade com as últimas práticas e regulamentações. De maneira análoga, o presente trabalho, por meio de um recurso computacional, se propõe a oferecer praticidade e precisão na verificação de pilares em concreto armado com seção retangular.

Já no contexto educacional, programas relacionados ao cálculo estrutural podem ser utilizados como ferramentas de verificação de atividades e exercícios propostos pelos docentes ou como ferramentas de auxílio no ensino sobre o dimensionamento e verificação de pilares. Na primeira situação, essa prática é uma forma de garantir a absorção do conteúdo pelos estudantes, além de possibilitar a comparação entre os resultados obtidos de forma algébrica (manual) e os resultados corretos determinados pelo *software*, identificando possíveis erros ou equívocos. Na segunda ocasião, os recursos computacionais oferecem uma melhora no que diz respeito à ilustração de conceitos teóricos ao realizar simulações e resolver exercícios.

Com isso, o presente trabalho surge também com uma importância significativa no aprimoramento do processo ensino-aprendizado relacionado à verificação de pilares ao potencializar a forma como estudantes assimilam o conhecimento, reforçando o viés educacional das ferramentas digitais.

## 2 OBJETIVO

Neste trabalho pretende-se realizar o desenvolvimento de um *software* cujo objetivo é efetuar a verificação de pilares de concreto armado com seção transversal retangular através de dois métodos, o método do pilar padrão e o método geral. Para isso, será utilizado recursos computacionais voltados para a área de programação, mais especificamente envolvendo a linguagem de programação *Python*.

### 3 ESCOPO DO PROJETO

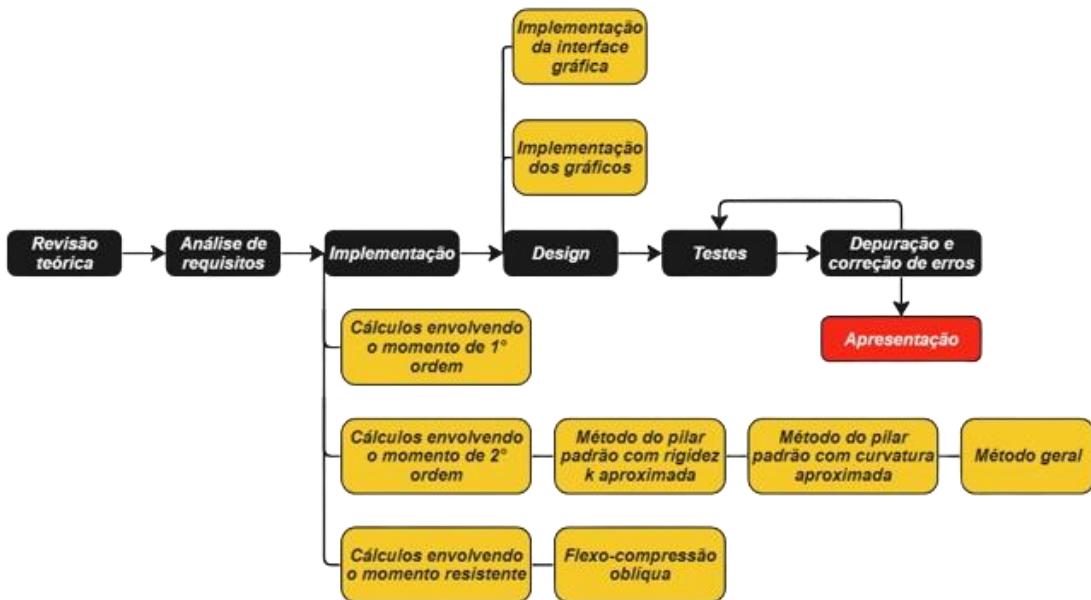
O escopo do projeto diz respeito à elaboração de um *software* voltado para a verificação de pilares cuja seção transversal é retangular e que estão sujeitos a diferentes solicitações normais, incluindo compressão axial, flexo-compressão normal e flexo-compressão oblíqua.

Optou-se pelo seu desenvolvimento devido à indispensável utilização de *softwares* no âmbito profissional com o intuito de se otimizar cada vez mais os resultados, além de facilitar e dinamizar a entrega de projetos estruturais. Dessa forma, este trabalho aborda apenas uma área específica da parte de cálculo estrutural, cujo tema é a verificação de pilares, mas que contempla uma parcela importante dos *softwares* já existentes no mercado, os quais possuem diversos recursos que englobam várias etapas de um projeto estrutural. Por fim, visto que os mesmos estão em constante evolução e atualização, este trabalho de conclusão de curso se justifica como um projeto de desenvolvedor na área da Engenharia Civil.

Ademais, para fins didáticos, este projeto surge em razão da dificuldade de confecção de gráficos relacionados ao tema apresentado durante trabalhos da disciplina “Concreto Armado II”, presente no curso de Engenharia Civil da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo.

A seguir, estruturou-se um fluxograma com as atividades que serão desenvolvidas ao longo do projeto, indicado na Figura 3.1.

**Figura 3.1 - Fluxograma da metodologia do projeto**



**Fonte: Autoria própria**

A primeira etapa compreende a revisão bibliográfica de toda a teoria que será abordada no projeto e implementada no código, a qual será mais detalhada no tópico 4.

Na segunda etapa, os requisitos do *software* são levantados e definidos. Isso envolve entender as necessidades dos usuários, identificar funcionalidades e definir os objetivos do *software*.

Na terceira etapa, o código começa a ser escrito na linguagem de programação determinada (*Python*). São elaboradas funções responsáveis pelos cálculos de interesse, iniciando-se do menor nível de complexidade para o maior, ou seja, inicia-se pelas contas envolvendo os métodos do pilar padrão, por rigidez  $k$  aproximada e por curvatura aproximada, em seguida, são elaboradas as contas envolvendo o método geral e, por fim, os cálculos responsáveis para se obter os momentos resistentes considerando a flexo-compressão oblíqua. Portanto, este estágio do projeto envolve toda a programação do “*back-end*”, isto é, aquilo que não está em contato com o usuário, mas que compõe a estrutura do programa.

Já na quarta etapa ocorre a implementação do “*front-end*”, ou seja, o design do *software* é elaborado da melhor forma para que o usuário consiga

inserir os dados e visualizar os resultados de forma clara, garantindo uma boa experiência após a interação. Isso inclui a definição da arquitetura, a criação de gráficos, para representação das envoltórias, e de desenhos representativos, a definição da interface gráfica (GUI) e o planejamento das estruturas de dados.

Após o “*back-end*” e o “*front-end*” prontos, inicia-se a fase de testes (quinta etapa), a qual consiste na aplicação do *software* em pilares de uma estrutura submetidos a esforços solicitantes reais ou em exemplos da literatura. Durante os testes, erros podem ser identificados. Com isso, na sexta etapa, os problemas são diagnosticados, corrigidos e testados novamente para garantir que o *software* funcione corretamente.

Por fim, realizado todo o processo mencionado, ocorre a entrega final do *software*, revisado e pronto para uso (sétima etapa).

## 4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A teoria para a verificação de pilares em concreto armado de seção transversal retangular, sujeitos a solicitações normais (momentos fletores e forças normais), aqui presente, foi baseada majoritariamente em Fusco (1981), Borges (1999) e em simplificações estabelecidas pela NBR 6118:2014.

### 4.1 Definições

Em seu livro, Fusco (1981) define alguns conceitos básicos essenciais para o entendimento do comportamento de estruturas de concreto armado sujeitas a solicitações normais, os quais serão abordados neste tópico.

Diante disso, é importante ressaltar que, por definição, os pilares estão sujeitos majoritariamente por solicitações normais, logo, é primordial defini-las. Assim, elas são esforços solicitantes que produzem tensões normais nas seções transversais das peças estruturais.

Outro conceito importante é o de estado limite último, em que a verificação da segurança é feita admitindo-se que o esgotamento da capacidade resistente tanto possa ocorrer pela ruptura do concreto comprimido, quanto pela deformação excessiva da armadura tracionada. Contudo, tendo em vista as dificuldades de caracterização do esgotamento da capacidade resistente das peças submetidas às solicitações normais, considerou-se um estado limite último convencional, designado por estado limite último de ruptura ou de deformação plástica excessiva.

Este estado limite último é alcançado quando a fibra mais comprimida de concreto, cujo valor depende do tipo de solicitação, é igual a um valor último convencional ( $\varepsilon_{cu}$ ), que varia de acordo com a classe do concreto, ou ainda quando a barra de aço mais deformada na armadura mais tracionada possui um alongamento igual ao valor último convencional ( $\varepsilon_{su}$ ) de 10 %.

### 4.2 Hipóteses Básicas

Com relação ao estado limite último, são estabelecidas algumas hipóteses gerais, segundo Fusco (1981):

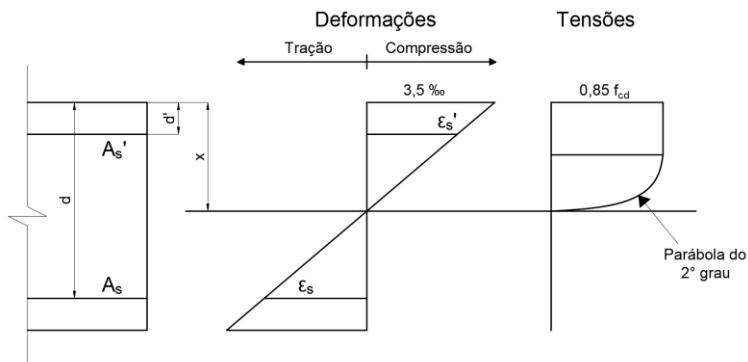
- Manutenção da seção plana: considera-se que nas peças de concreto submetidas a solicitações normais, é admitida a validade da hipótese de manutenção da forma plana da seção transversal até o estado limite último. Assim, a distribuição plana de deformações é considerada plana;
- Permanência da forma da seção transversal: hipótese que considera, mesmo após sofrer deformações, a forma da seção transversal inalterada;
- Solidariedade dos materiais: admite-se o comportamento solidário entre os materiais que compõem o concreto armado, o qual é promovido através da aderência entre as barras de aço e o concreto. Como consequência dessa hipótese, a deformação em cada barra da armadura é igual à do concreto que lhe é adjacente;
- Encurtamentos últimos do concreto: quando apresenta resistência menor que 50 MPa, o encurtamento de ruptura do concreto para seções totalmente comprimidas é 2 %, situado na fibra cuja distância é de 3/7 da altura da seção em relação a borda mais comprimida, e, para seções não inteiramente comprimidas, é de 3,5 % na fibra mais comprimida. Já em concretos das classes C55 a C90, a deformação última é dada pela seguinte expressão:

$$\varepsilon_{cu} = 2,6\% + 35,0\% \cdot \left[ \frac{90 - f_{ck}}{100} \right]^4 \quad (4.1)$$

Em que  $f_{ck}$  é a resistência à compressão do concreto;

- Alongamentos últimos das armaduras: o alongamento específico último da armadura tracionada é tomado com o valor convencional de 10 %. Este valor também se justifica experimentalmente pelo fato de provocar grande fissuração no elemento, prejudicando o comportamento da estrutura quando atingido;
- Diagrama de tensões parábola-retângulo: admite-se que as tensões de compressão na seção transversal das peças submetidas a solicitações normais tenham uma distribuição de acordo com o diagrama parábola-retângulo (Figura 4.1).

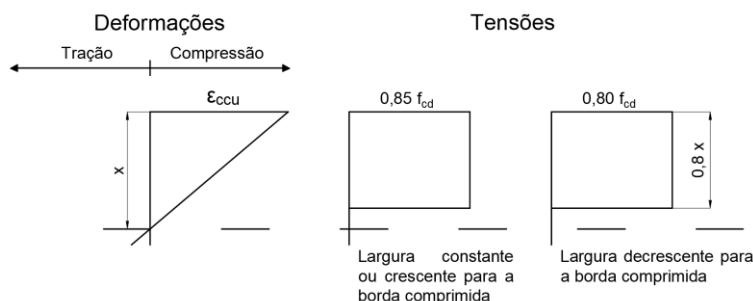
**Figura 4.1 - Diagrama parábola-retângulo para concretos com  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$**



**Fonte: Fusco (1981)**

- Diagrama retangular de tensões: pode-se admitir uma simplificação da hipótese anterior para as tensões de compressão em uma distribuição retangular, como mostra a Figura 4.2.

**Figura 4.2 - Diagrama retangular**

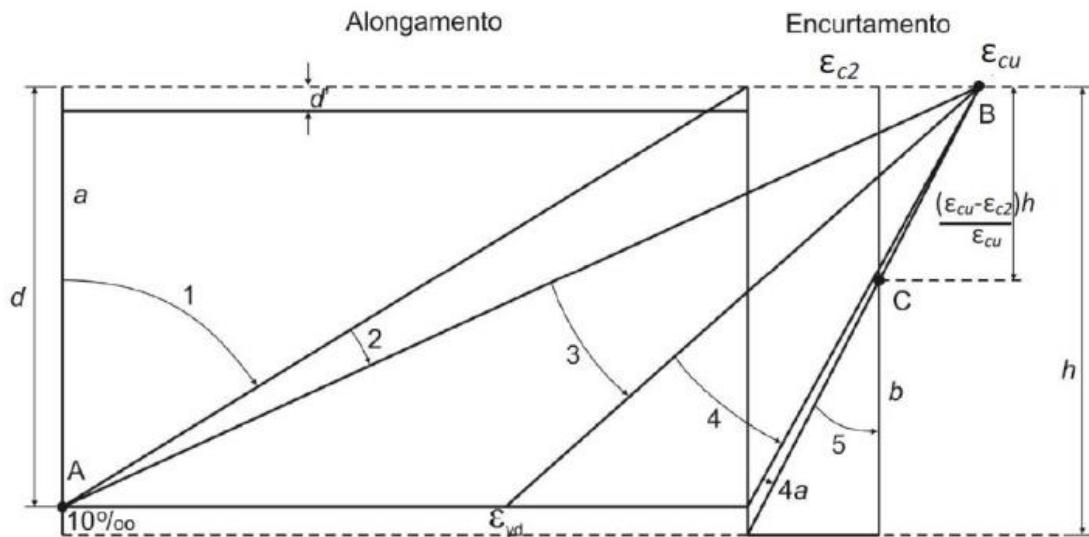


**Fonte: Fusco (1981)**

### 4.3 Casos de solicitação

Para a determinação da resistência de cálculo de uma dada seção transversal, é primordial considerar em qual dos domínios definidos pela NBR 6118:2014 (Figura 4.3) está situado o diagrama de deformações específicas de cálculo da seção analisada. Sendo  $h$  a altura da seção,  $d$  a altura útil e  $x$  a distância da linha neutra do banzo mais comprimido.

**Figura 4.3 - Domínios de estado-limite último de uma seção transversal**

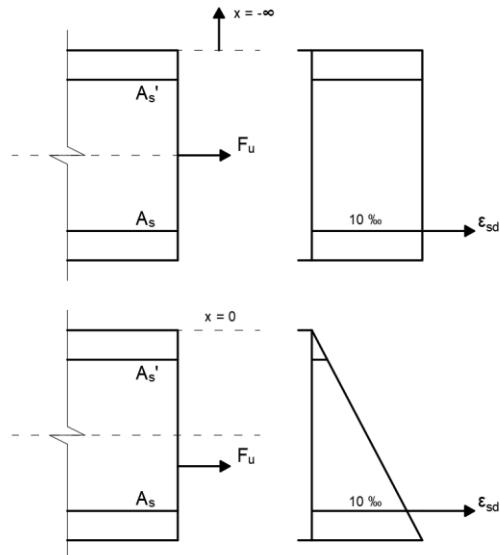


Fonte: Giongo (2017)

A seguir, foram obtidos os casos de solicitação, mencionados por Fusco (1981), supondo que o concreto em questão esteja entre as classes C20 e C50, apenas como exemplificação. A mesma lógica é válida para concretos de outras classes, sendo necessário apenas se atentar quanto ao valor da deformação última convencional do concreto aplicado.

Em consideração a isso, no domínio 1, o estado limite último é caracterizado pela deformação  $\varepsilon_{sd} = 10\%$ . A linha neutra não se encontra na seção transversal, a qual está inteiramente tracionada. Estão incluídos neste domínio os casos de tração axial e de tração excêntrica com pequena excentricidade. Dessa forma, a seção resistente é composta pelas duas armaduras de aço, não havendo participação resistente do concreto, o qual é admitido como inteiramente fissurado. Abaixo, a Figura 4.4 ilustra com mais clareza o que foi mencionado.

**Figura 4.4 - Diagramas de deformação correspondente aos extremos do domínio 1**

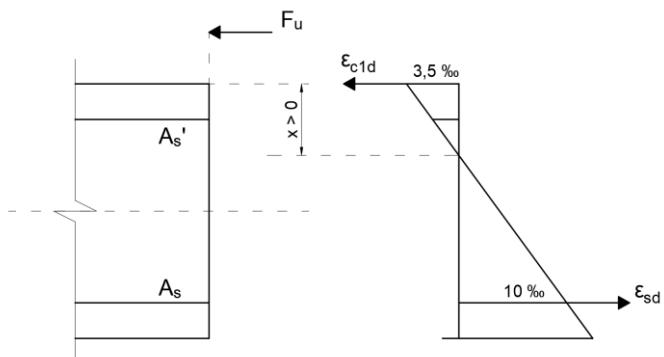


**Fonte: Fusco (1981)**

No domínio 2, o estado limite último é caracterizado pela deformação  $\epsilon_{sd} = 10\%$ , assim como no domínio 1, porém, nesse caso, a linha neutra se encontra na seção transversal, havendo na peça um banzo tracionado e outro banzo comprimido. Apesar de haver um banzo tracionado, o concreto da zona comprimida não atinge a ruptura, uma vez que isso ocorrerá na posição limite do fim do domínio 2, quando  $\epsilon_{c1d} = 3,5\%$ . Estão incluídos neste domínio os casos de tração excêntrica com grande excentricidade, de flexão pura e de compressão excêntrica com grande excentricidade.

Abaixo, a Figura 4.5 ilustra o diagrama de deformação do domínio 2.

**Figura 4.5 - Diagrama de deformação correspondente ao extremo do domínio 2**



**Fonte: Fusco (1981)**

Por semelhança de triângulos obtém-se a seguinte equação de compatibilidade:

$$\frac{3,5\%}{x} = \frac{10\%}{d-x} \quad (4.2)$$

É importante salientar que o domínio 2 pode ser subdividido em dois outros, o 2a e o 2b. A separação entre eles é dada pela condição  $\varepsilon_{c1d} = 2\%$ , a qual corresponde a condição:

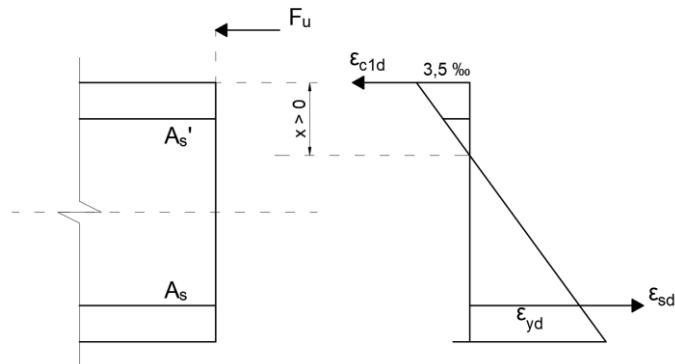
$$\frac{2\%}{x} = \frac{10\%}{d-x} \quad (4.3)$$

Desse modo, somente no subdomínio 2b deverão ser levadas em consideração armaduras de compressão. No subdomínio 2a, tais armaduras não são necessárias, uma vez que a deformação das mesmas é ínfima.

O domínio 3 é caracterizado pela deformação  $\varepsilon_{c1d} = 3,5\%$ , estando a linha neutra contida na seção transversal e havendo um banho comprimido e outro tracionado. Na situação última, a deformação da armadura tracionada é pelo menos igual à deformação de início de escoamento, ocorrendo a ruptura do concreto simultaneamente com o escoamento da armadura, dessa maneira, os dois materiais são aproveitados inteiramente e não há risco de ruína não-avisada (peças subarmadas). Neste domínio estão incluídos os casos de tração excêntrica com grande excentricidade, de flexão pura e de compressão excêntrica com grande excentricidade.

Abaixo, a Figura 4.6 ilustra o diagrama de deformação do domínio 3.

Figura 4.6 -Diagrama de deformação correspondente ao extremo do domínio 3



Fonte: Fusco (1981)

Por semelhança de triângulos obtém-se a seguinte equação de compatibilidade:

$$\frac{3,5\%}{x} = \frac{\varepsilon_{yd}}{d-x} \quad (4.4)$$

No domínio 4, o estado limite último é caracterizado pela deformação  $\varepsilon_{c1d} = 3,5\%$  e a linha neutra se encontra na seção transversal, havendo um bando comprimido e outro tracionado. A deformação da armadura é inferior à deformação de início de escoamento, logo, a ruptura da peça ocorre de forma frágil, pois o concreto se rompe sem que a armadura tracionada possa provocar fissuração (peças superarmadas). Este domínio inclui casos de compressão excêntrica com grande excentricidade.

Este domínio é limitado pela seguinte condição:

$$\beta_x = \frac{x}{d} = 1,0 \quad (4.5)$$

Assim como no estado limite último do domínio 4 é limitado pela deformação  $\varepsilon_{c1d} = 3,5\%$ , o domínio 4a também é, porém, com relação à linha neutra, ela cruza a seção transversal na região de cobrimento da armadura menos comprimida. Dessa forma, ambas as armaduras estão comprimidas,

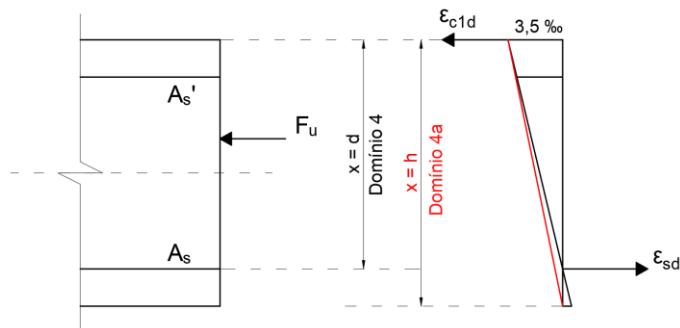
embora sejam usualmente desprezíveis as tensões na armadura menos comprimida.

O domínio 4a é um domínio de transição, estando limitado por uma posição da linha neutra tangente à fibra extrema da seção:

$$\beta_x = \frac{x}{d} = \frac{h}{d} \quad (4.6)$$

Abaixo, a Figura 4.7 ilustra o diagrama de deformação dos domínios 4 e 4a.

**Figura 4.7 - Diagrama de deformação correspondente ao extremo dos domínios 4 e 4a**

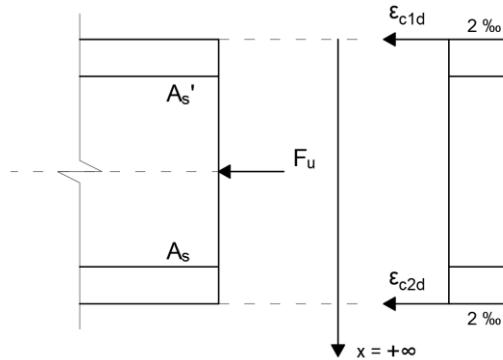


**Fonte: Fusco (1981)**

Por fim, no domínio 5 a linha neutra não está presente na seção transversal, a qual está inteiramente comprimida. É neste domínio que a deformação última do concreto é variável, sendo igual a 2 % na compressão uniforme e 3,5 % na flexo-compressão com linha neutra tangente à seção.

Abaixo, a Figura 4.8 ilustra o diagrama de deformação do domínio 5.

**Figura 4.8 - Diagrama de deformação correspondente ao extremo do domínio 5**

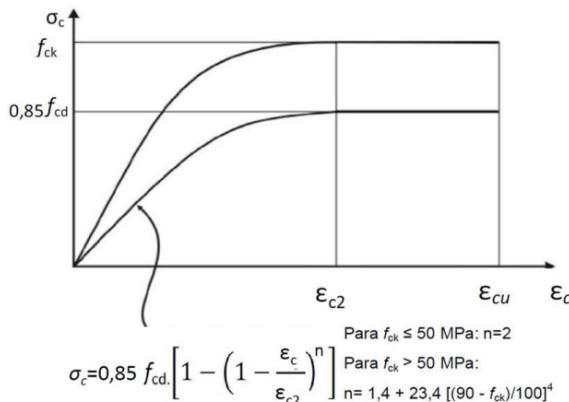


Fonte: Fusco (1981)

#### 4.4 Comportamento dos materiais – Aço e Concreto

A priori, com relação ao concreto, seu diagrama tensão-deformação real não é linear e é variável para as várias classes de resistência, de acordo com Borges (1999). Trata-se, portanto, de um material elasto-plástico, mas que apresenta um comportamento aproximadamente elástico-linear para tensões até 30% da sua tensão máxima de compressão. Com isso, a NBR 6118:2014 admite, no estado limite último, uma simplificação para o diagrama parábola-retângulo (Figura 4.1), o qual é representado por uma parábola do 2º grau, para concreto de classe C20 a C50 e uma curva para concretos classe C60 a C90, cuja origem é na intersecção dos eixos das ordenadas e das abscissas e fim no ponto ( $\epsilon_{c2}$ ,  $0,85 f_{cd}$ ), e, um segmento de reta paralelo ao eixo das deformações, com origem neste ponto e fim na deformação de  $\epsilon_{cu}$  (GIONGO, 2017).

**Figura 4.9 - Diagrama tensão-deformação idealizado do concreto**



Fonte: Giongo (2017)

A Tabela 4.1 abaixo expressa os valores de deformação convencionais para cada classe de resistência do concreto de acordo com a NBR 6118:2014:

**Tabela 4.1 - Valores de  $\varepsilon_{c2}$  e  $\varepsilon_{cu}$  para os concretos indicados**

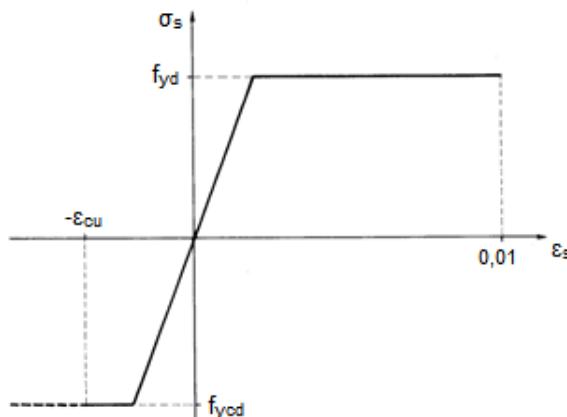
Classe de resistência	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	C55	C60	C70	C80	C90
$\varepsilon_{c2}$ (%)					2,000			2,199	2,288	2,416	2,516	2,600
$\varepsilon_{cu}$ (%)					3,500			3,125	2,884	2,656	2,604	2,600

**Fonte: Giongo (2017)**

Em relação ao aço, na construção civil são usados os aços Classe A, os quais são laminados a quente e resfriados ao ar livre.

De acordo com Venturini e Rodrigues (1987), o diagrama tensão-deformação idealizado indica um material elasto-plástico perfeito, em que a tensão varia linearmente até o limite de escoamento e é constante para valores de deformação superior a esse ponto. Tanto para tração como para compressão, o início do escoamento é dado pelos mesmos valores absolutos da tensão e da deformação, havendo simetria no diagrama. Porém, devido à solidariedade admitida perfeita entre os materiais, os valores de deformação não podem ultrapassar o limite estabelecido para o concreto ( $\varepsilon_{cu}$ ). Abaixo se encontra o diagrama simplificado para o aço estabelecido pela NBR 6118:2014 (Figura 4.10).

**Figura 4.10 - Diagrama tensão-deformação idealizado do aço**



**Fonte: Venturini e Rodrigues (1987)**

#### 4.5 Não linearidades

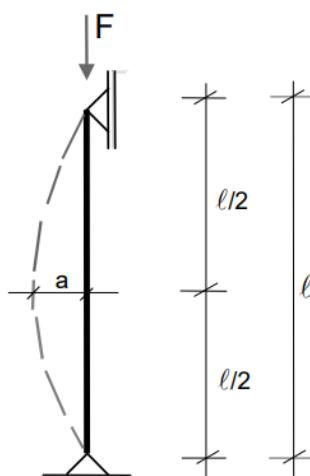
Em sua dissertação, Borges (1999) aborda ainda a respeito do conceito de não linearidade, o qual será exposto no presente tópico.

Desse modo, há dois tipos de não linearidades que podem ser observadas nos pilares de concreto armado, a geométrica, que está envolvida com os deslocamentos adicionais produzidos pela deformação do elemento, e a física, cuja relação é com as propriedades do material.

A respeito da não linearidade geométrica, mais especificamente, ela é resultante da influência dos deslocamentos no momento total, sendo conhecida como efeito de 2<sup>a</sup> ordem.

A rigor, a posição deformada da estrutura deveria sempre ser considerada para calcular os esforços solicitantes, uma vez que garante uma maior precisão e aproximação do comportamento real do elemento estrutural. No entanto, sob um olhar prático, a discrepância entre os resultados obtidos ao considerar apenas os efeitos de 1<sup>a</sup> ordem e aqueles que incluem também os efeitos de 2<sup>a</sup> ordem pode ser tão insignificante que não justifica a realização de cálculos mais elaborados. Mas existem casos em que a não consideração desses efeitos pode causar discrepâncias consideráveis nos cálculos, como mostrado na Figura 4.11.

**Figura 4.11 - Barras sob carregamento axial**



**Fonte: Borges (1999)**

Garantindo-se que a barra tenha um comportamento elástico-linear até atingir a tensão de escoamento, para valores baixos de uma força aplicada ( $F$ ), a barra não apresenta flechas, mas, fazendo com que  $F$  cresça até atingir uma força crítica de flambagem ( $F_{cr}$ ), a barra passa a apresentar uma determinada flecha e o equilíbrio estável só pode ser mantido dessa forma. Com essa nova posição, o acréscimo pequeno de carga causa um maior crescimento de tensão.

Portanto, a não linearidade geométrica prova que mesmo o material sendo elástico-linear, ou seja, não há deformação residual quando o elemento é descarregado e há proporcionalidade entre tensão e deformação, pode não existir proporcionalidade entre causa e efeito.

Tratando-se agora da não linearidade física, o próprio material não é linear, sendo uma propriedade intrínseca do material, e acarreta na não proporcionalidade entre causa e efeito mesmo na teoria da primeira ordem, que é o caso do concreto armado. Abaixo a Figura 4.12 ilustra a diferença entre um material linear e não-linear.

**Figura 4.12 - Diagramas tensão x deformação para materiais de comportamento linear e não-linear**



**Fonte: Borges (1999)**

Por fim, a não linearidade, tanto física como geométrica, interfere no comportamento das estruturas. Tal interferência pode ser verificada através da relação entre momento e curvatura, além da configuração da estrutura quando solicitada por esforços normais.

#### 4.6 Linha elástica

Neste item, baseou-se em Borges (1999) e em Fusco (1981) para a introdução do conceito de linha elástica.

Denomina-se linha elástica como a configuração deformada de equilíbrio de uma barra, e é representada pela equação  $y = f(x)$ , em que  $x$  é o comprimento do elemento.

Admitindo que o material obedece à Lei de Hooke, a curvatura numa seção genérica é dada pela expressão:

$$\frac{1}{r} = -\frac{M}{EI} \quad (4.7)$$

Em que,  $1/r$  é a curvatura do eixo da barra na configuração deformada. Já que o momento varia ao longo da barra, a linha elástica terá uma curvatura variável.

A partir de deduções do valor da curvatura em função dos deslocamentos, chega-se na seguinte equação completa da linha elástica:

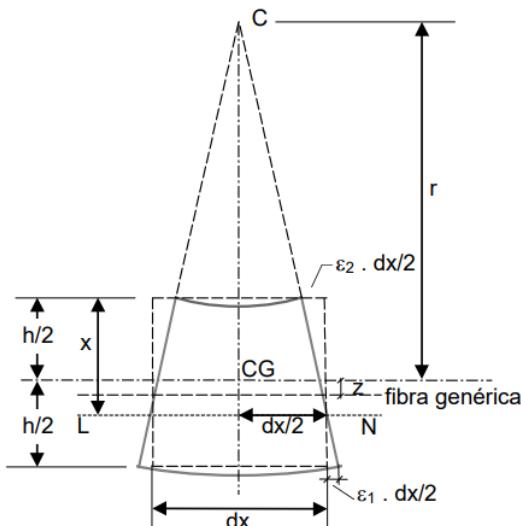
$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{M}{EI} \quad (4.8)$$

De forma simplificada pode-se considerar a seguinte relação, levando em consideração a linha elástica:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (4.9)$$

Uma outra forma de se obter a curvatura é por meio das deformações. Para isso, considera-se um elemento de barra  $dx$  e que a barra esteja em equilíbrio após a deformação, como mostra a Figura 4.13.

**Figura 4.13 - Elemento de barra de comprimento dx**



**Fonte: Borges (1999)**

Assim, obtém-se a seguinte expressão:

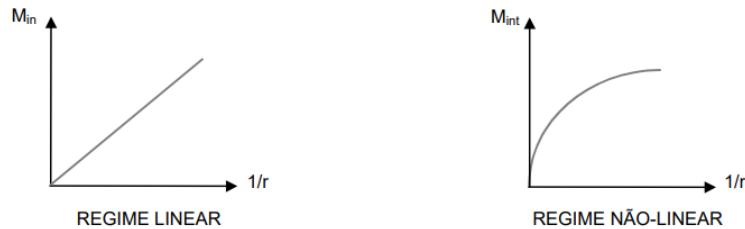
$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_s}{d} \quad (4.10)$$

Sendo  $\varepsilon_c$  a deformação no concreto comprimido,  $\varepsilon_s$  a deformação na amadura de tração e  $d$  a altura útil da seção. Esta equação é válida não só quando a linha neutra (LN) se encontra dentro da seção, mas também quando está fora, exigindo para isso apenas a hipótese básica de que as seções permanecem planas após a flexão.

A relação entre o momento e a curvatura está ligada ao conceito de não linearidade. No caso da relação entre o momento interno e a curvatura, o conceito mais importante é a não linearidade física e, no caso da relação entre o momento externo e a curvatura, é a não linearidade geométrica.

Para materiais de comportamento não-linear, não há proporcionalidade entre tensão e deformação, dessa forma, a não linearidade física acarreta na não linearidade entre momento interno e curvatura. Abaixo, a Figura 4.14 mostra essa relação.

**Figura 4.14 - Diagramas momento interno x curvatura**



**Fonte: Borges (1999)**

Quando se trata da relação entre o momento externo e a curvatura, tanto na compressão axial quanto na flexo-compressão, o uso da equação diferencial da linha elástica afeta o momento externo. Desse modo, as expressões abaixo mostram essa relação para os dois casos:

Para a compressão axial, tem-se:

$$M_{ext} = F \cdot y \quad (4.11)$$

Para flexo-compressão:

$$M_{ext} = F \cdot (e_i + y) \quad (4.12)$$

Em que,  $y$  representa o valor do deslocamento em um ponto qualquer ao longo da altura da barra e  $e_i$  é a excentricidade inicial.

#### 4.7 Pilares submetidos à Flexo-Compressão normal

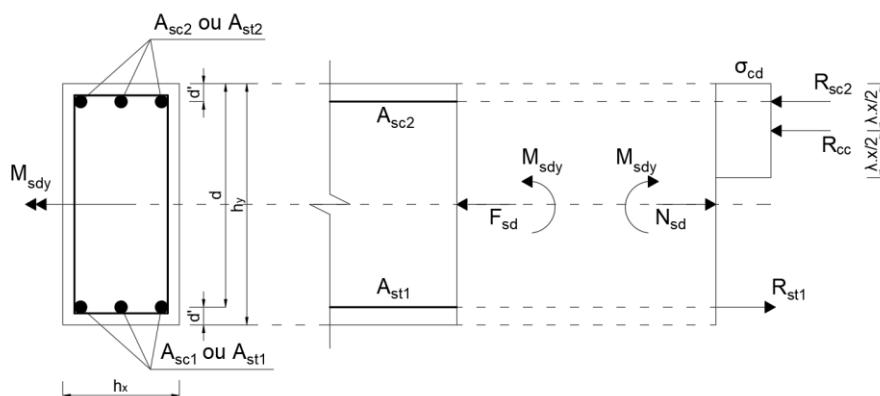
Este tópico, por sua vez, está fundamentado em Giongo (2017), já que ele apresenta uma análise de seções transversais solicitadas por flexo-compressão normal.

Dito isso, ao levar em consideração uma barra solicitada por força normal ( $N_{sd}$ ), de compressão no caso dos pilares, e por momento fletor ( $M_{sd}$ ), analisa-se a resistência da seção transversal retangular com relação ao estado limite último. Em face das intensidades da força normal e do momento fletor, pode-se ter as seguintes situações:

- Uma armadura tracionada e outra comprimida, caso de grande excentricidade;
  - Duas armaduras comprimidas, caso de pequena excentricidade.

Na Figura 4.15,  $A_{sc2}$  (ou  $A_{st2}$ ) é a área das barras comprimidas por ação exclusiva de  $M_{sd}$ , e  $A_{st1}$  (ou  $A_{sc1}$ ) é a área das barras tracionadas por ação exclusiva de  $M_{sd}$ .

**Figura 4.15 - Seção retangular de barra solicitada por força normal e momento fletor**



**Fonte: Giongo (2017)**

No caso de uma armadura tracionada e outra comprimida, nota-se que as tensões causadas pelo momento fletor são preponderantes face as que ocorrem em virtude da força normal. Nesse caso, a linha neutra pode variar como indicado na inequação:

$$d' < x < d \quad (4.13)$$

Escrevendo-se em função da posição relativa da linha neutra tem-se:

$$\frac{d'}{d} < \beta_x < 1 \quad (4.14)$$

A ruína convencional pode ocorrer com deformações relativas aos domínios  $2b$  ( $x > d$ ), 3 e 4.

As equações de equilíbrio são obtidas em função das forças resultantes das tensões internas que se equilibram e dos momentos resistentes calculados em relação ao centro geométrico (CG) da seção.

A seguir, nas expressões abaixo, têm-se a resultante das tensões de compressão no concreto,  $R_{cc}$ , a força resultante das tensões nas barras da armadura comprimida,  $R_{sc}$ , de área  $A_{sc}$  e a força resultante das tensões nas barras da armadura tracionada ( $R_{st}$ ) de área  $A_{st}$ . Ademais, tem-se que  $h_x$  e  $h_y$  são, respectivamente, a base e a altura da seção transversal,  $d$  é a altura útil,  $x$  a profundidade da linha neutra, a partir da borda mais comprimida,  $y$  é a altura do diagrama retangular de tensões de compressão e  $d'$  é a distância dos centros das barras das armaduras até a borda mais próxima.

Logo, tem-se o seguinte equilíbrio de forças axiais:

$$N_{sd} = R_{cc} + R_{sc} - R_{st} \quad (4.15)$$

Desenvolvendo as resultantes tem-se a seguinte equação:

$$N_{sd} = h_x \cdot d \cdot \lambda \cdot \beta_x \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} + A_{sc} \cdot \sigma_{sc} + A_{st} \cdot \sigma_{st} \quad (4.16)$$

Em que  $\alpha_c$  e  $\lambda$  são expressos na Tabela 4.2 para os concretos indicados na NBR 6118:2014.

**Tabela 4.2 - Valores de  $\alpha_c$  e  $\lambda$**

Classe de resistência	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	C55	C60	C70	C80	C90
$\lambda$				0,800				0,788	0,755	0,750	0,725	0,700
$\alpha_c$				0,850				0,829	0,808	0,765	0,723	0,680

**Fonte: Giongo (2017)**

Considerando o equilíbrio de momentos das forças resultantes internas em relação ao centro geométrico (CG) da seção, tem-se:

$$M_{sd} = R_{cc} \cdot \left[ \frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right] + [R_{sc} + R_{st}] \cdot \left[ \frac{h}{2} - d' \right] \quad (4.17)$$

Desenvolvendo a Equação 4.17 obtém-se:

$$M_{sd} = h_x \cdot d^2 \cdot \lambda \cdot \beta_x \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \left[ \frac{h_x}{2 \cdot d} - 0,5 \cdot \lambda \cdot \beta_x \right] + [A_{sc} \cdot \sigma_{sc} + A_{st} \cdot \sigma_{st}] \cdot \left[ \frac{h}{2} - d' \right] \quad (4.18)$$

Pode-se ser escrita ainda a seguinte equação de compatibilidade:

$$\frac{\varepsilon_{cc}}{x} = \frac{\varepsilon_{sc}}{x - d'} = \frac{\varepsilon_{st}}{d - x} \quad (4.19)$$

Já no caso de duas armaduras comprimidas, as tensões relativas à força normal são preponderantes em relação às causadas pelo momento fletor. Nesse caso a medida de profundidade da linha neutra pode variar de acordo com a seguinte inequação:

$$d < x < \rightarrow +\infty \quad (4.20)$$

Ao escrever em função da posição relativa da linha neutra tem-se:

$$1 < \beta_x < \rightarrow +\infty \quad (4.21)$$

A ruína convencional (ELU) pode ocorrer com deformações relativas aos domínios 4a, 5 e reta b.

As equações de equilíbrio são escritas de acordo com duas possibilidades de medidas da profundidade da linha neutra, indicadas nas equações 4.22 e 4.23:

$$y < h_y \rightarrow \lambda \cdot x < h_y \rightarrow x \leq 1,25 \cdot h_y \quad (4.22)$$

$$y = h_y \rightarrow \lambda \cdot x = h_y \rightarrow x > 1,25 \cdot h_y \quad (4.23)$$

Assim, a seguir foram escritas as equações de equilíbrio considerando os domínios de deformações relativos a este caso de duas armaduras comprimidas.

a) Domínios 4a e 5a ( $x \leq 1,25.h_y$ ):

$$N_{sd} = h_x \cdot d \cdot \lambda \cdot \beta_x \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} + A_{sc1} \cdot \sigma_{sc1} + A_{sc2} \cdot \sigma_{sc2} \quad (4.24)$$

$$M_{sd} = h_x \cdot d^2 \cdot \lambda \cdot \beta_x \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \left[ \frac{h_x}{2 \cdot d} - \lambda \cdot \beta_x \right] + [A_{sc1} \cdot \sigma_{sc1} - A_{sc2} \cdot \sigma_{sc2}] \cdot \left[ \frac{h}{2} - d' \right] \quad (4.25)$$

b) Domínios 5b ( $x > 1,25.h_y$ ) e reta b:

$$N_{sd} = h_x \cdot h \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} + A_{sc1} \cdot \sigma_{sc1} + A_{sc2} \cdot \sigma_{sc2} \quad (4.26)$$

$$M_{sd} = [A_{sc1} \cdot \sigma_{sc1} - A_{sc2} \cdot \sigma_{sc2}] \cdot \left[ \frac{h}{2} - d' \right] \quad (4.27)$$

Em que  $A_{sc1}$  e  $\sigma_{sc1}$  correspondem, respectivamente, à área e tensão na armadura menos comprimida e  $A_{sc2}$  e  $\sigma_{sc2}$  à armadura mais comprimida.

As equações de compatibilidade de deformações podem ser escritas das seguintes formas:

a) Domínio 4a

$$\frac{\varepsilon_{cc}}{x} = \frac{\varepsilon_{sc2}}{x - d'} = \frac{\varepsilon_{sc1}}{x - d} \quad (4.28)$$

b) Domínio 5a

$$\frac{\varepsilon_{cc}}{x} = \frac{\varepsilon_{sc2}}{x - d'} = \frac{\varepsilon_{sc1}}{x - d} \quad (4.29)$$

c) Reta b

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{sc1} = \varepsilon_{sc2} \quad (4.30)$$

Além disso, na reta b, uma vez que a linha neutra tende ao infinito, as tensões nas barras de aço são iguais à tensão de projeto do aço em questão.

Portanto, é importante salientar que as equações de equilíbrio aqui presentes são essenciais para a obtenção do dimensionamento sugerido e até mesmo da envoltória resistente real, mesmo quando a seção está sujeita à flexo-compressão oblíqua, a qual será detalhada a seguir.

#### 4.8 Pilares submetidos à Flexo-Compressão oblíqua

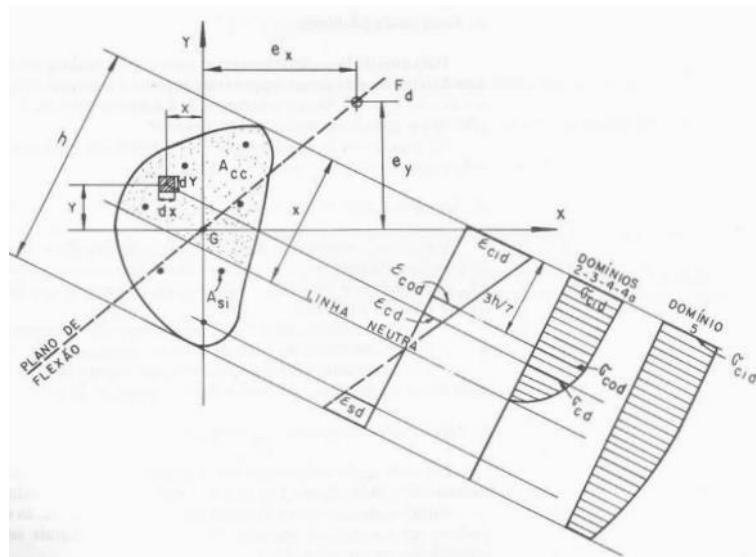
Fusco (1981) e Giongo (2017) discorrem a respeito da flexo-compressão oblíqua. Sendo assim, o conteúdo aqui presente possui esse embasamento literário.

No caso dos elementos estruturais em concreto armado, as seções transversais podem estar sujeitas a flexão composta oblíqua quando os planos dos momentos fletores não estão alinhados com os planos centrais de inércia.

A flexão composta oblíqua também pode ocorrer quando o plano do momento fletor contém um dos eixos principais de inércia, mas o arranjo das barras de armadura longitudinal não é simétrico, ou quando a seção transversal não possui plano de simetria. O que não é o caso do presente trabalho, uma vez que serão analisados pilares de seções retangulares.

No caso de flexão normal composta, a incógnita era a profundidade da linha neutra ( $x$ ), desde que as medidas dos lados da seção transversal retangular fossem conhecidas. Contudo, quando a seção transversal está sujeita a flexão oblíqua composta, as incógnitas são a medida da profundidade da linha neutra ( $x$ ) e seu ângulo de inclinação ( $\theta$ ), tornando a solução mais complexa.

**Figura 4.16 - Flexão composta oblíqua em uma seção qualquer**



**Fonte: Fusco (1981)**

Ao analisar a seção transversal de um elemento estrutural linear em concreto armado (Figura 4.16), sujeito a uma força normal de compressão ( $N_{sd}$ ) e momentos fletores ( $M_{Sxd}$ ) e ( $M_{Syd}$ ), é possível estabelecer as seguintes equações de equilíbrio:

$$N_{sd} \leq N_{Rd} = \iint_{A_{cc}} \sigma_{cd} \cdot dx \cdot dy + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{sid} \quad (4.31)$$

$$M_{Sxd} \leq N_{sd} \cdot e_x = M_{Rxd} = \iint_{A_{cc}} \sigma_{cd} \cdot x \cdot dx \cdot dy + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{sid} \cdot x_{si} \quad (4.32)$$

$$M_{Syd} \leq N_{sd} \cdot e_y = M_{Ryd} = \iint_{A_{cc}} \sigma_{cd} \cdot y \cdot dx \cdot dy + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{sid} \cdot y_{si} \quad (4.33)$$

Sendo que,  $A_{cc}$  é a parte da área da seção transversal comprimida,  $n$  é o número de barras em uma camada;  $A_{si}$  é a área da seção transversal de uma barra de aço de ordem  $i$ ,  $\sigma_{id}$  é a tensão na barra de aço de ordem  $i$ ,  $x$  é a abscissa do elemento infinitesimal de área  $dx \cdot dy$ ,  $y$  é a ordenada do elemento infinitesimal de área  $dx \cdot dy$ ,  $x_{si}$  é a abscissa da barra de aço de ordem  $i$ ,  $y_{si}$  é a ordenada da barra de aço de ordem  $i$ .

À vista disso, dada a seção transversal de um pilar em concreto armado, incluindo sua forma geométrica e dimensões, a área e distribuição das barras de armadura, a resistência de cálculo do concreto, e o diagrama tensão - deformação das barras de aço da armadura, é possível fixar arbitrariamente a posição da linha neutra ( $x$ ) por sua inclinação ( $\theta$ ), uma vez que ambas são incógnitas do problema. Com essa posição determinada, é possível desenhar o diagrama de deformações para toda a seção, levando em consideração as deformações  $\epsilon_{cc}$ ,  $\epsilon_{sc}$  e  $\epsilon_{st}$  de acordo com os domínios de deformações analisados.

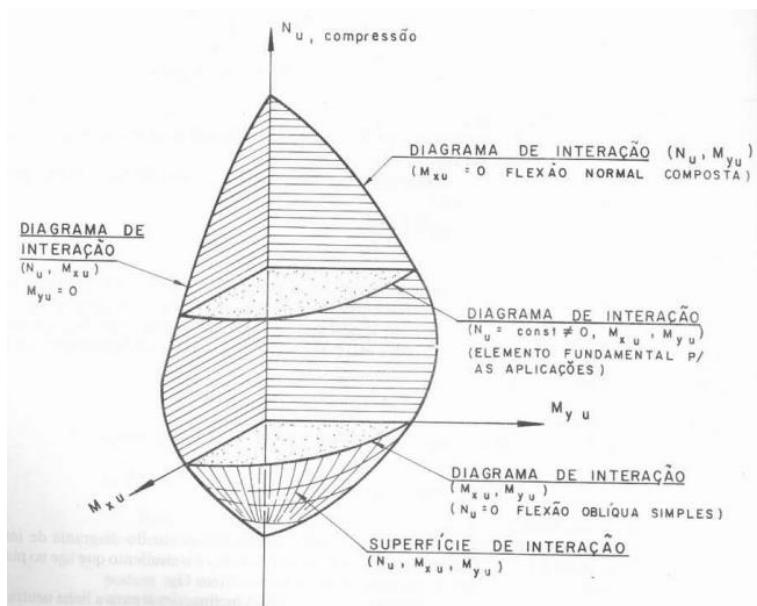
Com as deformações conhecidas, pode-se calcular as tensões nas barras de armadura e, por meio de equações de equilíbrio (4.31, 4.32 e 4.33), determinar as solicitações resistentes últimas, como  $N_{Rsd}$ ,  $M_{Rdx}$  e  $M_{Rdy}$ , que

representam as forças e momentos que as barras de armadura devem suportar para garantir a estabilidade e segurança da estrutura.

É importante salientar que, são montadas as equações de equilíbrio de forma discretizada, isto é, transformando as integrais em somatórios, e, caso as condições de equilíbrio não sejam satisfeitas, novos valores são adotados para a profundidade e o ângulo da linha neutra de forma iterativa, sucessivamente, até que o equilíbrio seja alcançado.

A Figura 4.17 apresenta a superfície de interação dos valores últimos dos esforços resistentes  $N_u$ ,  $M_{xu}$ ,  $M_{yu}$ .

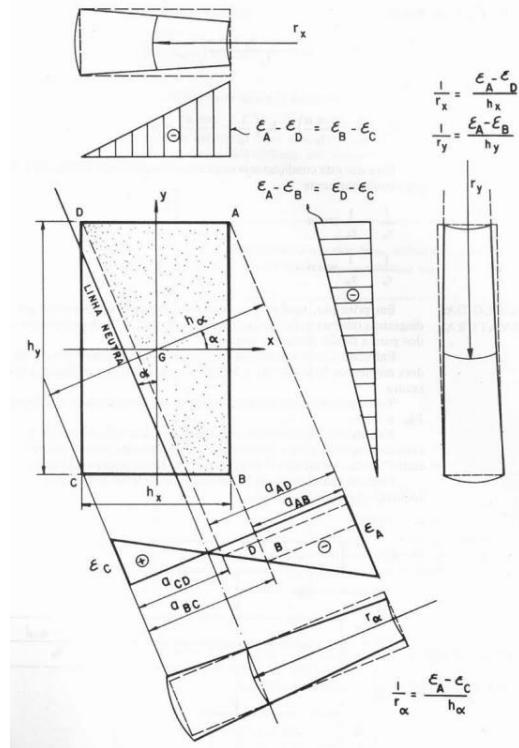
**Figura 4.17 - Superfície de interação**



**Fonte: Fusco (1981)**

Quando se trata da instabilidade na flexo-compressão oblíqua, o eixo da barra sofre deformações que, no caso de barras esbeltas, provocam o surgimento de excentricidades significativas pelo efeito de 2<sup>a</sup> ordem. Em virtude disso, tem-se o plano de flexão variável a cada seção da barra.

Figura 4.18 -curvaturas em uma seção transversal retangular



Fonte: Fusco (1981)

Em uma barra de seção retangular, como mostra a Figura 4.18, tendo-se a direção da linha neutra e o valor da curvatura na direção perpendicular a ela, chega-se aos valores de curvatura nas direções x e y, isto é:

$$\frac{1}{r_x} = \frac{1}{r_\alpha} \cdot \sin(\alpha) \quad (4.34)$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{1}{r_\alpha} \cdot \cos(\alpha) \quad (4.35)$$

Essas expressões são fruto da relação existente entre as dimensões da seção, nas direções x e y, e a dimensão na direção perpendicular à linha neutra, como mostra a Equação 4.36.

$$h_\alpha = h_x \cdot \cos(\alpha) + h_y \cdot \sin(\alpha) \quad (4.36)$$

Por fim, a partir de um valor para a inclinação da linha neutra ( $\alpha$ ), adota-se um valor para a curvatura  $1/r_\alpha$  e para a deformação ao nível do centro geométrico (CG) perpendicular à direção da linha neutra, através dos quais se torna possível encontrar o valor da resultante de compressão no concreto e da resultante de tração no aço.

#### 4.9 Método do pilar padrão

O método estabelecido pela NBR 6118:2014 engloba os pilares com  $\lambda \leq 90$ , seção constante e armadura simétrica ao longo do seu comprimento longitudinal. As não linearidades são levadas em consideração de forma aproximada, sendo que a não linearidade geométrica é considerada supondo-se que a deformação seja senoidal (Equação 4.37) e a não linearidade física é contemplada por uma expressão aproximada da curvatura na seção crítica ou através de uma expressão aproximada da rigidez.

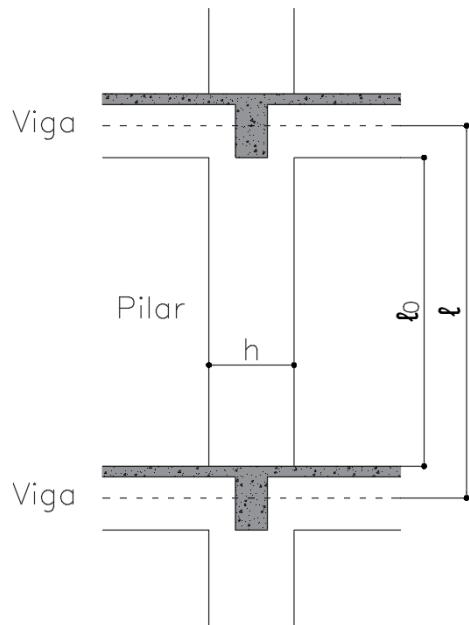
$$y = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\ell}\right) \cdot x \quad (4.37)$$

A primeira etapa consiste no cálculo do comprimento equivalente do pilar ( $\ell_e$ ), o qual consiste no menor valor entre as duas expressões:

$$\ell_e \leq \left\{ \frac{\ell_0 + h}{\ell} \right\} \quad (4.38)$$

Onde o  $\ell_0$  é a distância da face da viga até o piso e o  $h$  é a dimensão do pilar na direção avaliada, já o  $\ell$  trata-se da distância de eixo a eixo das vigas, como mostra a Figura 4.19.

**Figura 4.19 - Comprimento equivalente do pilar**

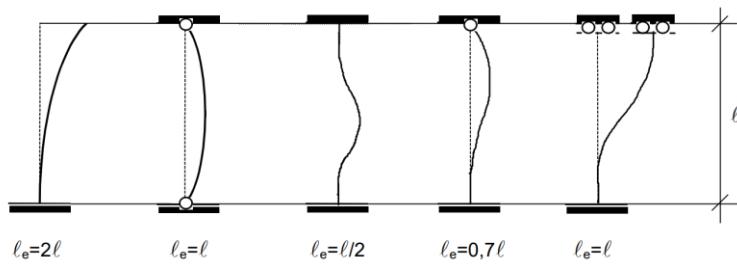


**Fonte: Autoria própria**

No caso da expressão 4.38 é considerado um pilar biapoiado, isto é, rotulado nas duas extremidades, o qual é mais usual em edifícios, mas a proporção do valor de  $l$  a ser considerada na expressão depende das condições de vinculação.

A determinação do comprimento de flambagem ocorre quando o mesmo está submetido ao carregamento mais desfavorável, ele corresponde à distância entre pontos de inflexão da deformada, os quais variam de acordo com o grau de engastamento. A Figura 4.20 mostra os diferentes valores de  $l_e$  que podem ser considerados.

**Figura 4.20 - Comprimentos de flambagem**



**Fonte: Borges (1999)**

Em seguida, obtém-se o índice de esbeltez  $\lambda$ , a partir da seguinte expressão:

$$\lambda = \frac{\ell_e}{i} \quad (4.39)$$

Em que  $i$  é o raio de giração e depende do momento de inércia e da área da seção, como mostra a seguir:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (4.40)$$

A próxima etapa consiste em calcular um momento mínimo de 1<sup>a</sup> ordem, uma vez que, mesmo que não haja momentos atuantes na estrutura, deve-se considerar esse momento nas duas direções (x e y) quando efetuados os cálculos. A seguir é apresentada a expressão:

$$M_{1sd,min} = N_{sd} \cdot (0,015 + 0,03 \cdot h) \quad (4.41)$$

Sendo  $N_{sd}$  a força normal de projeto e  $h$  a dimensão do pilar, expressa em metros, correspondente à direção contrária do momento analisada, por convenção da NBR 6118:2014.

Visto que foram definidos os momentos mínimos em ambas as direções de interesse, a NBR 6118:2014 define ainda no item 15.8.2 um índice de esbeltez limite  $\lambda_1$ , o qual depende, principalmente, da excentricidade de 1<sup>a</sup> ordem  $e_1 / h$  na extremidade do pilar onde ocorre o momento de 1<sup>a</sup> ordem de maior valor absoluto. Ademais, depende da vinculação dos extremos da coluna isolada e da forma do diagrama de momentos de 1<sup>a</sup> ordem.

O valor de  $\lambda_1$  pode ser obtido pela expressão:

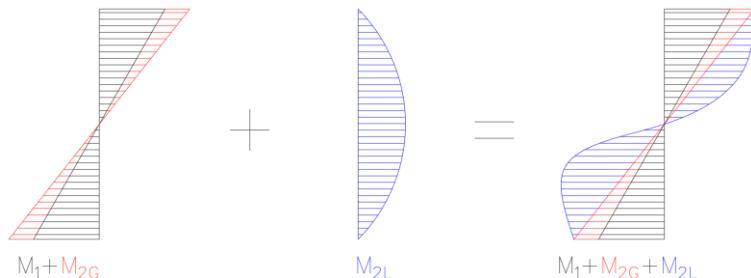
$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \quad (4.42)$$

Onde:  $35 \leq \lambda_1 \leq 90$ .

Com relação ao  $\alpha_b$ , esse parâmetro corresponde à porcentagem do momento máximo entre as extremidades que é equivalente ao momento de 1<sup>a</sup> ordem somado ao de 2<sup>a</sup> ordem global, caso ele exista, na seção de momento final máximo.

O pilar está inicialmente sujeito a uma distribuição de momentos de 1<sup>a</sup> ordem ( $M_1$ ), posteriormente, quando se analisa a estabilidade global, e a estrutura for de nós móveis, calcula-se uma distribuição de momentos de 2<sup>a</sup> ordem global ( $M_{2G}$ ). Como neste método, a deformação do pilar é admitida senoidal, obtém-se também um diagrama de momentos de 2<sup>a</sup> ordem local. Dessa forma, somando-se os diagramas, há um diagrama de momentos final no pilar (Figura 4.21) e, por conta do comportamento senoidal, não necessariamente o momento máximo estará na extremidade do pilar.

**Figura 4.21 - Diagramas de momentos em pilares**



**Fonte: Autoria própria**

Como a vinculação altera o comprimento de flambagem do pilar e, consequentemente, o diagrama de momento, as formas de se obter  $\alpha_b$  também variam, como mostrado a seguir:

- Para pilares biapoiados sem forças transversais:

$$\alpha_b = 0,60 + 0,40 \cdot \frac{M_A}{M_B} \geq 0,40 \quad (4.43)$$

Sendo  $M_A$  e  $M_B$  os momentos de 1<sup>a</sup> ordem nos extremos do pilar, no caso de estruturas de nós fixos e os momentos totais (considerando o momento

de 2<sup>a</sup> ordem global) no caso de estruturas de nós móveis. Para  $M_A$  deve ser adotado o maior valor absoluto ao longo do pilar biapoiado.

- Para pilares biapoiados com forças transversais significativas ao longo da altura:

$$\alpha_b = 1,0$$

- Para pilares em balanço:

$$0,85 \leq \alpha_b = 0,80 + 0,20 \cdot \frac{M_c}{M_A} \leq 1,00 \quad (4.44)$$

Sendo  $M_A$  é o momento de 1<sup>a</sup> ordem no engaste e  $M_c$  é o momento de 1<sup>a</sup> ordem no meio do pilar em balanço.

- Para pilares biapoiados ou em balanço com momentos menores que o momento mínimo:

$$\alpha_b = 1,0$$

Calculados os índices de esbeltez em ambas as direções e seus respectivos índices de esbeltez limite, quando o primeiro é superior ao segundo deve-se considerar os efeitos de segunda ordem. Há duas formas principais recomendadas pela norma NBR 6118:2014, a primeira consiste no método do pilar padrão por curvatura aproximada, cuja fórmula é:

$$M_{Sd,tot} = \alpha_b \cdot M_{1Sd,A} + N_{Sd} \cdot \frac{\ell_e^2}{10} \cdot \frac{1}{r} \geq M_{1Sd,A} \quad (4.45)$$

Cujos parâmetros já foram especificados anteriormente. Na expressão 4.45, a curvatura é aproximada pela expressão 4.46, porém, ela deve respeitar uma curvatura limite, que está de acordo com o critério normativo. Como os pilares geralmente se encontram nos domínios 5 e 4, a norma estima que a curvatura limite, considerando a Equação 4.10, seja a soma das deformações

limite para o concreto e de escoamento para o aço, as quais são respectivamente 3,5 % e 2,07 % (adotando aço CA-50).

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h \cdot (v + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h} \quad (4.46)$$

Onde a força normal adimensional é:

$$v = \frac{N_{sd}}{A_c \cdot f_{cd}} \quad (4.47)$$

Ainda a respeito da curvatura, quando o pilar está sujeito a uma flexão oblíqua, existe curvatura em ambas as direções (Figura 4.19). A curvatura y é aquela em que o raio de curvatura está na direção y, mas é causada por um vetor momento na direção x. A curvatura em x é dada de maneira análoga à curvatura em y.

O outro método consiste no método do pilar padrão com rigidez aproximada ( $k$ ), em que na expressão 4.7, é considerada uma aproximação de  $EI$  determinada pela norma, igual à Equação 4.48, de modo a simplificar a não linearidade do concreto vista na Figura 4.14.

$$k = 32 \cdot \left( 1 + 5 \cdot \frac{M_{d,tot}}{h \cdot N_d} \right) \cdot v \quad (4.48)$$

Sabendo-se que  $k = 1/r$  e substituindo essa igualdade na Equação 4.45, obtém-se a partir de manipulações algébricas a seguinte equação de 2<sup>a</sup> grau:

$$a \cdot M_{sd,tot}^2 + b \cdot M_{sd,tot} + c = 0 \quad (4.49)$$

Sendo:

$$a = 5 \cdot h$$

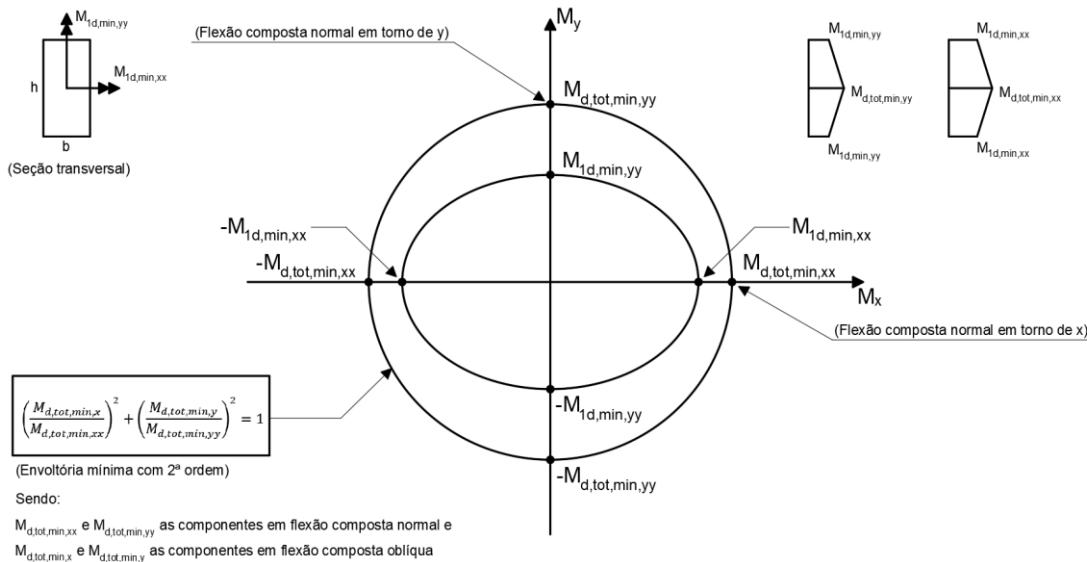
$$b = h^2 \cdot N_{sd} - \frac{\ell^2 \cdot N_{sd}}{320} - 5 \cdot h \cdot \alpha_b \cdot M_{1sd,A}$$

$$c = -h^2 \cdot N_{sd} \cdot \alpha_b \cdot M_{1sd,A}$$

Por fim, a partir de ambos os métodos pode-se determinar as envoltórias mínimas considerando apenas os efeitos de 1<sup>a</sup> ordem e considerando o de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> ordem. Logo, a verificação do momento mínimo pode ser considerada atendida quando, no dimensionamento adotado, obtém-se uma envoltória resistente que englobe ambas.

As considerações destas envoltórias mínimas podem ser realizadas através de duas análises à flexão composta normal, calculadas de forma isolada e com momentos fletores mínimos de 1<sup>a</sup> ordem atuantes nos extremos do pilar, nas suas direções principais, como mostra a Figura 4.22.

**Figura 4.22 - Envoltória mínima com 2<sup>a</sup> ordem**



**Fonte: NBR 6118:2014**

Nas situações de flexão oblíqua, simples ou composta, a norma ainda estabelece uma aproximação dada pela expressão de interação:

$$\left(\frac{M_{Rd,x}}{M_{Rd,xx}}\right)^\alpha + \left(\frac{M_{Rd,y}}{M_{Rd,yy}}\right)^\alpha = 1 \quad (4.50)$$

Sendo  $M_{Rd,x}$  e  $M_{Rd,y}$  as correspondentes do momento resistente de cálculo segundo os dois eixos principais de inércia x e y, da seção bruta, com um esforço normal  $N_{Rd}$  igual à normal solicitante  $N_{sd}$ .

Já  $M_{Rd,xx}$  e  $M_{Rd,yy}$  são os momentos resistentes de cálculo segundo cada um dos referidos eixos em flexão composta normal, com o mesmo valor de  $N_{Rd}$  (são calculados a partir do arranjo e da quantidade de armadura em estudo).

Por fim,  $\alpha$  corresponde a um expoente cujo valor depende de vários fatores, entre eles o valor da força normal, a forma da seção, o arranjo da armadura e de suas porcentagens. Em geral, pode ser adotado  $\alpha = 1$ , a favor da segurança. No caso de seções retangulares, pode-se adotar  $\alpha = 1,2$ .

#### **4.10 Método geral**

Segundo a NBR 6118:2014, o método geral consiste na análise da 2ª ordem efetuada com discretização adequada da barra, consideração da relação momento curvatura real em cada seção e construção da não linearidade geométrica de maneira não aproximada. Ele é obrigatório para pilares com índice de esbeltez ( $\lambda$ ) maior que 140, mas no presente trabalho será aplicado a partir de pilares com  $\lambda > 90$ .

Dito isso, a consideração da relação momento-curvatura real está relacionada à consideração da não linearidade física, já a não linearidade geométrica de maneira não aproximada significa calcular a curvatura a partir dos deslocamentos reais da estrutura.

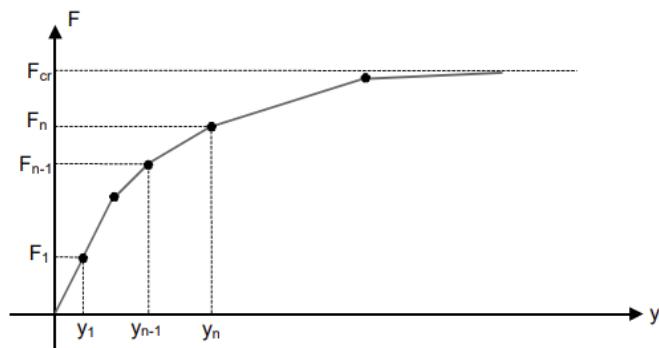
Assim como afirma Borges (1999), o método consiste em estudar o comportamento das estruturas de concreto armado à medida que se aumenta o carregamento ou a sua excentricidade, permitindo calcular a curvatura em cada seção do pilar a partir dos deslocamentos reais nessas seções

O princípio do processo é procurar, para um determinado elemento submetido a uma situação particular de carregamento, uma posição deformada estável, ou seja, um estado em que haja equilíbrio entre esforços e solicitações.

Há duas concessões que distanciam o método do comportamento real da estrutura. A primeira admite a curvatura como sendo igual à segunda derivada da linha elástica, como mostra a Equação 4.9. Já a segunda atribui que a precisão do método é dependente do número de subdivisões realizadas na peça, já que necessita ser executado por processos numéricos.

Sua execução, a princípio, consiste na aplicação da carga crítica por etapas. Através de incrementos progressivos do carregamento, é calculado o deslocamento correspondente a uma determinada seção, sendo, portanto, caracterizado como efeito de 2<sup>a</sup> ordem. O carregamento crítico é determinado obtido quando a curva carga x deslocamento (Figura 4.23) tender assintoticamente.

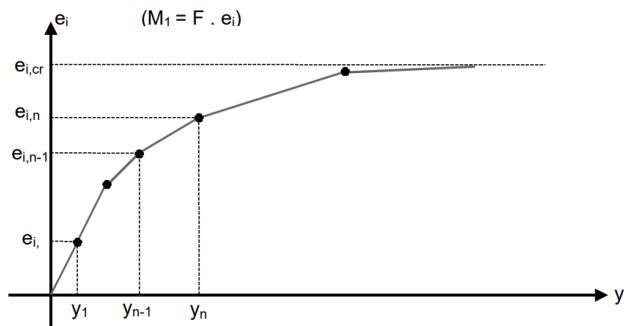
**Figura 4.23 - Método geral aplicado através do carregamento progressivo**



**Fonte: Borges (1999)**

Outra forma de aplicação do método geral se dá através de acréscimos de excentricidade. Neste método, o procedimento é o mesmo que o anterior, porém, tem-se cargas constantes e a variação ocorre incremento de excentricidades de 1<sup>a</sup> ordem. Portanto, o valor da excentricidade crítica é alcançado quando o diagrama excentricidade x deslocamento for assintótico (Figura 4.24).

**Figura 4.24 - Método geral aplicado através de excentricidades progressivas**



**Fonte: Borges (1999)**

A relação entre a força aplicada e a obtenção do deslocamento da estrutura se dá através da analogia de Mohr, explicitada por Morilla (2014), a

qual se baseia no fato que a equação da linha elástica e a equação do relacionamento entre a carga aplicada, a força cortante e o momento fletor possuem a mesma forma.

Para tal analogia vale a Equação 4.9, porém a última igualdade não é válida nesse caso, uma vez que o método considera a não linearidade do concreto. Além disso, utiliza-se a equação a seguir que relaciona a carga aplicada, a força cortante e o momento fletor:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = -q \quad (4.51)$$

Onde  $q$  é a carga distribuída em um trecho de uma viga análoga, segundo a analogia de Mohr.

No presente trabalho pela análise ser feita em um pilar cujas solicitações normais atuantes já são apresentadas ( $N_{Sd}$  e  $M_{Sd,x}$ ), a barra apresenta um diagrama de momento fletor de 1<sup>a</sup> ordem, geralmente retilíneo em pilares de edifícios. A partir da discretização do elemento obtém-se a curvatura referente a cada uma dessas subdivisões através da relação momento x curvatura (Figura 4.12) para uma determinada força normal. Pela analogia de Mohr aplica-se os valores de curvatura como cargas ( $-q$ ) e, assim, chega-se em um diagrama de momento fletor ( $M(k_i)$ ), o qual é equivalente ao deslocamento da estrutura ( $y_i$ ). Ao somar o momento gerado por esse deslocamento ao momento de 1<sup>a</sup> ordem, obtém-se o momento fletor real atuante no elemento. Caso a seção não esteja em equilíbrio repete-se o mesmo processo com o novo momento até que toda a estrutura esteja em uma posição deformada estável.

No caso da flexo-compressão oblíqua, como uma forma aproximada da realidade, pretende-se realizar o procedimento descrito acima isoladamente, para os momentos nas direções x e y.

O gráfico momento x curvatura citado anteriormente é obtido através do diagrama ( $M$ ,  $N$ ,  $1/r$ ) quando fixado um valor para a força normal. A lógica desse diagrama é a seguinte: a curvatura está relacionada com as deformações, estas

ligam-se às tensões através das equações constitutivas e, com todos esses parâmetros, torna-se possível o cálculo do esforço normal e do momento fletor.

Dessa forma, a não linearidade física é atingida com a consideração da relação momento x curvatura de um material não-linear e a não linearidade geométrica é alcançada ao obter a estrutura deformada para a realização dos cálculos.

## 5 CÓDIGO COMPUTACIONAL: FUNDAMENTAÇÃO DE PROGRAMAÇÃO

Neste tópico será abordado a estruturação do código, a estratégia de programação e os motivos pelos quais escolheu-se a linguagem que será utilizada no seu desenvolvimento.

### 5.1 *Linguagem Python*

*Python* (<https://www.python.org/>) é uma linguagem de programação de alto nível, interpretada e apresenta capacidade de suportar e combinar diferentes paradigmas de programação. Sendo a programação funcional e a programação procedural os paradigmas mais utilizados para a definição do “*back-end*” e a programação orientada a objetos voltada para o “*front-end*”.

Atualmente, é uma das linguagens de programação mais amplamente utilizadas e sua elevada variedade de bibliotecas disponíveis a torna ainda mais conveniente para o desenvolvimento de códigos para diversos fins. Um dos aspectos mais importantes é que *Python* é uma linguagem livre e não proprietária, com interpretadores, ambientes de desenvolvimento e outras ferramentas disponíveis gratuitamente para elaboração de soluções computacionais. Essas características fazem dela uma excelente opção para o desenvolvimento e manutenção de códigos, tornando-se, por esses motivos, a linguagem de programação selecionada para o desenvolvimento do presente trabalho.

### 5.2 *Bibliotecas utilizadas*

Neste tópico, da mesma forma que no tópico anterior, foram consultadas as próprias documentações das bibliotecas, as quais estão presentes nos links entre parênteses, para encontrar informações de interesse que contribuíram na escolha das mesmas.

Dito isso, para este trabalho, utilizou-se bibliotecas para operações matemáticas, mais especificamente a biblioteca NumPy (<https://numpy.org/>), que possui algumas vantagens devido à sua eficiente estrutura de arrays

multidimensionais, permitindo armazenar dados de forma compacta na memória do computador.

Além disso, o NumPy oferece uma ampla gama de operações otimizadas e funções matemáticas que podem ser aplicadas a conjuntos de dados. Elas são executadas de forma eficiente, sem a necessidade de laços ou iterações explícitas, o que resulta em um processamento mais rápido de cálculos complexos, além de apresentarem uma sintaxe clara. Isso é especialmente útil ao lidar com grandes volumes de dados ou ao realizar cálculos intensivos.

Serão utilizadas também bibliotecas para desenvolvimento de interfaces gráficas (GUI). Para isso, há várias alternativas disponíveis, como a biblioteca PySide (<https://doc.qt.io/qtforpython/>), tkinter (<https://docs.python.org/pt-br/3/library/tk.html>) ou KivyMD (<https://kivymd.readthedocs.io/en/1.1.1/>).

Dentre as três bibliotecas mencionadas, a biblioteca tkinter torna-se interessante uma vez que, além de atender às necessidades do código computacional a ser implementado por meio de suas diversas ferramentas gráficas, como botões, menus, caixas de texto, etc., chamadas de “widgets”, essa biblioteca está contida na instalação do pacote básico de *Python* para Windows. Então, qualquer computador que tenha o interpretador de *Python* instalado, já permite criar interfaces gráficas em tkinter. Porém, apesar dessa facilidade, ela é limitada quanto às variedades de ferramentas e possui uma difícil comunicação com outras bibliotecas, abrindo espaço para a incorporação da biblioteca KivyMD.

A biblioteca KivyMD é uma extensão do *framework* Kivy que fornece componentes de interface do usuário (UI) prontos para uso, tornando-a uma opção para o desenvolvimento de aplicativos móveis e de desktop em *Python*.

Ela oferece uma variedade de componentes de interface pré-projetados, altamente personalizáveis, permitindo, assim, atender às necessidades específicas do projeto e estimulando uma certa liberdade de criação. Outra vantagem é a sua compatibilidade com diferentes plataformas, o que torna a biblioteca adequada para o desenvolvimento multiplataforma, permitindo a criação de programas consistentes para diferentes sistemas operacionais e a

conexão com outras bibliotecas de forma simplificada. Portanto, tornou-se a biblioteca utilizada para a interface gráfica (GUI) do software desenvolvido.

Por fim, a criação de gráficos que compõe a teoria revisada no presente trabalho foi de responsabilidade da biblioteca matplotlib (<https://matplotlib.org/stable/index.html>). Ela é amplamente utilizada para a visualização de dados em *Python*.

Uma das principais vantagens do matplotlib é sua simplicidade e facilidade de uso, a qual fornece uma interface intuitiva para a criação de gráficos. Com poucas linhas de código, é possível gerar gráficos de alta qualidade com uma variedade de estilos e opções de personalização. Ademais, ela é altamente flexível e pode ser integrado com outras bibliotecas de análise de dados, como NumPy. Pode ainda suportar uma ampla variedade de formatos de saída, incluindo imagens rasterizadas (PNG, JPEG) e vetoriais (PDF, SVG), permitindo a incorporação dos gráficos em diferentes tipos de documentos.

Por fim, a biblioteca também oferece recursos avançados, como a capacidade de criar gráficos em várias janelas ou subplots, adicionar anotações e textos explicativos aos gráficos e aplicar estilos predefinidos ou personalizados para tornar a visualização mais atraente e informativa.

### **5.3 Estratégia de desenvolvimento**

A base para o início da programação foi a adoção de uma estratégia para que o tempo disponível para o desenvolvimento do presente trabalho se tornasse melhor aproveitado.

Ela consistiu na divisão de tudo o que seria desenvolvido em cinco blocos, envolvendo tanto a parcela iterativa com o usuário, quanto à parte lógica relacionada com conceitos da área de estruturas. Ademais, foram separadas buscando um desenvolvimento simultâneo entre “*back-end*” e “*front-end*”.

Esses 5 blocos são:

- 1) Desenvolvimento do método do pilar padrão;
- 2) Desenvolvimento do método de dimensionamento e cálculo do momento resistente;
- 3) Desenvolvimento do método geral;

- 4) Desenvolvimento da envoltória resistente real;
- 5) Desenvolvimento da interface gráfica.

Com o intuito de organizar e facilitar a programação do código computacional, dividiu-se eles entre 3 arquivos diferentes. Com isso, conforme o número de linhas implementadas aumentasse, o código não se tornaria tão extenso a ponto de sua navegação dificultar a apuração dos erros.

Durante a etapa de implementação definiu-se uma ordem hierárquica baseada no nível de dificuldade entre os quatro blocos iniciais. Então, iniciou-se pelo desenvolvimento do método do pilar padrão através da aplicação de todas as contas e conceitos envolvendo o mesmo e, em paralelo, criou-se as envoltórias utilizando-se de recursos gráficos para facilitar a visualização e verificar se o código está retornando valores coerentes.

Em seguida, no mesmo arquivo, ocorreu a aplicação das contas envolvendo o dimensionamento e o momento resistente. Por ser uma etapa numérica, em que não é necessário a elaboração de nenhum aspecto visual para seu compreendimento, nesse caso não houve um paralelismo com o *"front-end"*.

Para aproveitar ainda os dados que funções dos métodos anteriores retornam, foi desenvolvido ainda o método geral, com a criação de aspectos visuais para facilitar o entendimento.

Quando se trata da parcela do avanço do *software* relacionada à conceitos da Engenharia Civil, o bloco 4 foi alocado em último e em outro arquivo, já que não possui caráter trivial, assim como outros blocos, mas que também envolve conceitos e lógicas já implementados no bloco 2, sendo possível o reaproveitamento de estratégias e formas de iterações já apresentadas previamente, mas agora aplicadas de forma mais abrangente.

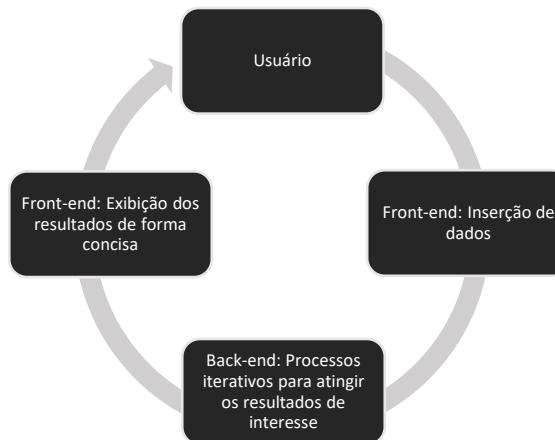
Nota-se uma importante divisão entre as várias frentes que compõem a criação de um programa. Além disso, o terceiro arquivo foi preenchido com o código da interface, o qual foi produzido em paralelo a todos os outros, pois foi um processo demorado até o alcance de um resultado que acreditasse ser satisfatório, objetivo e intuitivo para o usuário.

Por fim, foi necessário a junção entre todas as etapas para compor um único produto com várias ferramentas para a verificação de pilares de concreto armado e seção transversal retangular.

Todos as contas, iterações, lógicas e estratégias foram pensadas considerando apenas um exemplo geral para seus desenvolvimentos. Para a definição de fato e encerramento do produto final, é primordial a fase de testes para que mais casos sejam englobados, havendo, dessa forma, a correção de possíveis falhas e refinamento do código computacional.

A Figura 5.1 mostra de forma geral o relacionamento do usuário com o presente programa elaborado e como as diferentes etapas se comunicam.

**Figura 5.1 - Conexão entre “back-end” e “front-end”**



**Fonte: Autoria própria**

#### 5.4 Principais funções definidas

A estruturação dos produtos a serem entregues no presente trabalho e a sequência lógica de implementação do “back-end” é de fundamental importância para que se atinja o resultado esperado. Dito isso, neste tópico será abordado a respeito das principais funções já implementadas e que serão ainda elaboradas em *Python* para se efetuar os cálculos de interesse.

Primeiramente, criou-se funções relacionadas às propriedades do pilar:

- Área da seção: responsável pela determinação da área de concreto a partir das coordenadas dos pontos da seção inseridos;

- Momento de inércia: obtém o momento de inércia da seção nas direções principais, x e y no caso de seções retangulares, por meio das distâncias entre os pontos que compõem os lados da seção;
- Raio de giração: calcula os raios de giração nas direções principais considerando os momentos de inércia em ambos os eixos e a área de concreto, obtidos nas funções anteriores;
- Índice de esbeltez: realiza os cálculos necessários para a esbeltez nas duas direções serem atingidas. Ela considera o comprimento equivalente do pilar inserido (em x e y) e os raios de giração calculados anteriormente;
- Momento mínimo de 1<sup>a</sup> ordem: calcula esses momentos nas direções principais conforme visto no fundamento teórico descrito anteriormente (Equação 4.41). Para tal, as variáveis de entrada são os lados da seção transversal.

Em seguida, foram implementadas as funções relativas à pilares com  $\lambda \leq 90$ , em que nessas foram aplicadas o método do pilar padrão:

- Índice de esbeltez limite: obtém os índices de esbeltez limite, por meio da Equação 4.42, em x e y. Considera-se para isso os momentos, mínimos de primeira ordem ou os atuantes no pilar (fornecido como um dado), e a força normal solicitante, inserida no software, para o cálculo da excentricidade de 1<sup>a</sup> ordem, além das dimensões da seção;
- Método da curvatura aproximada: responsável pela consideração dos efeitos de 2<sup>a</sup> ordem por meio da Equação 4.45, possuindo como parâmetros de entrada as variáveis dessa mesma equação. Ela retorna os momentos totais em x e em y.
- Método da rigidez aproximada: retorna os mesmos que a função anterior, porém, os efeitos de 2<sup>a</sup> ordem são levados em conta com base na Equação 4.49. Vale ressaltar que a mesma opção de entrada descrita na função anterior é válida nesse caso também.

Com relação ao dimensionamento sugerido e ao momento resistente, tem-se:

- Dimensionamento: com as equações de conformidade e de equilíbrio de forças axiais e de momentos fletores, para valores arbitrários de

profundidade da linha neutra, a função sugere uma armadura quando a seção possuir um ângulo de  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , considerando o momento mais crítico. Assim, em seguida, ela verifica qual de ambas as armaduras atende as duas situações. Por fim, ela retorna tal valor. Ou seja, mesmo que o usuário insira a seção já dimensionada, o programa irá sugerir uma armadura com base nos esforços solicitantes e na dimensão da seção de concreto.

- **Momento resistente:** com a área de armadura inserida pelo usuário, a função calcula todas as forças normais relativas aos limites de cada um dos domínios e verifica em qual domínio a seção inserida se encontra por meio da força normal atuante nela. A partir disso, encontra-se a posição da linha neutra, as reações nas armaduras e, por fim, o momento resistente através do equilíbrio de momentos. A função é aplicada com um ângulo de giro de  $0^\circ$  e  $90^\circ$ .

Com relação às funções para pilares cujo índice de esbeltez é superior à 90, tem-se:

- **Momento x curvatura:** responsável pela criação de duas listas, as quais mostram a variação do momento de acordo com a curvatura. Com incrementos de curvatura e suposição da linha neutra para cada incremento, ela obtém as deformações pelas equações de compatibilidade, em seguida, utiliza-se da equação de equilíbrio axial para equilibrar a força normal solicitante e, caso o mesmo seja satisfeito, obtém-se o momento resistente por meio do equilíbrio de momentos na seção;
- **Diagrama de momentos de 1<sup>a</sup> ordem:** realiza a discretização da barra em elementos menores, retornando uma lista com os valores dos momentos em cada um deles, sendo o primeiro item o momento da base e o último, o do topo. Para isso, é levado em consideração que o diagrama de momento fletor em pilares de edifícios é retilíneo. Pode possuir como entrada os valores de momentos mínimos de 1<sup>a</sup> ordem ou os momentos solicitantes, quando houver, nas duas direções;

- Método geral: essa função é responsável por realizar o ciclo principal para se obter os momentos totais. Como objeto, ela possui o que ambas as funções anteriores retornam. Analisando elemento por elemento, ela verifica o momento atuante no mesmo e busca, no diagrama momento x curvatura, a curvatura correspondente. De acordo com a analogia de Mohr, ela aplica o valor da curvatura como uma carga e obtém o diagrama de momento fletor que é equivalente ao deslocamento da estrutura em cada elemento. Somando-se o momento gerado por esse deslocamento com o de entrada da função, um momento fletor total é alcançado. Se esse ele atender ao critério de equilíbrio da seção, a função o retorna uma lista com esses valores, caso contrário o ciclo é retomado com esse mesmo valor.

## 6 CÓDIGO COMPUTACIONAL: APLICAÇÃO DOS CONCEITOS DE ESTRUTURAS

No presente tópico são abordados mais detalhadamente a lógica das funções definidas em linguagem *Python*, porém, abordando de forma mais incisiva conceitos já citados na revisão bibliográfica.

### 6.1 Escopo das funções - Método do pilar padrão

Diversas funções foram elaboradas para contemplar as várias etapas para se atingir os esforços adicionais gerados na estrutura, chamados de segunda ordem.

Deu-se início ao método em questão após a aplicação das diversas funções que retornam as propriedades da seção transversal, como sua área, os momentos de inércia, os comprimentos equivalentes (Equação 4.38), os índices de esbeltez (Equação 4.39) e os raios de geração (Equação 4.40), todos nas direções principais (x e y).

De acordo com a NBR 6118, os pilares devem resistir pelo menos a um momento mínimo de primeira ordem, mesmo que não esteja sujeito a nenhum tipo de momento solicitante, como é o caso de pilares centrais. Desse modo, utilizou-se uma função específica com esta finalidade, em que ela recebe como parâmetro a força normal característica e as dimensões da seção e faz uso da Equação 4.41 para retornar uma lista com os momentos de primeira ordem nas duas direções.

Para a verificação se os efeitos de segunda ordem são realmente relevantes, elaborou-se a função responsável pelo cálculo do índice de esbeltez limite por meio da Equação 4.42. Então, ela recebe como parâmetro a força normal característica, as dimensões da seção transversal e a lista com os momentos mínimos de primeira ordem que foi definida anteriormente no código. Com isso, os índices de esbeltez em ambas as direções são apresentados no interior de uma lista.

Em seguida pode-se aplicar duas outras funções para a consideração dos efeitos de segunda ordem, a que realiza o procedimento utilizando o método da curvatura aproximada (Equação 4.45) ou a do método da rigidez aproximada

(Equação 4.49). Ambas recebem como objetos os índices de esbeltez do elemento, os índices de esbeltez limites, a força característica, os comprimentos equivalentes, as dimensões da seção transversal e, nesse caso, com o intuito de se obter ainda quais os momentos mínimos que um pilar deve resistir, a função recebe os momentos mínimos de primeira ordem. Nesse caso, o parâmetro  $\alpha_b$  considerado é igual a 1 pelo fato do momento sobre o qual está sendo acrescido os efeitos de segunda ordem ser justamente o momento mínimo. Outro ponto importante é que essas funções verificam a relevância de se realizar tal consideração ao comparar o índice de esbeltez limite com o do elemento.

Através de uma análise do posicionamento do pilar na estrutura, é possível definir qual sua classificação (de canto, extremidade ou centro) e, consequentemente, se há de fato a consideração de momento solicitante atuando na estrutura. Caso houver, outras três funções são acionadas, mas agora calculando o índice de esbeltez limite e os efeitos de segunda ordem relativo a esses esforços.

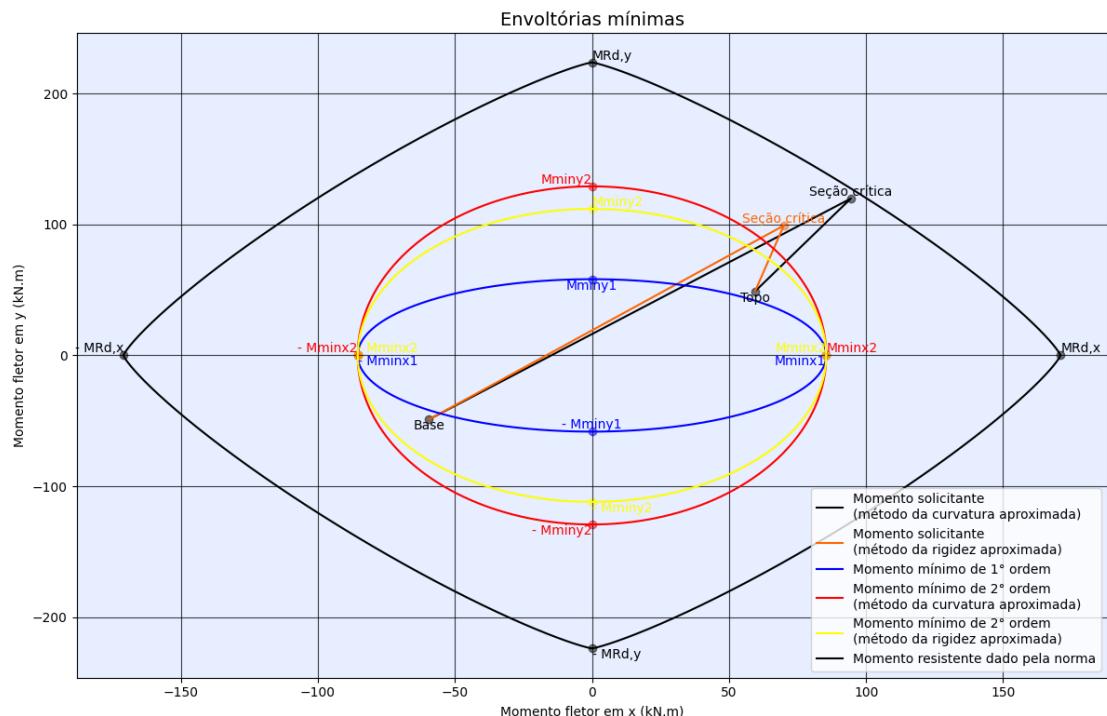
O índice de esbeltez limite para este caso leva em consideração a Equação 4.43 para o cálculo do parâmetro  $\alpha_b$  caso  $M_{sd} > M_{min,1}$ , sendo necessária a verificação se o mesmo é superior a 0,40, caso contrário, é assumido esse valor. Em seguida é aplicada a Equação 4.42, mas agora utilizando os momentos solicitantes, para os cálculos dos índices limites, os quais são retornando no interior de uma lista. A função apresenta também como resultado final o posicionamento do momento máximo no pilar ( $\alpha_b$ ).

Feito isso, com o uso das equações já mencionadas, podem ser aplicadas outras duas funções para a consideração dos efeitos de segunda ordem sobre os momentos solicitantes, caso seja conveniente (se um dos índices de esbeltez for superior ao seu limite correspondente). Elas recebem os mesmos parâmetros das funções utilizadas para a consideração dos efeitos adicionais sobre os momentos mínimos de primeira ordem, porém com o  $\alpha_b$  obtido na última função supracitada. Assim, ambas retornam uma única lista com os momentos totais nas duas direções em um ponto crítico ao longo do comprimento do pilar.

Por fim, a Figura 6.1 exibe as envoltórias necessárias para a verificação. São apresentadas as envoltórias mínimas considerando os efeitos de primeira

ordem e levando em conta também os efeitos de segunda ordem, as quais foram traçadas pelo método do pilar padrão (rigidez aproximada e curvatura aproximada). Além disso, foram traçadas as retas representantes dos momentos de primeira ordem atuantes na estrutura em sua base, no topo e em uma seção crítica. Foi adicionado ainda um exemplo da envoltória resistente calculada pela indicação da NBR 6118 ( $\alpha = 1,2$ ), a qual deve englobar tudo o que foi calculado para assegurar a segurança da estrutura.

**Figura 6.1 - Envoltórias para o processo de verificação**



**Fonte: Autoria própria**

## 6.2 Escopo das funções - Dimensionamento e momento resistente

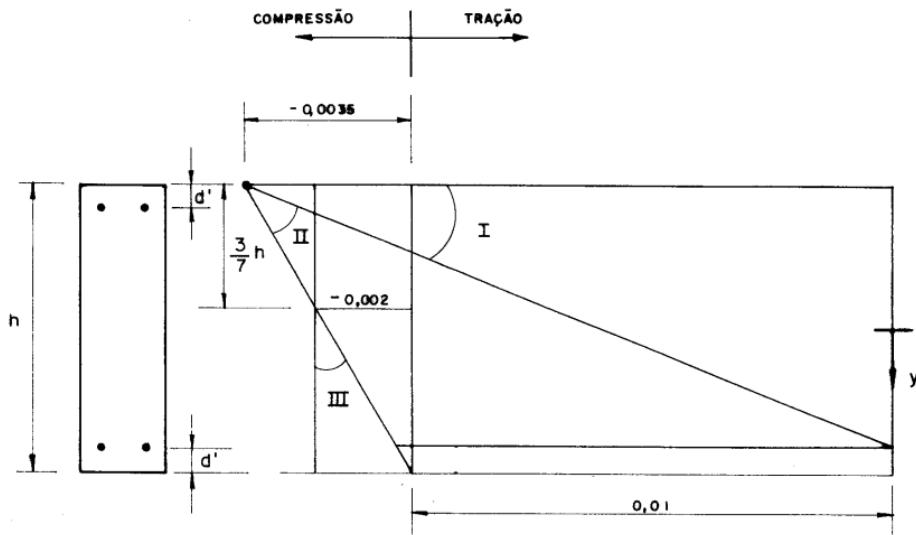
Foi implementada uma função relacionada ao dimensionamento da seção transversal a partir dos esforços solicitantes atuantes e de suas dimensões. Apesar do software possuir um enfoque principal na verificação dessas estruturas, é realizado uma sugestão de área de aço para que o mesmo resista no Estado Limite Último (ELU). Essa função é aplicável para todos os pilares inseridos no programa, não havendo uma distinção de acordo com o índice de esbeltez.

Elá utiliza-se do método da bissecção para a convergência dos valores, algoritmo esse que busca uma solução aproximada para equações não lineares, além das equações de equilíbrio de forças horizontais e de momentos na seção para o dimensionamento de fato, uma vez que a utilização dos ábacos apresentados por Venturini e Rodrigues (1987) se tornam inviáveis no âmbito virtual do presente trabalho. Como incógnitas do problema, tem-se a área de aço, a posição da linha neutra e, consequentemente, as deformações das barras e do concreto. Já as variáveis conhecidas para se realizar o equilíbrio da seção são basicamente os esforços solicitantes, força normal de projeto ( $N_{sd}$ ) e momento solicitante de projeto,  $M_{sd,x}$  ou  $M_{sd,y}$ , dependendo da direção a ser analisada, além das dimensões, base e altura, da seção de concreto.

Tomou-se como premissa para se iniciar o processo iterativo as áreas de aço iguais por face. Dessa forma, inicialmente, era necessário para que se aplicasse o método indicado, a presença de limites para a posterior identificação de qual intervalo a seção transversal analisada se encontraria. Então, foi criada uma lista com linhas neutras adotadas, variando de  $-\infty$  a  $+\infty$ , buscando englobar todas as possíveis regiões de domínio. No código colocou-se valores numéricos grandes para representar simbolicamente esse intervalo de fato.

Para cada linha neutra da lista, calculou-se a força normal correspondente por meio das três regiões de deformação indicadas por Venturini E Rodrigues (1987), sendo a região 1 correspondente aos domínios 1 e 2, a região 2, os domínios 3, 4 e 4a, e, por fim a região 3, englobado apenas o domínio 5, como mostrado na Figura 6.2.

**Figura 6.2 - Regiões de deformação**

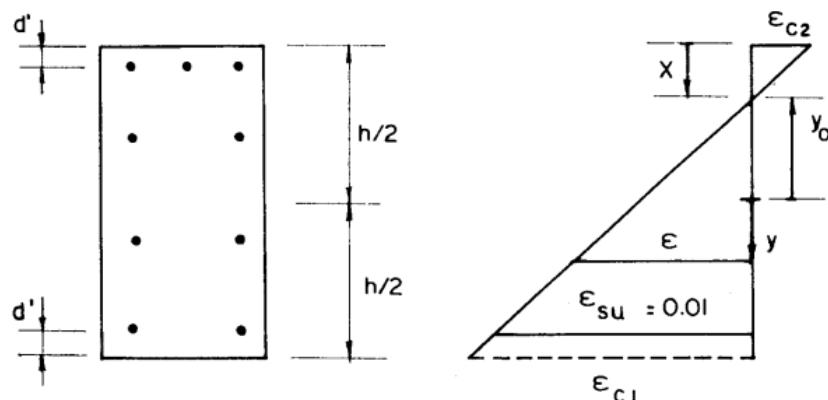


Fonte: Venturini e Rodrigues (1987)

Assumindo a hipótese da conservação da seção plana, e considerando que a deformação limite de cada região seja imposta, a deformação nos demais pontos de interesse é de fácil obtenção quando aplicada as respectivas equações de compatibilidade. Nota-se que as deformações últimas são de concretos de classes inferiores a C50, mas a mesma lógica se aplica para concretos de classes superiores.

Na primeira região o valor último da deformação do aço que compõe a armadura tracionada é de 0,01, como mostrado na Figura 6.3.

**Figura 6.3 - Deformações da região 1**



Fonte: Venturini e Rodrigues (1987)

Pode-se obter a deformação  $\epsilon$  em um ponto genérico distante  $y$  do centro geométrico da peça através da seguinte expressão:

$$\frac{\epsilon}{y - y_0} = \frac{\epsilon_{su}}{h - d' - x} \quad (6.1)$$

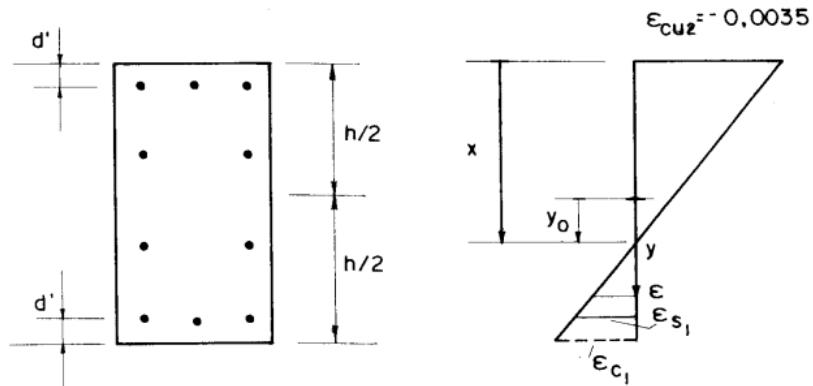
No caso da função em questão, uma vez que foi feita a premissa mencionada, os outros pontos de interesse são quando  $y = -h/2 + d'$  para que a deformação na armadura comprimida, ou menos tracionada, seja atingida, além do ponto  $y = -h/2$ , obtendo, com isso, a deformação no concreto. Em todos os pontos foi convencionado compressão como sendo uma deformação negativa e tração, positiva.

Nessa região de deformação,  $\epsilon_{c2}$  tem um limite de 3,5‰, isto é  $\epsilon_{c2} \geq -3,5\%$ . Assim, impondo esse limite na Equação 6.2, tem-se a seguinte variação da linha neutra para a região:

$$x \leq \frac{3,5\% \cdot (h - d')}{10\% + 3,5\%} \quad (6.2)$$

Na segunda região impõe-se o limite de -3,5‰ fixo na fibra mais comprimida de concreto da peça, conforme é expresso na Figura 6.4.

**Figura 6.4 - Deformações da região 2**



**Fonte:** Venturini e Rodrigues (1987)

Neste caso a deformação de um ponto genérico é através da seguinte Equação:

$$\frac{\varepsilon}{y - y_0} = \frac{0,0035}{0,5 \cdot h - y_0} \quad (6.3)$$

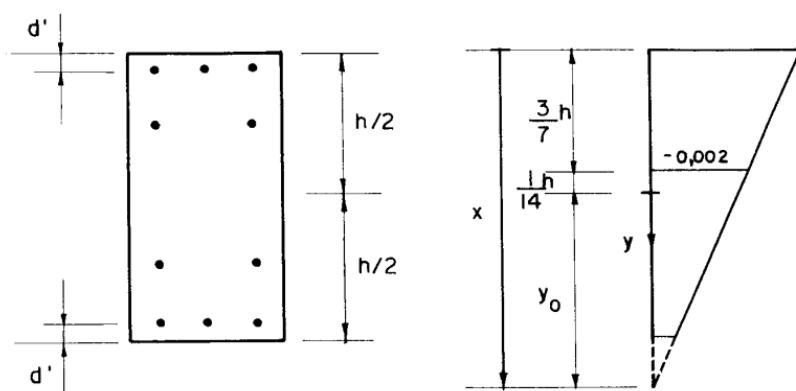
Tendo como pontos de interesse  $y = h/2 - d'$  para o se obter  $\varepsilon_{s1}$  e  $y = -h/2 + d'$  para a deformação do aço comprimido. Sendo aqui a convenção de sinais igual à adotada para a região 1.

Aqui o intervalo em que a linha neutra deve estar para que as deformações da seção transversal sejam correspondentes à região 2 é:

$$\frac{3,5\% \cdot (h - d')}{10\% + 3,5\%} < x \leq h \quad (6.4)$$

Por fim, na terceira região os valores de deformação ficam em função do valor fixado para o ponto situado a  $3/7h$  da borda mais comprimida, o qual apresenta deformação de  $2\%$ , de acordo com a Figura 6.5.

**Figura 6.5 - Deformação da região 3**



**Fonte:** Venturini e Rodrigues (1987)

A Equação de compatibilidade para um ponto genérico nesse caso é:

$$\frac{\varepsilon}{y - y_0} = \frac{0,002}{x - 3/7 \cdot h} \quad (6.5)$$

Aqui os pontos de interesse são os mesmos de ambas as regiões, retornando deformações negativas, uma vez que foi convencionado dessa forma para compressão.

Como apenas o domínio 5 é contido nesta região, o intervalo de valores que a linha neutra pode assumir é:

$$x > h \quad (6.6)$$

Portanto, para cada linha neutra presente na lista foi verificada sua respectiva região de deformação e, consequentemente, as deformações na armadura e no concreto. O próximo passo consistiu em isolar a área de aço na Equação do equilíbrio de momentos em torno do CG, obtendo a área de aço por face como mostrado a seguir:

$$A_s = \frac{\left[ M_{sd} - R_{cc} \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{\lambda \cdot x}{2} \right) \right]}{\left[ \left( (\sigma_{S1} - \sigma_{S2}) \cdot \left( \frac{h}{2} - d' \right) \right) \right]} \quad (6.7)$$

Alguns aspectos importantes sobre a Equação 6.7 é a referenciação das armaduras, em que S1 corresponde à armadura mais próxima da face inferior e S2 corresponde à armadura mais próxima da face superior. Outro aspecto muito importante é a questão dos sinais na fórmula. A resultante comprimida do concreto ( $R_{cc}$ ) possui um valor positivo intrinsecamente, diferentemente das tensões, as quais propagam o sinal proveniente das equações de compatibilidade, ou seja, positivo quando tração e negativo para compressão. E, finalmente, o momento adotado como positivo foi convencionado como sendo o que provoca tração em S1 e compressão em S2.

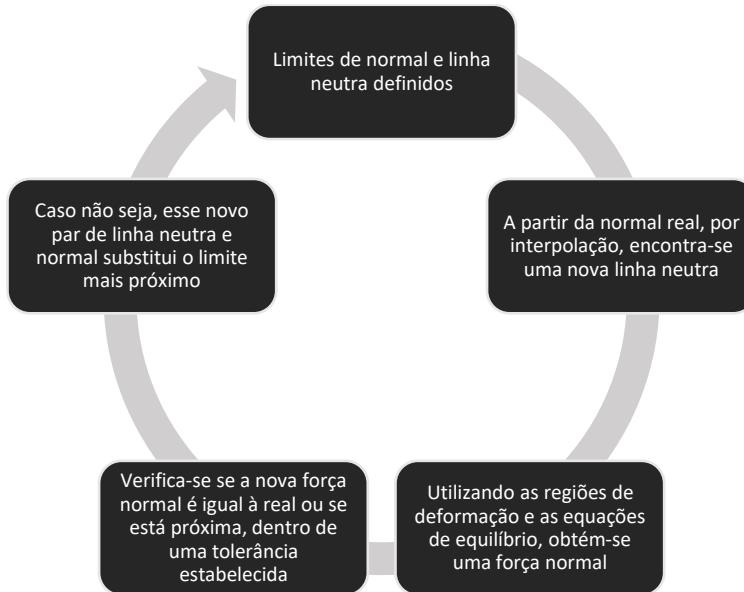
Pelo equilíbrio de forças horizontais, o qual pode ser visto na Equação 6.8, cada uma das linhas neutras adotadas possui uma respectiva força normal solicitante.

$$N_{sd} = R_{cc} - A_s \cdot \sigma_{S1} - A_s \cdot \sigma_{S2} \quad (6.8)$$

Elas difere das equações expressas na revisão bibliográfica do presente trabalho, justamente por ser genérica, englobando as três regiões, e propagar o sinal convencionado nas deformações.

A partir da força normal solicitante real atuante no pilar analisado, verificou-se o intervalo em que ela se encontra, baseando-se na lista de normais com suas respectivas linhas neutras. Com um limite inferior e superior, aplicou-se o método da bissecção. A Figura 6.6 mostra um fluxograma de como esse processo é executado.

**Figura 6.6 - Processo executado pelo método da bissecção**



**Fonte: Autoria própria**

Durante esse processo, o efeito obtido é uma aproximação dos limites até uma tolerância determinada de 1%. Quando a diferença entre a força normal solicitante e a força normal obtida atinge uma diferença inferior ao estabelecido, a convergência é realizada e os produtos principais são a linha neutra da seção para essa armadura e a área de aço necessário, efetuando-se, desse modo, o dimensionamento do elemento.

Realizado o dimensionamento sugerido, iniciou-se o processo de determinação do momento resistente, porém, a partir de uma armadura inserida

pelo usuário do programa, compondo assim a etapa de verificação através da envoltória resistente aproximada pela Equação 4.50 indicada pela NBR 6118.

Para este caso, o processo foi semelhante ao da função descrita anteriormente, pois utilizou-se também do método da bissecção. Entretanto, o processo para aplica-lo diferiu.

Conhecida a área de aço, foi possível alcançar os valores referentes à força normal de cada um dos limites dos domínios, isto é, da reta a, entre os domínios 1 e 2, 2 e 3, 3 e 4, 4 e 4a, 4a e 5 e da reta b, por meio do equilíbrio de forças horizontais.

Conhecida a força normal solicitante no elemento, identificou-se em qual intervalo ela se encontra e, por conseguinte, o domínio em que a seção transversal se encontra. Com dois limites estabelecidos de linha neutra e força normal, aplica-se novamente o método da bissecção até a convergência dos resultados.

Conhecidos os parâmetros área de aço, deformações e tensões nos pontos de interesse e posição da linha neutra, realizou-se o equilíbrio de momentos em torno do CG da seção e obteve-se o momento resistente, como mostra a equação abaixo.

$$M_{Rd} = R_{cc} \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{\lambda \cdot x}{2} \right) + A_{s1} \cdot \sigma_{s1} \cdot \left( \frac{h}{2} - d' \right) - A_{s2} \cdot \sigma_{s2} \cdot \left( \frac{h}{2} - d' \right) \quad (6.9)$$

Vale ressaltar que, para a Equação 6.9, a convenção de sinais adotada é a mesma da função descrita anteriormente para as deformações calculadas nos domínios.

Em ambas as funções, tanto no dimensionamento, quanto na verificação, quando a linha neutra respeita a inequação  $x > h/\lambda$ , a resultante comprimida do concreto é fixada em um valor referente à seção toda sendo comprimida e sua posição é exatamente no CG, alterando-se a equação do equilíbrio de momentos nesses casos.

### 6.3 Escopo das funções - Método geral

Dentre as funções específicas para pilares cujo índice de esbeltez é superior à 90, pode-se citar a função responsável pela criação do gráfico Momento x Curvatura.

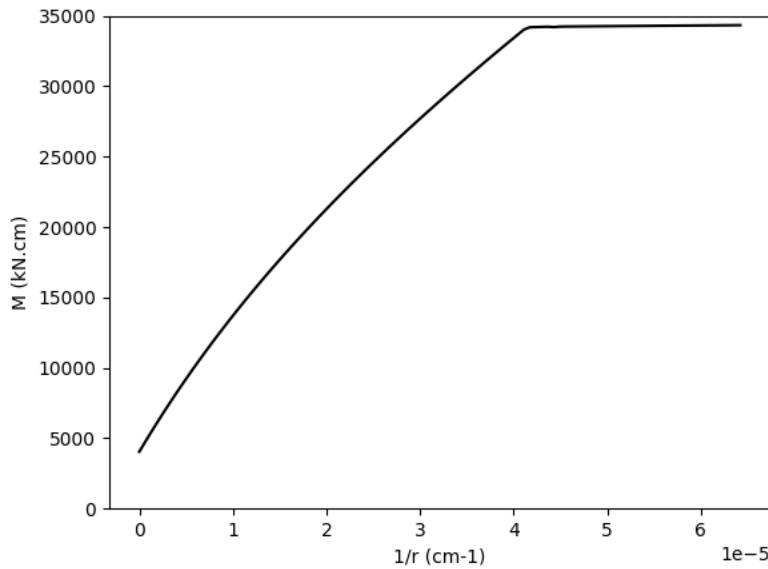
Para que a não linearidade física seja garantida, foi primordial o desenvolvimento dessa função e, para isso, o processo envolveu a utilização do momento resistente obtido pela função mencionada no tópico anterior. Para esse mesmo valor de momento, foi calculada uma curvatura ( $1/r$ ) por meio das deformações nas barras de aço tracionadas e na fibra mais comprimida de concreto quando o mesmo é aplicado na seção transversal. Definida a curvatura máxima, houve uma divisão desse valor em diversas curvaturas inferiores até o valor nulo, de modo que se obtivesse outros valores de momento fletor.

Entretanto, o procedimento não é de caráter trivial. A princípio, para cada valor de curvatura foi realizado o método da bissecção para se encontrar a posição da linha neutra, isto é, criou-se um intervalo de valores para englobar todos os domínios e definir limites para a força normal solicitante atuante. Quando encontrado esse intervalo, aplicou-se o método da bissecção de fato para refinar a linha neutra até que a diferença entre as forças normais calculada e real seja inferior a uma tolerância (1%). No momento em que essa condição é satisfeita, utilizou-se do equilíbrio de momentos, com base nas deformações calculadas pela Equação 6.10, para se encontrar o momento fletor referente a essa determinada curvatura específica.

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_s}{d} = -\frac{\varepsilon_c}{x} \quad (6.10)$$

Após diversas iterações, encontrou-se um valor de momento fletor para cada curvatura e atingiu-se o gráfico presente na Figura 6.7.

**Figura 6.7 - Gráfico Momento x Curvatura com consideração do diagrama retangular para a tensão do concreto comprimido**



**Fonte: Autoria própria**

Nota-se que quando a curvatura atinge o valor zero, há um valor de momento agregado a este ponto. Isso se deve à consideração da simplificação do diagrama parábola-retângulo relativo às tensões no concreto comprimido por um retângulo com intensidade constante e igual a uma parcela da tensão resistente do concreto ( $f_{cd}$ ) que não envolve toda a profundidade da linha neutra.

Desse modo, com a intenção de envolver todos os possíveis momentos solicitantes atuantes ao longo do pilar, foi priorizado nesse caso o cálculo da resultante do concreto comprimido através do diagrama parábola-retângulo. Com esse intuito, a seção transversal foi segmentada ao longo de sua altura em pequenas áreas e, para cada uma delas, foi descoberta a deformação em seu CG a partir da curvatura analisada. Com as deformações, utilizou-se o diagrama tensão-deformação idealizado, presente na NBR 6118:2014 e expresso na Figura 4.9, para a obtenção da tensão em cada área. Assim, em regiões em que a deformação é superior à de pico ( $\varepsilon_{c2}$ ), a tensão corresponde à  $0,85f_{cd}$ , caso contrário, é calculada pela seguinte fórmula:

$$\sigma_c = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad (6.11)$$

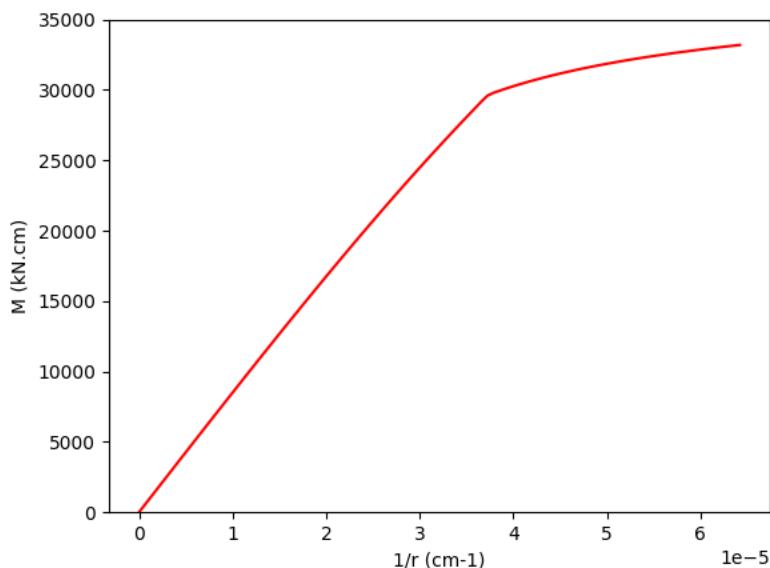
Para  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ :  $n = 2$

Para  $f_{ck} > 50 \text{ MPa}$ :  $n = 1,4 + +23,4 \cdot [(90 - f_{ck})/100]^4$

Com a tensão obtida para cada uma das parcelas, pode-se obter cada resultante ao multiplica-las pela área. Por fim, a resultante comprimida do concreto é a soma dessas forças e o momento que ela gera em relação ao CG da seção transversal é calculada através do somatório dos momentos que a resultante de cada área gera em relação ao mesmo ponto.

A Figura 6.8 expressa o novo gráfico Momento x Curvatura com a consideração do diagrama parábola-retângulo para as tensões na região comprimida da seção transversal, o qual foi utilizado para o prosseguimento dos cálculos envolvendo o método geral.

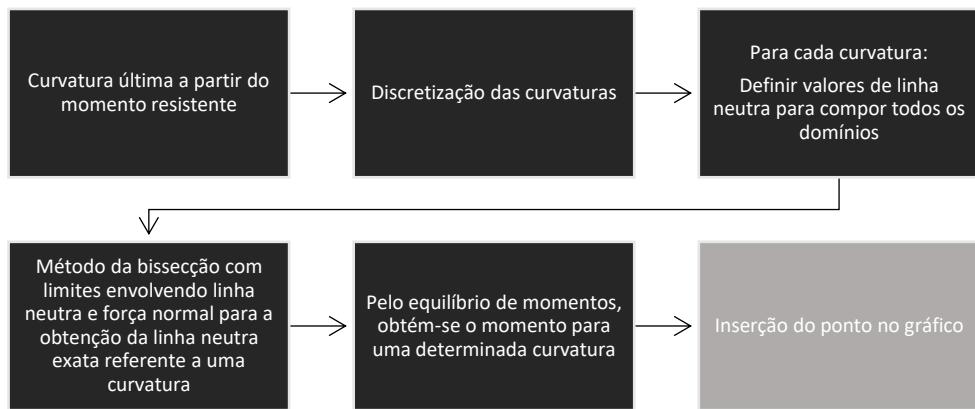
**Figura 6.8 - Gráfico Momento x Curvatura com consideração do diagrama parábola-retângulo para a tensão do concreto comprimido.**



**Fonte: Autoria própria**

Abaixo, na Figura 6.9 é apresentado um fluxograma para facilitar o entendimento da lógica de toda a função implementada.

**Figura 6.9 - Fluxograma referente à função para se obter o gráfico Momento Curvatura**

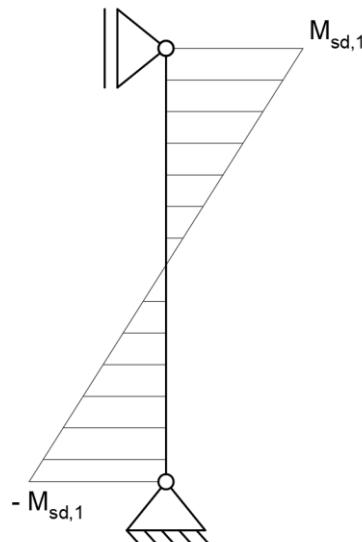


**Fonte: Autoria própria**

O próximo passo consistiu em discretizar o elemento, cujo comprimento é igual ao comprimento equivalente ( $L_e$ ) na direção analisada, em trechos menores e iguais.

A respeito do momento solicitante de primeira ordem, é comum seu diagrama ser linear em pilares de edifícios biapoiados, podendo o momento na base igual ao do topo dependendo da simetria da estrutura (Figura 6.10). Com isso, cada ponto da divisão realizada remete a um valor específico dele.

**Figura 6.10 - Momento solicitante de primeira ordem atuante em pilar biapoiado**



**Fonte: Autoria própria**

Aplicando o método da bissecção novamente, mas agora se referindo ao conjunto curvatura e momento ao invés de linha neutra e momento, foi possível encontrar uma curvatura para cada valor de momento fletor de primeira ordem por meio do diagrama recém citado, Momento x Curvatura. Pela analogia de Mohr, pode-se obter a deformação da estrutura em cada um dos pontos pela relação mostrada na Equação 6.12 expressa abaixo.

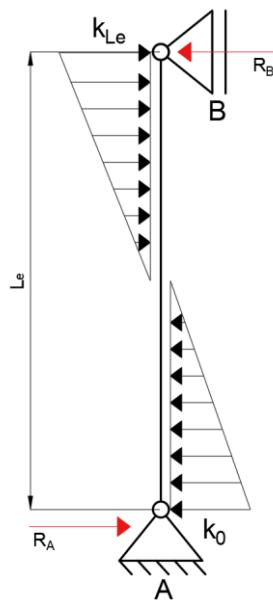
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{r}$$

↓      ↓

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q \quad (6.12)$$

Assim, ao aplicar os valores de curvatura obtidos como carregamento em cada ponto na direção mostrada na Figura 6.11, tem-se um diagrama de momento fletor, o qual é equivalente à estrutura deformada.

**Figura 6.11 - Sentido de aplicação das curvaturas como carregamento**



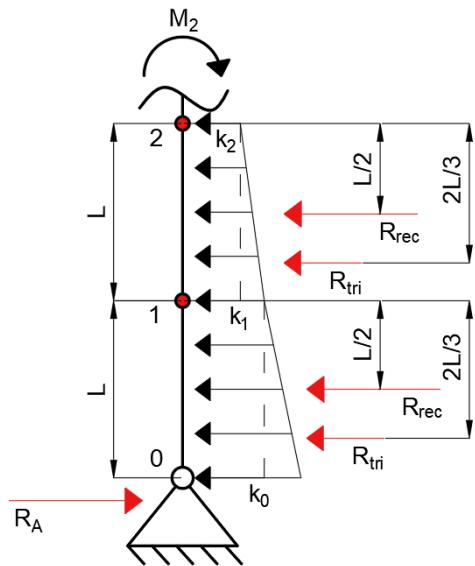
**Fonte: Autoria própria**

Nota-se que, a aplicação da curvatura como carregamento recebe um sentido de modo a gerar um diagrama de momento fletor na mesma região dos momentos de primeira ordem. É importante ressaltar ainda que, entre dois pontos considerou-se um carregamento distribuído linearmente com o intuito de simplificar o processo, mas que garante um resultado consistente devido a discretização realizada. Na Figura 6.11, o carregamento distribuído apresenta um decrescimento constante até o ponto intermediário do pilar, entretanto, isso possui apenas caráter ilustrativo. O processo desenvolvido no código computacional envolve a não linearidade até mesmo dessas cargas, principalmente quando a estrutura está próxima da posição deformada de equilíbrio, isto é, o momento total, de primeira e segunda ordem somados, possui intensidade próxima da resistente.

Com o carregamento aplicado, utilizou-se dos conceitos de isostática para se encontrar as reações nos apoios, nomeados de A e B. Em seguida, é evidente que na maioria dos trechos há uma resultante proveniente de um carregamento distribuído retangular somado a uma resultante devido a um carregamento distribuído triangular. Dessa forma, o momento em cada ponto foi calculado através das resultantes em todos os trechos anteriores a esse ponto e da reação no apoio A, todas multiplicadas por suas respectivas distâncias desse mesmo ponto de interesse.

A Figura 6.12 exemplifica o cálculo do momento interno no ponto indicado pelo número 2.

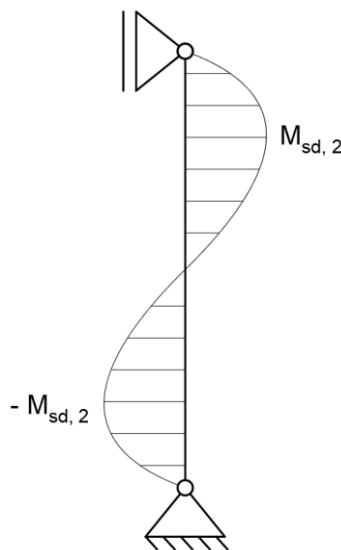
**Figura 6.12 - Obtenção dos esforços internos**



**Fonte: Autoria própria**

Determinado o diagrama de momentos, o qual pode apresentar uma configuração próxima da Figura 6.13, os valores encontrados correspondem ao deslocamento da estrutura que, ao ser multiplicado pela normal solicitante real, calcula-se os momentos fletores de segunda ordem em cada ponto.

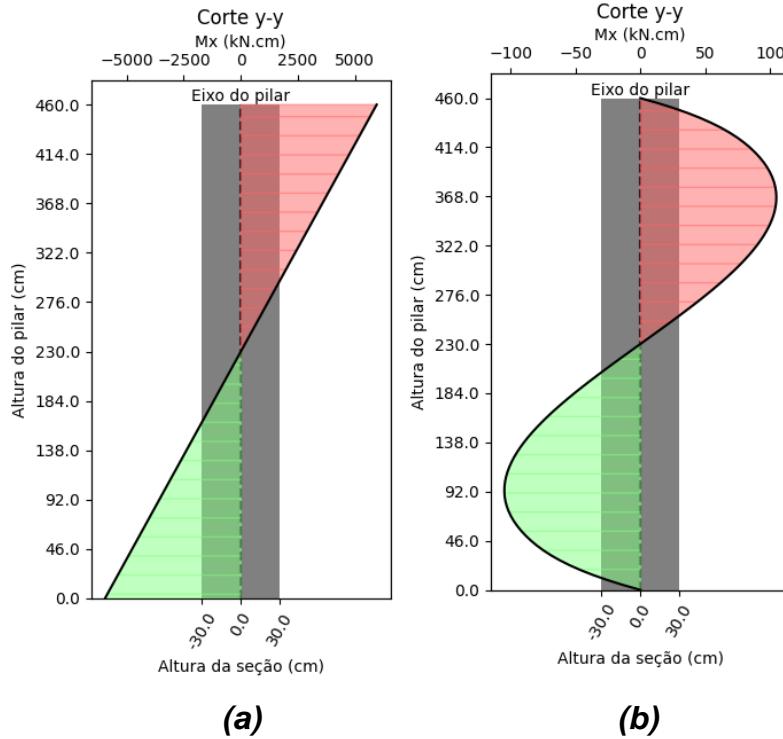
**Figura 6.13 - Momento solicitante de segunda ordem atuante em pilar biapoiado**



**Fonte: Autoria própria**

A seguir (Figura 6.14), são apresentados resultados obtidos por meio de recursos computacionais promovidos pela linguagem *Python*.

**Figura 6.14 - Momentos solicitantes (a) de primeira ordem e (b) de segunda ordem**



**Fonte: Autoria própria**

No exemplo supracitado, em que há um momento solicitante com vetor na direção x, verifica-se uma ordem de grandeza muito superior do momento de primeira ordem em relação ao de segunda ordem, acarretando em uma diferença quase que imperceptível do momento total em relação ao de primeira ordem. Isso depende do elemento analisado, uma vez que seu comprimento, sua armadura e a dimensão da seção na direção em questão interferem no deslocamento e, consequentemente, nos efeitos de segunda ordem.

Por fim, somando-se o momento gerado por esse deslocamento com o momento de primeira ordem, atinge-se um novo diagrama de momento total. Esse processo ocorre com diversas iterações até que a estrutura deformada atinja o equilíbrio, ou seja, quando a diferença nos deslocamentos se torne cada vez menores até uma certa tolerância adotada.

#### 6.4 Escopo das funções – Envoltória resistente real

Ao contrário da simplificação dada pela norma com a Equação 4.50, no presente trabalho buscou-se determinar a envoltória resistente real, obtida ao considerar as posições das barras de aço na seção transversal de concreto, além de sua rotação em vários ângulos quando submetida aos mesmos esforços solicitantes.

A primeira etapa para esse processo é a coleta dos pontos inseridos no software, cuja inserção tem como base uma origem arbitrada pelo próprio usuário. Em seguida, é calculado Centro Geométrico (CG), o qual, por se tratar de uma seção retangular, se encontra no encontro dos dois eixos de simetria. Obtida essa propriedade geométrica, definiu-se uma função que permitisse a entrada de um ângulo e de uma lista com as coordenadas dos pontos de interesse, podendo ser os vértices da seção transversal ou as coordenadas do CG de cada uma das barras de aço dentro da seção transversal. Nesta função do código, foram implementadas as seguintes equações (6.13a e 6.13b), as quais resultam em novas coordenadas rotacionadas com o ângulo informado, que tem como origem o próprio CG.

$$x_{i,rot.} = (x_i - x_{CG}) \cdot \cos(\theta) - (y_i - y_{CG}) \cdot \sin(\theta) \quad (6.13a)$$

$$y_{i,rot.} = (x_i - x_{CG}) \cdot \sin(\theta) + (y_i - y_{CG}) \cdot \cos(\theta) \quad (6.13b)$$

Outra função importante para esse processo, possui a finalidade de calcular as propriedades da seção comprimida, quando houver, isto é, as coordenadas do CG da região comprimida, as coordenadas de seus vértices, sua área e a resultante do concreto comprimido.

Para isso, os parâmetros de entrada são, um ângulo de interesse, a posição da linha neutra em relação à borda mais comprimida, o vértice da seção localizado na maior coordenada y, bem como o localizado na menor coordenada, as características do concreto utilizado e as dimensões da seção transversal.

O escopo da função verifica primeiro se a linha neutra é positiva e se a simplificação do diagrama parábola-retângulo em um diagrama retangular se

encontra dentro da seção de concreto ( $\lambda \cdot x < h$ ), excluindo desta condição apenas o domínio 5b. Caso positivo, são obtidos os vértices que a linha neutra intersecta com as arestas da seção, obtendo assim, todos os pontos que compõem a região comprimida.

A área dessa região comprimida foi calculada a partir das coordenadas dos vértices, em que eles foram alinhados no sentido horário ou anti-horário (a depender de como o usuário insere os pontos no campo destinado), com a repetição do primeiro ponto no final (polígono fechado), e, assim, foi aplicado o cálculo da dupla área pelo método de Gauss. Esse método consiste em multiplicar a coordenada  $x$  de cada ponto pela coordenada  $y$  do ponto anterior e, em seguida, multiplicar a coordenada  $y$  pela  $x$  do ponto anterior. A seguir, é aplicada para o cálculo da dupla área ( $2A$ ) a fórmula 6.14.

$$2A = \left| \sum_{i=0}^{n-1} (x_i \cdot y_{i+1} - y_i \cdot x_{i+1}) \right| \quad (6.14)$$

Já as coordenadas do CG da região foram calculadas a partir das seguintes equações (6.15a e 6.15b).

$$x_{CG} = \frac{1}{6 \cdot A} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + x_{i+1}) \cdot (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i) \quad (6.15a)$$

$$y_{CG} = \frac{1}{6 \cdot A} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1}) \cdot (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i) \quad (6.15b)$$

A resultante de concreto comprimido é obtida ao multiplicar a área obtida pela tensão equivalente do diagrama retangular.

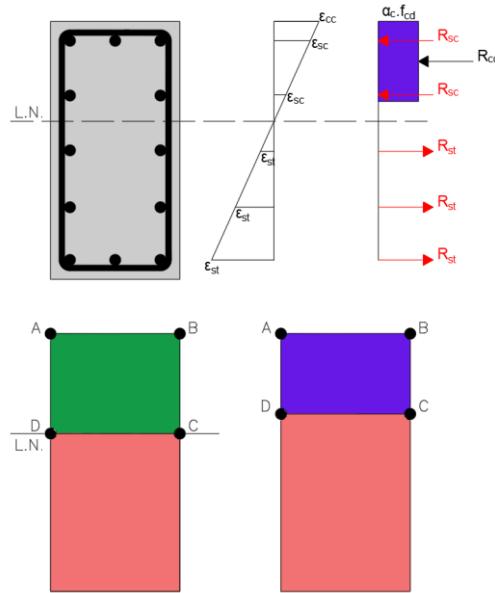
Caso a linha neutra esteja no domínio 5b, ou seja, a simplificação do diagrama parábola-retângulo em um diagrama retangular se encontra fora da seção de concreto ( $\lambda \cdot x > h$ ), a área comprimida corresponde à seção completa, os vértices e o CG da região são coincidentes com os da seção de concreto, e a resultante é calculada considerando todo o concreto sendo comprimido.

Por fim, se a linha neutra for negativa, significa que toda a seção está sendo tracionada e, portanto, todos os parâmetros mencionados anteriormente são zerados já que a contribuição do concreto na resistência à tração é desprezada.

Definida uma das principais funções para o cálculo da envoltória resistente real, o processo deu sequência ao calcular o momento resistente nas duas direções para vários ângulos de rotação da seção transversal.

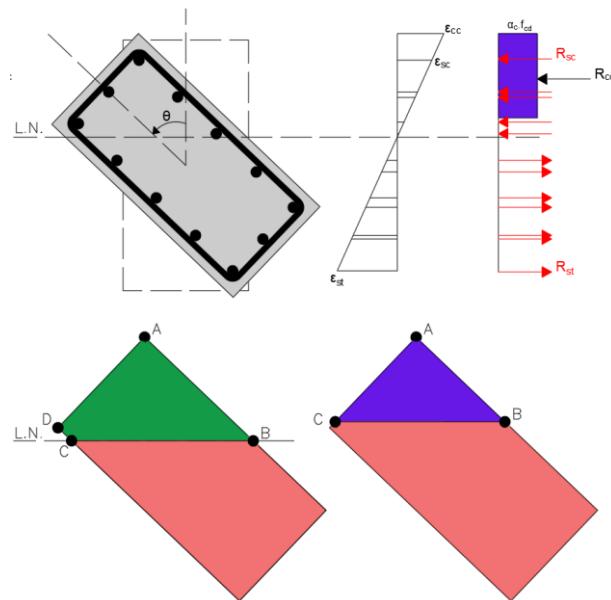
Então, primeiramente, foi estabelecida uma lista com ângulos variando de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  com incrementos de  $1^\circ$ , englobando todas as possíveis rotações da seção. Para cada ângulo, foi utilizada a função, mencionada anteriormente, que rotaciona os pontos de interesse, deixando-os com origem no CG. Em seguida, com as novas coordenadas, foram calculadas as forças normais referentes a cada um dos limites dos domínios a partir da área de aço informada pelo usuário, tornando-se possível encontrar o domínio em que a seção transversal rotacionada se encontra. Por meio das características de deformação e linha neutra do domínio em questão, em conjunto com a posição exata de cada barra de aço em relação ao CG, obtém-se todas as deformações de interesse e necessárias para se realizar o equilíbrio de forças horizontais (Figura 6.15 e 6.16). Quando realizado o equilíbrio, é obtida uma força normal solicitante, a qual é comparada com a atuante de fato no elemento, caso ambas estejam próximas dentro de uma tolerância arbitrada de 1%, o processo de convergência chamado de bissecção é interrompido, e os resultados são considerados satisfatórios.

**Figura 6.15 – Deformações e resultantes em uma seção transversal de concreto armado sem rotação.**



*Fonte: Autoria própria*

**Figura 6.16 - Deformações e resultantes em uma seção transversal de concreto armado rotacionada em um ângulo  $\theta$ .**



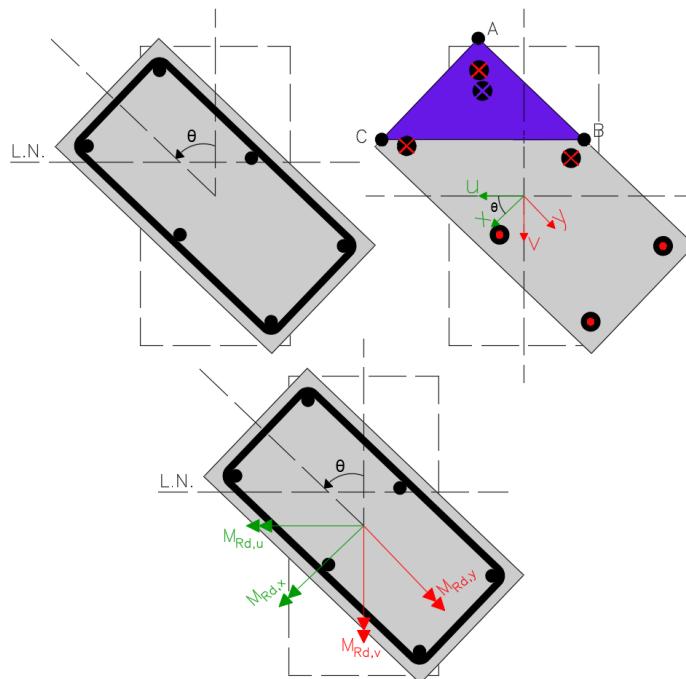
*Fonte: Autoria própria*

Pode-se notar nas figuras 6.15 e 6.16 que ao se realizar a rotação do elemento, a altura útil passa a ser a distância entre o vértice de concreto mais comprimido, ou seja, com a maior coordenada y, e a armadura mais tracionada,

com a menor coordenada  $y$ . Ademais, deve-se considerar as diversas resultantes, geradas pelas diferentes linhas de deformação das barras. Finalmente, outra consideração importante é que a área de concreto comprimida considerada nos cálculos é a gerada pela simplificação do diagrama parábola-retângulo em um retangular, o qual está destacado em azul.

Com as resultantes provenientes das barras de aço e do concreto comprimido, é realizado o cálculo do momento resistente nas duas direções provenientes da rotação dos eixos  $x$  e  $y$ , chamadas aqui de  $u$  e  $v$ . Nos ângulos em que a seção de concreto não é simétrica, há momentos nas duas direções, caso contrário, pela simetria, em uma das direções as resultantes se anulam quando realizado o equilíbrio de momentos. A Figura 6.17 busca esclarecer esses conceitos.

**Figura 6.17 -Obtenção dos momentos resistentes nas direções de interesse.**



**Fonte: Autoria própria**

Na figura acima, forças indicadas em vermelho correspondem às resultantes das barras de aço e suas respectivas direções, já em azul está representada a resultante do concreto comprimido e sua direção, a qual se

encontra no centroide da região comprimida (destacada em azul) considerando a simplificação do diagrama de tensões.

Essas forças geram momentos nas direções u e v, como já mencionado anteriormente, porém, para traçar de fato a envoltória resistente real, é necessário decompor ambos nas direções x e y, as quais foram rotacionadas previamente.

Portanto, quando são considerados vários ângulos de rotação da seção transversal, têm-se o comportamento da mesma após ser submetida à flexo-compressão oblíqua em cada um desses casos, os quais são correspondentes a um determinado ponto da envoltória. Sendo assim, a junção dessas diversas situações resulta na envoltória resistente real.

## 7 CÓDIGO COMPUTACIONAL: INTERFACE GRÁFICA DE USUÁRIO (GUI)

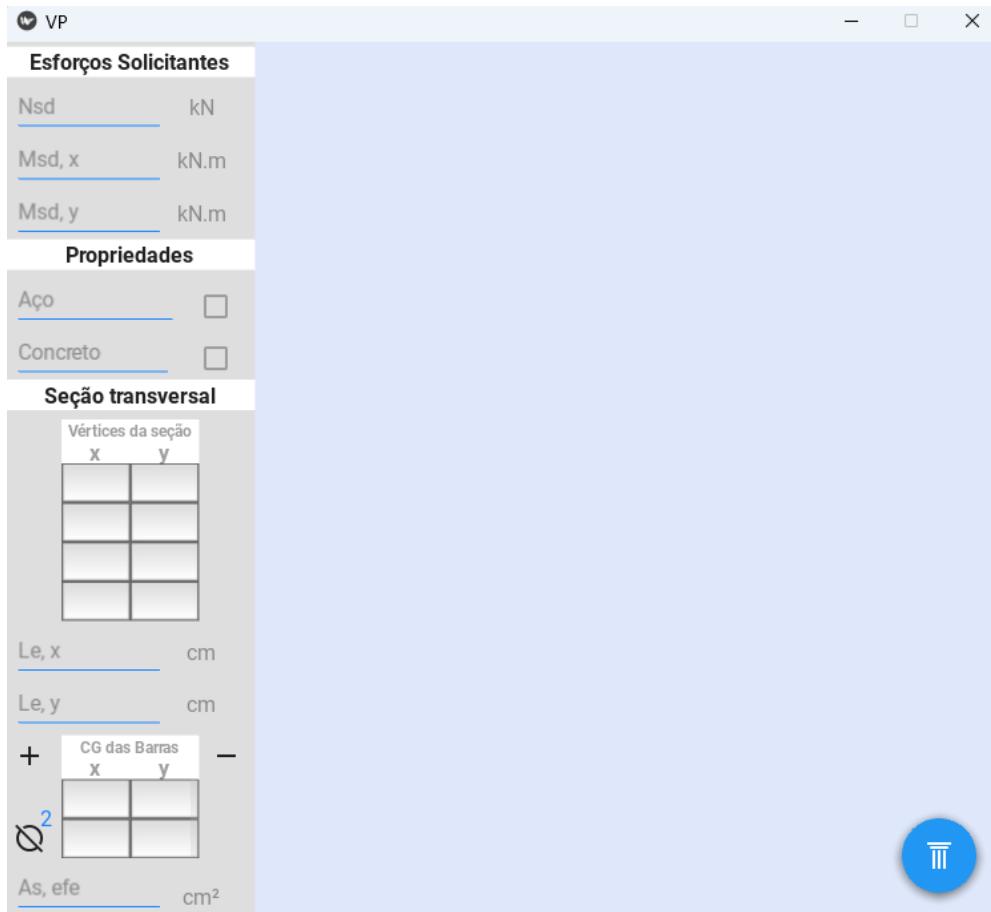
Para o desenvolvimento da interface gráfica, utilizou-se a biblioteca KivyMD, como já mencionado. Para isso, o processo envolveu a divisão do “*front-end*” em duas partes, uma delas envolve a criação de um único arquivo com extensão “.py”, o qual recebeu primeiramente as bibliotecas importadas, em sequência criou-se uma classe principal para o aplicativo que provém de “MDApp”. Esta classe foi responsável por iniciar o *software* e carregar todas as outras classes, sendo cada uma delas correspondentes a uma respectiva tela do programa, todas herdadas de “Screen”, em que é possível gerenciar as transições entre elas.

A outra parcela envolveu a confecção de arquivos com extensão “.kv”, os quais estão relacionados com a estrutura da interface do usuário e como seus elementos devem ser organizados.

Para que haja a comunicação entre esses arquivos, cada arquivo “.kv” recebe o nome da classe que está se referindo, havendo a necessidade ainda do mesmo ser carregado no arquivo “.py”.

A seguir, após se realizar um extenso arquivo “.kv”, foi desenvolvida a interface da Figura 7.1.

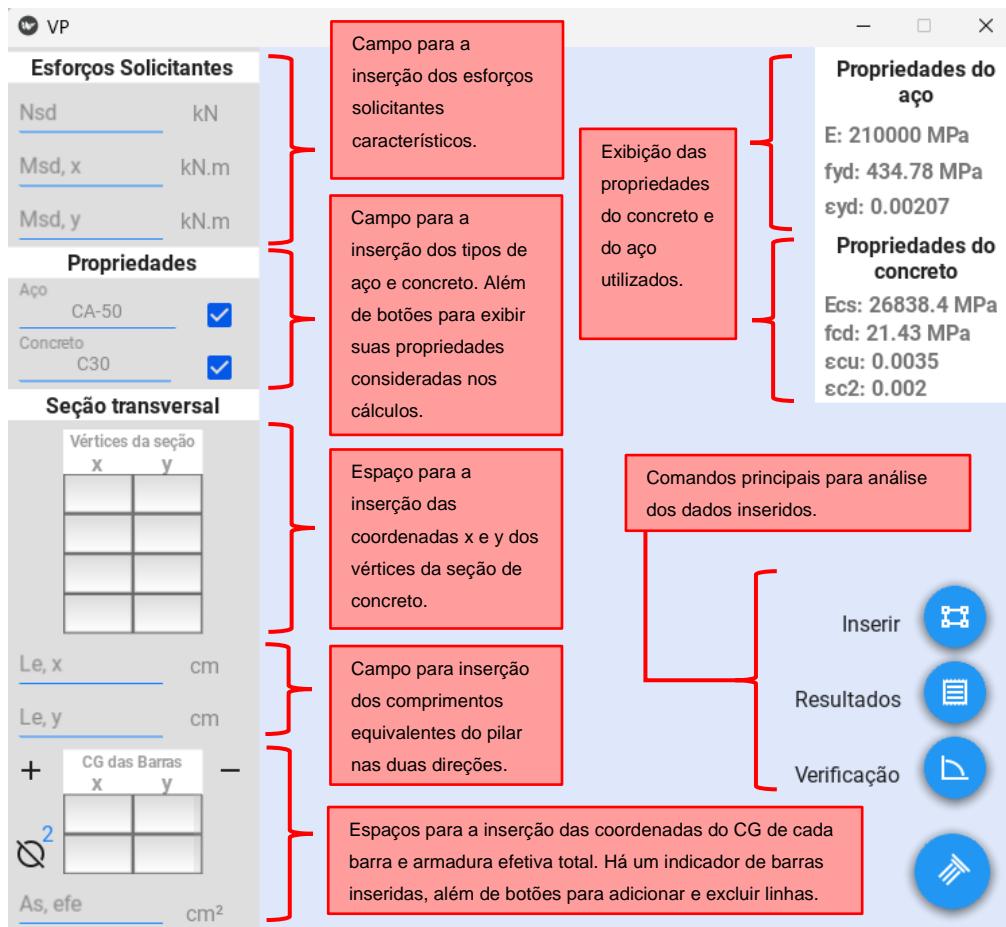
**Figura 7.1 - Interface Gráfica do Usuário (GUI)**



**Fonte: Autoria própria**

Durante sua elaboração, foram considerados campos para especificar alguns parâmetros de entrada como os esforços solicitantes, o tipo de concreto e de aço utilizados, as dimensões da seção transversal e posição das barras de aço, os comprimentos equivalentes do pilar e a área de armadura efetiva. A Figura 7.2 mostra com mais detalhes todas as funcionalidades disponíveis nesta tela inicial.

Figura 7.2 – Funcionalidades da Interface Gráfica do Usuário (GUI) desenvolvida

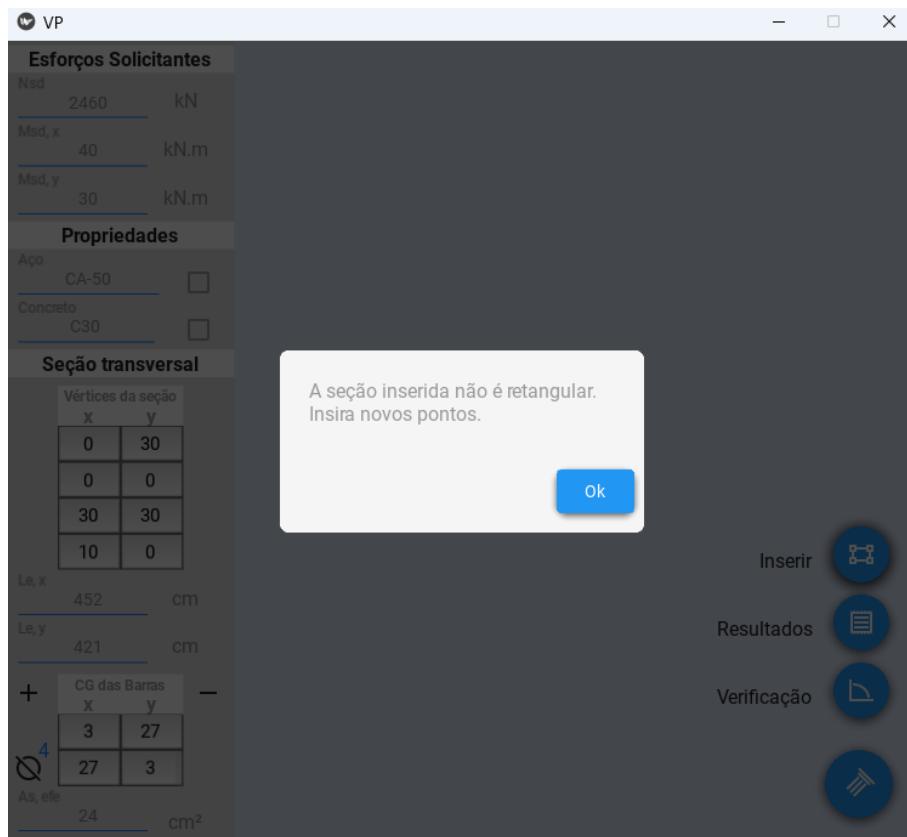


Fonte: Autoria própria

Na interface desenvolvida, tornou-se evidente as unidades em que cada dado deve ser inserido no programa. Ademais, o separador decimal convencionado foi o “ponto”, uma vez que o mesmo já é convencionado na própria linguagem *Python* para a identificação de números decimais.

Houve ainda um tratamento de possíveis erros que o usuário poderia cometer na parcela passível de interação dentro do programa. A alternativa adotada para isso foi a abertura de janelas de diálogo indicando o que está incorreto e qual a forma correta de inserção dos dados. Na Figura 7.3 há um exemplo, em que se inseriu um conjunto de pontos para a seção transversal não correspondentes a um retângulo.

**Figura 7.3 - Tratamento de erros**



**Fonte: Autoria própria**

Além do erro representado acima, outros foram previstos com o intuito de garantir a eficácia do software diante de tudo o que ele foi proposto a solucionar. Dentre os tratamentos de erros desenvolvidos estão:

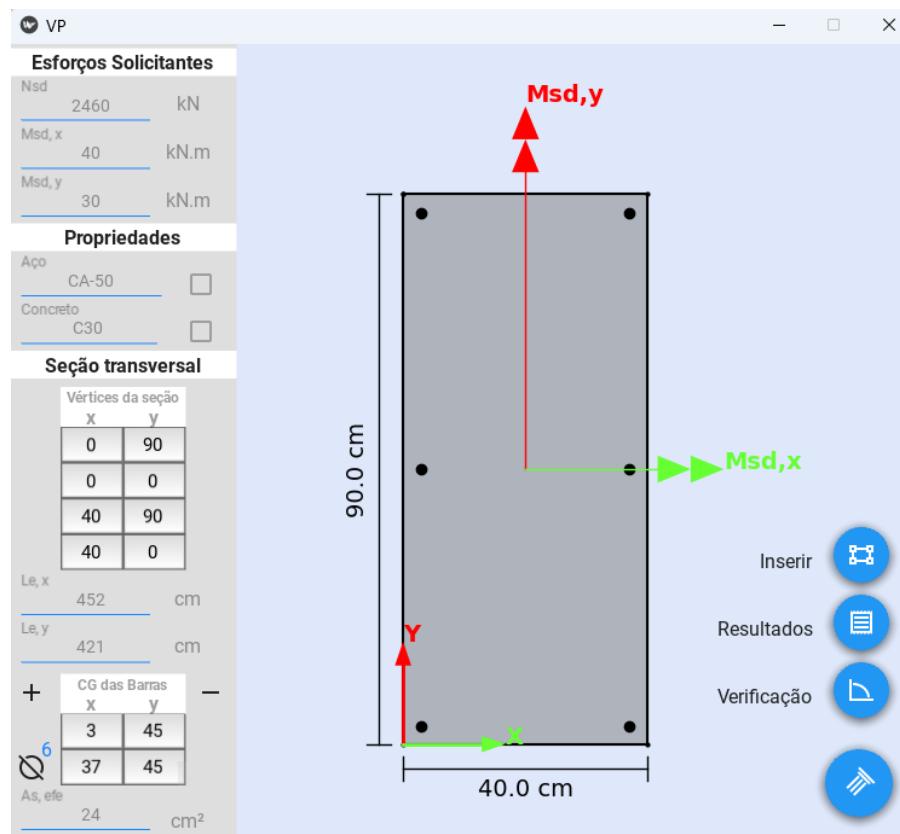
- Inserção de valores não numéricos, ou ainda, números decimais com separador diferente de “ponto”, em qualquer campo, não são válidos;
- Quando selecionadas as caixas de seleção ao lado do tipo concreto e do tipo de aço nas propriedades, deve-se antes escolhe-los para depois visualizar suas propriedades;
- Nos campos que recebem as coordenadas dos vértices da seção transversal de concreto, não pode haver células sem valor atribuído ou valores que não remetem a um retângulo;
- Na região de inserção das coordenadas do CG de cada barra de aço, valores cuja posição da barra não se encontra nos domínios da seção de

concreto, não são válidos, bem como campos vazios e posições repetidas de barras.

Em todos os casos supracitados, uma janela de diálogo se abre de acordo com os moldes apresentados na Figura 7.3, impedindo a execução de certas funcionalidades até a correção do que foi indicado pelo software.

Preenchidos todos os campos necessários para a exibição dos resultados, o botão “inserir” deve ser pressionado para a visualização da seção (Figura 7.4). A seção pode ser desenhada de forma total, ao preencher as coordenadas de todos os pontos de interesse, antes de pressionar o referido botão, ou, de forma parcial, em que as barras de aço surgem em partes, à medida que a seção é redesenhada quando o mesmo botão é pressionado diversas vezes pelo usuário.

**Figura 7.4 - Seção transversal exemplo inserida no programa**



**Fonte: Autoria própria**

A imagem foi gerada pelo software através da biblioteca matplotlib do Python, mais especificamente, pela ferramenta FigureCanvasKivyAgg importada

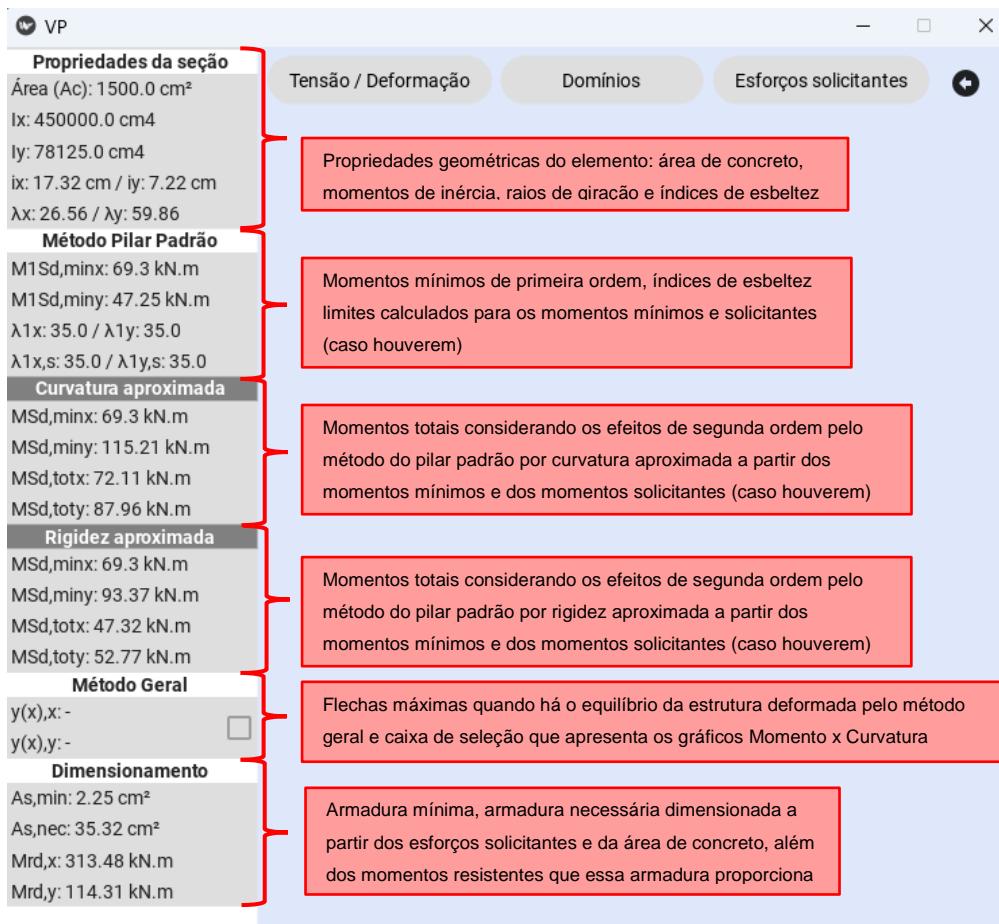
da biblioteca Kivy, a qual faz a ligação com os recursos oferecidos pelo matplotlib e o transforma em imagem dentro da própria interface.

Verifica-se na imagem a origem do plano cartesiano arbitrado pelo próprio usuário, as cotas da base e altura da seção de concreto, pontos que representam as coordenadas das barras de aço, além dos vetores dos momentos em ambas as direções casa hajam.

Feito isso, é habilitado o botão “Resultados” (enquanto a seção não é inserida esse recurso não é habilitado). Ele direciona o usuário para uma segunda interface, a qual apresenta ao lado esquerdo todos os parâmetros necessários para a verificação do pilar já calculados, como as propriedades da seção, os resultados obtidos através do dimensionamento, bem como parâmetros envolvendo o método do pilar padrão e o método geral.

A Figura 7.5 expressa um primeiro contato com esta nova GUI.

**Figura 7.5 – Interface Gráfica do Usuário (GUI) de Resultados**



**Fonte: Autoria própria**

Nessa nova interface, há também formas de visualização dos resultados para facilitar o entendimento, as quais são habilitadas pelos três botões indicados na Figura 7.6.

**Figura 7.6 – Principais botões na GUI de Resultados**

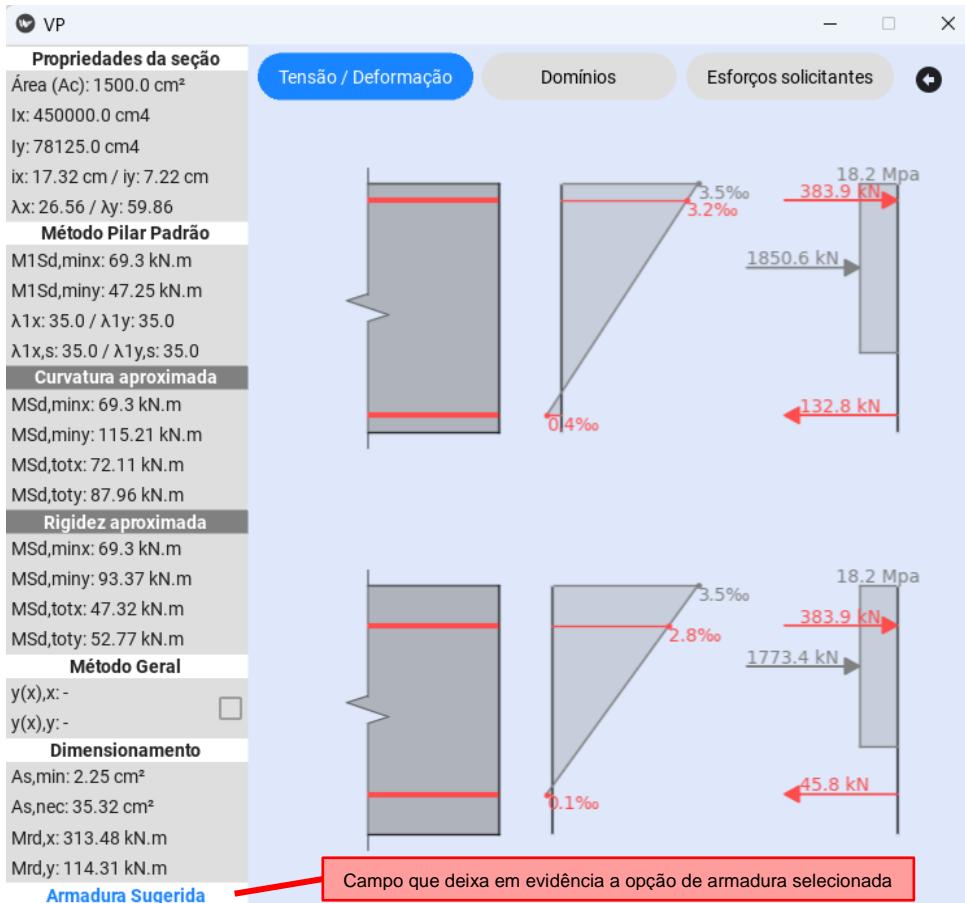


**Fonte: Autoria própria**

Em todos os comandos, o *software* oferece a opção de visualização dos resultados por meio da armadura inserida pelo próprio usuário ou por meio da armadura sugerida, obtida através do dimensionamento que o próprio programa realiza. Para isso, basta selecionar um dos três botões principais que surge em forma de lista as opções disponíveis.

A Figura 7.7 apresenta a visualização das tensões e forças resultantes nas barras de aço e no concreto comprimido para duas orientações da seção transversal ( $0^\circ$  e  $90^\circ$ ). No caso foi selecionada a visualização dos resultados da seção com a armadura sugerida.

**Figura 7.7 – Tensão e deformação na seção transversal rotacionada em 0° e 90° com a armadura sugerida**

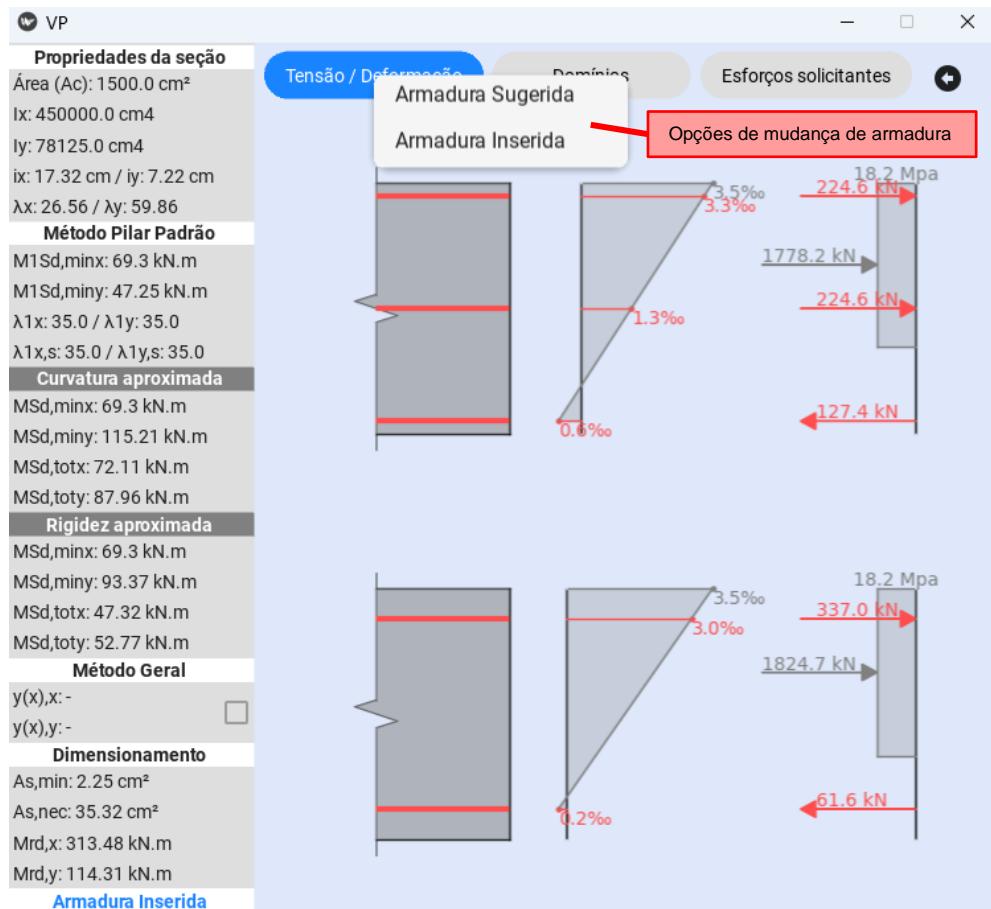


**Fonte: Autoria própria**

A seguir, a Figura 7.8 apresenta a visualização das tensões e forças resultantes nas barras de aço e no concreto comprimido para duas orientações da seção transversal (0° e 90°), porém, agora com uso da armadura inserida pelo usuário, configuração essa que pode ser visualizada na Figura 7.4.

Além disso, a figura deixa em evidência como é realizada a forma de troca de armadura da seção transversal.

**Figura 7.8 – Tensão/deformação na seção transversal rotacionada em 0° e 90° com a armadura inserida**



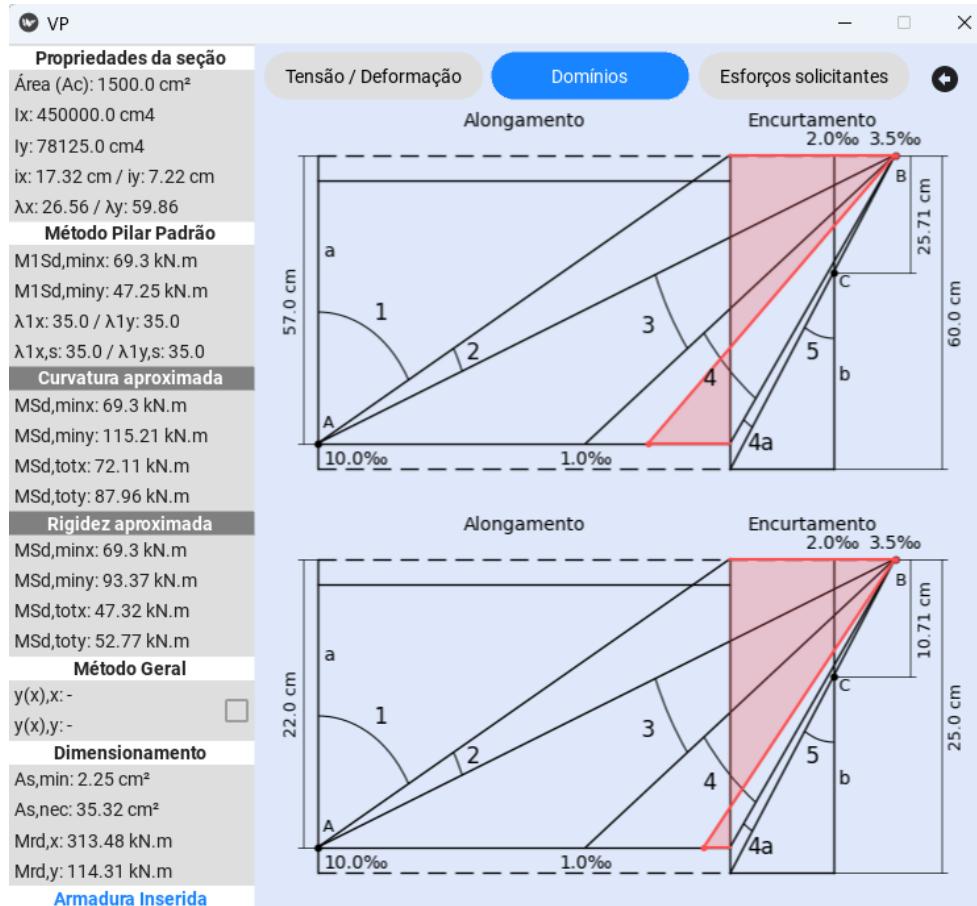
**Fonte: Autoria própria**

Pode-se perceber a diferença entre as armaduras, quando comparadas as figuras 7.7 e 7.8, justamente pelo número de barras, uma vez que para o dimensionamento foram idealizadas barras nos cantos da seção transversal. Já na armadura inserida, foi alocada barras no eixo de simetria, resultando em uma configuração diferente das próprias forças resultantes.

Outro aspecto visual é a indicação de qual domínio a seção transversal rotacionada a 0° e 90° está contida quando sujeita aos esforços solicitantes inseridos. Com isso, implementou-se os domínios de estado-limite último apresentados pela NBR 6118:2014 (Figura 7.9), em que serão indicadas as deformações dos pontos de interesse da seção, compondo, assim, o diagrama de deformações. Isso facilita o entendimento de como a seção se comporta diante dos esforços aos quais está sendo submetida, bem como a maneira com

que deve ser interpretado cada um dos domínios, sendo muitas vezes alvo de dúvidas no meio didático.

**Figura 7.9 - Domínios de estado-limite último exibidos no software**



**Fonte: Autoria própria**

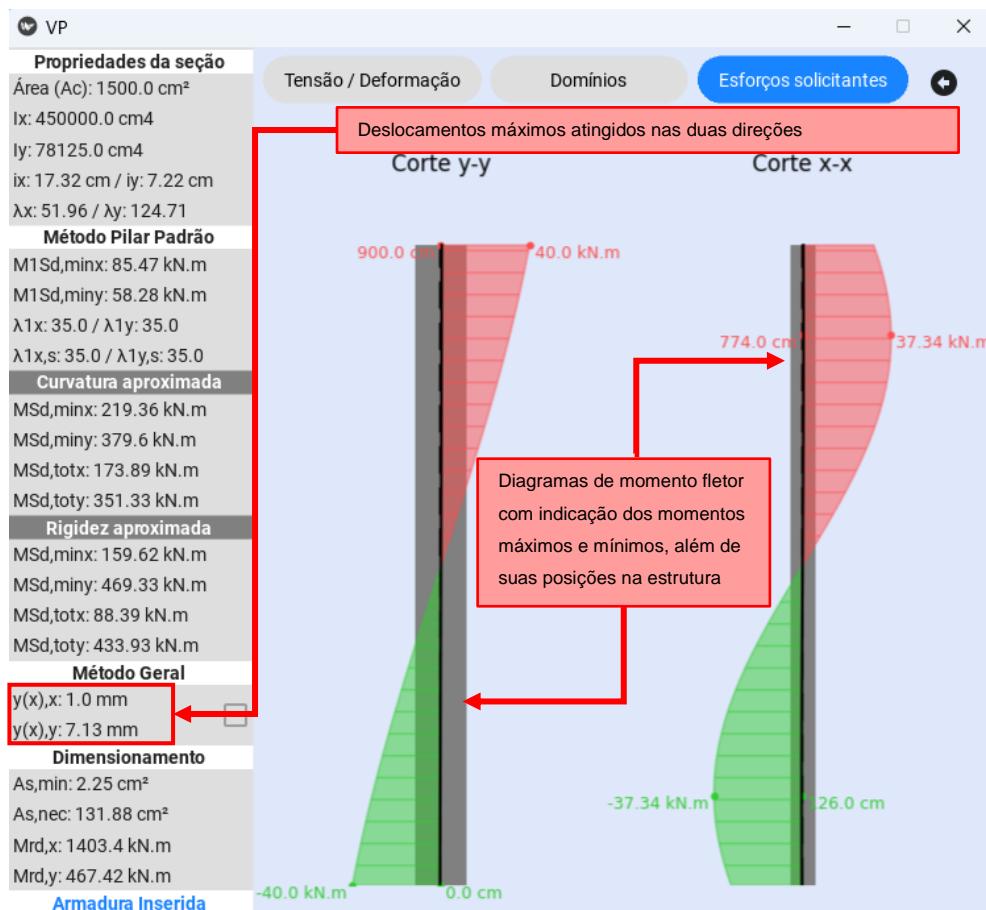
Na Figura 7.9, além de exibir o domínio que a seção transversal se encontra nas duas orientações, há algumas cotas que auxiliam o usuário como a altura, a altura útil e a distância que corresponde à deformação de pico do concreto, ideal para identificação do domínio 5.

Por fim, o último recurso disponível na interface de resultados é a questão da exibição de diagramas dos esforços solicitantes considerando os efeitos de segunda ordem, mas, agora pelo método geral. Então, diante dos momentos de primeira ordem para pilares biapoiados, são acrescidos os efeitos de segunda ordem devido às não linearidades físicas e geométricas da estrutura através do

efeito da excentricidade da força normal quando ocorre um deslocamento na direção analisada.

A Figura 7.10 mostra os diagramas de momento fletor em um pilar de canto esbelto, submetido à esforços solicitantes nas duas direções, além da indicação das flechas máximas em x e y quando a estrutura atinge o equilíbrio deformedo.

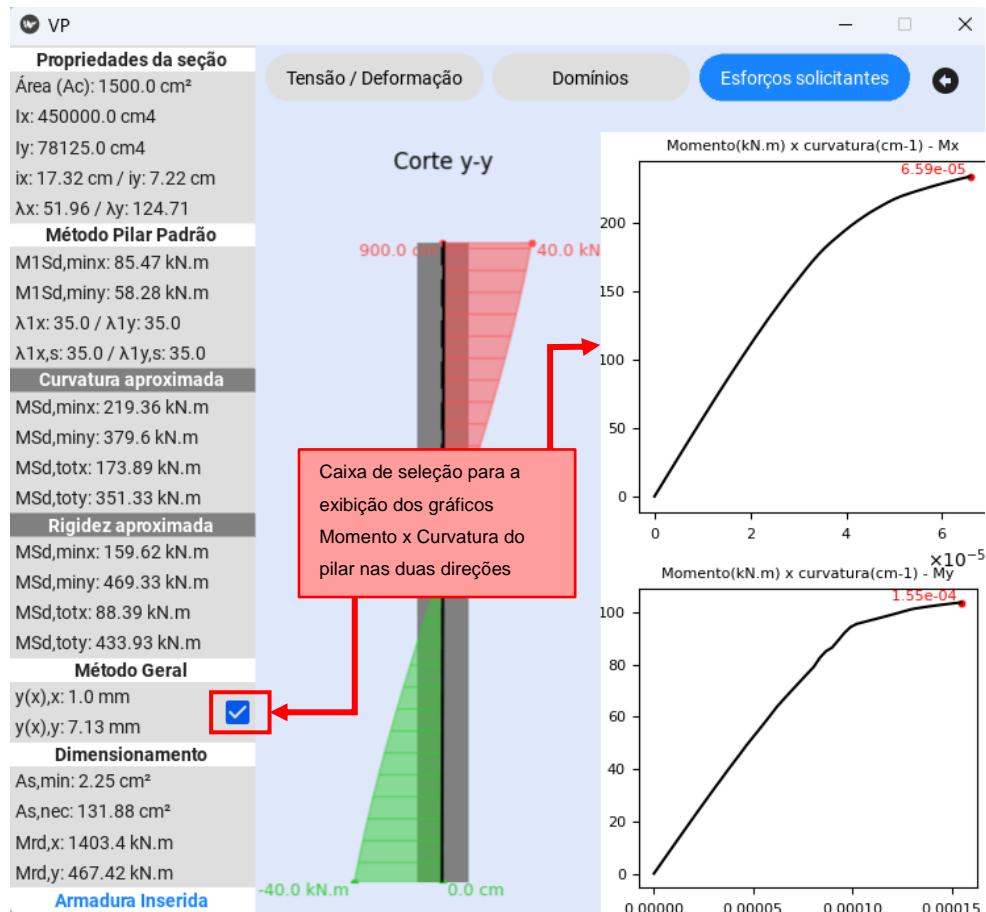
**Figura 7.10 – Diagramas de momento fletor do pilar nas duas direções considerando os efeitos de segunda ordem pelo método geral.**



**Fonte: Autoria própria**

Já a Figura 7.11 deixa em evidência quais os gráficos Momento x Curvatura utilizados para atingir tais resultados, os quais surgem no momento em que a caixa de seleção ao lado é acionada.

**Figura 7.11 – Exibição dos gráficos Momento x Curvatura utilizados no método geral em ambas as direções.**



**Fonte: Autoria própria**

Em sequência, o botão “Verificação” é habilitado (ele permanece bloqueado até que ocorra a navegação pelos resultados previamente). Quando pressionado o software direciona o usuário para uma terceira interface, a qual tem o objetivo de realizar de forma gráfica a verificação do elemento estrutural.

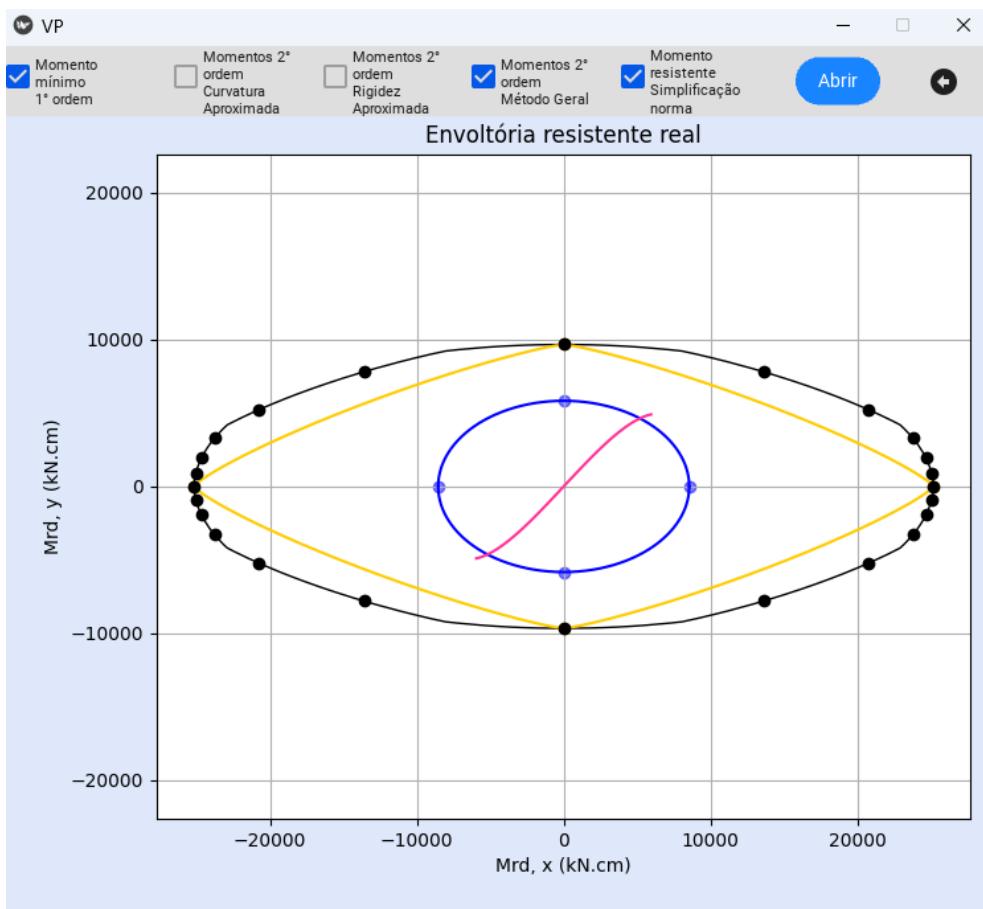
Logo quando surge, a nova GUI apresenta em seu gráfico a envoltória resistente real. A partir disso, pode-se selecionar diversas configurações para se analisar a eficiência da seção transversal inserida por meio das caixas de seleção acima, já que promovem a inserção de seus respectivos gráficos. Configurações essas que correspondem à envoltória mínima de primeira ordem, à envoltória mínima de segunda ordem, bem como os esforços solicitantes, para o método do pilar padrão por curvatura aproximada e por rigidez aproximada,

aos esforços solicitantes pelo método geral e à envoltória resistente de acordo com os critérios normativos da NBR 6118:2014.

Abaixo se encontram dois exemplos de quais configurações o gráfico pode assumir:

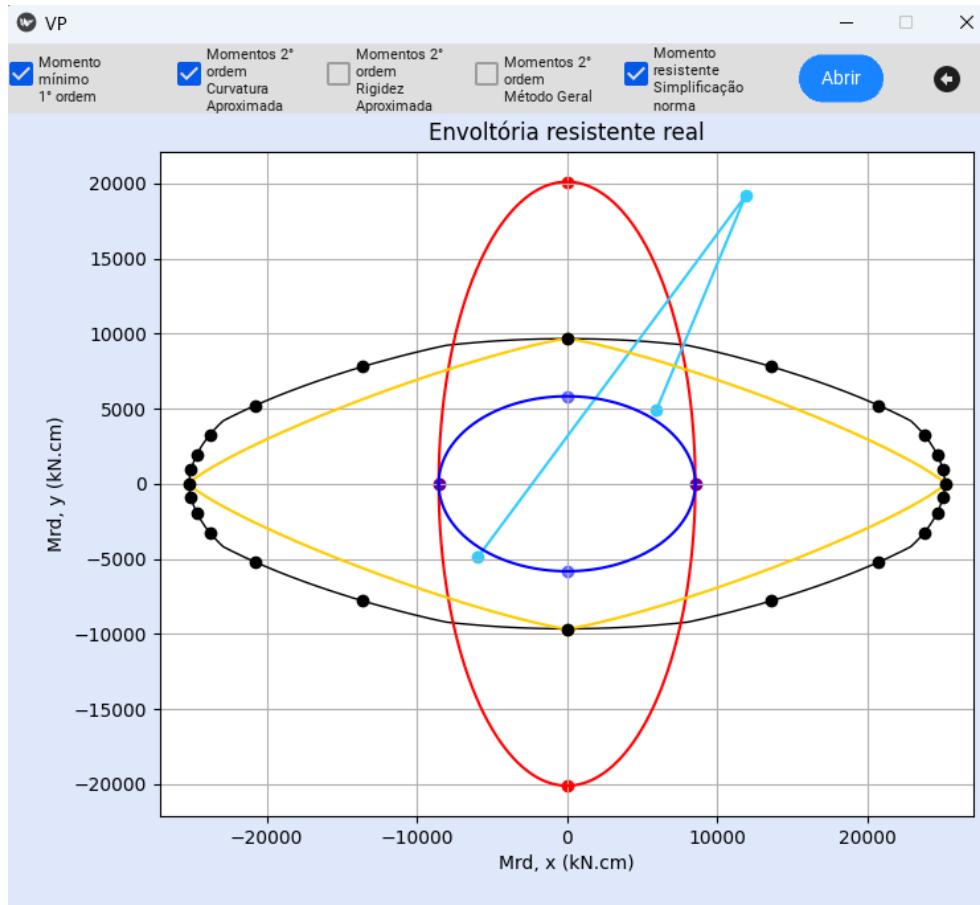
- Configuração 1 (Figura 7.12): o gráfico está composto pela envoltória resistente real (preto), envoltória resistente normativa (Amarelo), envoltória mínima de primeira ordem (azul) e esforços solicitantes pelo método geral (rosa);
- Configuração 2 (Figura 7.13): o gráfico está composto pela envoltória resistente real (preto), envoltória resistente normativa (Amarelo), envoltória mínima de primeira ordem (azul), envoltória mínima de segunda ordem (vermelho) e esforços solicitantes (ciano), sendo os dois últimos obtidos pelo método do pilar padrão por curvatura aproximada.

**Figura 7.12 – Gráfico para verificação de um pilar com a configuração 1**



**Fonte: Autoria própria**

**Figura 7.13 - Gráfico para verificação de um pilar com a configuração 2**

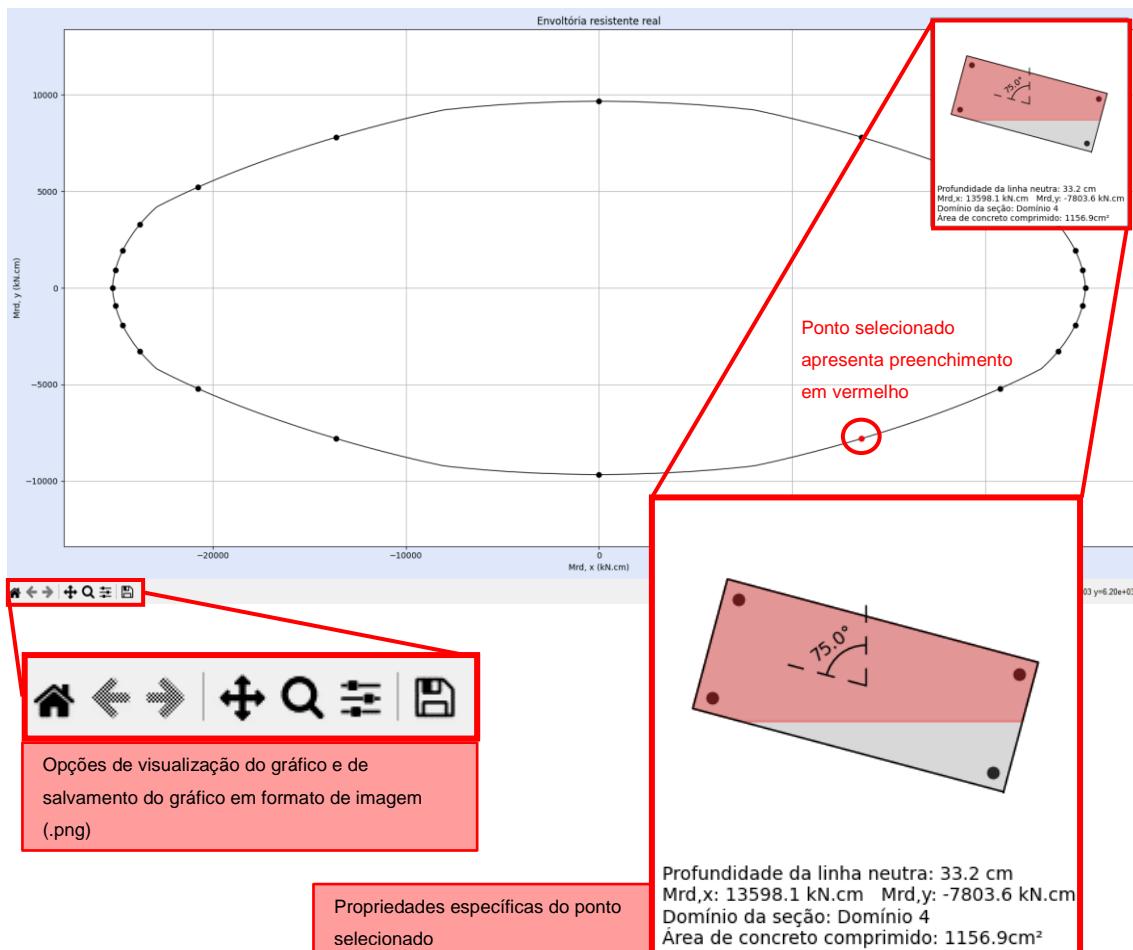


**Fonte: Autoria própria**

Ao selecionar o botão “Abrir” no canto superior direito, uma nova janela se abre com a configuração do gráfico escolhida. Essa nova janela permite uma maior interação do usuário com o gráfico e uma melhor visualização dos resultados obtidos.

Nesse contexto, a envoltória resistente real possui alguns pontos destacados que correspondem a alguns ângulos de interesse de rotação da seção transversal. Quando pressionados, são apresentadas no canto superior direito da janela algumas propriedades relacionadas à seção de concreto armado com uma determinada rotação, correspondente ao seu respectivo ponto na envoltória, como apresentado na Figura 7.14.

**Figura 7.14 – Modo de visualização detalhada dos gráficos essenciais para a verificação do elemento estrutural**



**Fonte: Autoria própria**

Dentre as propriedades disponíveis para visualização na envoltória resistente real, específicas para cada ponto, encontram-se a profundidade da linha neutra, os momentos resistentes nas duas direções, o domínio da seção, a área de concreto comprimido, considerando o diagrama simplificado retangular para as tensões, além de uma representação ilustrativa da seção transversal com indicação das barras de aço, do ângulo de rotação e da região comprimida.

De modo geral, todas as interfaces gráficas buscaram ser as mais intuitivas e objetivas possível, permitindo de várias formas a interação do usuário com o software para que os resultados de interesse fossem interpretados de maneira clara. Além disso, o próprio programa induz à quem a utiliza qual a forma correta de inserção dos dados iniciais através da indicação de suas unidades e

por meio dos diversos tratamentos de erros implementados, havendo até mesmo uma ordem específica de navegação (Inserção da seção – Resultados – Gráficos de verificação) de forma a garantir certa fluidez e uma menor propensão do *software* a erros desconhecidos.

## 8 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

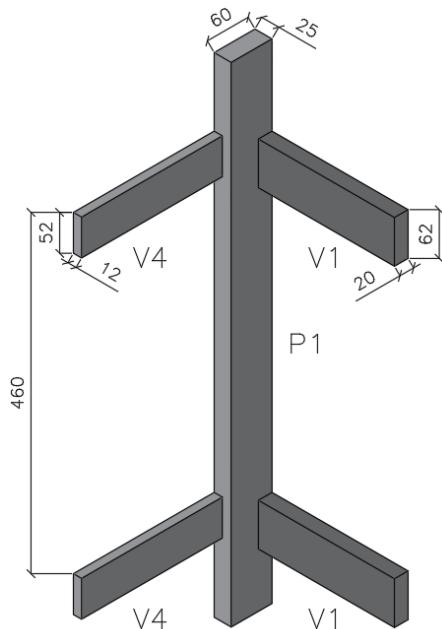
Para concretizar a validade do software aqui desenvolvido, neste tópico foram resolvidos exemplos de verificação de pilares submetidos à esforços solicitantes em uma estrutura nas quais os elementos se encontram biapoiados.

### 8.1 Verificação de pilar com índice de esbeltez menor que 90

A priori, foi resolvido um exemplo de pilar de canto, já que dentre os tipos de pilares (pilar intermediário, de extremidade e de canto) é o mais completo, que engloba as duas outras situações. Dessa forma, foram realizados o dimensionamento e a verificação do elemento de forma algébrica e com uso de ábacos, e, em seguida, foi comparado com os resultados provenientes da ferramenta criada.

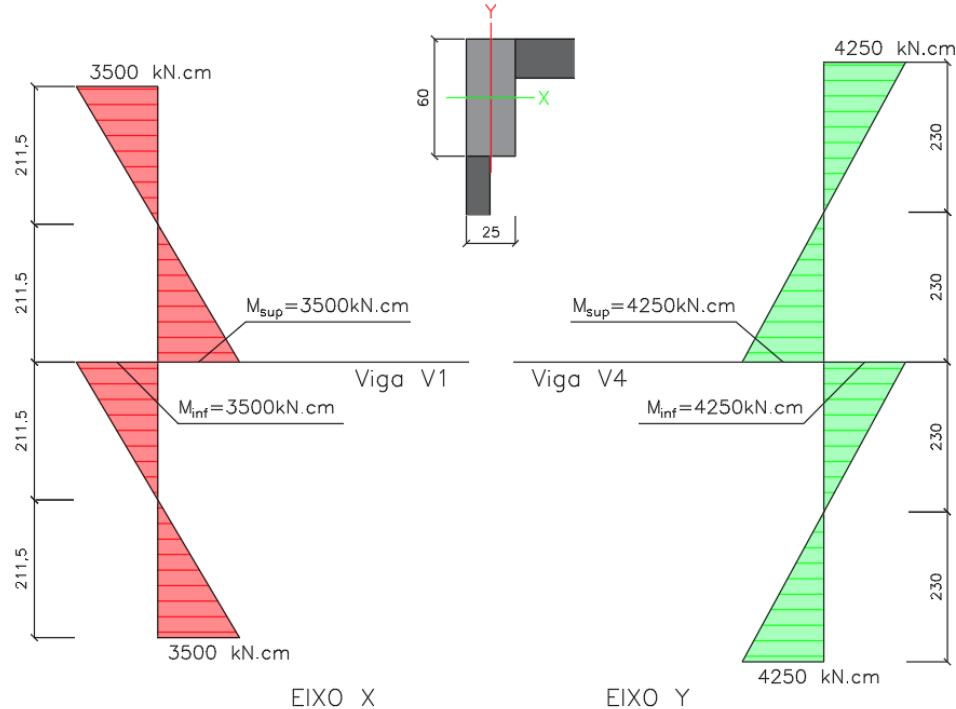
Supondo um pilar biapoiado de um edifício cujas dimensões dos elementos estão expostas na Figura 8.1 e com distância de piso a piso de 4,6 m, submetido a uma força normal característica ( $N_{sk}$ ) de 1850 kN e diagramas de momentos fletores nas duas direções conforme mostrado na Figura 8.2. Pretende-se utilizar concreto C30, aço CA-50 e cobrimento de 2,5 cm.

**Figura 8.1 – Dimensões dos elementos estruturais (unidades em centímetros).**



**Fonte:** Autoria própria

**Figura 8.2 - Diagrama de momento fletor característico nas direções x e y.**



**Fonte: Autoria própria**

A primeira etapa para o cálculo dos efeitos de segunda ordem consiste em calcular o comprimento equivalente do pilar ( $l_e$ ), cujo valor é o menor entre a distância da face da viga até o piso, somado à dimensão do pilar na direção avaliada e a distância de eixo a eixo das vigas. Assim, tem-se a partir da Equação 4.38:

- Eixo X:

$$l_{ex} \leq \begin{cases} l_{0x} + h_x \\ l_x \end{cases} \rightarrow l_{ex} \leq \begin{cases} (460 - 62) + 25 = 423 \text{ cm} \\ 460 \text{ cm} \end{cases}$$

$$l_{ex} = 423 \text{ cm}$$

- Eixo Y:

$$l_{ey} \leq \begin{cases} l_{0y} + h_y \\ l_y \end{cases} \rightarrow l_{ey} \leq \begin{cases} (460 - 52) + 60 = 468 \text{ cm} \\ 460 \text{ cm} \end{cases}$$

$$l_{ey} = 460 \text{ cm}$$

Em seguida, calcula-se o índice de esbeltez do pilar para classificá-lo e verificar se as contribuições dos efeitos de segunda ordem são relevantes. Desse modo, a partir das equações 4.39 e 4.40, tem-se:

- Raios de giração:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A_c}} = \sqrt{\frac{\frac{25 \cdot 60^3}{12}}{60 \cdot 25}} = \sqrt{\frac{450000}{1500}} = 17,32 \text{ cm}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A_c}} = \sqrt{\frac{\frac{60 \cdot 25^3}{12}}{60 \cdot 25}} = \sqrt{\frac{78125}{1500}} = 7,22 \text{ cm}$$

- Índices de esbeltez:

$$\lambda_x = \frac{l_{ey}}{i_x} = \frac{460}{17,32} = 26,56$$

$$\lambda_y = \frac{l_{ex}}{i_y} = \frac{423}{7,22} = 58,59$$

É importante mencionar que, o índice de esbeltez em x está relacionado ao momento cujo vetor se encontra no mesmo eixo, logo, envolve a flexão no plano y, e, por esse motivo, a fórmula recebe o comprimento equivalente em y. A mesma analogia vale para o índice de esbeltez em y.

A próxima etapa envolve as envoltórias mínimas, a começar pelo cálculo dos momentos mínimos de primeira ordem pela Equação 4.41:

$$N_{Sd} = 1850 \cdot 1,4 = 2590 \text{ kN}$$

$$M_{1Sd,minx} = N_{Sd} \cdot (0,015 + 0,03 \cdot h_y) = 2590 \cdot (0,015 + 0,03 \cdot 0,6)$$

$$M_{1Sd,minx} = 85,47 \text{ kN.m}$$

$$M_{1Sd,miny} = N_{Sd} \cdot (0,015 + 0,03 \cdot h_x) = 2590 \cdot (0,015 + 0,03 \cdot 0,25)$$

$$M_{1Sd,miny} = 58,28 \text{ kN.m}$$

Então, a NBR 6118:2014 especifica que, mesmo caso não houvesse momento atuando na estrutura, ela deve resistir no mínimo a esses momentos nas direções dos vetores convencionadas.

Uma vez definidos os momentos mínimos, é essencial avaliar os índices de esbeltez limite através da Equação 4.42:

$$\lambda_{1x} = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{e_{1x}}{h_y}}{\alpha_b} = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{85,47/2590}{0,6}}{1}$$

$$\lambda_{1x} = 25,69$$

$$\lambda_{1y} = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{e_{1y}}{h_x}}{\alpha_b} = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{58,28/2590}{0,25}}{1}$$

$$\lambda_{1y} = 26,13$$

Por se tratar da avaliação dos índices limites referentes aos momentos mínimos,  $\alpha_b$  é igual a 1. Ademais, a NBR6118:2014 estabelece que tais índices devem possuir valores entre 35 e 90, e como os valores calculados são inferiores ao mínimo, adota-se 35 para ambos.

Ao comparar os índices de esbeltez da estrutura com os limites nas duas direções, tem-se:

$$\lambda_x = 26,56 < \lambda_{1x} = 35$$

$$\lambda_y = 58,59 > \lambda_{1y} = 35$$

No caso do índice de esbeltez em x, como ele é inferior ao limite, pode-se concluir que não é necessário considerar os efeitos de segunda ordem local nessa direção. Já no caso do índice de esbeltez em y, por ser superior ao limite, os efeitos não podem ser desprezados.

Consequentemente, pode-se utilizar o método do pilar padrão com curvatura aproximada para o cálculo dos momentos mínimos de segunda ordem (equações 4.45, 4.46 e 4.47):

$$\nu = \frac{N_{sd}}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{2590}{25 \cdot 60 \cdot \frac{3}{1,4}} = 0,806$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)_x = \frac{0,005}{h_x \cdot (\nu + 0,5)} = \frac{0,005}{25 \cdot (0,806 + 0,5)} = 1,53 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)_x = 1,53 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{h_x} = \frac{0,005}{25} = 2 \cdot 10^{-4} \rightarrow Ok!$$

$$M_{Sdy,tot} = \alpha_b \cdot M_{1Sd,miny} + N_{sd} \cdot \frac{\ell_{ex}^2}{10} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)_x$$

$$M_{Sdy,tot} = 1 \cdot 5828 + 2590 \cdot \frac{423^2}{10} \cdot 1,53 \cdot 10^{-4}$$

$$M_{Sdy,tot} = 129,26 \text{ kN.m}$$

Por se tratar do momento cujo vetor se encontra na direção y, a curvatura considerada é na direção x, bem como o comprimento equivalente, obtendo-se desse modo, pela simplificação da curvatura, o momento total, considerando os efeitos de primeira e segunda ordem.

O método a ser utilizado é a critério do projetista, podendo também ser utilizado o método do pilar padrão por rigidez aproximada (Equação 4.49):

$$a = 5 \cdot h_x = 5 \cdot 0,25 = 1,25$$

$$b = h_x^2 \cdot N_{sd} - \frac{\ell_{ex}^2 \cdot N_{sd}}{320} - 5 \cdot h_x \cdot \alpha_b \cdot M_{1Sd,miny}$$

$$b = 0,25^2 \cdot 2590 - \frac{4,23^2 \cdot 2590}{320} - 5 \cdot 0,25 \cdot 1 \cdot 58,28 = -55,80$$

$$c = -h_x^2 \cdot N_{sd} \cdot \alpha_b \cdot M_{1Sd,miny}$$

$$c = -0,25^2 \cdot 2590 \cdot 1 \cdot 58,28 = -9434,08$$

$$a \cdot M_{Sdy,tot}^2 + b \cdot M_{Sdy,tot} + c = 0$$

$$1,25 \cdot M_{Sdy,tot}^2 - 55,80 \cdot M_{Sdy,tot} - 9434,08 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-55,80)^2 - 4 \cdot 1,25 \cdot (-9434,08) = 50284,04$$

$$M_{Sd,y,tot} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{55,80 + \sqrt{50284,04}}{2 \cdot 1,25} = 112,02 \text{ kN.m}$$

Por se tratar de um pilar de canto, com momentos solicitantes em ambas as direções, deve-se verificar os efeitos de segunda ordem para esses esforços. Portanto, primeiramente realiza-se a majoração dos esforços, adequando-os para o projeto, e, em sequência, são calculados os índices de esbeltez limites referentes a eles.

$$M_{sk,y} = 3500 \text{ kN.cm} \rightarrow M_{sd,y} = 1,4 \cdot 3500 = 4900 \text{ kN.cm}$$

$$M_{sd,y} = 49 \text{ kN.m}$$

$$M_{sk,x} = 4250 \text{ kN.cm} \rightarrow M_{sd,x} = 1,4 \cdot 4250 = 5950 \text{ kN.cm}$$

$$M_{sd,x} = 59,5 \text{ kN.m}$$

Para pilares biapoiados ou em balanço com momentos menores que o momento mínimo  $\alpha_b$ , assume-se o valor de 1 de acordo com a NBR 6118:2014. Desse modo:

$$\lambda_{1x} = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{e_{1x}}{h_y}}{\alpha_b} = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{59,5/2590}{0,6}}{1}$$

$$\lambda_{1x} = 25,48$$

$$\lambda_{1y} = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{e_{1y}}{h_x}}{\alpha_b} = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{49/2590}{0,25}}{1}$$

$$\lambda_{1y} = 25,95$$

Como ambos são inferiores a 35, adota-se esse mesmo valor para ambos.

Ao comparar os índices de esbeltez da estrutura com os limites nas duas direções, tem-se:

$$\lambda_x = 26,56 < \lambda_{1x} = 35$$

$$\lambda_y = 58,59 > \lambda_{1y} = 35$$

No caso do índice de esbeltez em x, não é necessário considerar os efeitos de segunda ordem local nessa direção. Já no caso do índice de esbeltez em y, os efeitos não podem ser desprezados. Porém, por se tratar de uma flexo-compressão oblíqua do pilar, no caso em que um dos eixos é necessário considerar os efeitos de segunda ordem, calcula-se também os efeitos de segunda ordem para o segundo eixo. Isso ocorre por se tratar de um momento fletor em uma direção qualquer que é decomposto em ambas as direções para facilitar as análises, logo, para manter a coerência dos resultados, verifica-se os efeitos de segunda ordem em x e em y. No caso de pilares de extremidade, os quais estão sujeitos à flexo-compressão simples, não é necessário considerar essa duplicidade das análises, sendo a verificação essencial apenas quando o índice é superior ao seu respectivo limite.

Dessa forma, calcula-se primeiro esses efeitos na direção x pelo método da curvatura aproximada:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_y = \frac{0,005}{h_y \cdot (v + 0,5)} = \frac{0,005}{60 \cdot (0,806 + 0,5)} = 6,38 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)_y = 6,38 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{h_y} = \frac{0,005}{60} = 8,33 \cdot 10^{-5} \rightarrow \text{Ok!}$$

$$M_{Sdx,tot} = \alpha_b \cdot M_{Sd,x} + N_{Sd} \cdot \frac{\ell_{ey}^2}{10} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)_y$$

$$M_{Sdx,tot} = 1 \cdot 5950 + 2590 \cdot \frac{460^2}{10} \cdot 6,38 \cdot 10^{-5}$$

$$M_{Sdx,tot} = 94,47 \text{ kN.m}$$

Já para a direção y:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_x = \frac{0,005}{h_x \cdot (v + 0,5)} = \frac{0,005}{25 \cdot (0,806 + 0,5)} = 1,53 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)_x = 1,53 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{h_x} = \frac{0,005}{25} = 2 \cdot 10^{-4} \rightarrow \text{Ok!}$$

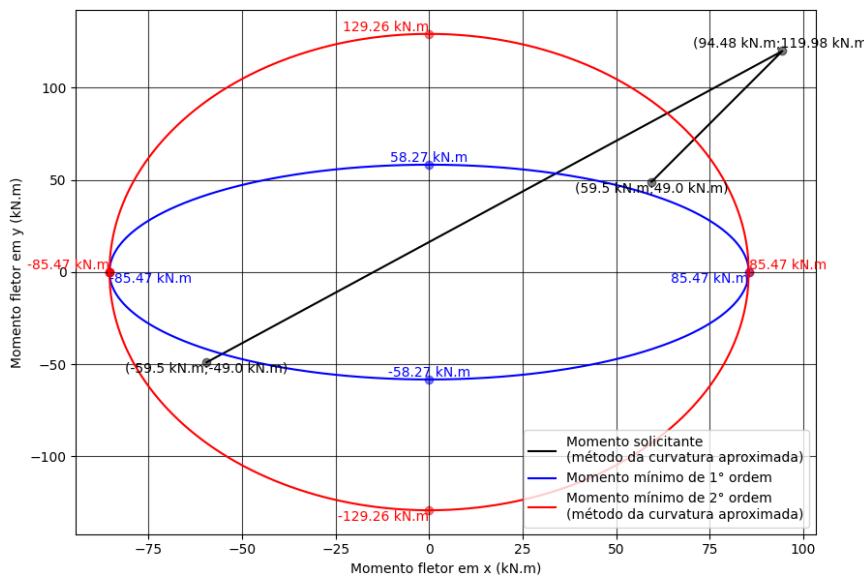
$$M_{Sdy,tot} = \alpha_b \cdot M_{Sd,y} + N_{Sd} \cdot \frac{\ell_{ex}^2}{10} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)_x$$

$$M_{Sdy,tot} = 1 \cdot 4900 + 2590 \cdot \frac{423^2}{10} \cdot 1,53 \cdot 10^{-4}$$

$$M_{Sdy,tot} = 119,90 \text{ kN.m}$$

Assim, pode-se formar um gráfico com as envoltórias de valores mínimos e máximos, em conjunto com os esforços solicitantes, em que são inseridos três pontos, compondo o par de momentos atuante na base do pilar, no topo e em uma seção denominada “crítica”, em que esses esforços são máximos.

**Figura 8.3 - Envoltórias mínimas e esforços solicitantes calculados pelo método do pilar padrão por curvatura aproximada**



**Fonte: Autoria própria**

Com o intuito de se obter resultados provenientes de outro método (rigidez aproximada) com o intuito de se comparar com o software, tem-se para a direção X:

$$a = 5 \cdot h_y = 5 \cdot 0,60 = 3$$

$$b = h_y^2 \cdot N_{Sd} - \frac{l_{ey}^2 \cdot N_{Sd}}{320} - 5 \cdot h_y \cdot \alpha_b \cdot M_{Sd,x}$$

$$b = 0,60^2 \cdot 2590 - \frac{4,60^2 \cdot 2590}{320} - 5 \cdot 0,60 \cdot 1 \cdot 59,5 = 582,64$$

$$c = -h_y^2 \cdot N_{Sd} \cdot \alpha_b \cdot M_{Sd,x}$$

$$c = -0,60^2 \cdot 2590 \cdot 1 \cdot 59,50 = -55477,8$$

$$a \cdot M_{Sdx,tot}^2 + b \cdot M_{Sdx,tot} + c = 0$$

$$3 \cdot M_{Sdx,tot}^2 + 582,64 \cdot M_{Sdx,tot} - 55477,8 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (582,64)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-55477,8) = 1005202,97$$

$$M_{Sdx,tot} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-582,64 + \sqrt{1005202,97}}{2 \cdot 3} = 69,99 \text{ kN.m}$$

Já para a direção y:

$$a = 5 \cdot h_x = 5 \cdot 0,25 = 1,25$$

$$b = h_x^2 \cdot N_{Sd} - \frac{l_{ex}^2 \cdot N_{Sd}}{320} - 5 \cdot h_x \cdot \alpha_b \cdot M_{Sd,y}$$

$$b = 0,25^2 \cdot 2590 - \frac{4,23^2 \cdot 2590}{320} - 5 \cdot 0,25 \cdot 1 \cdot 49 = -44,20$$

$$c = -h_x^2 \cdot N_{Sd} \cdot \alpha_b \cdot M_{Sd,y}$$

$$c = -0,25^2 \cdot 2590 \cdot 1 \cdot 49 = -7931,88$$

$$a \cdot M_{Sdy,tot}^2 + b \cdot M_{Sdy,tot} + c = 0$$

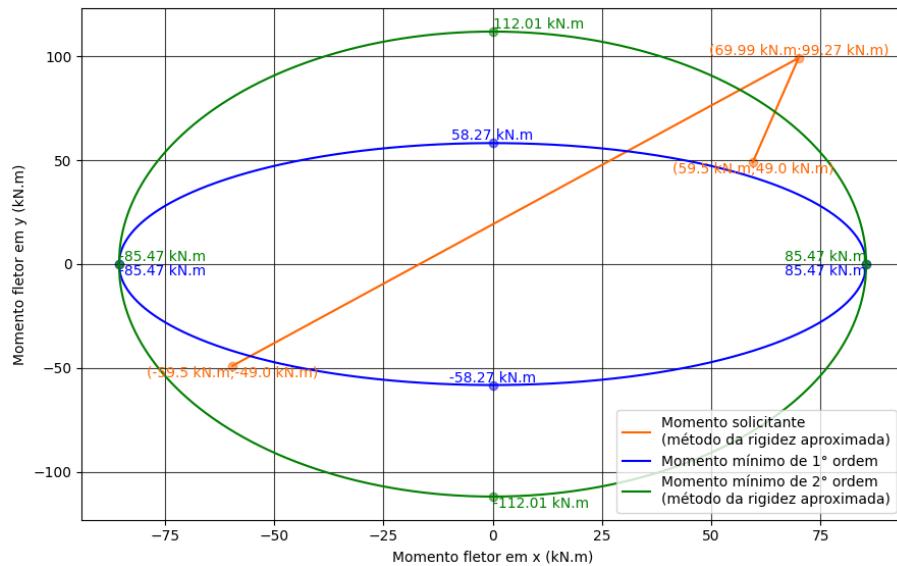
$$1,25 \cdot M_{Sdy,tot}^2 - 44,20 \cdot M_{Sdy,tot} - 7931,88 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-44,20)^2 - 4 \cdot 1,25 \cdot (-7931,88) = 41613,02$$

$$M_{Sdy,tot} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{44,20 + \sqrt{41613,02}}{2 \cdot 1,25} = 99,28 \text{ kN.m}$$

Com isso, é possível formar um gráfico com as envoltórias de valores mínimos e máximos, em conjunto com os esforços solicitantes, mas agora, obtidos através do método do pilar padrão por rigidez aproximada.

**Figura 8.4 - Envoltórias mínimas e esforços solicitantes calculados pelo método do pilar padrão por rigidez aproximada**



**Fonte: Autoria própria**

Uma vez definido as envoltórias mínimas e os esforços solicitante, inicia-se a etapa de dimensionamento por meio dos ábacos de Venturini e Rodrigues (1987). Para isso, calcula-se alguns valores adimensionais:

$$\nu = \frac{N_{sd}}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{2590}{25 \cdot 60 \cdot \frac{3}{1,4}} = 0,806$$

$$\mu = \frac{M_{sd}}{h \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{12926}{25 \cdot 25 \cdot 60 \cdot \frac{3}{1,4}} = 0,161$$

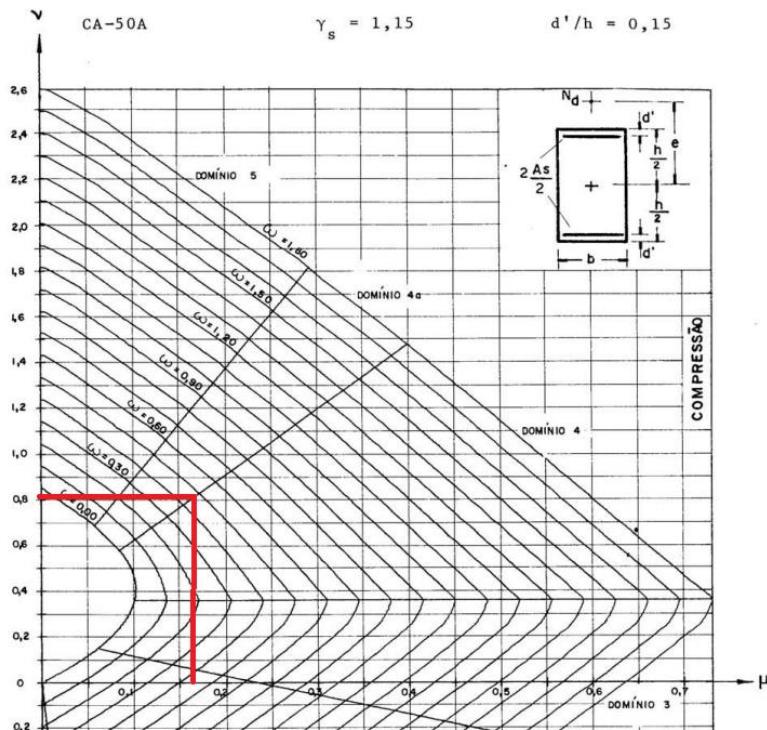
Em que, para o momento adimensional, foi utilizado o momento de maior valor para se iniciar a avaliação de qual a quantidade de armadura é necessária para envolver todos os esforços.

Feito isso, calcula-se a relação de  $d/h$  para a seleção do ábaco adequado. Foi admitido, além dos 2,5 cm de cobrimento, 5 mm de diâmetro para os estribos e barras longitudinais de 20 mm. Dessa maneira, para o momento cujo vetor se encontra na direção y, tem-se:

$$\frac{d'}{h} = \frac{2,5 + 0,5 + 2,0/2}{25} \approx 0,15$$

A partir disso, o ábaco selecionado está exposto na Figura 8.5.

**Figura 8.5 – Ábaco para o dimensionamento de peças retangulares de concreto armado**



**Fonte: Venturini e Rodrigues (1987)**

Pelo encontro das retas em vermelho na figura acima, nota-se uma taxa de armadura ( $\omega$ ) igual a 0,47. Sendo possível o cálculo da armadura necessária:

$$\omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}}$$

$$0,47 = \frac{A_s \cdot \frac{50}{1,15}}{25 \cdot 60 \cdot \frac{3}{1,4}}$$

$$A_s = 34,73 \text{ cm}^2$$

Com essa área de aço, pode-se adotar uma armadura de 6Ø20mm por face, o que retorna uma área de aço igual a 37,70 cm<sup>2</sup>.

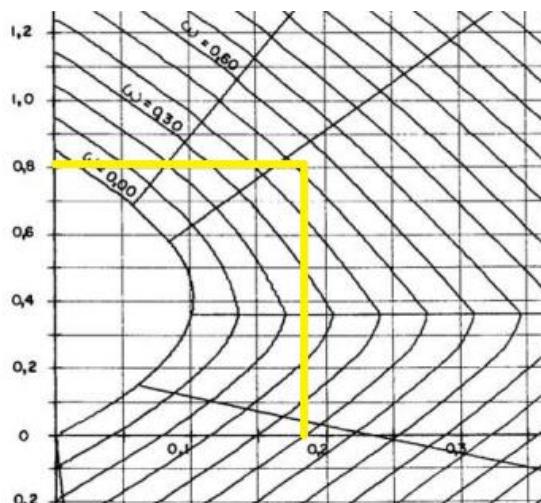
Efetuando-se o processo inverso:

$$\omega = \frac{37,70 \cdot \frac{50}{1,15}}{25 \cdot 60 \cdot \frac{3}{1,4}}$$

$$\omega = 0,51$$

Ao prolongar a reta horizontal vermelha no mesmo ábaco da Figura 8.5 até a taxa de armadura correspondente a 0,51, obtém-se um momento adimensional de 0,18 (Figura 8.6).

**Figura 8.6 - Ábaco para o momento resistente de peças retangulares de concreto armado na direção y**



**Fonte: Venturini e Rodrigues (1987)**

Feito isso, aplica-se a fórmula da taxa de armadura novamente para o cálculo do momento resistente na direção y:

$$0,18 = \frac{M_{Rd,y}}{25 \cdot 25 \cdot 60 \cdot \frac{3}{1,4}}$$

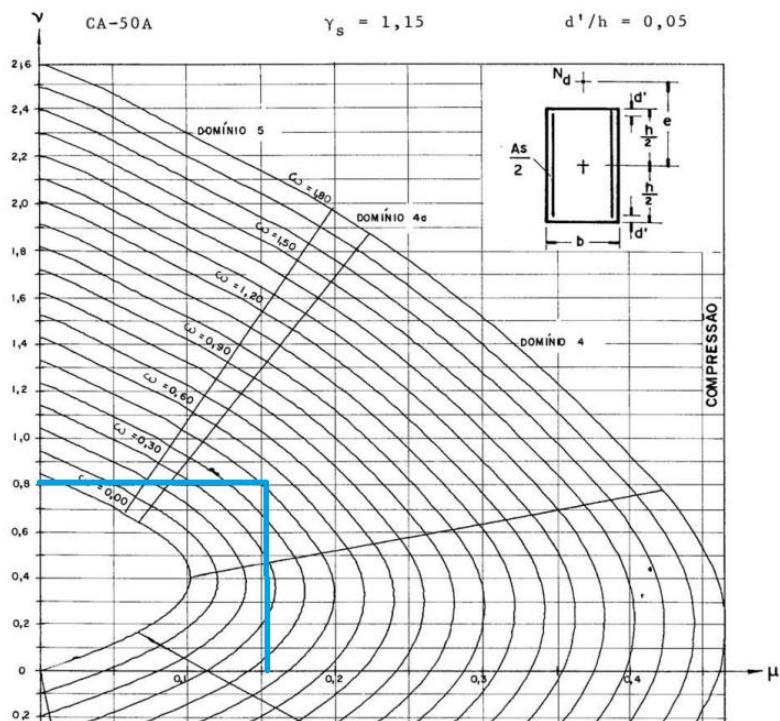
$$M_{Rd,y} = 14464,29 \text{ kN.cm} = 144,64 \text{ kN.m}$$

Já para momento cujo vetor está na direção x, utiliza-se a relação expressa abaixo para fazer uso do ábaco adequado.

$$\frac{d'}{h} = \frac{2,5 + 0,5 + 2,0/2}{60} \approx 0,05$$

Prolongando a reta horizontal correspondente à normal adimensional até a mesma taxa de armadura (0,51), é atingido um novo momento adimensional igual a 0,15, conforme é mostrado na Figura 8.7.

**Figura 8.7 - Ábaco para o momento resistente de peças retangulares de concreto armado na direção x**



**Fonte: Venturini e Rodrigues (1987)**

A partir do  $\mu$  alcançado, calcula-se o momento resistente em x da seção transversal:

$$0,15 = \frac{M_{Rd,x}}{60 \cdot 25 \cdot 60 \cdot \frac{3}{1,4}}$$

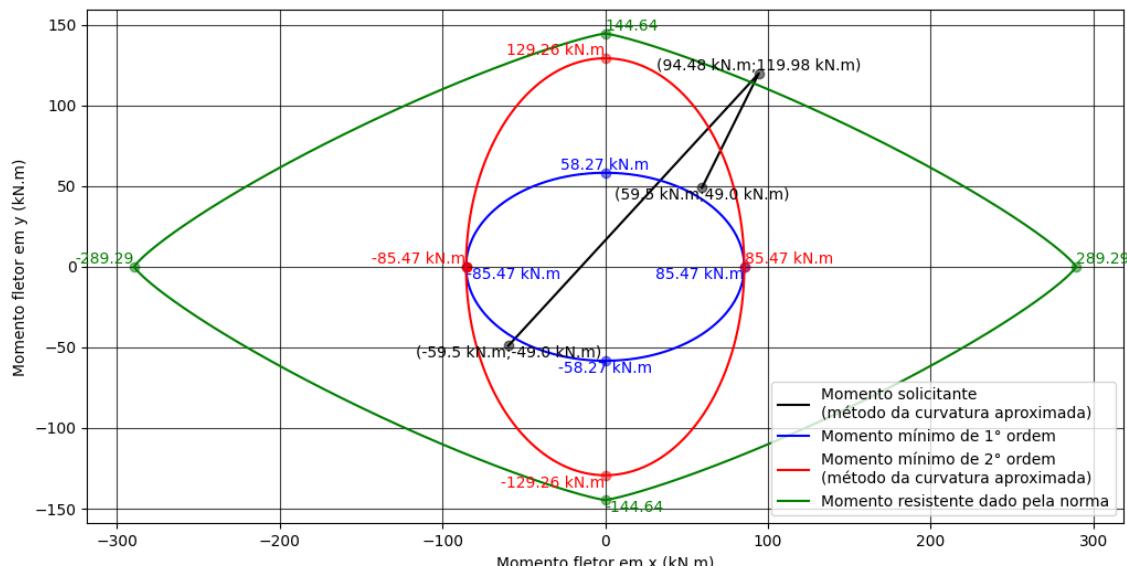
$$M_{Rd,x} = 28928,57 \text{ kN.cm} = 289,29 \text{ kN.m}$$

Com os momentos resistentes em ambas as direções determinados, a NBR 6118:2014 estabelece uma envoltória traçada de acordo com a Equação 4.50, desse modo, a seguinte expressão foi utilizada:

$$\left(\frac{M_{Rd,x}}{289,29}\right)^{1,2} + \left(\frac{M_{Rd,y}}{144,64}\right)^{1,2} = 1$$

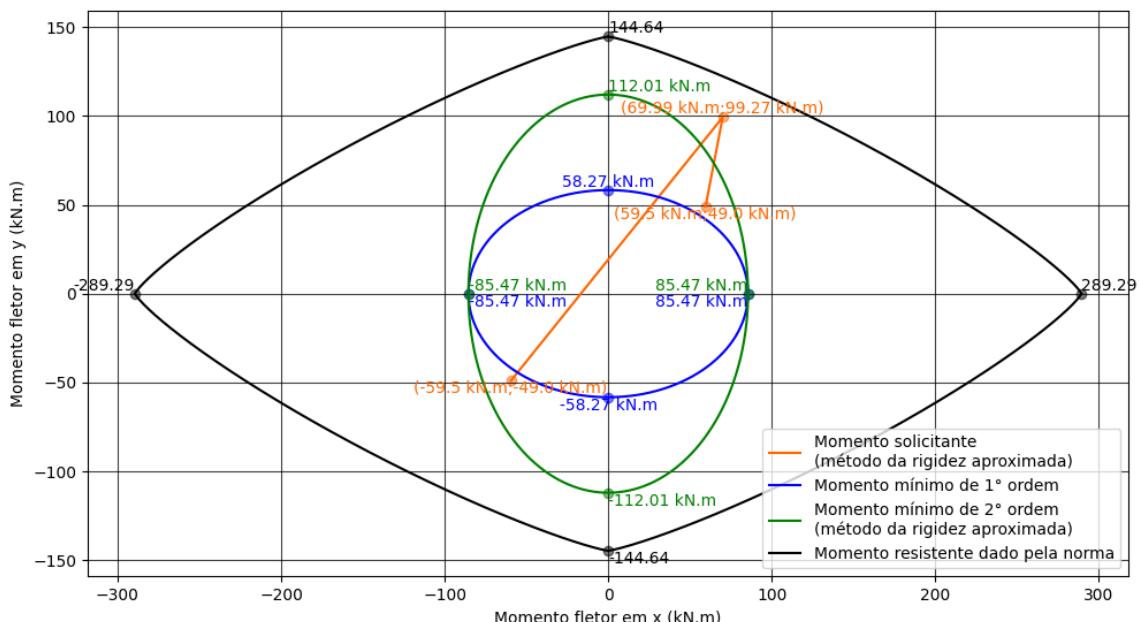
Nas figuras 8.8 e 8.9 está presente a envoltória resistente calculada englobando os esforços solicitantes com os efeitos de segunda ordem sendo considerados pelos dois métodos disponibilizados pela norma para um pilar com índice de esbeltez inferior a 90 (pilar padrão).

**Figura 8.8 - Envoltórias mínimas e esforços solicitantes calculados pelo método do pilar padrão por curvatura aproximada e envoltória resistente**



**Fonte: Autoria própria**

**Figura 8.9 - Envoltórias mínimas e esforços solicitantes calculados pelo método do pilar padrão por rigidez aproximada e envoltória resistente**



**Fonte: Autoria própria**

Quando traçada a envoltória resistente, nota-se que a mesma não envolve os esforços solicitantes na seção crítica, calculados por meio da curvatura aproximada. Então, mesmo que o dimensionamento tenha sido realizado considerando o maior momento fletor dentre o método do pilar padrão por curvatura aproximada e por rigidez aproximada, sendo este igual a 129,26 kN.m, não há garantia que essa armadura resista à flexo-compressão oblíqua em uma determinada direção, sendo necessário, nesse caso, aumentar a área de aço até a envoltória resistente envolver todos os esforços solicitantes representados graficamente.

No caso do gráfico da Figura 8.9, não há necessidade de aumentar a armadura, pois o momento máximo pelo método da rigidez aproximada é igual a 112,02 kN.m e no dimensionamento foi utilizado 129,06 kN.m. Portanto, foi realizado um acréscimo de área de aço por meio do momento a ser resistido. Caso o projetista considerasse esse método para a obtenção dos efeitos de segunda ordem, e fosse realizado o dimensionamento considerando o momento máximo desse caso, talvez houvesse a necessidade de aumentar a quantidade de armadura.

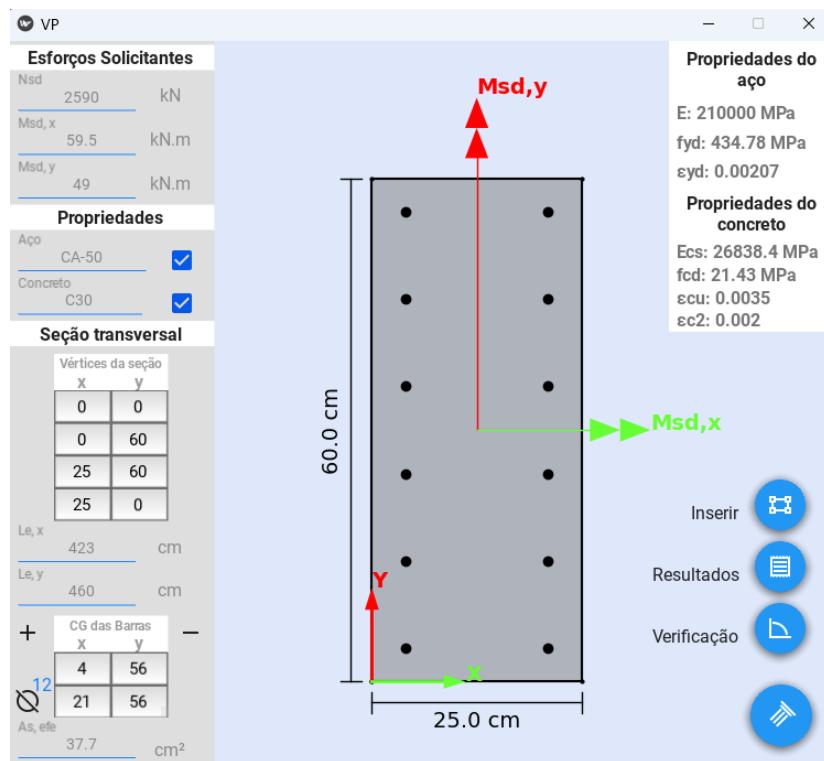
Após a realização do exemplo de forma algébrica, foi utilizado o software desenvolvido para comparar os resultados atingidos. A priori, houve a inserção dos dados iniciais e da seção transversal, considerando a configuração das 12 barras de aço de 20 mm da Figura 8.10, cujas coordenadas se encontram especificadas na Tabela 8.1.

**Tabela 8.1 – Coordenadas das barras de aço inseridas no software**

Coordenadas das barras de aço		
ID	X	Y
P1	4,00	4,00
P2	21,00	4,00
P3	4,00	14,40
P4	4,00	24,80
P5	21,00	14,40
P6	21,00	24,80
P7	4,00	35,20
P8	21,00	35,20
P9	4,00	45,60
P10	21,00	45,60
P11	4,00	56,00
P12	21,00	56,00

*Fonte: Autoria própria*

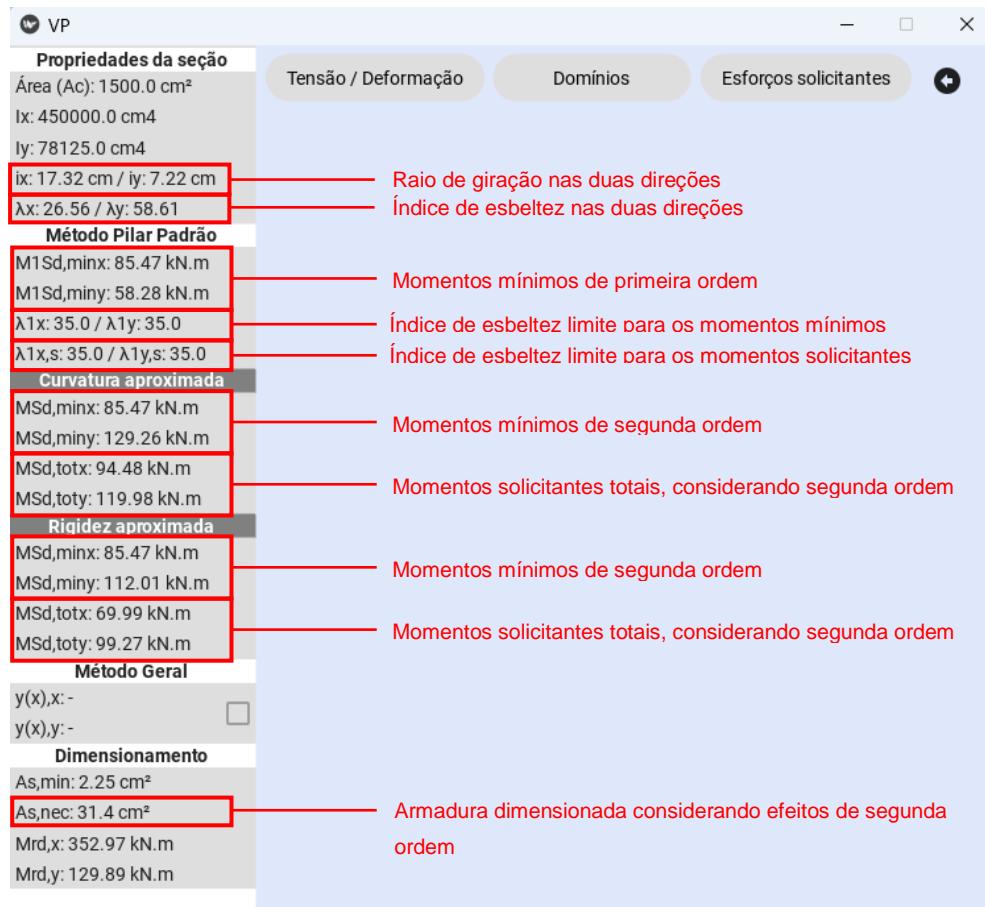
**Figura 8.10 – Exemplo de pilar aplicado no software desenvolvido – Inserção da seção transversal**



*Fonte: Autoria própria*

Em seguida, foram analisados os resultados obtidos quanto ao método do pilar padrão a partir da seção em questão, como mostra a Figura 8.11. E, com isso, foi gerada uma tabela comparativa entre os resultados obtidos de forma algébrica e os gerados pelo programa (Tabela 8.2).

**Figura 8.11 - Exemplo de pilar aplicado no software desenvolvido– Resultados obtidos relacionados ao método do pilar padrão**



**Fonte: Autoria própria**

**Tabela 8.2 - Comparação dos resultados obtidos de forma algébrica e através do software desenvolvido**

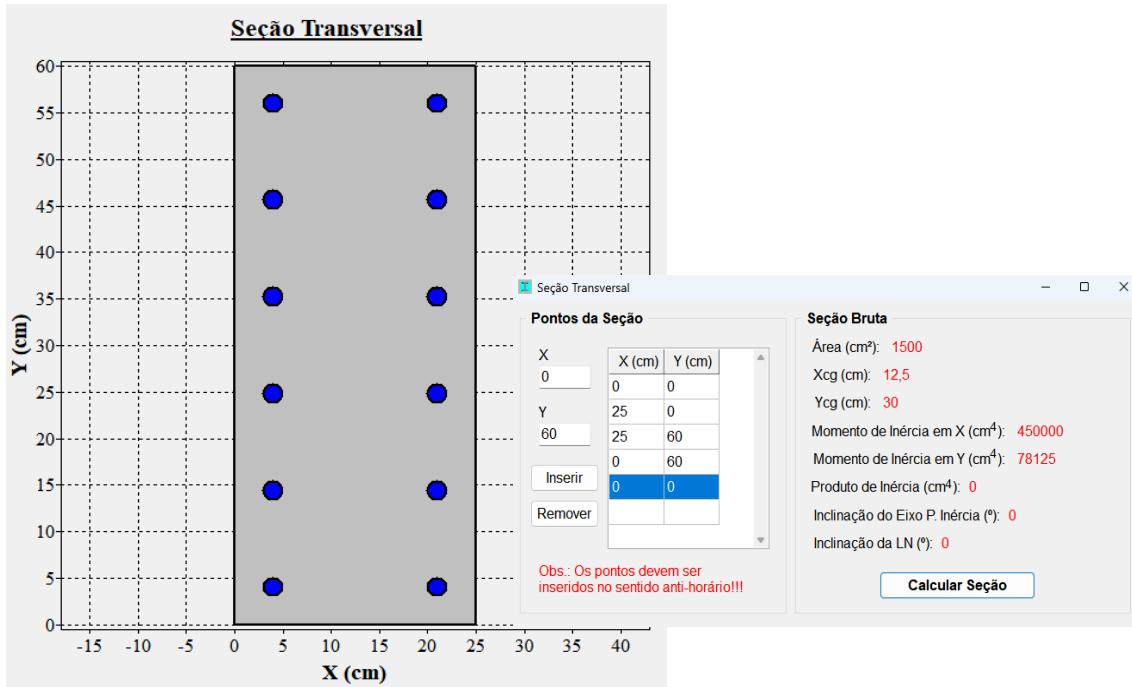
Propriedades da seção	Algébrica	Software desenvolvido
Raio de giração x ( $i_x$ )	17,32 cm	17,32 cm
Raio de giração y ( $i_y$ )	7,22 cm	7,22 cm
Índice de esbeltez x ( $\lambda_x$ )	26,56	26,56
Índice de esbeltez y ( $\lambda_y$ )	58,59	58,61
<b>Método Pilar Padrão</b>		
Momento mínimo de primeira ordem x ( $M_{1s_d, minx}$ )	85,47 kN.m	85,47 kN.m
Momento mínimo de primeira ordem y ( $M_{1s_d, miny}$ )	58,28 kN.m	58,28 kN.m
Índice de esbeltez limite x ( $\lambda_{1s,x}$ ) - Momento mín.	35,00	35,00
Índice de esbeltez limite y ( $\lambda_{1s,y}$ ) - Momento mín.	35,00	35,00
Índice de esbeltez limite x ( $\lambda_{1s,x}$ ) - Esf. solicitantes	35,00	35,00
Índice de esbeltez limite y ( $\lambda_{1s,y}$ ) - Esf. Solicitantes	35,00	35,00
<b>Curvatura Aproximada</b>		
Momento mínimo de segunda ordem x ( $M_{s_d, minx}$ )	85,47 kN.m	85,47 kN.m
Momento mínimo de segunda ordem y ( $M_{s_d, miny}$ )	129,26 kN.m	129,26 kN.m
Momento solicitante total x ( $M_{s_d, totx}$ )	94,47 kN.m	94,48 kN.m
Momento solicitante total y ( $M_{s_d, toty}$ )	119,90 kN.m	119,98 kN.m
<b>Rigidez Aproximada</b>		
Momento mínimo de segunda ordem x ( $M_{s_d, minx}$ )	85,47 kN.m	85,47 kN.m
Momento mínimo de segunda ordem y ( $M_{s_d, miny}$ )	112,02 kN.m	112,02 kN.m
Momento solicitante total x ( $M_{s_d, totx}$ )	69,99 kN.m	69,99 kN.m
Momento solicitante total y ( $M_{s_d, toty}$ )	99,28 kN.m	99,27 kN.m
<b>Dimensionamento</b>		
Armadura necessária ( $A_{s,nec}$ )	34,73 cm <sup>2</sup>	31,4 cm <sup>2</sup>

**Fonte: Autoria própria**

Nota-se grande semelhança entre os resultados no geral, havendo pequenas divergências devido ao arredondamento dos valores quando obtidos manualmente. Com relação ao dimensionamento, houve uma maior distância entre os valores, uma vez que foi realizado inicialmente através dos ábacos, calculando os parâmetros adimensionais e os alocando de forma aproximada nos gráficos, não promovendo grande precisão. Já no *software*, ele é feito por meio do equilíbrio da seção transversal com os esforços solicitantes, havendo, portanto, certa diferença com o método tradicional, mas que, ainda assim, é coerente.

Os demais parâmetros retornados pelo programa aqui elaborado foram comparados com o *software* SECTRANS já existente e desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC/USP devido à complexidade dos cálculos.

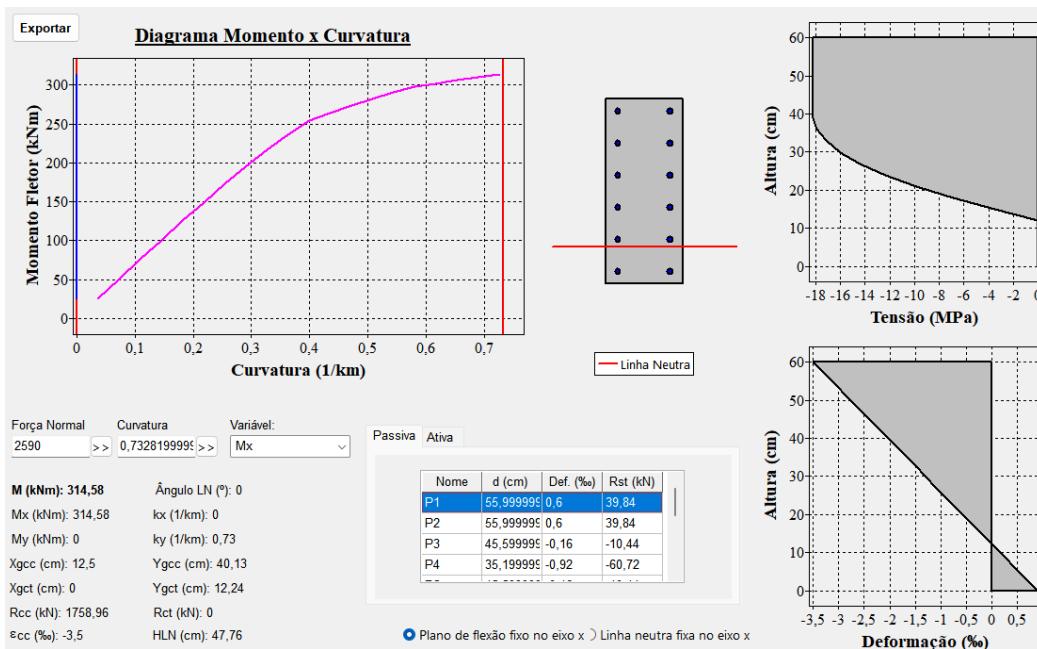
**Figura 8.12 - Exemplo de pilar aplicado no SECTRANS – Inserção da seção transversal**



**Fonte: software SECTRANS**

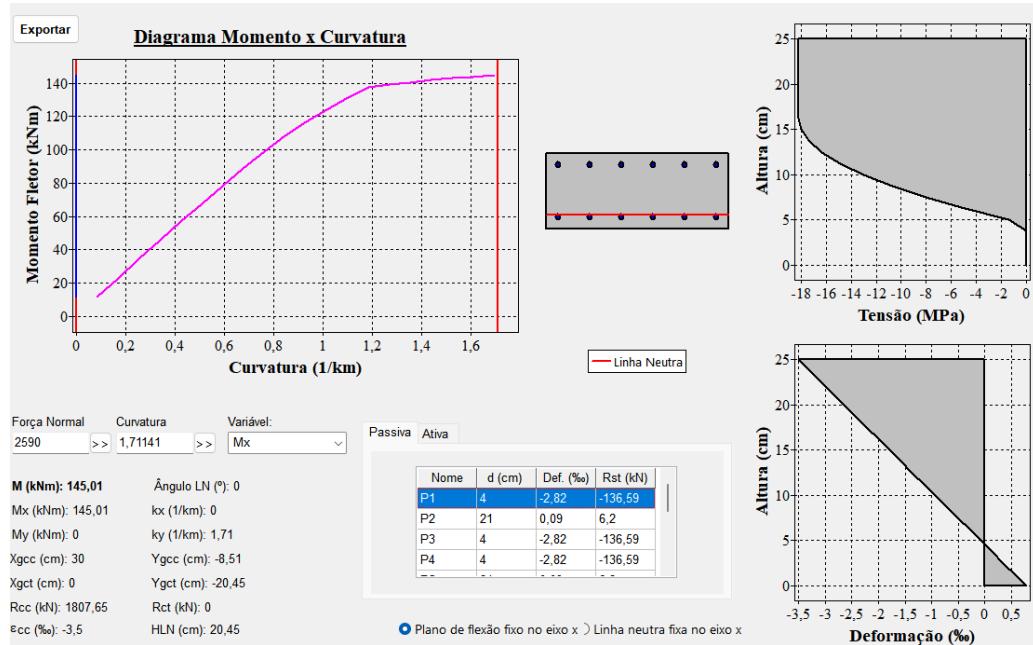
Após a modelagem da seção no SECTRANS, foram analisados os gráficos Momento x Curvatura para uma força normal de 2590 kN e com a seção rotacionada de 0° e 90°, como mostra a Figura 8.13 e 8.14.

**Figura 8.13 - Exemplo de pilar aplicado no SECTRANS – Gráfico Momento x Curvatura para uma força normal de 2590 kN e seção rotacionada de 0°**



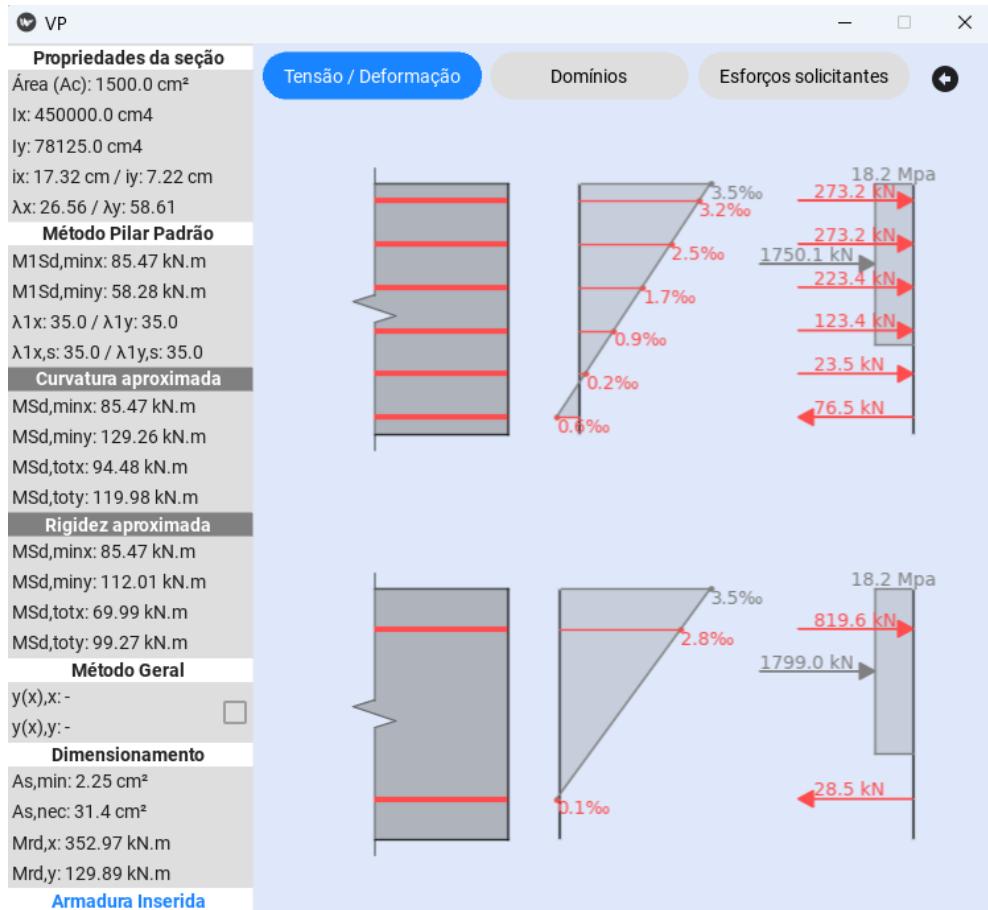
**Fonte: software SECTRANS**

**Figura 8.14 - Exemplo de pilar aplicado no SECTRANS – Gráfico Momento x Curvatura para uma força normal de 2590 kN e seção rotacionada de 90°**



Os resultados atingidos foram comparados com o programa desenvolvido. A Figura 8.15 apresenta as deformações em cada uma das barras, além das forças resultantes atuante no concreto comprimido e nas armaduras, em que na parte de visualização, as forças ali presentes, relacionadas às barras de aço, possuem um valor numérico correspondente ao somatório das forças cuja distância do CG na direção analisada é a mesma.

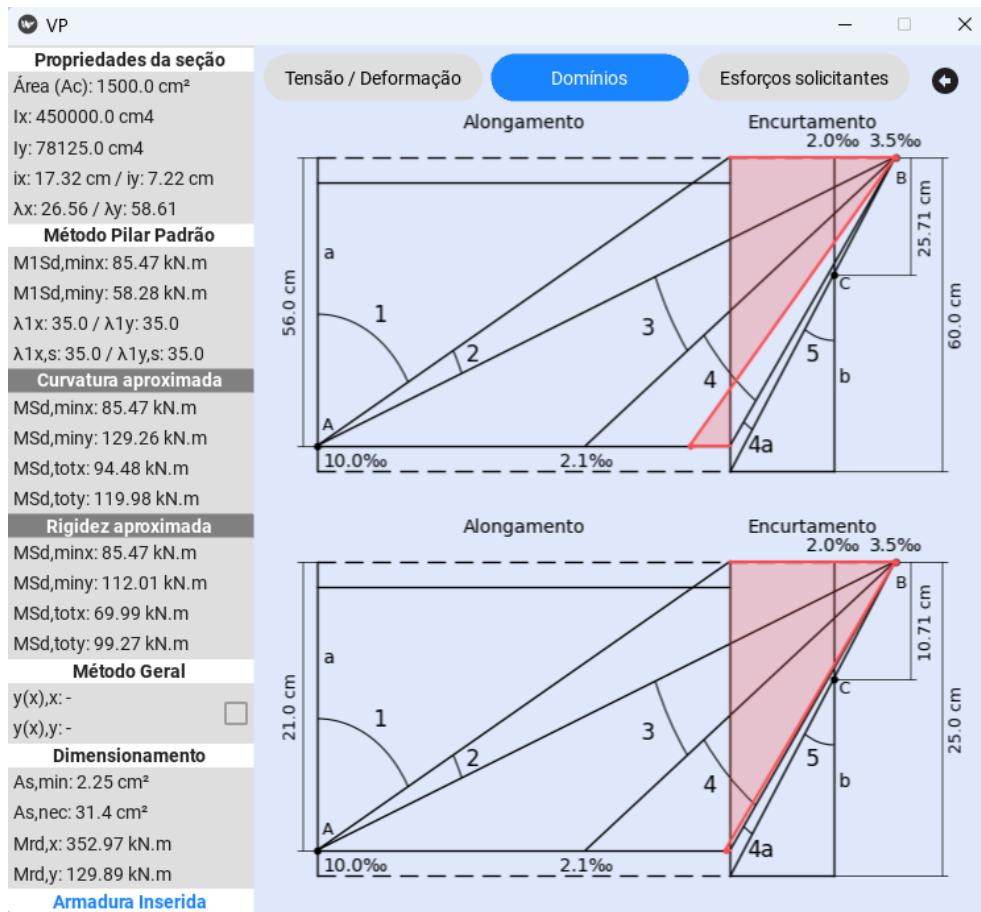
**Figura 8.15 - Exemplo de pilar aplicado no software desenvolvido – Deformações e forças resultantes obtidas para duas orientações da seção (0° e 90°)**



**Fonte: Autoria própria**

Já na Figura 8.16, há a alocação do diagrama de deformações no quadro de domínios indicado pela NBR 6118:2014, possibilitando a classificação da seção transversal quanto a esse critério.

**Figura 8.16 - Exemplo de pilar aplicado no software desenvolvido – Classificação do domínio para duas orientações da seção (0° e 90°)**



**Fonte: Autoria própria**

A partir dos resultados alcançados através de ambos os softwares, as Tabelas 8.3 e 8.4 foram elaboradas com a finalidade de facilitar a comparação entre as deformações e as forças resultantes nas barras de aço.

**Tabela 8.3 – Comparação de deformações e forças resultantes para a seção rotacionada de 0° entre o software desenvolvido e o SECTRANS**

ID	d (cm)	Seção transversal rotacionada a 0°			
		SECTRANS	Software desenvolvido	Def. (%)	Rst (kN)
P1	56,00	0,6	39,84	0,60	38,25
P2	56,00	0,6	39,84	0,60	38,25
P3	45,60	-0,16	-10,44	-0,20	-11,75
P4	35,20	-0,92	-60,72	-0,90	-61,70
P5	45,60	-0,16	-10,44	-0,20	-11,75
P6	35,20	-0,92	-60,72	-0,90	-61,70
P7	24,80	-1,68	-111,01	-1,70	-111,70
P8	24,80	-1,68	-111,01	-1,70	-111,70
P9	14,40	-2,44	-136,59	-2,50	-136,60
P10	14,40	-2,44	-136,59	-2,50	-136,60
P11	4,00	-3,21	-136,59	-3,20	-136,60
P12	4,00	-3,21	-136,59	-3,20	-136,60

**Fonte: Autoria própria**

**Tabela 8.4 - Comparação de deformações e forças resultantes para a seção rotacionada de 0° entre o software desenvolvido e o SECTRANS**

ID	d (cm)	Seção transversal rotacionada a 90°			
		SECTRANS	Software desenvolvido	Def. (%)	Rst (kN)
P1	4,00	-2,82	-136,59	-2,80	-136,60
P2	21,00	0,09	6,2	0,10	4,75
P3	4,00	-2,82	-136,59	-2,80	-136,60
P4	4,00	-2,82	-136,59	-2,80	-136,60
P5	21,00	0,09	6,2	0,10	4,75
P6	21,00	0,09	6,2	0,10	4,75
P7	4,00	-2,82	-136,59	-2,80	-136,60
P8	21,00	0,09	6,2	0,10	4,75
P9	4,00	-2,82	-136,59	-2,80	-136,60
P10	21,00	0,09	6,2	0,10	4,75
P11	4,00	-2,82	-136,59	-2,80	-136,60
P12	21,00	0,09	6,2	0,10	4,75

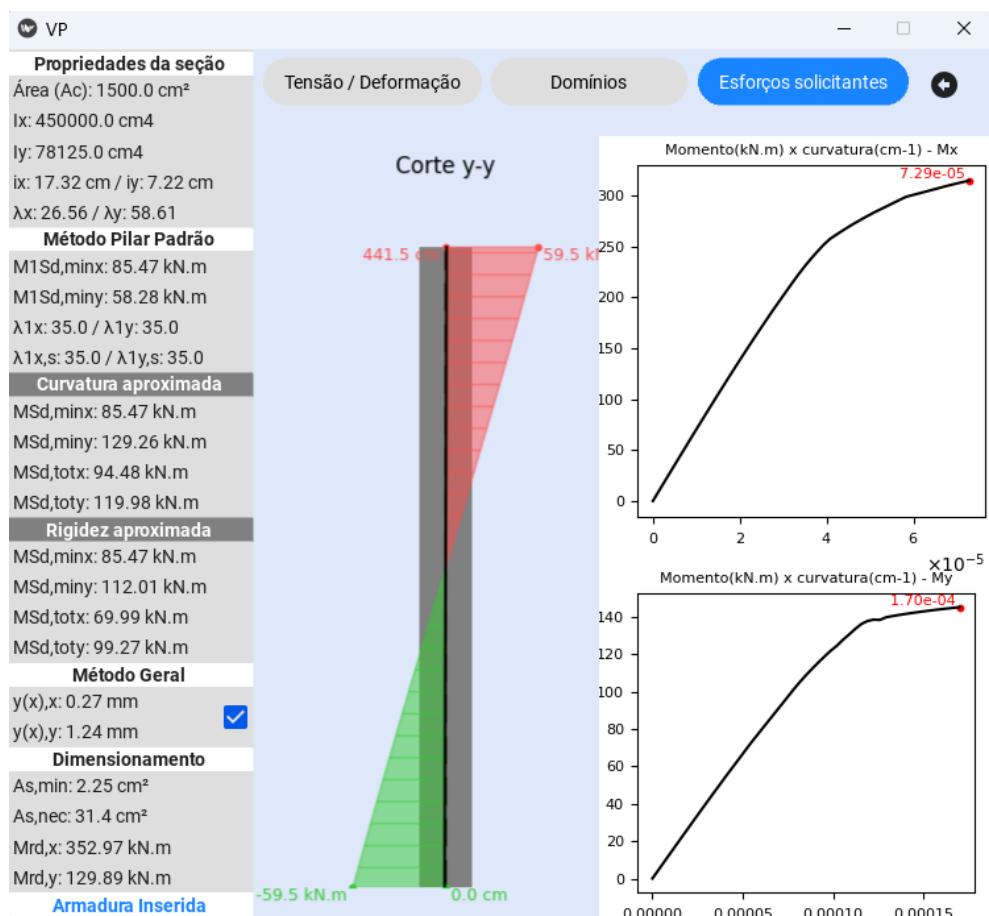
**Fonte: Autoria própria**

Nota-se pelas tabelas acima a consistência dos resultados obtidos, havendo uma pequena divergência nas forças referentes às armaduras cuja deformação é inferior à deformação de escoamento. Isso acontece pelo fato do equilíbrio de forças horizontais e de momentos, em relação ao CG da seção, envolver a força resultante do concreto comprimido calculada a partir do

diagrama parábola-retângulo no SECTRANS e por meio da simplificação retangular das tensões no programa aqui elaborado.

Outros parâmetros comparados foram os gráficos Momento x Curvatura, possibilitando a comparação do momento resistente e da curvatura máxima, além do domínio que o pilar se encontra em diferentes orientações. A Figura 8.17 apresenta quais os gráficos atingidos de Momento x Curvatura.

**Figura 8.17 - Exemplo de pilar aplicado no software desenvolvido – Gráficos Momento x Curvatura para duas orientações da seção (0° e 90°)**



**Fonte: Autoria própria**

Os gráficos da Figura 8.17 foram obtidos com um número de iterações adequado para que o programa não apresentasse um tempo de processamento muito elevado, mas que, concomitantemente, não houvesse um comprometimento dos resultados alcançados.

A partir das figuras 8.13, 8.14 e 8.17 pode-se extrair os seguintes dados expressos na Tabela 8.5, podendo ser acrescido ainda os momentos resistentes calculados de forma algébrica.

**Tabela 8.5 – Comparação dos momentos resistentes e curvaturas máximas nos gráficos**

**Momento x Curvatura**

	<b>Algébrica</b>	<b>SECTRANS</b>	<b>Software desenvolvido</b>
Momento resistente x ( $M_{rd,x}$ )	289,29 kN.m	314,58 kN.m	323,80 kN.m
Momento resistente y ( $M_{rd,y}$ )	144,64 kN.m	145,01 kN.m	148,89 kN.m
Curvatura ( $1/r$ ) - $M_{rd,x}$	-	7,33E-05 cm <sup>-1</sup>	7,29E-05 cm <sup>-1</sup>
Curvatura ( $1/r$ ) - $M_{rd,y}$	-	1,71E-04 cm <sup>-1</sup>	1,70E-04 cm <sup>-1</sup>

**Fonte: Autoria própria**

É importante salientar que os momentos resistentes obtidos através do código implementado na Tabela 8.5 podem ser visualizados com mais detalhes na etapa de verificação por meio da envoltória resistente real, mas que foram aqui transcritos previamente a título de comparação.

As diferentes curvaturas máximas e momentos resistentes máximos nos gráficos Momento x Curvatura de ambos os softwares se deve à adoção da simplificação do diagrama de tensões no concreto comprimido por um retângulo no programa implementado, enquanto no software já existente, o cálculo da resultante envolve o diagrama idealizado pela NBR 6118:2014, tratando-se de um parábola-retângulo. Essa diferença se propaga para o cálculo do equilíbrio de momentos, interferindo no momento e curvatura finais. Já o formato do gráfico e, consequentemente, seus valores intermediários, se assemelham devido à consideração também do diagrama idealizado no corpo da função desenvolvida.

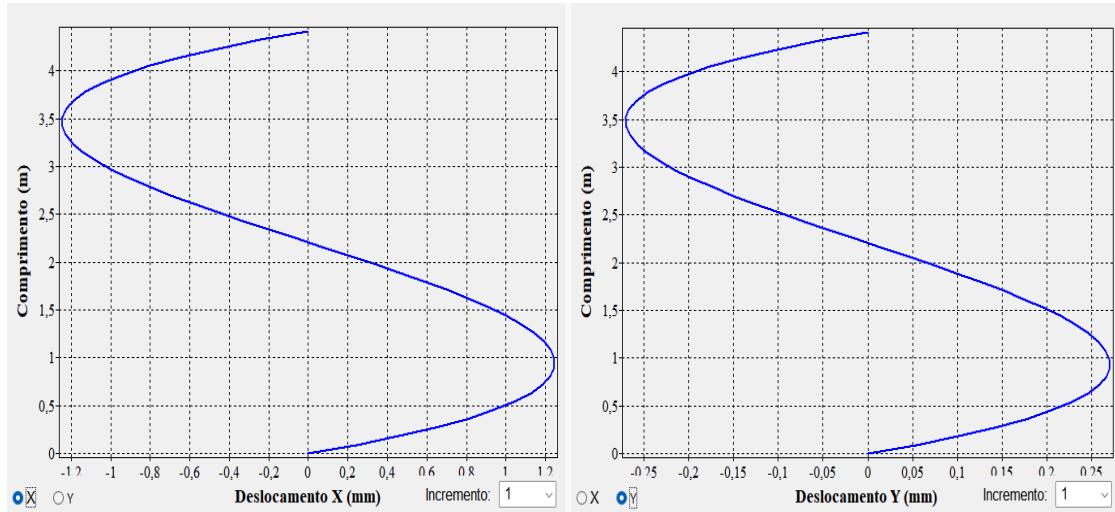
Essa escolha de formas diferentes para a obtenção do ponto final e dos pontos intermediários se baseou no tempo de processamento do código, uma vez que decidiu-se restringir o cálculo da resultante real do concreto comprimido somente quando sua simplificação não apresentava resultados próximos dos esperados. Nesse contexto, o gráfico Momento x Curvatura se encontrava deslocado no eixo y quando calculado de forma simplificada, tornando inviável

sua aplicação é inevitável o uso de processos com um número maior de iterações (diagrama parábola-retângulo).

Já a divergência dos momentos resistentes calculados com o uso do programa e de forma manual ocorre pela adoção dos ábacos com armadura distribuída de forma distinta ao considerado no programa. Dessa forma, o equilíbrio de momentos em torno do CG da seção ocorre de forma mais precisa, levando em conta a posição específica de cada uma das barras, quando utilizase os recursos computacionais.

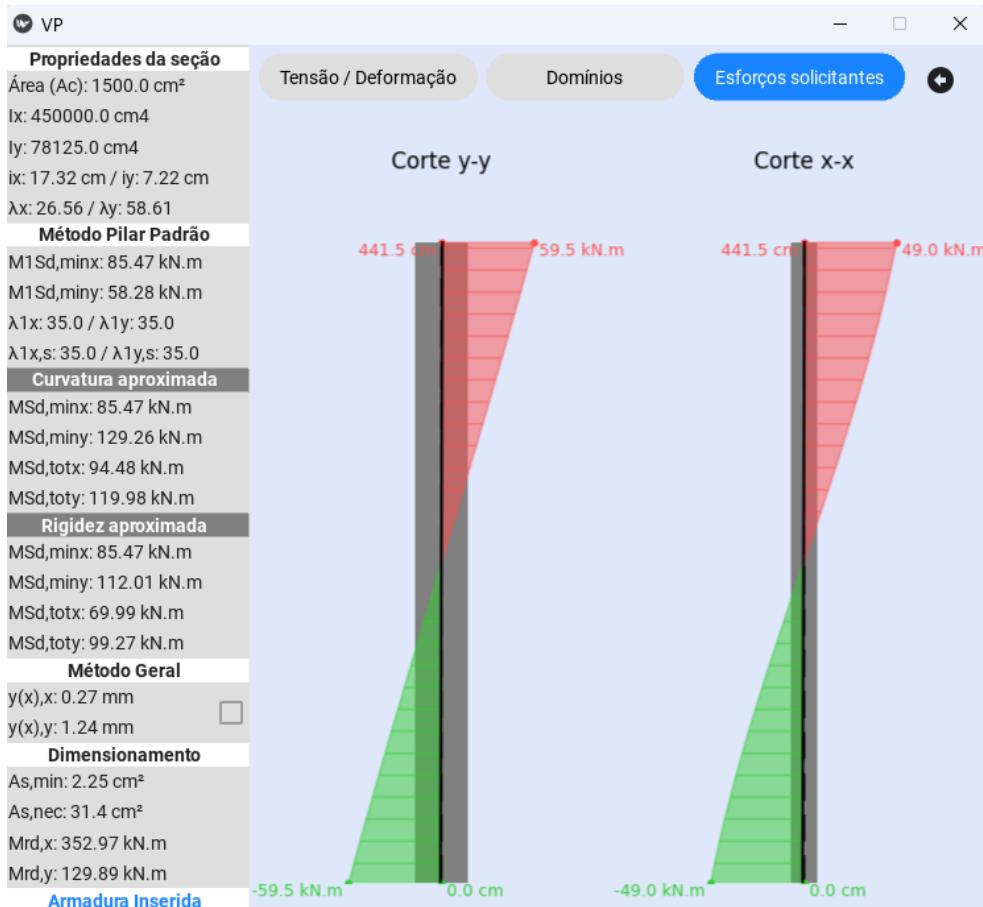
Analizados os gráficos Momento x Curvatura, pode-se comparar agora a aplicação do método geral com os valores de deslocamento da estrutura, utilizando-se do SECTRANS.

**Figura 8.18 - Exemplo de pilar aplicado no SECTRANS – Configuração deformada da estrutura**



**Fonte: software SECTRANS**

**Figura 8.19 - Exemplo de pilar aplicado no software desenvolvido – Resultados relacionados ao método geral**



**Fonte: Autoria própria**

Os diagramas de momento fletor nas duas direções do pilar, indicados na Figura 8.19, representam os momentos de primeira ordem acrescidos dos momentos de segunda ordem, os quais surgem da não linearidade física e geométrica da estrutura. Há ainda a indicação dos momentos máximos e mínimos atuantes e suas respectivas posições na estrutura. Por se tratar de um pilar medianamente esbelto, com índice de esbeltez menor que 90, os efeitos de segunda ordem não são relevantes a ponto de acarretar em momentos solicitantes totais superiores aos de primeira ordem. Portanto, os momentos máximos se encontram na base e no topo do elemento estrutural.

Os momentos de segunda ordem são obtidos ao multiplicar a força normal solicitante pela excentricidade gerada com o deslocamento da estrutura. Com isso, é possível validar o método geral através dos deslocamentos atingidos por

intermédio de ambos os programas quando a estrutura atingi seu equilíbrio deformado. A Tabela 8.6 possibilita essa comparação.

**Tabela 8.6 - Comparação dos deslocamentos quando a estrutura deformada atinge o equilíbrio**

	<b>SECTRANS</b>	<b>Software desenvolvido</b>
Deslocamento - Corte X-X	1,24 mm	1,24 mm
Deslocamento - Corte Y-Y	0,27 mm	0,27 mm

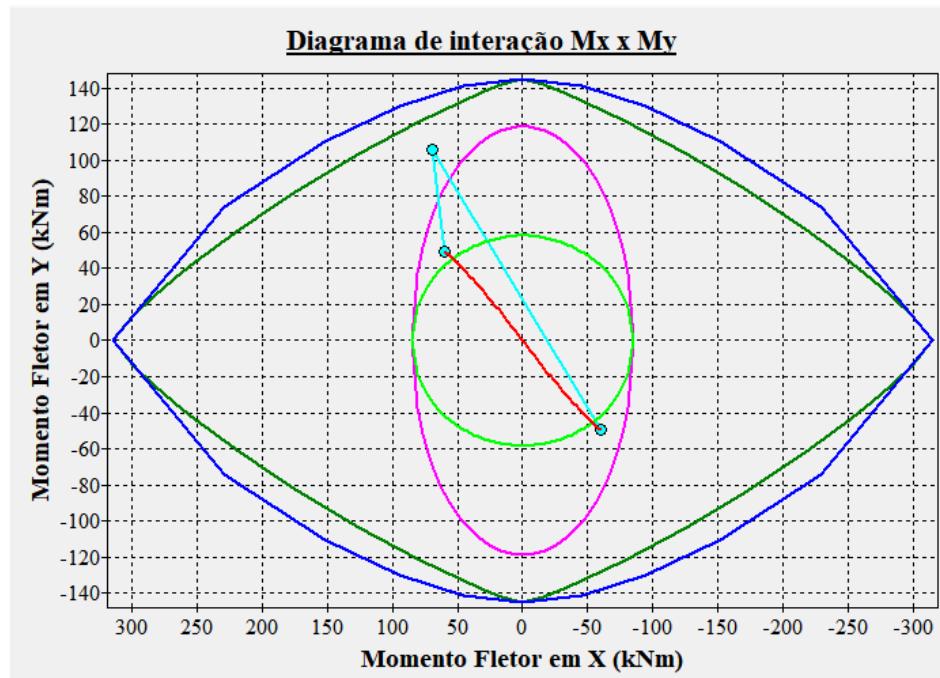
**Fonte: Autoria própria**

Não há diferença entre os valores, o que indica a realização de um número de iterações necessárias para a convergência dos resultados.

Por fim, pode-se analisar a semelhança dos resultados atingidos de forma gráfica. No SECTRANS, a envoltória resistente real se encontra na cor azul, a envoltória resistente que respeita os critérios normativos em verde escuro, a envoltória mínima de primeira ordem em verde claro, a envoltória mínima de segunda ordem em rosa, os esforços solicitantes pelo método do pilar padrão na cor ciano e, por fim, os esforços solicitantes pelo método geral na cor vermelha. Já no código aqui elaborado, as cores padrões foram mencionadas no item 7.

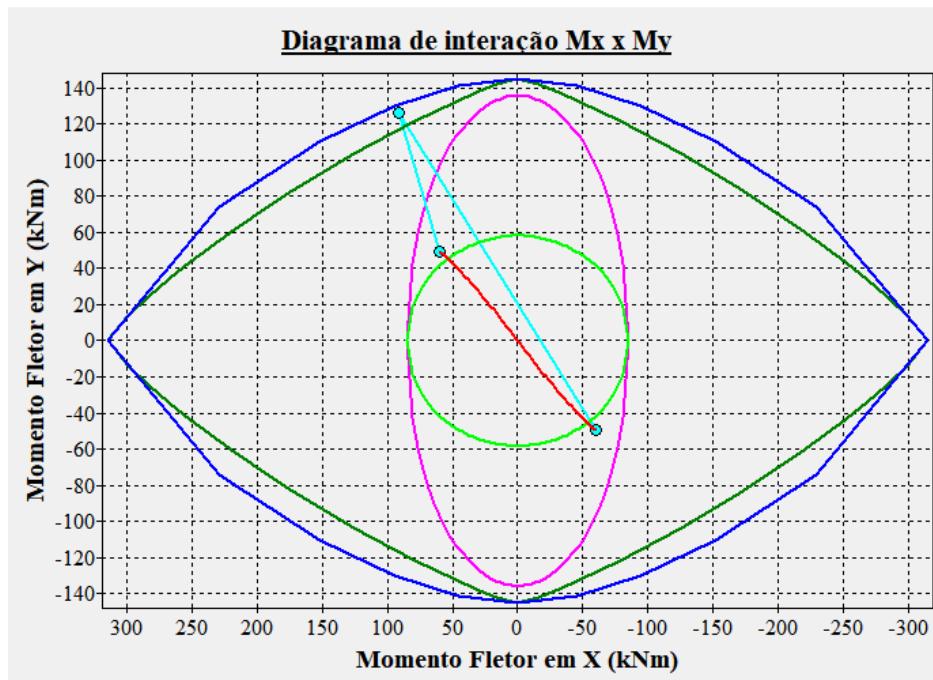
À princípio, as figuras 8.20 e 8.21 correspondem aos gráficos de verificação com todas as envoltórias e curvas descritas acima, sendo os efeitos de segunda ordem, referentes ao método do pilar padrão, calculados utilizando-se uma aproximação da rigidez e uma aproximação da curvatura respectivamente, ambos para o software desenvolvido no departamento.

**Figura 8.20 - Exemplo de pilar aplicado no SECTRANS – Gráficos de verificação com aplicação do método do pilar padrão por rigidez aproximada**



Fonte: software SECTRANS

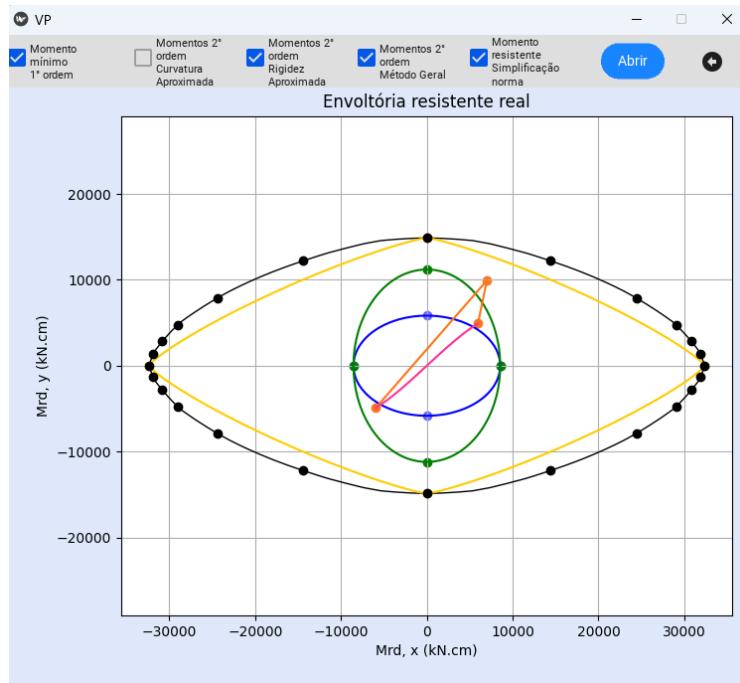
**Figura 8.21 - Exemplo de pilar aplicado no SECTRANS – Gráficos de verificação com aplicação do método do pilar padrão por curvatura aproximada**



Fonte: software SECTRANS

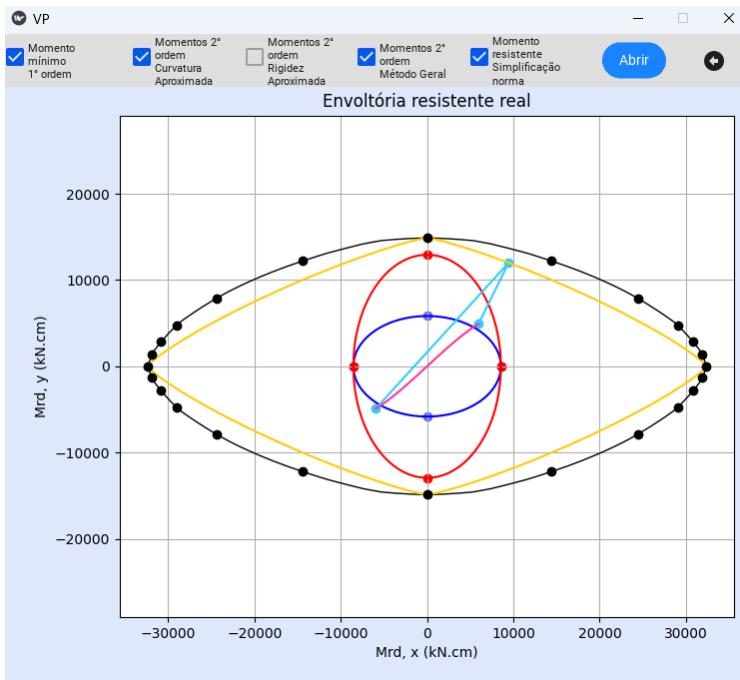
O mesmo foi obtido para o código implementado, como mostra as figuras 8.22 e 8.23.

**Figura 8.22 - Exemplo de pilar aplicado no software desenvolvido – Gráficos de verificação com aplicação do método do pilar padrão por rigidez aproximada**



**Fonte: Autoria própria**

**Figura 8.23 - Exemplo de pilar aplicado no software desenvolvido – Gráficos de verificação com aplicação do método do pilar padrão por curvatura aproximada**



**Fonte: Autoria própria**

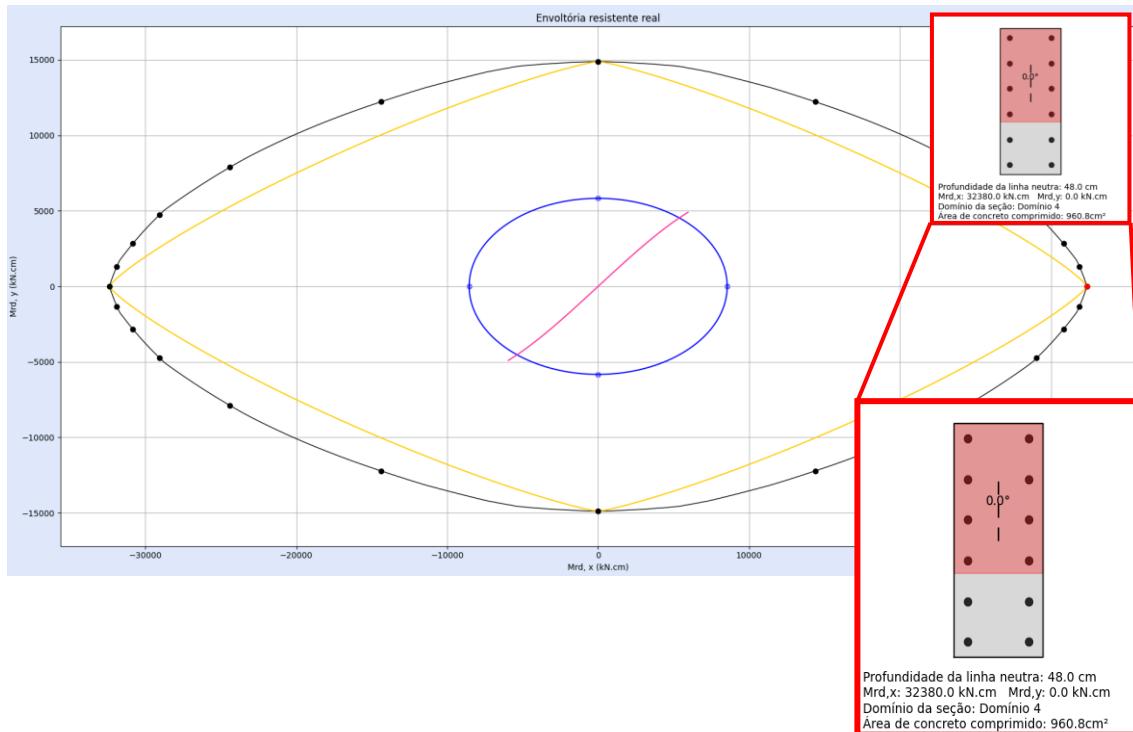
Nas figuras acima, a diferença na posição dos momentos solicitantes considerando os efeitos de segunda, em ambos os métodos, ocorre devido à convenção de sinais adotada pelos diferentes programas, mas que não interfere na verificação dos pilares e nas análises dos gráficos.

A consideração desses efeitos de segunda ordem, quando realizados pelo método do pilar padrão por rigidez aproximada, apresentam valores menores quando comparados com o método do pilar padrão por curvatura aproximada. Desse modo, o primeiro método apresenta resultados satisfatórios com relação à armadura adotada, porém, pelo segundo método, os momentos solicitantes em uma seção intermediária ultrapassam a envoltória resistente recomendada pela norma, sendo o aumento da área de aço uma alternativa a favor da segurança da estrutura. Ao considerar a envoltória resistente real, a qual é traçada levando em conta a posição exata de cada uma das barras de aço e a rotação da seção de fato, nota-se que, ainda assim, com esforços solicitantes maiores, a armadura adotada confere segurança à estrutura.

Quando comparados os diferentes métodos, geral e do pilar padrão, é possível perceber a grande diferença dos efeitos de segunda ordem atingidos. Isso acontece pelo fato do método do pilar padrão considerar aproximações considerando situações mais críticas, isto é, a favor da segurança, mas que quando comparadas com o método geral, pode-se afirmar que tais efeitos são particulares da estrutura analisada, sendo mais intensos quanto maior o seu comprimento e menor sua área de aço. Portanto, por se tratar de um pilar medianamente esbelto e dimensionado para resistir à esforços maiores que os momentos de primeira ordem, os deslocamentos da estrutura são mínimos, o que reduz os efeitos de segunda ordem pelo método geral.

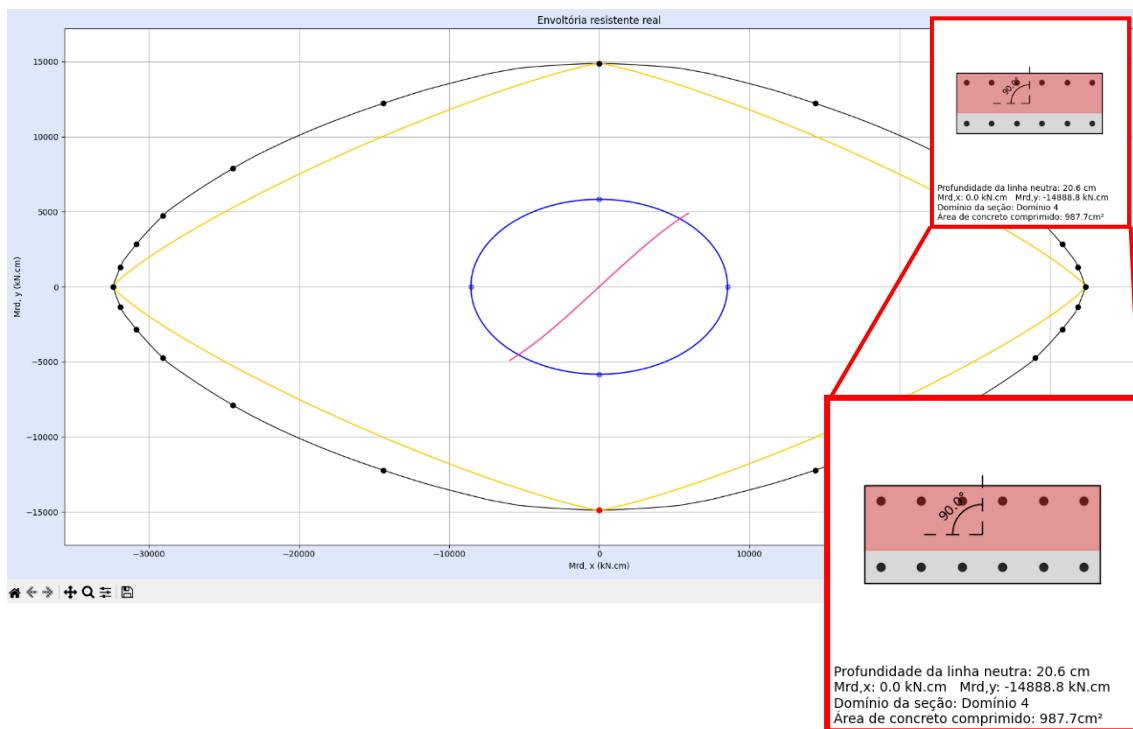
As figuras 8.24 e 8.25 abaixo apresentam ainda propriedades da seção transversal, em duas orientações principais, retiradas do recurso computacional disponível quando a envoltória resistente é aberta.

**Figura 8.24 - Exemplo de pilar aplicado no software desenvolvido – Gráfico de verificação com propriedades da seção rotacionada em 0°**



**Fonte: Autoria própria**

**Figura 8.25 - Exemplo de pilar aplicado no software desenvolvido – Gráfico de verificação com propriedades da seção rotacionada em 90°**



**Fonte: Autoria própria**

A partir das figuras acima, nota-se que os momentos resistentes estão próximos dos obtidos pelo SECTRANS e de forma manual.

Com relação ao domínio e profundidade da linha neutra indicados nas duas orientações, percebe-se pelo SECTRANS (figuras 8.13 e 8.14) a aproximação da linha neutra ao CG das armaduras inferiores quando a seção se encontra rotacionada de 90°, ou seja, praticamente no limite entre os domínios 4 e 4a, o que está condizente com os resultados aqui atingidos. Já para a seção sem rotação, o domínio é o 4 em ambos os softwares.

Por fim, a área de concreto indicada em vermelho é correspondente ao diagrama retangular das tensões no concreto comprimido, uma simplificação do diagrama parábola-retângulo, sendo sua altura igual a profundidade da linha neutra multiplicada pelo fator  $\lambda$ , o qual é igual a 0,8 nesse caso, mas varia de acordo com a classe do concreto utilizado.

De modo geral, é notável a similaridade dos resultados atingidos quando comparado até mesmo com outro programa já existente, apresentando, assim, resultados coerentes e satisfatórios.

## 8.2 Verificação de pilar com índice de esbeltez maior que 90

Para contemplar o recurso disponível relacionado ao método geral de forma mais visível, considerou-se o mesmo exemplo do item anterior, porém com um comprimento equivalente igual a 800 cm em ambas as direções, tornando-o um pilar esbelto em uma das direções. Desse modo, os novos índices de esbeltez do elemento se encontram abaixo:

$$\lambda_x = \frac{l_{ey}}{i_x} = \frac{800}{17,32} = 46,19$$

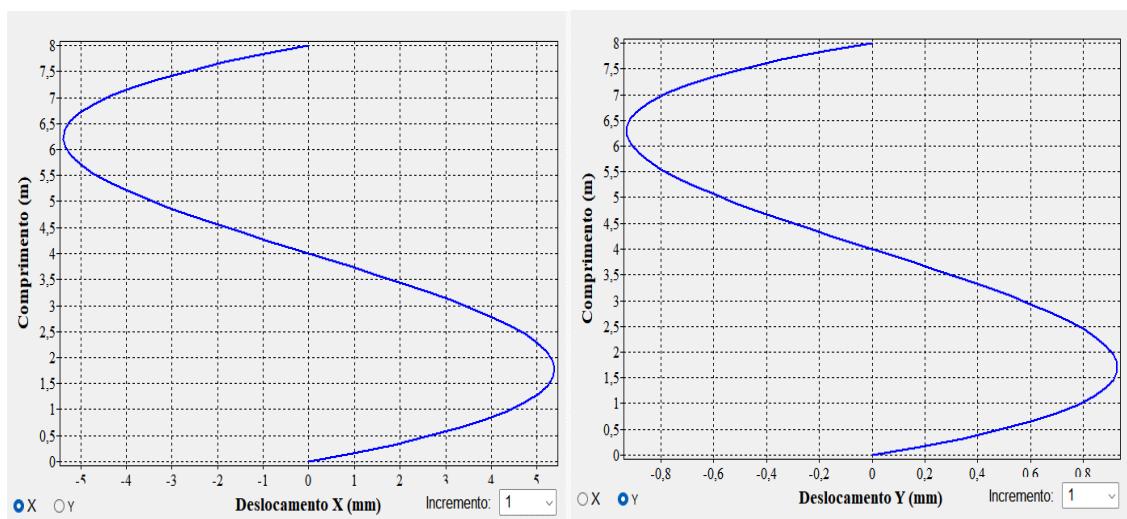
$$\lambda_y = \frac{l_{ex}}{i_y} = \frac{800}{7,22} = 110,80$$

A NBR 6118:2014 indica que o método do pilar padrão pode ser empregado apenas no cálculo de pilares com  $\lambda \leq 90$ , com seção retangular constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo. Como o

elemento analisado não atende ao critério do índice de esbeltez, pois em uma das direções ele é superior a 90, o método geral passa a ser ideal nessa situação.

Abaixo, nas figuras 8.26 e 8.27, pode-se comparar os valores de deslocamento máximo atingidos.

**Figura 8.26 - Exemplo de pilar esbelto aplicado no SECTRANS – Configuração deformada da estrutura**



**Fonte: software SECTRANS**

**Figura 8.27 - Exemplo de pilar esbelto aplicado no software desenvolvido – Resultados relacionados ao método geral**



**Fonte: Autoria própria**

A partir dos dados atingidos, foi extraída a seguinte tabela comparativa dos valores de deslocamentos máximos:

**Tabela 8.7 - Comparaçāo dos deslocamentos quando a estrutura esbelta deformada atinge o equilíbrio**

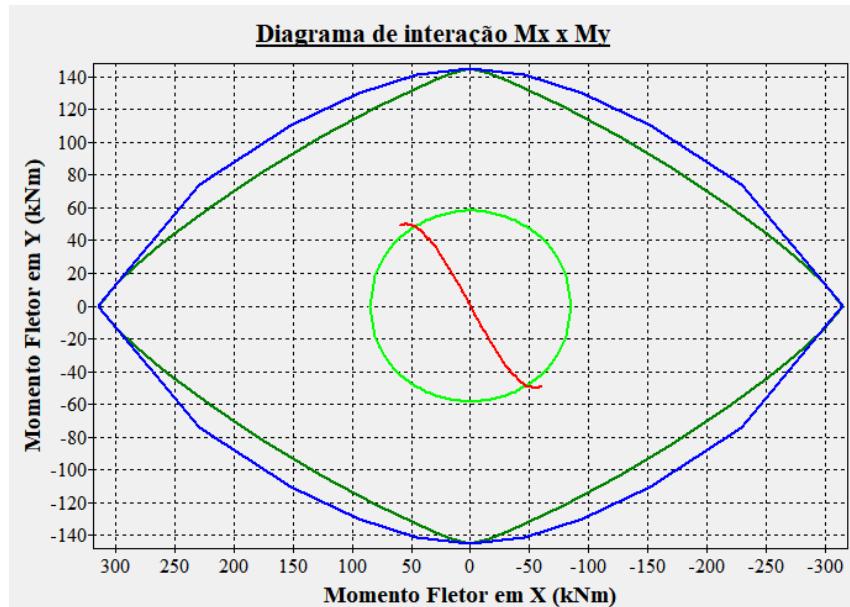
	SECTRANS	Software desenvolvido
Deslocamento - Corte X-X	5,35 mm	5,36 mm
Deslocamento - Corte Y-Y	0,93 mm	0,92 mm

**Fonte: Autoria própria**

Nota-se novamente a similaridade dos deslocamentos em ambas as direções e, consequentemente, dos efeitos de segunda ordem.

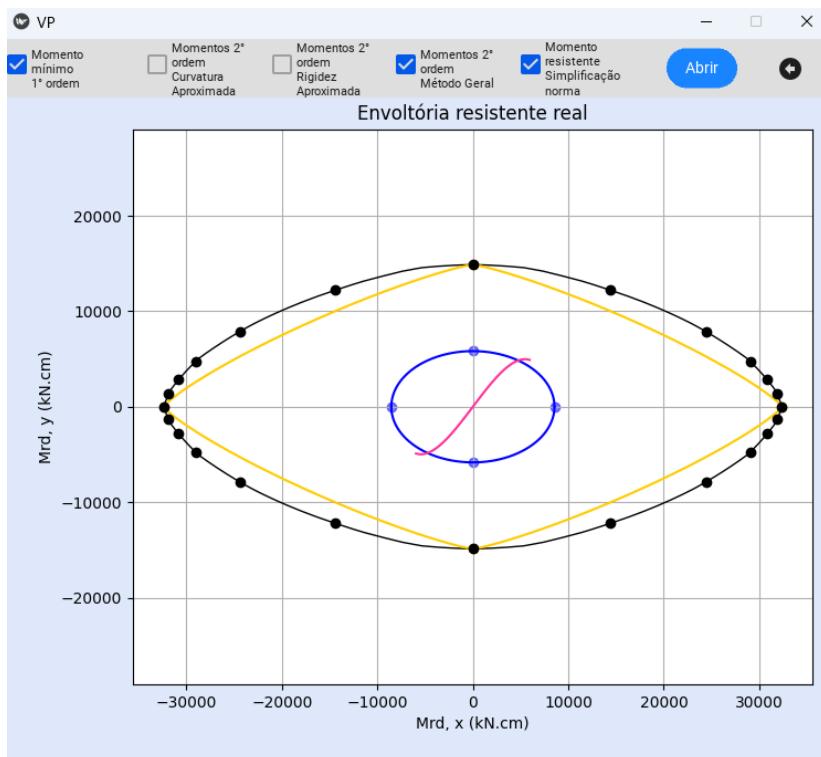
Com os momentos totais nas duas direções, é possível traçar a curva referente aos esforços solicitantes pelo método geral no gráfico de verificação.

**Figura 8.28 - Exemplo de pilar esbelto aplicado no SECTRANS – Gráficos de verificação com aplicação do método geral**



**Fonte: software SECTRANS**

**Figura 8.29 - Exemplo de pilar esbelto aplicado no software desenvolvido – Gráficos de verificação com aplicação do método geral**



**Fonte: Autoria própria**

No caso de um pilar esbelto, é possível visualizar graficamente a influência dos efeitos decorrentes da estrutura deslocada. Diferentemente do exemplo anterior, em que visualmente os momentos calculados eram projetados no gráfico de forma quase retilínea, nesse exemplo o comportamento curvo já está mais presente, indicando efeitos de segunda ordem mais acentuados. E, à medida que a armadura e as dimensões da seção são reduzidas, e o comprimento da estrutura é aumentado, de modo que o pilar seja mais esbelto, tal comportamento é mais evidente com curvaturas mais acentuadas.

Novamente, mas agora para um exemplo diferente, os resultados alcançados são satisfatórios e coerentes com os atingidos pelo SECTRANS.

## 9 CONCLUSÕES

Em estruturas de concreto armado, os pilares recebem a importante função de transmitir os esforços solicitantes provenientes das ações permanentes e variáveis para as fundações. Eles podem, até mesmo, estar sujeitos à flexo-compressão oblíqua, um comportamento de complexa análise que se intensifica devido à não linearidade do elemento. Como alternativa, surgem formas mais simplificadas de lidar com essas estruturas, indicadas pela NBR 6118:2014, as quais contemplam uma maneira mais rápida de solução, demandando menos tempo de processamento dos softwares já existentes de verificação e dimensionamento, e a favor da segurança.

No presente trabalho foi desenvolvido com êxito um programa em linguagem de programação *Python*, utilizando os recursos gráficos e de interface gráfica de usuário (GUI) por ela disponíveis. O programa apresenta não apenas recursos relacionados à verificação de pilares, como foi inicialmente proposto, mas também ferramentas que remetem ao dimensionamento da estrutura, ampliando as possibilidades de uso.

Dentre os recursos disponíveis associados à verificação, encontra-se o método do pilar padrão por rigidez aproximada, em que a não linearidade geométrica é considerada de forma aproximada supondo-se uma deformação da barra de caráter senoidal, e a não linearidade física é considerada através de uma expressão aproximada da rigidez. Outro recurso é método do pilar padrão por curvatura aproximada, o qual lida com a não linearidade geométrica de forma aproximada supondo-se também uma deformação senoidal, e a não linearidade física, através de uma expressão aproximada da curvatura na seção crítica.

Pôde-se implementar processos de cálculo que levam em conta o comportamento real da estrutura. Assim, ainda com relação à verificação, o programa conta com um recurso que considera os efeitos de segunda ordem de forma mais precisa, não se limitando apenas para pilares com índice de esbeltez menor que 90. Trata-se do método geral, em que a não linearidade física é atendida com a utilização do gráfico Momento x Curvatura e a não linearidade geométrica é considerada com a identificação da estrutura deslocada.

Ademais, há uma forma de traçar a envoltória resistente respeitando critérios normativos, a favor da segurança. Entretanto, o programa representa graficamente a envoltória resistente real, obtida variando o ângulo de rotação da seção e, para cada situação, calculando-se a área comprimida de concreto, as deformações nos pontos de interesse e as resultantes nas barras e no concreto. Em seguida, de acordo com as equações de equilíbrio, foi atingido o momento fletor resistente para a orientação da seção, compondo, assim, um único ponto da envoltória.

Portanto, o programa aqui elaborado se difere de outros existentes ao contemplar diversos métodos (aproximados e mais precisos) para lidar com pilares diversos, com diferentes índices de esbeltez. Ele foi testado para abranger as possíveis seções transversais retangulares que eventualmente um usuário pode inserir. Contudo, pelo tempo disponível de desenvolvimento (1 ano), ainda se classifica como um protótipo, possivelmente havendo seções que não se enquadram na forma de programação elaborada, sendo necessário constantemente uma intensa fase de testes com apuração de erros.

Quando testado, o software apresentou resultados consistentes ao compara-lo com o SECTRANS, desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC/USP para fins didáticos. Ou seja, ambos apresentam valores bem semelhantes, divergem em alguns pontos devido algumas considerações feitas pelos programadores, mas ambas respeitando indicações apresentadas na NBR 6118:2014. Dessa forma, os resultados são coerentes e atendem o objetivo do presente trabalho.

Na parte de desenvolvimento do código, pelo fato dos processos envolvendo os métodos demandarem um grande número de iterações, foi ainda necessário realizar uma melhora no tempo de processamento com a redução de ciclos desnecessários, priorizando a eficiência do código.

Ainda durante a etapa de desenvolvimento, os recursos visuais são de grande importância para induzir o usuário à inserção dos dados iniciais de forma adequada, bem como ajudá-lo a interpretar os resultados de forma correta para sua análise.

Para isso, foi primordial a conexão do “back-end” com o “front-end” de modo que todos os dados necessários fossem coletados da própria interface quando inseridos pelo usuário. Assim, há um fluxo de utilização em que são determinadas as propriedades da seção, os resultados são calculados e, finalmente, verifica-se graficamente a seção transversal inserida. Tudo é realizado à medida que os botões certos são pressionados, os quais executam novas funções e expressam as informações importantes de forma visual e textual. Dessa forma, a GUI foi implementada da forma mais compreensível possível para o usuário, com comandos básicos, autoexplicativos e objetivos.

A maior parte dos recursos oferecidos pelo programa estão disponíveis tanto para a armadura inserida pelo próprio usuário no campo adequado, quanto para uma armadura sugerida, dimensionada a partir das dimensões da seção de concreto e dos esforços solicitantes também inseridos pelo usuário. Com isso, há uma adaptação do software com relação às pessoas interessadas em utilizá-lo com a finalidade de dimensionar um elemento e com a intenção apenas de verificar-lo diante da força e momentos solicitantes, conferindo grande versatilidade.

Enfim, por se tratar do desenvolvimento de um software, torna-se indispensável algumas indicações de melhoria para possíveis versões futuras do programa. Para ser ainda mais completo e abordar mais tipos de pilares, além da constante fase de testes, é necessário implementar alguns incrementos. Dessa forma, há na tela inicial apenas campos para a inserção dos momentos presentes no topo do pilar e, no método geral, é considerado um momento de mesma intensidade e sentido contrário para sua execução, o que é um limitador, pois, mesmo em pilares biapoiados, podem haver momentos diferentes a depender da estrutura, tornando-se ideal o desenvolvimento de campos de texto e da lógica para a consideração dos momentos na base. Outro ponto é a uma questão gráfica, uma vez que na tela de resultados são apresentados apenas os deslocamentos máximos, todavia, seria interessante a exibição da estrutura deslocada como um todo. Pode haver também a consideração de outros tipos de vínculos para as barras e outros tipos de formato de seção transversal, não restringindo apenas à pilares retangulares biapoiados. Portanto, como qualquer

outro programa já existente, há sempre oportunidades de melhoria, de modo a deixá-lo mais completo para atualizações futuras.

Em suma, o objetivo foi atingido com a apresentação de um programa com potencial finalidade tanto profissional quanto educacional, pois fornece parâmetros consistentes que auxiliam em projetos e são exibidos de forma clara e didática.

## 10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

\_\_\_\_\_. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 2013.

BORGES, A. C. L. **Análise de pilares esbeltos de concreto armado solicitados a flexo-compressão oblíqua**. 1999. 98 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil (Estruturas)) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 1999.

DOCUMENTAÇÃO DO KIVYMD. Disponível em:  
<https://kivymd.readthedocs.io/en/1.1.1/>. Acesso em: 08 jun. 2023.

DOCUMENTAÇÃO DO MATPLOTLIB. Disponível em:  
<https://matplotlib.org/stable/index.html>. Acesso em: 08 jun. 2023.

DOCUMENTAÇÃO DO MÓDULO TKINTER - BIBLIOTECA PADRÃO DO PYTHON. Disponível em: <https://docs.python.org/pt-br/3/library/tk.html>. Acesso em: 08 jun. 2023.

DOCUMENTAÇÃO DO QT FOR PYTHON. Disponível em:  
<https://doc.qt.io/qtforpython/>. Acesso em: 08 jun. 2023.

FUSCO, P. B. **Estruturas de concreto armado. Solicitações normais**. Rio de Janeiro, 1981.

GIONGO, J. S. **Concreto armado: análise das resistências de seções transversais de elementos estruturais**. São Carlos-SP, 2017.

MORILLA, J. C. **Analogia de Mohr**. Universidade de Santa Cecília, Santos-SP, 2014.

NUMPY. Disponível em: <https://numpy.org/>. Acesso em: 08 jun. 2023.



PINHEIRO, L. M. **Fundamentos do concreto e projetos de edifícios**. São Carlos-SP, 2007.

PYTHON.ORG. Disponível em: <https://www.python.org/>. Acesso em: 08 jun. 2023.

VENTURINI, W. S. RODRIGUES, R. O. **Dimensionamento de peças retangulares de concreto armado solicitados à flexão reta**. São Carlos, 1987.