UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Lucas Isla Martins

Modelagem da Transmissão Continuamente Variável de um veículo off-road.

São Carlos

2018

Lucas Isla Martins

Modelagem da Transmissão Continuamente Variável de um veículo off-road.

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Orientadora: Profa. Dra. Maíra Martins da Silva

VERSÃO CORRIGIDA

São Carlos

2018

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

Martins, Lucas Isla
M933m Modelagem da Transmissão Continuamente Variável de um veículo off-road. / Lucas Isla Martins; orientadora Maíra Martins da Silva. São Carlos, 2018.

Monografia (Graduação em Engenharia Mecânica) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2018.

1. CVT. 2. Baja. 3. Modelagem. 4. Dinamica Veicular. I. Título.

Eduardo Graziosi Silva - CRB - 8/8907

FOLHA DE AVALIAÇÃO

Candidato:Lucas Isla Martins

Título: Modelagem da Transmissão Continuamente Variável de um veículo off-road.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à

Escola de Engenharia de São Carlos da

Universidade de São Paulo

Curso de Engenharia Mecânica

BANCA EXAMINADORA

Professora Maíra Martins da Silva

(Orientadora)

Nota atribuída: 10,0 (DEZ)

Maíra M. da Silva

(assinatura)

Professor Leopoldo de Oliveira

Nota atribuída: 10,0 (dez)

(assinatura)

Alexandre Castro Ramos

Nota atribuída: 10,0 (dez)

Alexandre Castro Ramos

(assinatura)

Média: 10,0 (DEZ)

Resultado: APROVADO

Data: 24/08/2018

Este trabalho tem condições de ser hospedado no Portal Digital da Biblioteca da EESC

SIM ☒ NÃO ☐ Visto do orientador Maíra M. da Silva

DEDICATÓRIA

A minha família, principalmente minha mãe, irmã e meu pai.

Espero que estejam orgulhosos.

RESUMO

MARTINS, L, **Modelagem da Transmissão Continuamente Variável de um veículo off-road**. 2018 60 f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

O trabalho consiste no desenvolvimento de um modelo matemático que busca descrever o movimento e as características dinâmicas da transmissão CVT, utilizada no protótipo da Equipe EESC USP Baja em suas competições. A simulação é importante para prever o comportamento da CVT com diferentes configurações, diminuindo a necessidade de uma grande carga de testes. Primeiramente é apresentado uma breve introdução sobre o funcionamento da CVT, seguido do equacionamento que modela o comportamento dinâmico da CVT. Por fim é apresentado o modo com que o sistema foi implementado numericamente através do *software Matlab SimuLink*. São descritos os métodos de medição utilizados para aferir os dados necessários para concluir a modelagem e por fim são apresentados os resultados comparados com testes utilizando o protótipo da Equipe supracitada.

Palavras-chave: CVT, Baja, Modelagem, Dinâmica Veicular.

ABSTRACT

MARTINS, L, Modelling of the Continously Variable Transmission of na off road vehicle 2018 60 f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

The work consists in the development of a mathematical model seeking to describe the movement and the dynamics characteristics of the CVT used in EESC USP Baja Team's prototype. The simulation is important to predict the CVT behavior in different setups, reducing the need of a great load of tests. Before, it is presented a brief introduction about how CVT works, followed by the dynamic equations which rule the movement of the components. After, it is presented the way the system was numerically implemented through the software *Matlab Simulink.* The measurement methods are described later on the document, and the results of tests are compared with the model

Keywords: CVT, Baja, Model, Vehicle Dynamics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Prova de Enduro, Baja SAE Brasil. 1
Figura 2 - Curva de Torque e Potência do Motor do Baja. 2
Figura 3 - Gráfico de rotação versus velocidade de um câmbio convencional de quatro marchas. 2
Figura 4 - Figura esquemática do funcionamento de uma CVT. 3
Figura 5 - Gráfico de rotação versus velocidade de um câmbio CVT. 4
Figura 6 - Modelo em CAD da CVT gaged gx9 utilizada atualmente pela equipe. 5
Figura 7 - Geometria do mecanismo da CVT. 6
Figura 8 - Plano de simetria da CVT com as forças aplicadas ao corpo. 8
Figura 9 - Decomposição da força normal entre os contrapesos e a rampa. 9
Figura 10 - Representação da aplicação da força normal da correia nos pratos das duas polias da CVT. 10
Figura 11 - Diagrama de corpo livre da polia movida. 11
Figura 12 - Curso hábil do prato da polia motora. 13
Figura 13 - Curso hábil da polia movida. 13
Figura 14 - Diagrama de blocos da Simulação SimuLink. 15
Figura 15 - Subsistema CVT motora. 16
Figura 16 - Função Matlab CVT_motora. 17
Figura 17 - Bloco e função “th to x”. 18
Figura 18 - Subsistema 'Cálculo de dr1'. 18
Figura 19 - Subsistema 'Cálculo da Normal'. 18
Figura 20 - Subsistema 'CVT_Movida’. 19
Figura - 21. Função CVT_Movida. 19
Figura 22 - Subsistema 'Cálculo do CVT Ratio'. 20
Figura 23 - Esquema de medição do came da polia motora. 21
Figura 24 - Esquema de ensaio de compressão. 22
Figura 25 - Medição da rigidez da mola torcional. 23
Figura 26 - Aproximação do ângulo da rampa. 23
Figura 27 - Esquema representativo do teste. 24
Figura 28 - Gráfico RPM e relação da CVT pelo tempo. 24
Figura 29 - Variação das variáveis de calibração. 25
Figura 30 - Representação da última configuração. 25

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Massa dos componentes medida.....21
Tabela 2 – Ângulo entre as polias pela posição do prato móvel 22
Tabela 3 – Rigidez compressiva das molas da Equipe.....22
Tabela 4 – Resultados da medição da rigidez da mola da polia movida.....23

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CVT	*Continuously Variable Transmission* (Transmissão Continuamente Variável.
RPM	Rotações por minuto.

LISTA DE SÍMBOLOS

ϕ	Ângulo formado entre a rampa de contato com o braço e a horizontal
x	Coordenada da posição do prato da CVT
r	Comprimento do braço
a	Constante arbitrária
$A\hat{B}C$	Ângulo entre os vértices A, B e C do triângulo
θ	Ângulo entre o braço e a horizontal
Q	Forças generalizadas na coordenada θ
T	Energia Cinética do sistema
V	Energia Potencial do sistema
$\lvert\overrightarrow{V_p}\rvert$	Velocidade absoluta no ponto P(ponto de contato entre a rampa e o braço)
J_o	Momento de inércia da CVT
m	Massa de uma massinha do contrapeso
M	Massa de toda a parte que se mexe da CVT
Ω	Rotação do Motor
$\dot{x}$	Velocidade na coordenada x
$\dot{\theta}$	Velocidade na coordenada θ
p	Pretensão da mola linear
b	Coeficiente de atrito viscoso
N	Força normal da correia no prato
α	Ângulo do prato da CVT motora
β	Ângulo do prato da CVT movida
K_c	Constante elástica da correia da CVT
Δl	Distância máxima entre dois extremos da correia

$r_{2,1}$	Raio efetivo da polia 2 (movida) no momento 1(final)
Δr_1	Variação entre os raios efetivos da polia motora do momento inicial até o momento1

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 1
1.1 Motivação 1
1.2 A '*Continuous Variable Transmission' (CVT)* 1
1.3 Vantagens da CVT 3
1.4 Modelagem da CVT 4
1.5 Objetivo 5
2 MODELAGEM DINÂMICA DA CVT 6
2.1 Equações do movimento 6
2.2 Condições de Contorno 12
3 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA 15
3.1. Modelo Geral 15
3.2. Subsistema 'CVT motora' 16
3.3 Bloco 'th to x' 17
3.4. Subsistema 'Cálculo de dr1' 18
3.5.Subsistema 'Cálculo da Normal' 18
3.6.Subsistema 'CVT Movida' 18
3.8. Subsistema 'Cálculo do CVT Ratio' 20
4 MENSURAÇÃO DE DADOS 21
5 RESULTADOS 25
6 CONCLUSÃO 27
7 REFERÊNCIAS 29

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

O programa Baja SAE Brasil é uma competição estudantil, onde alunos de escolas de engenharia de todo o país tem a oportunidade de colocar em prática os conhecimentos adquiridos em sala de aula no projeto e construção de um protótipo de competição *off-road*.(Figura 1). Observando as características da Equipe EESC USP Baja, foi possível observar as práticas que levam ao seu crescimento, e a principal delas é a devida aplicação da engenharia para a otimização de seus componentes.

Figura 1 - Prova de Enduro, Baja SAE Brasil.

Fonte- Globo (2013): https://glo.bo/1beOQwH

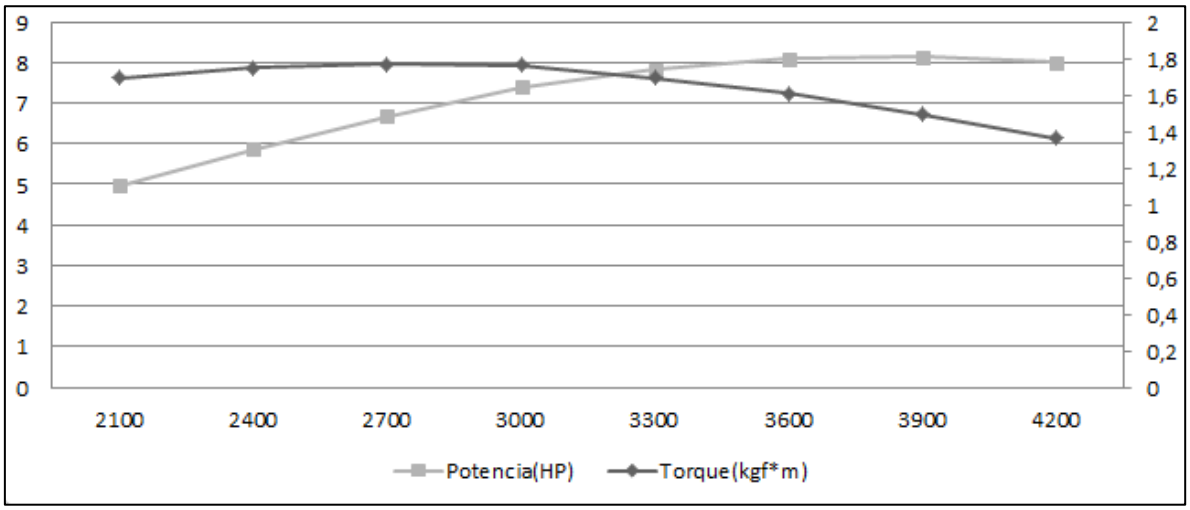
Na equipe analisada notou-se uma carência de pesquisa e desenvolvimento no subsistema da CVT da equipe. Apesar de realizar vários testes e conhecer o comportamento do veículo, a dinâmica de funcionamento da CVT não é conhecida, o que impede que o projeto do subsistema avance. Seus resultados eram baseados no empirismo e na experiência dos membros. Dessa forma foi escolhido o tema da abordagem, a modelagem dinâmica da CVT.

1.2 A '*Continuous Variable Transmission' (CVT)*

Para entender o funcionamento da CVT, primeiramente é preciso compreender a função da transmissão de um veículo. A transmissão é o subsistema responsável por transformar a potência fornecida pelo motor em força trativa nos pneus do carro. Os motores de combustão atuais são capazes de fornecer alta potência em apenas uma pequena faixa de rotação (AAEN O.) Isso torna necessária a utilização de um sistema de redução de velocidade e amplificação de torque: a transmissão veicular. A Figura 2 mostra a curva de torque e

potência do motor padrão utilizado pelas equipes de Baja. Nesta figura, é possível observar que a potência quase dobra em rotações altas se comparado às rotações mais baixas.

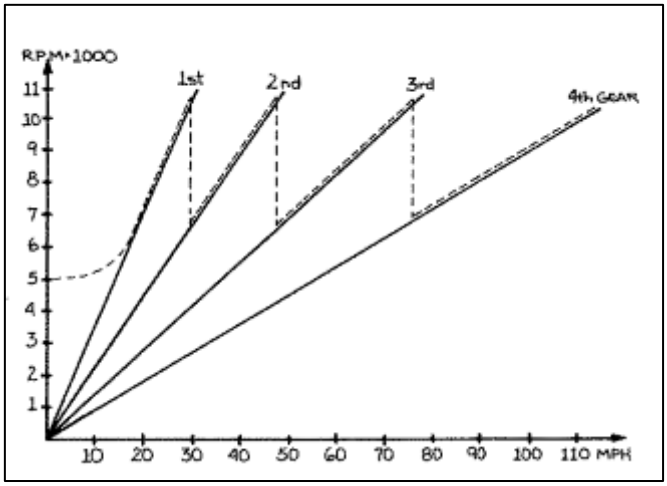
Figura 2 - Curva de Torque e Potência do Motor do Baja.



Fonte- Arquivos próprios

O sistema de transmissão mais comum em veículos comerciais é a caixa de câmbio manual. Ela utiliza pares de engrenagens para transmitir a potência e um sistema de embreagem para fazer a troca desses pares. Dessa forma o veículo pode variar de uma relação reduzida a uma alongada conforme acelera. A Figura 3 mostra como uma caixa de câmbio convencional troca as relações de transmissão. A linha pontilhada representa as variações de velocidade do motor, enquanto as linhas cheias representam a relação de transmissão utilizada.

Figura 3 - Gráfico de rotação versus velocidade representando a aceleração de um veículo que varia a relação de transmissão com um câmbio convencional de quatro marchas.

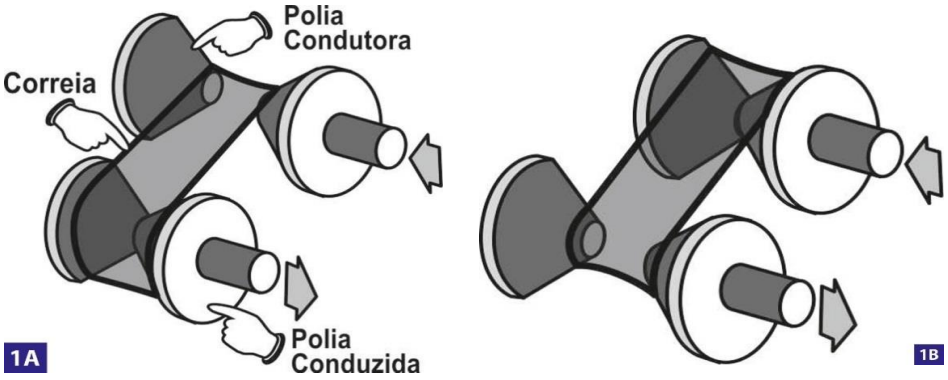


Fonte - Olav Aleen’s Clutch Tunning Handbook

Nota-se que nesse caso, a rotação do motor varia numa faixa larga de velocidades enquanto o veículo acelera, entre 7.000 e 11.000 RPM, ou seja, o motor não trabalha apenas onde ele apresenta melhor desempenho.

A CVT transmite o movimento de forma distinta. Ela consiste em um sistema de polias e correia, onde a polia motora e movida são cônicas, e dotadas de um mecanismo que varia seus diâmetros efetivos, mudando a relação de transmissão de maneira contínua automaticamente (ver Figura 4).

Figura 4 - Figura esquemática do funcionamento de uma CVT.



Fonte: Portal Oficina Brasil: https://bit.ly/2O8o3v9

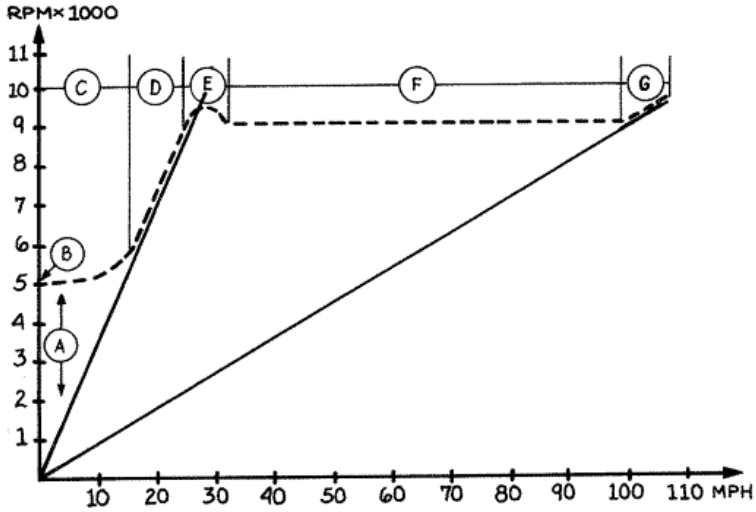
O mecanismo que faz esse sistema variar o diâmetro efetivo de suas polias pode ser controlado eletrônica, hidráulica ou mecanicamente. No caso proposto do Baja, esse sistema é controlado mecanicamente a partir de um sistema de massas e molas.

1.3 Vantagens da CVT

A transmissão continuamente variável (CVT) atua no papel mais importante no desempenho do carro. É o link vital entre um veículo que constantemente varia de velocidade, e motor que idealmente opera a velocidade constante (OLAV AAEN ,2007).

A CVT é um sistema de transmissão tradicionalmente utilizado por equipes de Baja de todo o mundo. A regra da competição limita as equipes a atuar com o motor da curva supracitada, que tem potência nominal de 10HP, uma potência muito baixa para um veículo de competição. Por isso, as equipes buscam sempre reduzir a massa e aumentar a eficiência do trem de força. Essas duas características podem ser encontradas no sistema de CVT. Além de ser um sistema leve e compacto, a CVT tem como característica, o melhor aproveitamento da potência do motor. Durante seu trabalho, a CVT idealmente mantém uma rotação constante, variando sua relação conforme a Figura 5.

Figura 5 - Gráfico de rotação versus velocidade de um câmbio CVT.



Fonte - Olav Aleen's Clutch Tunning Handbook.

As linhas tracejadas representam a velocidade do motor versus a velocidade do veículo, enquanto as linhas cheias representam as relações de transmissão nos extremos do da CVT, aberta e fechada.

Na caixa de marchas tradicional o motorista acelera o motor de uma rotação baixa a uma alta e troca de marcha e repete o movimento até a quarta ou quinta marcha. Enquanto isso, na CVT ele acelera até a rotação escolhida pelo projetista, em geral a de maior potência ou menor consumo específico.

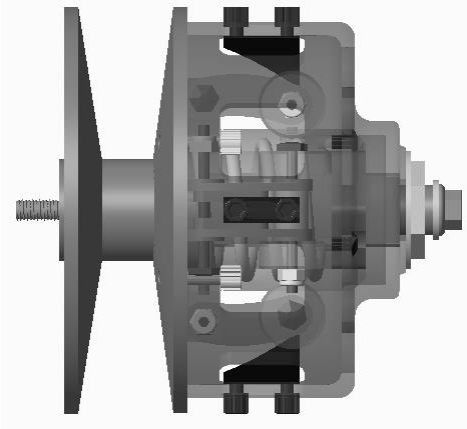
Assim a CVT trabalha mantendo a rotação constante e, após seu batente, o motor volta a acelerar até sua rotação máxima.

1.4 Modelagem da CVT

As equipes de baja em geral têm duas opções na hora de escolher peças para seus veículos: manufaturar peças ou encontrar e adquirir peças comerciais que sejam adaptáveis ao projeto. A CVT é um sistema complexo, o que dificulta sua manufatura. Alguns modelos no mercado satisfazem a necessidade das equipes por produtos adaptáveis. Nesse aspecto, os modelos encontrados no mercado que mais se adequam ao projeto são aquelas projetadas para veículos de *snowmobile*, como ilustrado na Figura 6 A CVT é utilizada nesse tipo de veículo há mais de 20 anos, e apresenta certa variedade de modelos vendidos em mercado.

Entretanto, esses modelos são projetados para *snowmobiles*, veículos muito mais pesados e com motores com características diferentes dos modelos de baja. Dessa forma, é preciso modificar os parâmetros mecânicos da CVT para que o baja apresente o seu melhor desempenho.

Figura 6 - Modelo em CAD da CVT gaged gx9 utilizada atualmente pela equipe.



Fonte - Arquivos da Equipe.

Com o objetivo de melhorar o desempenho então, a equipe faz seguidos testes, medindo a aceleração e velocidade do protótipo variando os parâmetros do mecanismo de controle da relação de transmissão. Cada teste consiste na medição da rotação do motor e da velocidade do veículo em linha reta, aquisição e análise dos dados. O teste e a análise de cada configuração levam, em média, 50 minutos. Anualmente são testadas cerca de 50 diferentes combinações de parâmetros.

Esses parâmetros, na CVT que utilizada no projeto são:

- Constante da mola linear da polia motora
- Massa dos contrapesos da polia motora
- Perfil da rampa dos contrapesos da polia motora
- Pretensão da mola da polia motora
- Constante da mola angular da polia movida
- Pretensão da mola angular da polia movida
- Ângulo do came da polia movida

Para a *Gaged Engineering*, há uma quantidade infinita de molas que podem ser feitas, cada uma concedendo ao veículo uma característica única. Isso é um exemplo que mostra o tamanho do para engenheiros novatos que ainda não possuem experiência em variação de parâmetros de CVT.

Olhando sob essa ótica, é possível entender a necessidade da modelagem computacional desse sistema. Em ambiente computacional é possível simular molas com qualquer constante ou pré-tensão desejada, massas quaisquer e formatos de perfil de rampa definidos por qualquer equação matemática. E principalmente, de posse de um modelo confiável, é possível poupar uma quantidade significativa de horas trabalhadas, além do custo da fabricação de peças para teste.

1.5 Objetivo

- Modelar o sistema de transmissão variável do protótipo de baja;
- Analisar o comportamento comparando com dados medidos em testes.

2 MODELAGEM DINÂMICA DA CVT

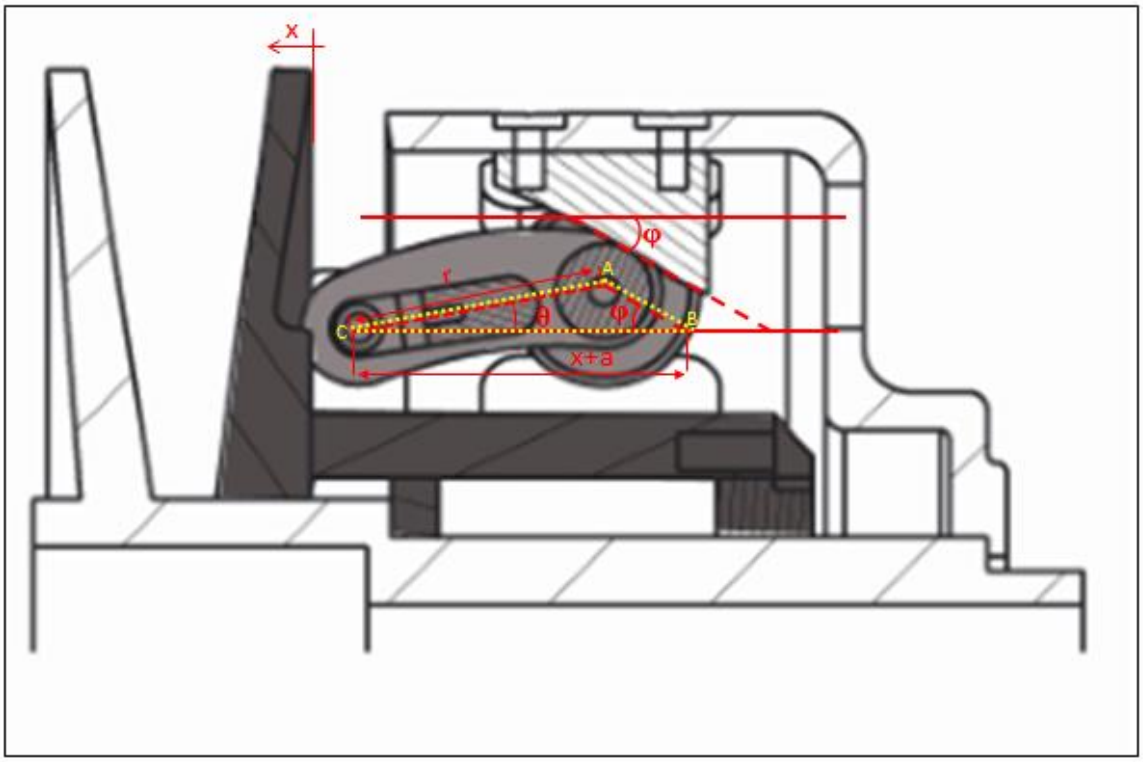
2.1 Equações do movimento

Para o modelo, foi considerado que o funcionamento da polia motora é baseado em forças centrífugas, exercidas pelos contrapesos acoplados nos braços, equilibrado com a força na mola linear. Enquanto o funcionamento da polia movida é ditado pelas forças de tração exercida pela correia e da mola torcional acoplada no came da polia, conforme proposto por Adamanti (2012).

Segundo Shigley (1980) “O problema inicial no desenvolvimento de um sistema mecânico é o entendimento de sua cinemática. Cinemática é o estudo do movimento, à parte das forças que produzem esse movimento”. Dessa forma, para modelar dinamicamente a CVT, foi preciso derivar as equações matemáticas que descrevem o movimento da mesma. Conforme pode ser observado na Figura 7, há dois movimentos principais durante o movimento da polia motora, o movimento do prato na direção de x e o movimento do braço na direção de θ.

Nota-se que os movimentos são dependentes, ou seja, é possível descrever um dos movimentos a partir do outro e vice-versa. Dessa forma, é possível derivar essa relação de dependência.

Figura 7 - Geometria do mecanismo da CVT.



Fonte – Elaboração do autor.

Aplicando a Lei dos Senos no Triangulo ABC

$$\frac{sen(\phi)}{r} = \frac{sen(\sigma)}{a + x} \tag{2.1}$$

Como, segundo a soma dos ângulos do triângulo $\sigma = 180 - \phi - \theta$, temos:

$$\frac{sen(\phi)}{r} = \frac{sen(180 - \phi - \theta)}{a + x} \tag{2.2}$$

E sabendo que $sen(180 - a) = sen(a)$:

$$\frac{sen(\phi)}{r} = \frac{sen(\phi + \theta)}{a + x} \tag{2.3}$$

$$sen(\phi) \cdot (a + x) = sen(\phi + \theta) \cdot r \tag{2.4}$$

$$sen(\phi) \cdot (a + x) = (sen(\phi) \cdot \cos(\theta) + sen(\theta) \cdot \cos(\phi)) \cdot r \tag{2.5}$$

$$(a + x) = ((\cos(\theta) + sen(\theta) \cdot \mathrm{cotan}(\phi)) \cdot r \tag{2.6}$$

No limite onde x=0 , por consequência $\theta = 0$, logo:

$$a = r \tag{2.7}$$

Chegando à primeira relação entre x e θ.

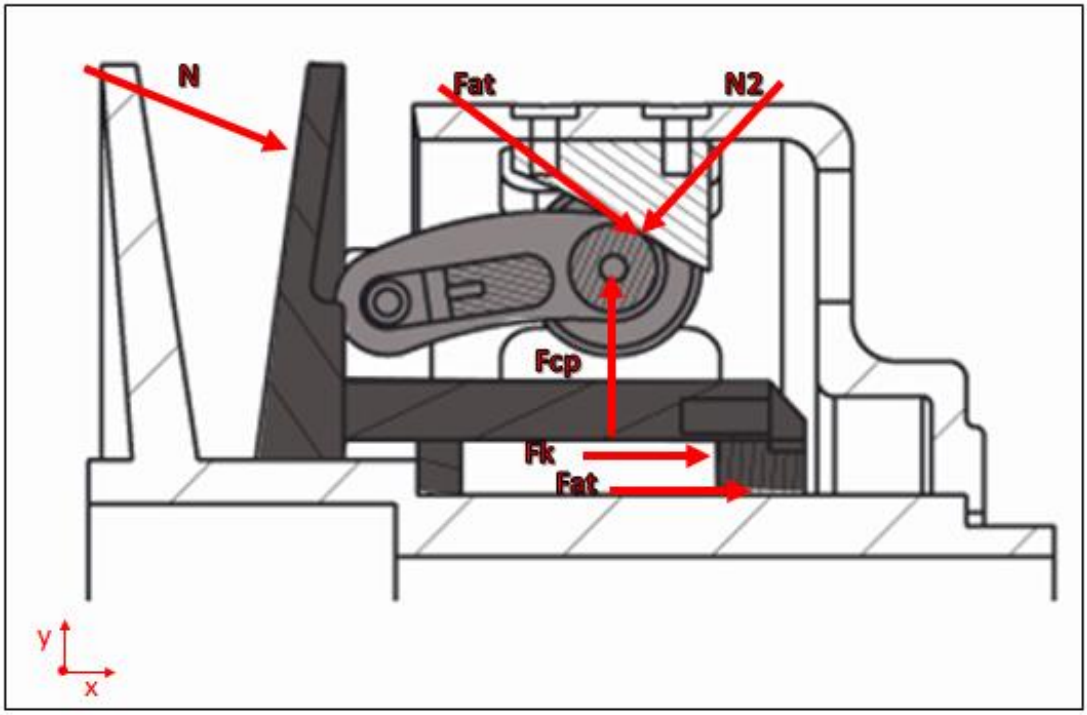
$$(r + x) = ((\cos(\theta) + sen(\theta) \cdot \mathrm{cotan}(\phi)) \cdot r \tag{2.8}$$

Após a análise cinemática do caso, foi estudada a dinâmica do sistema. O momento de inércia de rotação do braço com os contrapesos não foi considerado, pois considerou-se que a parcela seria muito pequena para influenciar significativamente no sistema.

Em Willis (2006), realizou-se uma abordagem para a modelagem utilizando equações de Lagrange e balanço de energia. O método foi considerado para o trabalho. Entretanto as polias utilizadas por ele na modelagem eram de uma marca e modelo diferentes, as quais utilizavam um sistema de contrapesos diferente. No caso apresentado nesse estudo preferiu-se utilizar a física newtoniana, visto que há apenas uma variável de controle e dessa maneira, o cálculo ficaria mais simples e menos propenso a erros.

Com a relação de interdependência das equações em mãos, o próximo passo foi identificar as forças atuantes durante o processo. Na Figura 8 é possível observar todas as forças atuantes no plano de simetria da polia motora da CVT.

Figura 8 - Plano de simetria da CVT com as forças aplicadas ao corpo.



Fonte – Elaboração do autor.

O movimento de interesse do estudo é o movimento do corpo pintado de cinza escuro, na direção do eixo x. Dessa forma, a equação de equilíbrio de forças na direção de x no corpo pode ser expressa pela equação 2.9.

$$M \cdot \ddot{x} = N2_x - N_x - F_k - \sum F_{at} \tag{2.9}$$

Ou seja, a equação que descreve o movimento do corpo no eixo x pode ser representada pela equação 2.10.

$$\ddot{x} = \frac{N2_x - N_x - F_k - \sum F_{at}}{M} \tag{2.10}$$

A variável M representa a massa total do corpo, todos os elementos com x subscrito as respectivas componentes das forças no eixo x e $\sum F_{at}$ a somatória das forças de atrito que atuam contra o movimento no eixo x.

A força N_2 pode ser calculada a partir da força centrípeta F_{cp} que atua sobre a massa m. Dessa forma, é possível fazer o equilíbrio de forças no ponto P no sentido do eixo y.

$$F_{cp} - N2_y - F_{at} = 4 \cdot m \cdot \ddot{y} \tag{2.11}$$

$$F_{cp} - F_{at} - 4 * m \cdot \ddot{y} = N2_y \tag{2.12}$$

Onde m é a massa de cada contrapeso. Como os contrapesos são fixados no corpo dos pratos, o seu movimento em y pode ser descrito por:

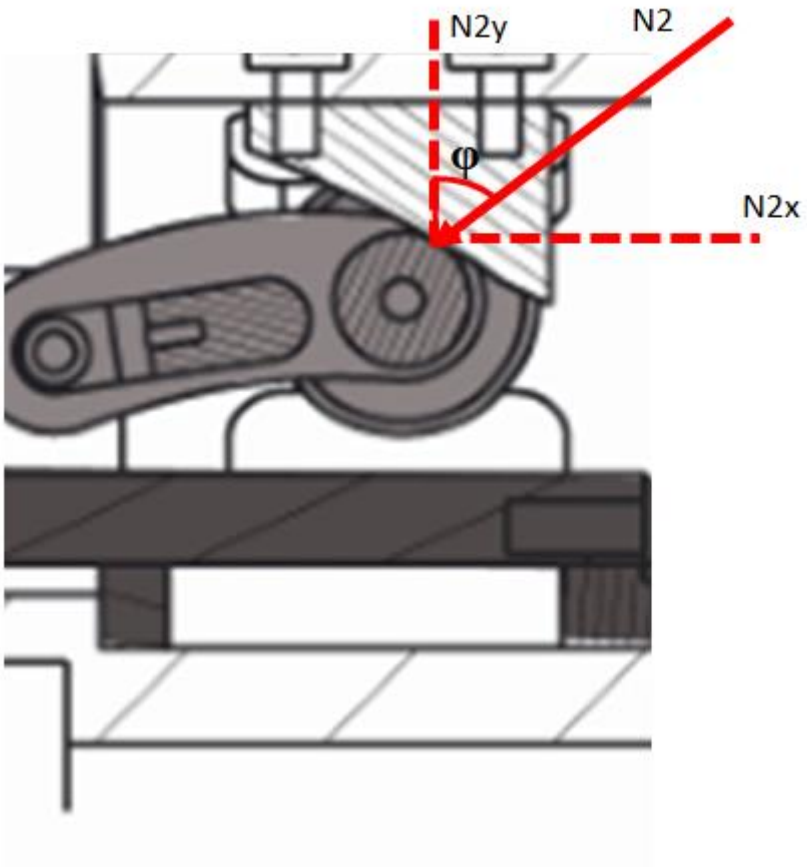
$$y = r \cdot \text{sen}(\theta) + r_2 \tag{2.13}$$

$$\dot{y} = r \cdot (\cos(\theta) \cdot \dot{\theta}) \tag{2.14}$$

$$\ddot{y} = r(\cos\theta \cdot \ddot{\theta} - sen(\theta) \cdot (\dot{\theta})) \tag{2.15}$$

A partir desses dados e da análise da Figura 9 é possível encontrar a componente horizontal de y (equação 2.16).

Figura 9 - Decomposição da força normal entre os contrapesos e a rampa.



Fonte – Elaboração do autor.

$$N2_x = N2_y \cdot \tan(\phi) \tag{2.16}$$

Oliveira (2015) realizou uma modelagem utilizando a mesma abordagem newtoniana. Entretanto, os trabalhos diferem na modelagem da correia. Enquanto o autor modelou a correia como um corpo rígido indeformável, o corpo foi modelado como um elemento

elástico, com rigidez a ser calibrada. Dessa forma, a polia movida terá uma sensibilidade mais lenta a variações na polia motora, o que se considerou uma abordagem mais realista.

Para modelar dessa maneira, a correia foi simplificada a um elemento elástico, que aumenta ou diminui a força aplicada conforme ela é esticada. A Figura 10 apresenta um esquema que ilustra a disposição das forças. Assim, através da lei de Hooke, foi possível encontrar a força normal na correia (equação 2.17).

$$N = K_{correia} \cdot (\Delta \mathrm{l}) \tag{2.17}$$

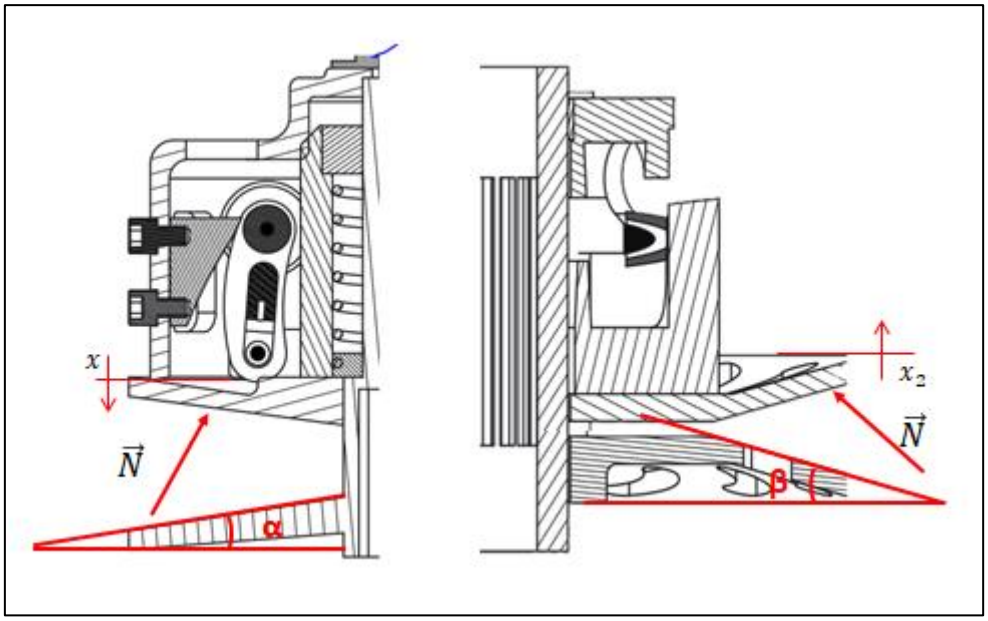
Onde l é a maior distância entre dois pontos dos pratos e $K_{correia}$ é a constante elástica da correia. Essa constante será calibrada a partir da comparação da modelagem com os dados obtidos em testes. As equações a seguir definem o comportamento da força.

$$N = K \cdot ((r_{1,1} + r_{2,1} + e) - (r_{1,0} + r_{2,0} + e)) \tag{2.18}$$

$$N = K \cdot \big((r_{1,1} - r_{1,0}\big) + (r_{2,1} - r_{2,0})) \tag{2.19}$$

$$N = K \cdot (\Delta r_1) + (\Delta r_2)) \tag{2.20}$$

Figura 10 - Representação da aplicação da força normal da correia nos pratos das duas polias da CVT.



Fonte – Elaboração do autor.

Nas equações, e é o entre eixo das polias, $r_{1,0}$ é o raio da polia motora no momento 0 e $r_{2,1}$ é o raio da polia movida no momento 1 e assim por diante. Pode se observar uma relação direta do aumento do raio das polias com o movimento do prato na direção de x, assim podemos encontrar a seguinte relação:

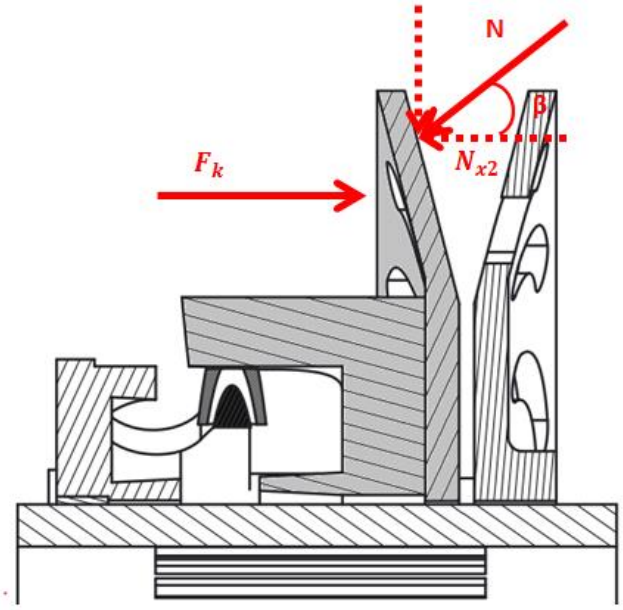
$$N = K \cdot (\tan(\alpha) \cdot x - \tan(\beta) \cdot x_2) \tag{2.21}$$

Tendo os ângulos conhecidos, e também o movimento em x da polia motora, a única variável não conhecida restante é o movimento em $x$da polia movida. Esse movimento é uma função do ângulo de rotação ρ entre os dois pratos da polia movida, regida pelo formato de um came. Dessa forma, será modelado como uma função genérica, sendo implementada através de medições empíricas.

$$x_2 = f(\rho) \tag{2.22}$$

Sendo x_2 uma função do ângulo ρ foi realizado o diagrama de corpo livre para o movimento da polia movida, conforme a Figura 11.

Figura 11 - Diagrama de corpo livre da polia movida.



Fonte – Elaboração do autor.

$$F_k = K_\theta \cdot (\rho + p_\theta) \tag{2.23}$$

$$N_{x2} - F_k = M_2 \cdot \ddot{x}_2 \tag{2.24}$$

$$K_\theta \cdot (\rho + p_\theta) - N \cdot \cos(\beta) = M_2 \cdot \ddot{x}_2 \tag{2.25}$$

Onde ρ é o deslocamento angular entre os dois pratos e p_θ é a pretensão angular da mola. Chegamos por fim ao equacionamento do ângulo ρ:

$$K_\theta \cdot (\rho - p_\theta) = N \cdot \cos(\beta) + M_2 \cdot \ddot{x}_2 \tag{2.26}$$

$$\rho = \frac{N \cdot \cos(\beta) + M_2 \cdot \ddot{x}_2}{K_\theta} - p_\theta \tag{2.27}$$

Por fim, buscou-se resolver o problema da modelagem do atrito. O atrito age nos corpos onde há contato e movimento entre eles. Os principais pontos de atrito no corpo foram

definidos na Figura 8. Num primeiro momento, cogitou-se utilizar de atrito viscoso para a modelagem do problema. Entretanto, nota-se que dessa maneira, a modelagem do atrito não seria completa. Dessa forma, buscou-se uma combinação do atrito viscoso com atrito seco. Assim, a somatória das forças de atrito foi modela seguindo a equação 2.28.

$$\sum F_{at} = b \cdot \dot{x} + b_2 \cdot N2 \tag{2.28}$$

Os termos b e b_2 são coeficientes calibrados comparando o modelo com dados obtidos em testes.

Com todos os dados em mãos, é possível voltar à equação 2.10. Ela descreve o movimento do prato no eixo x. Entretanto, vários de seus dados são em função do ângulo θ instantâneo. Tendo a relação de x e θ deduzida na equação 2.8, e derivando duas vezes, temos uma relação entre $\ddot{x} e\ \ddot{\theta}$, representada na equação 2.30.

$$\dot{x} = \big((-\mathrm{sen}(\theta) + \cos(\theta) \cdot \mathrm{cotan}(\phi)\big) \cdot r \cdot \dot{\theta} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} = r \cdot [\big((-\mathrm{sen}(\theta) + \cos(\theta) \cdot \mathrm{cotan}(\phi)\big) \cdot \ddot{\theta} \\ + \big(-\cos(\theta) - sen(\theta) * cotan(\phi)\big) \cdot \dot{\theta}] \end{aligned} \tag{2.30}$$

Por fins numéricos, isolou-se a derivada segunda da variável θ e chegou-se na equação diferencial representada na equação 2.31.

$$\ddot{\theta} = \frac{\frac{\ddot{x}}{r}\big(\cos(\theta) + sen(\theta) * cotan(\phi)\big) \cdot \dot{\theta}}{\big((-\mathrm{sen}(\theta) + \cos(\theta) \cdot \mathrm{cotan}(\phi)\big)} \tag{2.31}$$

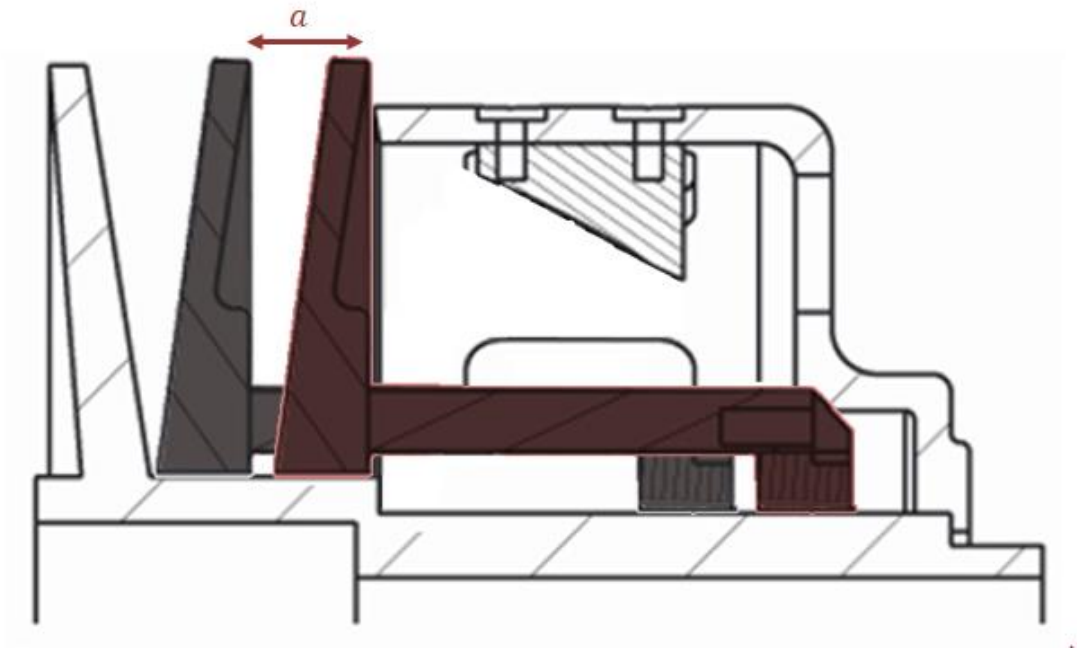
A implementação do equacionamento será discutida na seção “implementação numérica”.

2.2 Condições de Contorno

As equações de movimento sozinhas não são capazes de representar o movimento de um mecanismo como a CVT, pois são equações que tem domínios infinitos, enquanto os corpos têm limites físicos entre eles. Nessa seção serão apresentados os limites físicos da CVT considerados na modelagem.

O primeiro limite físico foi o da variável x. A variável é limitada, pois seu limite inferior é em repouso, onde o prato encosta na carcaça, e o limite superior é quando os pratos encostam um no outro. Foi excluída a possibilidade do limite superior se encontrar no batente das molas, pois nesse caso haveria perda de desempenho. Desse modo, a mola calculada precisa garantir o curso pelo menos do tamanho do intervalo a (Figura 12).

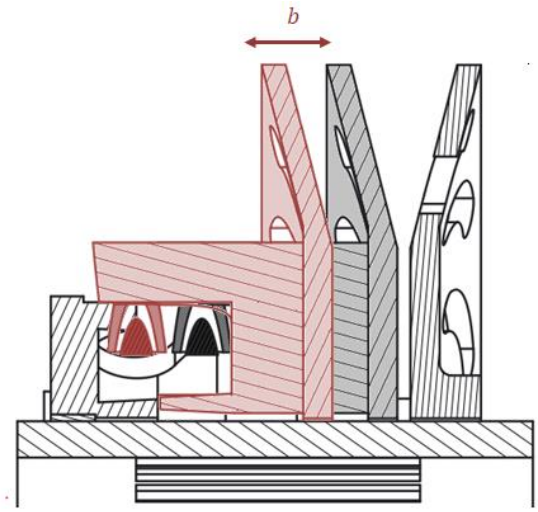
Figura 12 – Curso hábil do prato da polia motora.



Fonte – Elaboração do autor.

O segundo limite utilizado foi na polia movida. Seguindo o mesmo raciocínio, a polia movida tem um limitante físico no came. Dessa forma, foi levado em conta que a polia movida teria um curso limitado a *b* (Figura 13).

Figura 13 - Curso hábil da polia movida.



Fonte – Elaboração do autor.

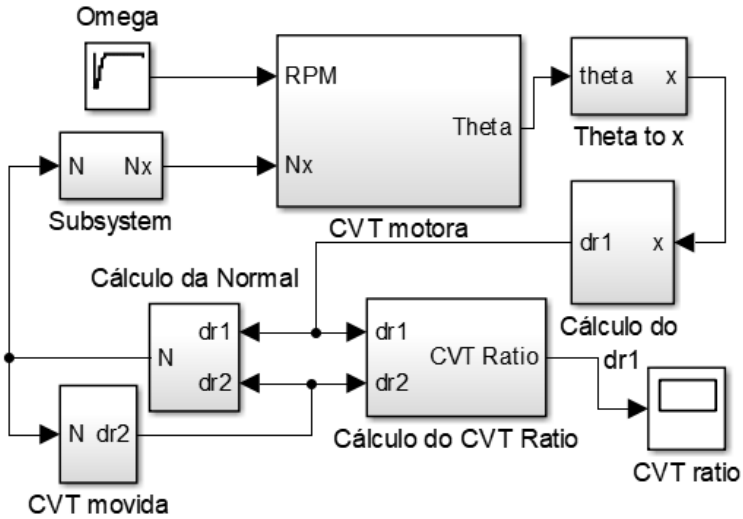
3. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

3.1. Modelo Geral

Nessa seção será apresentado como cada equação citada na seção passada foi implementada no ambiente computacional do *Simulink*. A construção do raciocínio no ambiente computacional não é a mesma do equacionamento, logo, as equações não serão apresentadas na mesma ordem.

Diferente de OLIVEIRA, não foi realizada uma simulação de carro inteiro, por considerar que a dinâmica do *Powertrain* de um veículo seja muito complexa e há muita margem de erro. Ao contrário, realizou-se uma simulação apenas do comportamento da CVT e comparou-se com o comportamento real da CVT, excluindo assim a variável *power train.* O modelo assim não consegue prever a velocidade final do carro, mas sim como a CVT se comporta conforme o tempo.

Figura 14 - Diagrama de blocos da Simulação SimuLink.



Fonte – Elaboração do autor.

Observando a Figura 14 podemos observar o funcionamento do modelo O valor de $'\Omega'$ no instante de tempo determinado, combinado com a força Normal são entradas do bloco "CVT motora". No instante " $t = t0$" a força normal é nula. O bloco realiza uma série de cálculos e traz como saída o valor de $'\theta'$ no instante de tempo. Em seguida, esse valor alimenta o bloco *"theta to x"* que converte o valor angular de θ para um valor linear de *x.* Esse valor de *x* no bloco *"Cálculo de dr1"* serve de entrada para o cálculo do valor de $\Delta r1$, ou variação no raio da polia motora. Esse valor é utilizado em dois blocos, *"Cálculo da Normal"* e *"Cálculo do CVT Ratio"*. O Primeiro bloco utiliza como entradas o $\Delta r1$ e $\Delta r2$ e calcula a força normal da polia a partir deles.

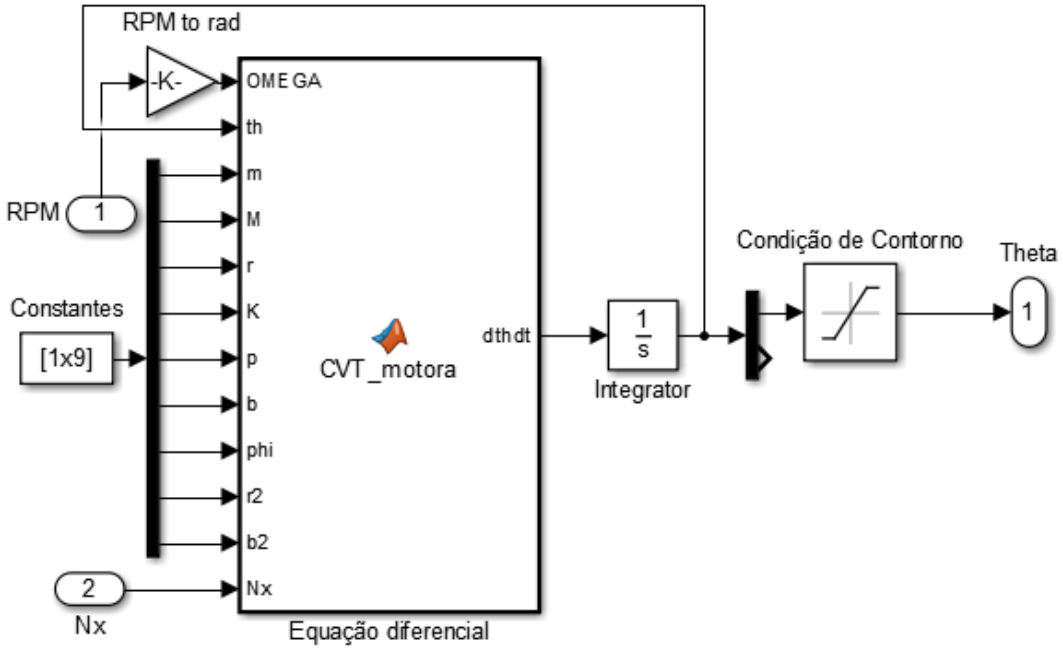
A força Normal calculada alimenta dois blocos, *"N to Nx"* e *"CVT movida"*. O primeiro calcula a componente em x da Normal, dado que é utilizado para realimentar o bloco da *"CVT motora".* No segundo, por sua vez é a entrada do bloco *"CVT movida",* o qual

calcula a variação na posição x_2, e, posteriormente, o $\Delta r2$ Esse valor alimenta novamente ambos os blocos *"Cálculo da Normal"* e *"Cálculo do CVT Ratio"*. A partir disso o diagrama se realimenta, e calcula, a cada instante, o *CVT Ratio* do sistema. A seguir serão apresentados todos os blocos subsistemas utilizados.

3.2. Subsistema 'CVT motora'

A Figura 15 apresenta o subsistema da *"CVT motora"*. O subsistema é responsável por, a partir de dados de entrada (variáveis Nx e RPM, e de nove constantes), encontrar o valor instantâneo do ângulo θ.

Figura 15 - Subsistema CVT motora.



Fonte – Elaboração do autor.

O subsistema utiliza a função do MatLab, *"CVT_motora"* que pega os dados de entrada e retorna o vetor *"dthdt"*. Esse vetor é constituído por dois componentes, sendo o primeiro deles a velocidade instantânea do braço da CVT no eixo θ ($\dot{\theta}$) e o segundo, a aceleração instantânea do braço da CVT no eixo θ ($\ddot{\theta}$). O vetor pode ser observado na Eqiuação 3.1.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Esse vetor é integrado com um integrador a partir de condições iniciais nulas. Dessa forma, o vetor resultante terá como componentes a posição e a velocidade respectivamente. Desse vetor é selecionada a posição com a ferramenta "Demux". Por fim, o dado passa por

um bloco de saturação, que confirmam o limite físico do ângulo θ. O vetor integrado também realimenta o bloco da equação diferencial.

Figura 16 - Função Matlab CVT_motora.

CVT motora/Equação diferencial

```
function dthdt = CVT_motora(OMEGA,th,m, M,r,K,p,b,phi,r2, b2,N)
a=0.275;
Fcp = 4*m*OMEGA^2*(r*cos(th(1)) + r2);
ddy = r*(cos(th(1))*0- sin(th(1))*th(2));
Fr = (Fcp-b2*Fcp-4*m*ddy)*tan(phi);
x = (r/tan(phi))*(tan(phi)*(cos(th(1)))+ sin(th(1)) - tan(phi));
dx = (th(2)*r*(cos(th(1)) - tan(phi)*sin(th(1))))/tan(phi);
ddx =(Fr-N-K*(x+p)-b*dx)/M;
ddth =(ddx/r + th(2)*(cos(th(1))+sin(th(1))))/(cos(th(1))/tan(phi) -
sin(th(1)));
    if th(1)<=a && th(1)>=0
        if th(1)== a && ddx>0
        dthdt= [0;0];
        else
        dthdt = [th(2);ddth];
        end
        if th(1)== 0 && ddx<0
        dthdt= [0;0];
        end
        else
        dthdt=[0;0];
    end
end
```

Fonte – Elaboração do autor.

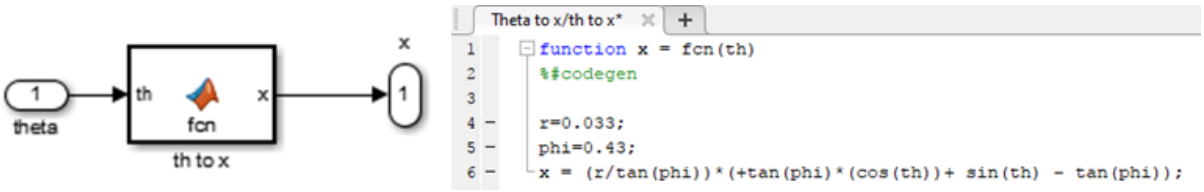
A função *"CVT_motora"* utiliza das equações previamente discutidas na seção 2 para criar uma equação diferencial que descreva o movimento do braço. Como pode ser observado na Figura 16 primeiramente são definidos o limite para o valor de θ, definido como a. Em seguida são descritas as equações de movimento representando as equações de 7 a 10. Por fim, é definida a relação entre x e θ. Com isso, é possível determinar $^{d^2x}/_{dt^2}$.

Posteriormente foram incluídas as condições de contorno que representam os limitantes físicos para o ângulo θ. O vetor saída é criado, sendo o primeiro componente, a velocidade, provinda do vetor integrado do instante anterior, e o segundo componente, a aceleração, calculada anteriormente. Esse vetor é implementado apenas caso a posição esteja dentro de seus limites, e, caso a posição coincida com as condições de contorno, sua aceleração calculada seja no sentido de adentrar os limites. Caso contrário, a variável recebe um vetor nulo.

3.3 Bloco 'th to x'

Para transformar a variável θ na variável x foi criado um subsistema com apenas um bloco, que contém uma função *MatLab* que recebe o valor da posição de θ, e retorna o valor do x, com base na equação 23. O bloco e a função podem ser observados na Figura 17.

Figura 17 - Bloco e função “th to x”.

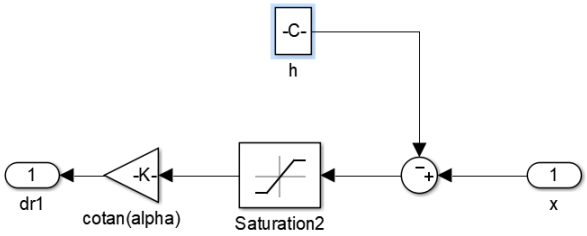


Fonte – Elaboração do autor.

3.4. Subsistema ‘Cálculo de dr1’

O subsistema, como observado na Figura 18, subtrai o valor de h de x caso ele seja maior do que ele no instante, ou seja, compensa a folga da correia. A função de saturação transforma em zero caso a subtração resulte num número negativo. Posteriormente, o valor é multiplicado pela cotangente de α, e o resultado é a variação no raio efetivo da polia.

Figura 18 - Subsistema 'Cálculo de dr1'.

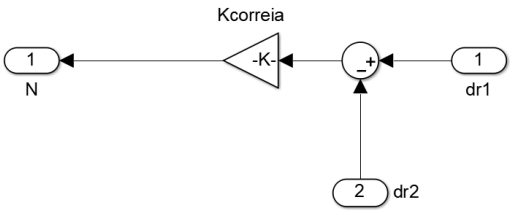


Fonte – Elaboração do autor.

3.5.Subsistema ‘Cálculo da Normal’

O subsistema tem como função receber o valor das variações de raio efetivo da correia, subtrai-los e por fim multiplicar o valor resultante pelo valor da constante elástica da correia, conforme a Figura 19.

Figura 19 - Subsistema 'Cálculo da Normal'.

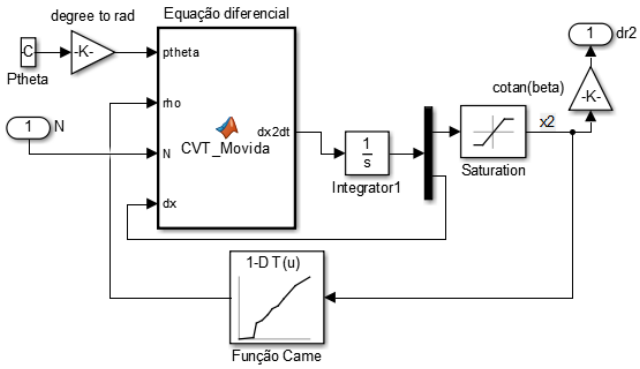


Fonte – Elaboração do autor.

3.6.Subsistema ‘CVT Movida’

O Subsistema a seguir é composto pela função diferencial que usa como entradas, a pretensão utilizada na mola angular, ‘Ptheta’, o ângulo entre os dois pratos da polia movida, a força normal atuante e a velocidade no eixo x_2 do instante anterior, como pode ser observado na Figura 20.

Figura 20 - Subsistema 'CVT_Movida'.



Fonte – Elaboração do autor.

O bloco de saturação garante que nenhum valor de x_2 ultrapasse os limites determinados. O bloco *"Função Came"* é uma *Look-up table* que relaciona o ângulo entre os pratos e a posição do prato em x_2, encontrando o valor de ρ. Por fim, o valor de x_2 é multiplicado pela cotangente de βe assim é calculado o Δr_2.

Figura - 21. Função CVT_Movida.

CVT movida/MATLAB Function*

```
function [dx2dt, a]= fcn(ptheta,rho,N,dx)
Kth=880;
beta=0.2181662;
M2=1.6;
b3=5500;
a=(N*sin(beta)-Kth*(rho+ptheta)-b3*dx);
if rho>=0&&rho<=0.5445
        if rho == 0.5445 && a>0
         ddx=0;
         dx=0;
        else
         ddx=a/M2;
        end
        if rho == 0&& a<0
        ddx=0;
        dx=0;
        end
else
        dx=0;
        ddx=0;
end
dx2dt = [dx;ddx];
end
```

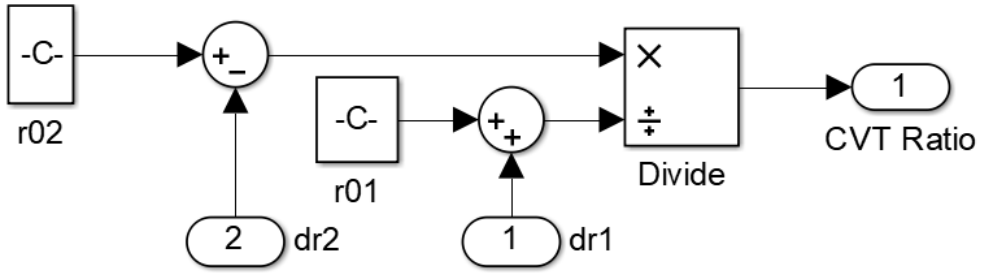
Fonte – Elaboração do autor.

A função CVT_Movida (Figura - 21), tem como função principal descobrir o valor da aceleração e velocidade do prato no eixo x. Primeiramente são definidos os valores das constantes. Posteriormente foi calculado o somatório de forças que agem sobre M_2, definido como a. Em seguida, foram implementadas as condições de contorno, a exemplo do que foi feito na seção 3.2. Por fim, foi definido o vetor de saída, dx2dt, com o primeiro termo representando a velocidade, e o segundo a aceleração.

3.8. Subsistema ‘Cálculo do CVT Ratio’

O subsistema a seguir (Figura 22) é responsável por fazer o cálculo da relação de transmissão da CVT em cada instante Primeiramente, r_{02} representa o raio inicial da CVT movida e r_{01} da CVT motora. No instante inicial, a CVT possui relação fixa, nos raios iniciais. A partir do momento que há variação nos raios, a CVT motora aumenta seu raio e a movida diminui, diminuindo sua curva de *Ratio* conforme o tempo.

Figura 22 - Subsistema 'Cálculo do CVT Ratio'.



Fonte – Elaboração do autor.

4 AQUISIÇÃO DE DADOS

Para rodar o programa e poder comparar os resultados, foi realizada uma série de medições nos parâmetros da CVT, buscando aproximar os valores utilizados na simulação com os valores reais.

Primeiramente foram medidas as massas do sistema. Utilizando uma balança digital foram medidas as massas das partes móveis das duas polias, e do braço com o contrapeso utilizado no último teste de velocidade. Os valores encontrados se encontram na Tabela 1.

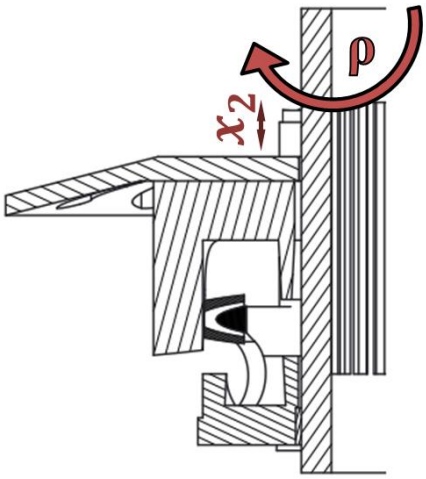
Tabela 1 – Massa dos componentes medida

Componente	Massa (g)
$\boldsymbol{m}$	135
$\boldsymbol{M}$	1508
$\boldsymbol{M_2}$	1650

Fonte – Elaboração do autor.

O came da polia motora também precisava ser implementado de alguma maneira no programa. Como os arquivos em CAD apresentam discrepâncias com o original foi realizada uma medição empírica. A medição consistiu em separar os pratos da polia motora com um espaçador de distância conhecida, e a partir daí medir a diferença no ângulo entre os pratos. O modelo utilizado apresentava furos a cada 15º, facilitando a medição. A Figura 23 explica melhor o processo de medição.

Figura 23 - Esquema de medição do came da polia motora.



Fonte – Elaboração do autor.

Por fim foi criada uma tabela com os valores de $'\rho'$ para cada $'x_2'$ (Tabela 2). Essa tabela foi inserida no modelo através de uma *"look-up table"* no '*software'* SimuLink.

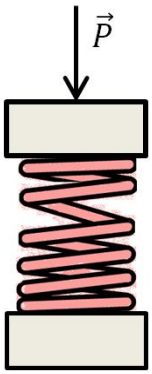
Tabela 2 – Ângulo entre as polias pela posição do prato móvel

x_2(mm)	ρ (graus)
0	0
2,5	5,7
3	7,8
4	9,6
5	12
6	15
7	16,8
8	20,4
10	26,4
12,7	31,2

Fonte – Elaboração do autor.

A elasticidade das molas também foi avaliada. Na polia motora, é utilizada uma mola linear. A Equipe possui várias molas, e suas rigidezes são determinadas a partir de um ensaio de compressão, esquematizado na Figura 24.Considerou-se que o curso da mola é maior do que o curso dos pratos móveis da CVT, dessa maneira não foi preciso analisa-

Figura 24 - Esquema de ensaio de compressão.



Fonte – Elaboração do autor.

A mola escolhida foi a utilizada no último teste da Equipe, sua rigidez compressiva está destacada na Tabela 3, que mostra a rigidez de algumas molas da Equipe.

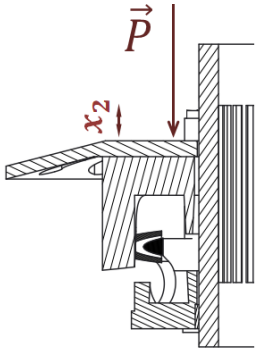
Tabela 3 - Rigidez compressiva das molas da Equipe

Mola	Rigidez (N/mm)
A2	5.80
A3	6.20
A4	6.47

Fonte – Arquivos da Equipe

A mola da polia movida, no entanto, apresenta uma rigidez torcional. Essa rigidez não foi possível ser medida com precisão, dessa maneira foi realizada uma medida empírica com o objetivo de calcular a rigidez da mola. Para isso, aplicou-se um peso na polia móvel movendo-a (Figura 25). Medindo a distância movida, através da Tabela 2 encontrou-se um ângulo. Repetiu-se o processo três vezes e a partir disso, calculou-se a rigidez torcional. (Tabela 4)

Figura 25 - Medição da rigidez da mola torcional.



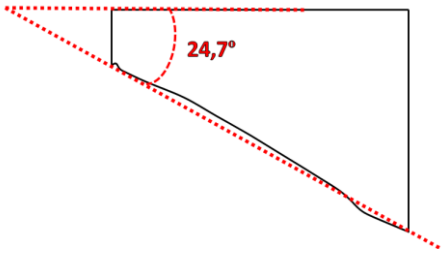
Fonte – Elaboração do autor.

Tabela 4 – Resultados da medição da rigidez da mola da polia movida

Medida	$\boldsymbol{P}$**(kg)**	$\boldsymbol{x_2}$**(mm)**	$\boldsymbol{\rho}$**(rad)**
M1	6,4	2,5	0,099484
M2	17,3	4.4	0,19008
M3	41	8	0,356047
$\boldsymbol{K_\theta}$	880 N/rad		

Por fim foi medido o ângulo da rampa. O modelo simplificado utiliza um ângulo constante, entretanto, as rampas utilizadas pela equipe não tem a superfície reta. Foi utilizada então uma aproximação segundo o esquema da Figura 26.

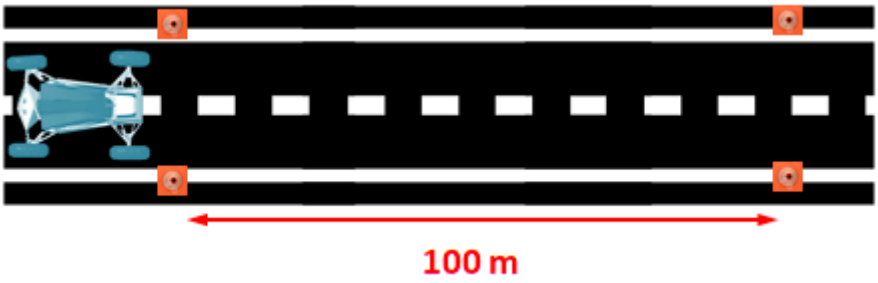
Figura 26 - Aproximação do ângulo da rampa.



Fonte – Elaboração do autor.

Além das constantes utilizadas, também foi realizado um teste em pista, com o carro real, acelerando-o a partir do repouso em uma pista reta de 100m de comprimento (Figura 27).

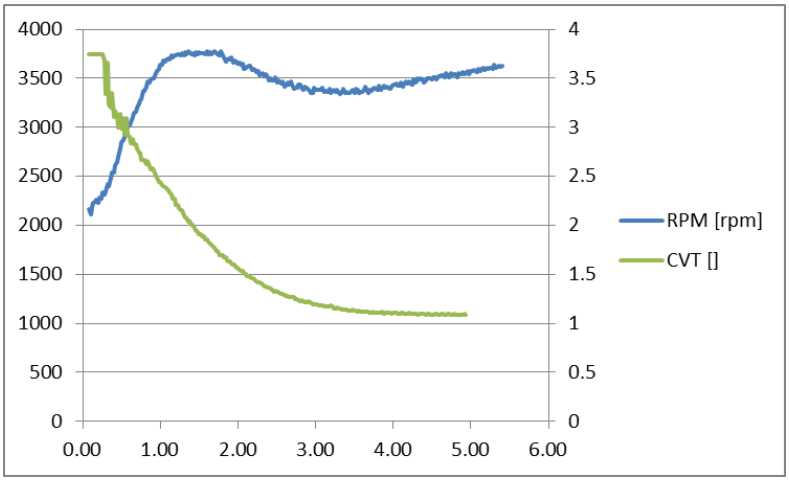
Figura 27 - Esquema representativo do teste.



Fonte – Elaboração do autor.

No teste, o carro é equipado com um *DataLogger*, aparelho responsável por medir a rotação e deslocamento do veículo durante o trajeto. Com esses dados, é possível encontrar uma entrada de rotação compatível com a realidade, podendo assim comparar os dados reais com os obtidos na simulação. A Figura 28 mostra um gráfico de rotação e relação de CVT, variando conforme o tempo. A rotação servirá de entrada para o modelo, e a relação servirá para comparação.

Figura 28 - Gráfico RPM e relação da CVT pelo tempo.

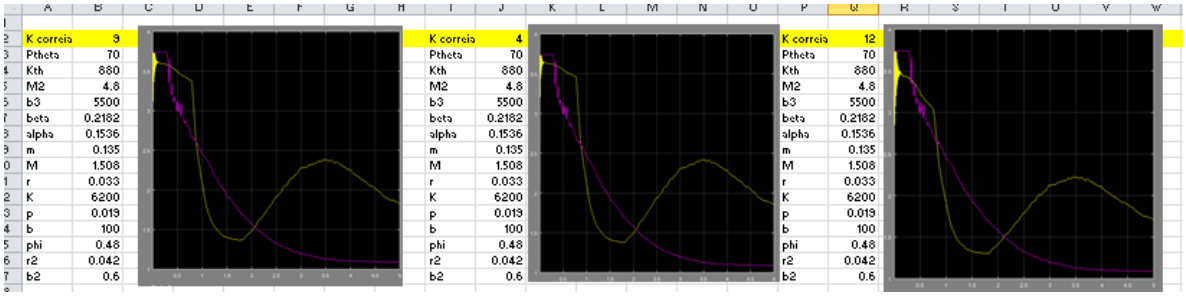


Fonte – Arquivos da Equipe

5 RESULTADOS

Para implementar o programa, foi necessário incluir alguns dados que não foram medidos, seja por imprecisão na medição, ou impossibilidade da mesma, como por exemplo a rigidez da correia, os coeficientes de atrito. Dessa forma, utilizando os dados reais, foi possível estimar esses dados. Mesmo assim, esses dados foram variados sistematicamente buscando encontrar uma combinação que representasse cada vez melhor a realidade. A Figura 29 representa uma etapa da variação das variáveis.

Figura 29 - Variação das variáveis de calibração.

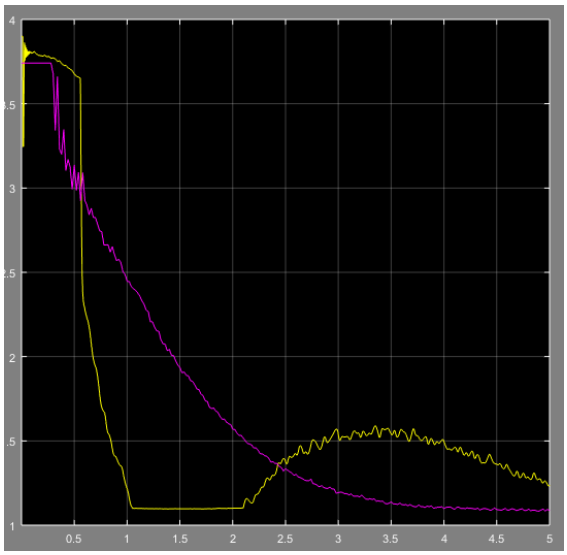


K correia	3			K correia	4							K correia	12										
Ptheta	70			Ptheta	70							Ptheta	70										
Kth	880			Kth	880							Kth	880										
M2	4.8			M2	4.8							M2	4.8										
b3	5500			b3	5500							b3	5500										
beta	0.2182			beta	0.2182							beta	0.2182										
alpha	0.1536			alpha	0.1536							alpha	0.1536										
m	0.135			m	0.135							m	0.135										
M	1.508			M	1.508							M	1.508										
r	0.033			r	0.033							r	0.033										
K	6200			K	6200							K	6200										
p	0.019			p	0.019							p	0.019										
b	100			b	100							b	100										
phi	0.48			phi	0.48							phi	0.48										
r2	0.042			r2	0.042							r2	0.042										
b2	0.6			b2	0.6							b2	0.6										

Fonte – Elaboração do autor.

Após várias iterações encontrou-se uma configuração mais parecida com o real. Os resultados dessa simulação estão representados na Figura 30, onde a linha rosa representa o comportamento real e a linha amarela o modelo virtual.

Figura 30 - Representação da última configuração.



Fonte – Elaboração do autor.

É possível observar que o modelo ficou mais sensível a variações na rotação do que o modelo real. Isso pode ser atribuído a vários motivos. Primeiramente, as forças de atrito são muito difíceis de modelar, ainda mais nesse caso. Outro aspecto que não foi considerado foi o escorregamento da correia nas polias. Um terceiro fator a ser observado é a mola torcional. Como não foi possível realizar uma medição adequada, a mola pode não apresentar um

comportamento linear como modelado. Outro motivo para a diferença do modelo real para o modelado pode ser a hipótese da elasticidade linear na correia de borracha. O corpo pode se comportar de uma maneira diferente e provocar distorções no modelo.

6-CONCLUSÃO

Por fim, concluiu-se que com apenas os dados de entrada do motor e características gerais do conjunto foi possível modelar o comportamento dinâmico da CVT. Considerando que cada vez mais as montadoras de veículos e as equipes de competição buscam por aprimorar a eficiência energética, conhecer as características do sistema sem a necessidade do desenvolvimento de um protótipo é essencial para o desenvolvimento de qualquer projeto.

Apesar das diferenças entre a situação real e a modelada, foi possível observar a semelhança entre os dois gráficos. Comparando com resultados obtidos em outros estudos, como ADAMANTI, é possível observar grande avanço na pesquisa. Um estudo futuro mais detalhado do atrito e da elasticidade da correia pode entregar ainda mais resultados. Entretanto, levando em conta o tempo e os recursos, o projeto apresentou um grande avanço nos conhecimentos sobre o funcionamento da CVT. O modelo, em breve poderá ser utilizado como pesquisa para identificar o que cada variável influencia no funcionamento da CVT, representando um grande avanço no conhecimento da equipe.

7 –REFERÊNCIAS

AAEN, O. **Clutch tunning handbook.** 8ª Edição. Racini, Winsconsin, Estados Unidos, 1989.

ADAMANTI, L.V. **Modeling of pulley based CVT systems: Extension of the CMM model with bands-segment interaction.** Trabalho de conclusão de curso – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

OLIVEIRA, P.G.C. **Simulação numérica do comportamento dinâmico de um câmbio continuamente variável utilizado em veículos do tipo baja.** Trabalho de conclusão de curso –Escola de Engenharia, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2015.

SHIGLEY, J.E; DICKER, J.J.; PENNOCK, G.R. **Theory of machines and mechanisms** Nova York, 1980.

WILLIS, C.R. **A Kinematic Analysis and Design of a Continuously Variable Transmission.** Dissertação (Mestrado) – Instituto politécnico da Virgínia, Blacksburgo,2006.