



## **BACHARELADO EM MATEMÁTICA**

Caio Domiciano Pires dos Santos

Grupoides de Lie

São Paulo

1º Semestre de 2025

Caio Domiciano Pires dos Santos

## Grupoides de Lie

Monografia apresentada à disciplina  
MAT-0148 — Introdução ao Trabalho Científico,  
Departamento de Matemática,  
Instituto de Matemática e Estatística,  
Universidade de São Paulo.

**Área de Concentração:** GEOMETRIA DIFERENCIAL

**Orientador:** Ivan Struchiner - IME-USP  
**Coorientador:** Luca Accornero - IME-USP

São Paulo

1º Semestre de 2025



O conteúdo deste trabalho é publicado sob a **Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional – CC BY 4.0**

Ficha catalográfica elaborada com dados inseridos pelo(a) autor(a)  
Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra  
Instituto de Matemática e Estatística  
Universidade de São Paulo

---

Santos, Caio Domiciano Pires dos  
Grupoides de Lie / Caio Domiciano Pires dos Santos;  
orientador, Ivan Struchiner; coorientador, Luca Accornero.  
- São Paulo, 2025.  
80 p.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -  
Matemática / Instituto de Matemática e Estatística /  
Universidade de São Paulo.  
Bibliografia

1. Grupoides. 2. Grupoides de Lie. 3. Grupo de Bisseções.  
4. Transitividade de Grupoides. 5. Algebroides de Lie.  
I. Struchiner, Ivan. II. Título.

---

Bibliotecárias do Serviço de Informação e Biblioteca  
Carlos Benjamin de Lyra do IME-USP, responsáveis pela  
estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:  
Maria Lúcia Ribeiro CRB-8/2766; Stela do Nascimento Madruga CRB 8/7534.

## **FOLHA DE AVALIAÇÃO**

**Aluno:** Caio Domiciano Pires dos Santos

**Título:** Grupoides de Lie

**Data:** 1º Semestre de 2025

### **BANCA EXAMINADORA**

Ivan Struchiner - IME-USP (Orientador)

Luca Accornero - IME-USP (Coorientador)

Cristian Ortiz - IME-USP

Clarice Netto - IME-USP

*Aos meus pais Vania e Antonio Carlos  
e aos meus avós Izilda, Rubens, Maria Rosa e Fidélis,  
por cuidarem de mim e por sempre me motivarem a sonhar.*

*E à Júlia, que, com sua doçura,  
deixou essa jornada muito mais florida.*

## AGRADECIMENTOS

Deixo aqui registrado a minha profunda gratidão à todos os envolvidos na escrita desta monografia.

Ao meu orientador, professor e amigo Ivan Struchiner, agradeço pelos anos de iniciação científica, pelas conversas enriquecedoras e por acreditar que eu seria capaz de realizar este trabalho. Agradeço também ao Luca Accornero, que chegou durante esse processo e se tornou um verdadeiro guia nessa jornada de estudos. Obrigado pelas horas de explicações e direcionamentos.

Agradeço também aos demais membros da banca examinadora, Clarice Netto e Cristian Ortiz, pela leitura cuidadosa e pelos apontamentos e correções oferecidos.

À minha família, agradeço por sempre estarem ao meu lado, dando todo o suporte que já precisei, sem o qual eu não seria capaz de concluir esta tese.

Quanto aos meus amigos, sou grato por se mostrarem interessados e me motivarem a continuar. Agradeço nominalmente à Nicole, que compartilhou comigo seu aprendizado sobre o tema deste trabalho; aos meus veteranos de curso: Sabrina, Sobreira, Eduardo, Pablo, Arthur, Maurício, Mathuzalem e Luiz Felipe, que foram fonte de inspiração e motivação durante os meus anos de IME; aos meus colegas de turma: Caio, Iuri e Paulo, por se interessarem nos meus assuntos e por me ajudarem diretamente na melhoria da apresentação dos temas deste trabalho; à minha namorada e melhor amiga Júlia Alanis, que em meus momentos mais difíceis me deu forças para continuar; e aos Comedores de Giz, meu grupo de amigos composto por Lucas Martins, Lucas Simão, Pedro, Sebastião, Clarissa, Gabriel, Fernando e Marcos Yuri, que compartilham comigo, desde o início da graduação, sua sabedoria e inúmeras horas de estudo e risadas em coletivo.

Aos professores que tive durante esses anos, obrigado por me apresentarem a beleza da matemática por meio de seus olhares tão particulares. Agradeço especialmente à professora Zara Issa Abud e ao professor Paulo Domingos Cordaro pelo carinho e pelas aulas de fazer brilhar os olhos. Sou grato também aos professores Ivan Struchiner, Leila Maria Vasconcellos, Christina Brecht e Cristian Ortiz, de quem fui monitor de disciplinas. Essas experiências me ajudaram demais a melhorar minha desenvoltura ao apresentar um conteúdo.

Por fim, agradeço à Coordenação do Bacharelado em Matemática pelo suporte e ao IME-USP como instituição, representado pela Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra e pelos setores Financeiro, Audiovisual, Apoio Institucional e Gráfica, que facilitaram meus estudos e projetos.

*You're going to fail a lot before things work out.  
Even though you'll probably fail over and over  
and over again, you have to try every time.  
You can't quit because you're afraid you might fail.*  
– Zuko, *Avatar: The Last Airbender* [27]

## RESUMO

DOM. PIRES, C. **Grupoides de Lie**. 2025. 64 p. Monografia (Bacharelado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1º Semestre de 2025.

O trabalho se centra no estudo da teoria geral de Grupoides de Lie, que é uma ferramenta importante para o estudo de simetrias em variedades. Estas estruturas de certa forma generalizam o conceito de Grupo, muito utilizado na compreensão de simetrias de um espaço, mas se aplicam em contextos mais gerais que carecem dessa simetria.

Nesta monografia, passeamos por diversos conceitos da teoria de Grupoides de Lie, desde sua construção algébrica/categórica, passando pela estrutura envolvida nos objetos que rodeiam os grupoides de Lie e até o estudo de Algebroides de Lie de Grupoides de Lie e transitividade de Grupoides. A escrita tem como objetivo tornar o assunto acessível e autocontido, de modo que há a listagem de diversos resultados da teoria de Variedades Suaves utilizados para completude. As referências principais deste trabalho foram [14], [23] e [17], e a originalidade está contida na escolha da apresentação dos tópicos e na demonstração de certos resultados que não necessariamente estão nas obras referidas.

**Palavras-chave:** Grupoides de Lie. Grupo de bisseções. Transitividade de Grupoides. Algebroides de Lie.



## ABSTRACT

DOM. PIRES, C. **Lie groupoids**. 2025. 64 p. Monografia (Bacharelado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1º Semestre de 2025.

This work focuses on the study of the general theory of Lie Groupoids, an important tool for investigating symmetries on manifolds. These structures, in a certain sense, generalize the concept of a Group—widely used in understanding the symmetries of a space—but apply to more general contexts that may lack such symmetry.

In this monograph, we explore various concepts from Lie groupoid theory, ranging from their algebraic/categorical construction, through the structures involved in the objects surrounding Lie groupoids, and up to the study of the Lie Algebroid of Lie Groupoids and the transitivity of Groupoids. The writing aims to make the subject accessible and self-contained; accordingly, several results from the theory of Smooth Manifolds used for completeness are listed. The main references for this work were [14], [23] and [17], and its originality lies in the chosen presentation of the topics and in the proof of certain results that are not necessarily found in the referenced works.

**Keywords:** Lie Groupoids. Group of bisections. Groupoid transitivity. Lie Algebroids.



# Lista de Figuras

1	Retângulo com a malha (parede com azulejos), com os grupos de isotropia de um elemento de cada órbita destacado por uma figura que possui o mesmo grupo de automorfismos. . . . .	4
1.1	Visualização da seção $s$ de um fibrado $E$ sobre $M$ (fonte: Wikipedia) . . . . .	23

## LISTA DE SÍMBOLOS

$M$	Espaço base do grupoide
$\mathcal{G}$	Espaço total do grupoide
$\mathcal{G} \rightrightarrows M$	Grupoide $\mathcal{G}$ sobre $M$
$s$	Projeção de saída ( <i>source map</i> )
$t$	Projeção de término ( <i>target map</i> )
$\mathcal{G}^{(k)}$	Conjunto de $k$ -flexas componíveis
$m$	Mapa de multiplicação
$u$	Seção unidade
$1_x$	Flecha identidade sobre $x$
$i$	Mapa de Inversão
$g^{-1}$	Flecha inversa de $g$
$y \xleftarrow{g} x$	Flexa $g$ com $s(g) = x$ e $t(g) = y$
$\mathcal{G}_x$	Grupo de Isotropia em $x$
$\mathcal{O}_x$	Órbita de $x$
$s^{-1}(x)$	Fibra $s$ em $x$
$t^{-1}(y)$	Fibra $t$ em $y$
$M/\mathcal{G}$	Espaço de órbitas de $\mathcal{G}$
$\Delta_M$	Diagonal de $M \times M$
$\{*\}$	Conjunto unitário
$\text{id}_X$	Mapa identidade em $X$
$\text{pr}_j$	Projeção na $j$ -ésima coordenada
$\text{Pair}(M)$	Grupoide do par
$G \ltimes M$	Grupoide de ação
$\varphi^*\mathcal{G}$	<i>Pull-back</i> de $\mathcal{G}$ via $\varphi$
$E \xrightarrow{\pi} M$	Fibrado sobre $M$
$\mathcal{G} \times_s E$	Produto fibrado de $\mathcal{G}$ e $E$ sobre $M$ com respeito à projeção $s$
$b : M \rightarrow \mathcal{G}$	Bisseção de $\mathcal{G}$
$b_1 \bullet b_2$	Bisseção produto
$\Gamma(\mathcal{G}), \text{Bis}(\mathcal{G})$	Grupo de Bisseções de $\mathcal{G}$
$T_p M$	Espaço tangente à $M$ em $p$
$df_p$	Diferencial do mapa suave $f$ em $p$
$\mathbb{R}^n$	Espaço euclidiano de dimensão $n$

$[\cdot, \cdot]$	Colchete de Lie
$\mathfrak{X}(M)$	Espaço de campos de vetores na variedade $M$
$\text{Ker}(T)$	Núcleo da transformação linear $T$
$P \rightarrow M$	Fibrado principal sobre $M$
$GL(E)$	Grupoide linear geral associado ao fibrado $E$
$\Pi(M)$	Grupoide fundamental
$\mathcal{G}(P)$	Grupoide de Gauge de $P$
$T^s\mathcal{G}$	Espaço tangente às $s$ -fibras
$\Gamma(T^s\mathcal{G})$	Seções do espaço tangente às $s$ -fibras
$\mathfrak{X}_{inv}^s\mathcal{G}$	Espaço de campos invariantes à direita em $\mathcal{G}$



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Grupoides abstratos</b>	<b>7</b>
1.1 Grupoides, Fibras, Isotropias e Órbitas . . . . .	7
1.2 Primeiros exemplos . . . . .	11
1.3 Ação da isotropia nas fibras . . . . .	14
1.4 Construções Categóricas . . . . .	16
1.4.1 Morfismos . . . . .	16
1.4.2 Subgrupoides . . . . .	17
1.4.3 Pull-back . . . . .	18
1.5 Ação de grupoides em fibrados . . . . .	20
1.6 Bisseções . . . . .	22
1.6.1 Estrutura de Grupo . . . . .	23
1.6.2 Outro modelo para bisseções . . . . .	26
<b>2 A Linguagem da Geometria</b>	<b>29</b>
2.1 Variedades suaves . . . . .	29
2.2 Grupos de Lie . . . . .	31
2.3 Álgebras de Lie . . . . .	32
2.4 Fibrados . . . . .	34
<b>3 Grupoides de Lie</b>	<b>37</b>
3.1 Uma breve menção aos grupoides topológicos . . . . .	37
3.2 Passagem para o caso diferenciável . . . . .	39
3.2.1 Exemplos . . . . .	40
3.2.2 Bisseções globais e locais . . . . .	41
3.3 Estruturas dos grupoides de Lie . . . . .	44
3.4 Mais exemplos . . . . .	48

3.5	Transitividade . . . . .	52
3.6	Algebroide de Lie do Grupoide de Lie . . . . .	55



# Introdução

Da teoria de Grupos, trazemos uma noção de simetria que corresponde a analisar o grupo de automorfismos de um certo objeto geométrico. Apesar disso servir muito bem para caracterizar diversos tipos de simetrias (em geral, de estruturas homogêneas), muitos objetos apresentam o que reconhecemos intuitivamente como simetrias, mas apresentam poucos ou nenhum automorfismo não trivial. É por conta dessa brecha que os grupos não enxergam que essa monografia tem razão de existir. Vejamos agora, através de um exemplo, o que falta nos grupos para eles perceberem mais simetrias e qual é o objeto correto para se analisar simetrias locais de objetos geométricos.

Consideremos uma *malha* retangular em  $\mathbb{R}^2$  com retângulos de tamanho  $2 \times 1$ . Essa malha pode ser representada por

$$X = H \cup V, \text{ em que } H = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, V = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$$

Cada componente conexa de  $\mathbb{R}^2 - X$  será chamada de *azulejo*. Aqui, então, estamos nos deparando com uma parede infinita. A pergunta que a teoria de Grupos faria é: qual o grupo de automorfismos dessa malha? Note que as transformações que deixam a malha invariante formam um subgrupo do grupo de movimentos rígidos do plano  $\text{Eucl}(\mathbb{R}^2)$  e são completamente descritas por:

- i ) Translações:  $(x, y) \mapsto (x + 2m, y + n), \quad m, n \in \mathbb{Z}$
- ii ) Reflexões nas retas da malha:  $(x, y) \mapsto (x, n - y)$  e  $(x, y) \mapsto (2m - x, y), \quad m, n \in \mathbb{Z}$
- iii ) Reflexões nas mediatrizes da malha:  $(x, y) \mapsto (x, \frac{n}{2} - y)$  e  $(x, y) \mapsto (m - x, y), \quad m, n \in \mathbb{Z}$

Na verdade, há mais transformações do que as listadas (como rotação de 180, reflexões deslizantes, etc.), mas que podem ser geradas a partir dessas. Assim, a resposta para a pergunta é que o grupo de automorfismos da malha é o grupo gerado por essas transformações, que em particular tem infinitos elementos. Note que o mesmo grupo de simetrias iria surgir se trocássemos a

malha apenas pelos vértices dela, o que já parece estranho, uma vez que são objetos nitidamente distintos. Mais estranho ainda se nos restringirmos a um domínio  $R = [0, 2m] \times [0, n]$  finito do, como uma parede com azulejos: a quantidade de simetrias descritas pela teoria de grupos cai vertiginosamente, restando apenas 4 elementos (mesmo grupo de automorfismos que de um retângulo, apesar de que, intuitivamente, uma parede com azulejos pareça ter mais simetrias que uma parede lisa). Esse fenômeno aponta que os grupos de simetria não estão captando a informação de simetria interna/local dos azulejos, nem mesmo as suas repetições ao longo do domínio.

Logo, vamos construir a noção que irá capturar aquilo que os grupos de automorfismos não enxergam. Considere o *grupoide de simetrias locais de  $R$*

$$\mathcal{G}_{loc} \doteq \{(\gamma, x) \in \text{Eucl}(\mathbb{R}^2) \times R : \gamma(x) \in R \text{ e } \exists U \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ aberto t.q. } x \in U, \gamma(U \cap \mathcal{P}_i) \subseteq \mathcal{P}_i, \forall i\},$$

em que  $\mathcal{P}_1 = R \cap X$ ,  $\mathcal{P}_2 = R - \mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_3 = \mathbb{R}^2 - R$ . Esse conjunto de pares de movimentos rígidos do plano e pontos de  $B$  é tal que, para cada ponto  $x \in R$ , as transformações que podem ser aplicadas a ele são aquelas que

1. mapeiam  $x$  em outro ponto também em  $R$ ;
2. mapeiam cada ponto uma vizinhança aberta de  $x$  em um ponto correspondente que tem a mesma natureza do ponto original.

Por natureza do ponto entende-se uma das três partes em que dividiu-se o plano, sendo elas:  $\mathcal{P}_1$  a malha interceptando  $R$  (ou o rejunte da parede);  $\mathcal{P}_2$  o interior dos azulejos da parede; e  $\mathcal{P}_3$  o exterior da parede. Dessa maneira, a condição 2. está dizendo que, se um ponto  $y$  em uma vizinhança aberta  $U$  de  $x$  (suficientemente pequena) está na parte  $\mathcal{P}_i$  do plano, então os movimentos rígidos que podemos considerar em  $\mathcal{G}_{loc}$  com esse ponto base são aqueles que, além de mandarem  $x$  em um ponto de  $R$ , também mandam  $y$  para um ponto na mesma parte  $\mathcal{P}_i$  que estava antes. Por exemplo, se  $y$  estava no interior de um azulejo, as transformações com base em  $x$  a serem consideradas são aquelas que mandam  $y$  para dentro de um azulejo. Esse conjunto é interessante pois podemos operar com os seus elementos através de uma espécie de multiplicação: dados dois elementos  $(\eta, y)$  e  $(\gamma, x)$  em  $\mathcal{G}_{loc}$ , definimos a multiplicação entre eles por

$$(\eta, y) \cdot (\gamma, x) \doteq (\eta \circ \gamma, x),$$

mas apenas se  $y = \gamma(x)$ . Podemos pensar esses elementos como flechas que levam pontos base e uma pequena vizinhança deles para outros cantos do domínio  $R$ . O que essa condição para

a operação está dizendo é o que já está claro: só é possível multiplicar elementos se o primeiro deles terminar aonde o próximo começar. Além dessa condição, a multiplicação em  $\mathcal{G}_{loc}$  possui as seguintes propriedades:

- i) Ela é associativa, ou seja, se  $((\mu, z) \cdot (\eta, y)) \cdot (\gamma, x)$  ou  $(\mu, z) \cdot ((\eta, y) \cdot (\gamma, x))$  estiverem definidas, então a outra também estará e elas serão iguais;
- ii) Para cada elemento  $(\gamma, x) \in \mathcal{G}_{loc}$ , existem elementos identidade à direita  $1_x \doteq (\text{id}_{\mathbb{R}^2}, x)$  e à esquerda  $1_{\gamma(x)} \doteq (\text{id}_{\mathbb{R}^2}, \gamma(x))$ , de modo que  $1_{\gamma(x)} \cdot (\gamma, x) = (\gamma, x) = (\gamma, x) \cdot 1_x$ ;
- iii) Toda flecha  $(\gamma, x)$  admite uma flecha inversa  $(\gamma^{-1}, \gamma(x))$  tal que  $(\gamma, x) \cdot (\gamma^{-1}, \gamma(x)) = 1_{\gamma(x)}$  e  $(\gamma^{-1}, \gamma(x)) \cdot (\gamma, x) = 1_x$ .

Esse conjunto, segundo a definição que daremos no Capítulo 1, é um grupoide (como sugerimos no nome) e terá muitas propriedades. Por ora, basta entender dois conceitos relacionados a ele. Dois pontos de  $R$  estarão na mesma *órbita* se existir uma flecha que leva um ponto a outro. Note que se  $x \in \mathcal{P}_i$  e  $y \in \mathcal{P}_j$ , com  $i \neq j$ , então com certeza  $x$  e  $y$  não estão na mesma órbita. Além disso, definimos a *isotropia* de  $x \in R$  como o conjunto das flechas que começam e terminam em  $x$ . Veremos adiante que a isotropia forma um grupo. Esses dois conceitos nos permitem catalogar os pontos de  $R$  de duas maneiras: as órbitas nos dizem quais pontos são parecidos entre si, considerando uma vizinhança ao redor deles. Já as isotropias nos dizem, fixado um ponto, quais são as transformações que o mantêm parado. Pensando nas flechas como simetrias do nosso objeto retangular, estamos no caminho de identificar suas simetrias locais.

Analisando bem o objeto que temos em mãos, podemos calcular exatamente quais são todas as suas órbitas e isotropias. Note que pontos em uma mesma órbita terão a mesma isotropia, uma vez que pontos na mesma órbita são "parecidos". Assim, está listado abaixo a caracterização completa das simetrias de  $R$  com base nessas duas ferramentas, que pode ser visualizado na figura 1.

Órbitas	Isotropias
$\mathcal{O}_1 = \text{interior dos azulejos}$	$\mathcal{G}_1 = O(2)$
$\mathcal{O}_2 = \text{rejunte/arestas internas dos azulejos}$	$\mathcal{G}_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
$\mathcal{O}_3 = \text{vértices dos azulejos}$	$\mathcal{G}_3 = D_4$
$\mathcal{O}_4 = \text{rejunte/arestas no bordo de } R$	$\mathcal{G}_4 = \mathbb{Z}_2$
$\mathcal{O}_5 = \text{vértices em "T" no bordo de } R$	$\mathcal{G}_5 = \mathbb{Z}_2$
$\mathcal{O}_6 = \text{vértices dos cantos de } R$	$\mathcal{G}_6 = \mathbb{Z}_2$

Isso é impressionante, ainda mais comparado ao resultado obtido pela análise através de

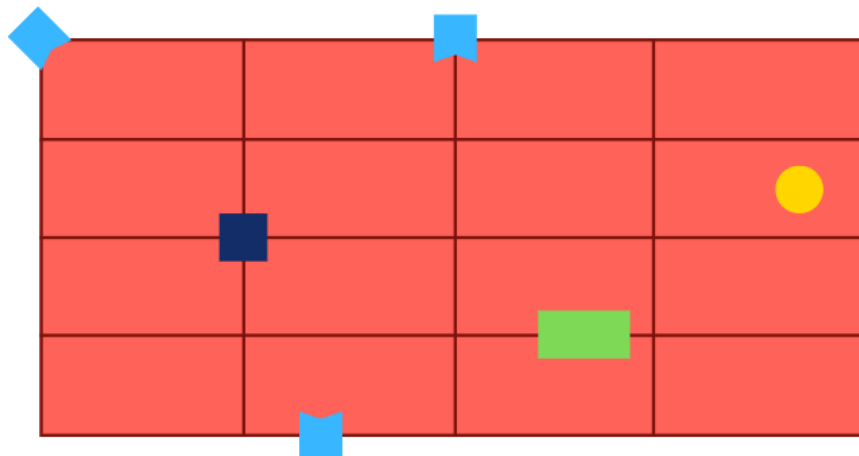


Figura 1: Retângulo com a malha (parede com azulejos), com os grupos de isotrofia de um elemento de cada órbita destacado por uma figura que possui o mesmo grupo de automorfismos.

grupos. Se quisermos ir além e restringir nosso grupoide a apenas os pontos de vértice de  $R$ , obtemos um objeto finito, cujos pontos estão relacionados através das órbitas e, sobre cada ponto, sabemos dizer quais são as suas simetrias! Acabamos de colocar uma estrutura geométrica em um objeto finito.

Neste ponto, espero ter convencido o leitor de que vale a pena estudar e buscar entender os grupoides e seus limites. Este exemplo foi tirado do artigo [21], no qual há várias outras aplicações de grupoides, inclusive na Análise, e serve como pontapé inicial para o estudo que prosseguirá nas demais páginas desta monografia. Um seminário sobre esta monografia foi apresentado pelo autor e se encontra gravado no seguinte link: [Apresentação da disciplina MAT0148](#).

Para facilitar a leitura, deixo aqui um esclarecimento sobre o conteúdo dos capítulos subsequentes. O Capítulo 1 tem caráter introdutório e aborda a parte algébrica e categórica da teoria de Grupoides de Lie. Nele, os passos são muito detalhados para garantir a compreensão do leitor no fundamento da teoria. Para facilitar a transição desse contexto abstrato para o de Grupoides de Lie (grupoides com estrutura de variedade suave), há o Capítulo 2. O intuito dele é ser expositivo, apontando conceitos e resultados da teoria de Variedades suaves, Grupos e Álgebras de Lie e Fibrados pertinentes à teoria de Grupoides de Lie. Enfim, no Capítulo 3 se culmina tudo o que foi desenvolvido até então com o estudo de Grupoides de Lie, com resultados acerca da estrutura desses objetos, assim como uma análise minuciosa de 3 principais modelos portotípicos: grupoides transitivos, totalmente intransitivos e de ação.

A teoria de Grupoides de Lie é uma ferramenta extremamente poderosa em Geometria Diferencial. A título de curiosidade, algumas das áreas que utilizam esses objetos são a teoria de Folheações e estruturas transversais, a teoria de Lie e problemas de integrabilidade, estruturas de Dirac (em que os algebroides de Courant são objeto central), as teorias de *Orbifolds* e *Stacks*

diferenciáveis, assim como o notável estudo de  $G$ -estruturas e na Física Matemática, com as teorias de Calibre. As referências [16], [14], [13], [23], [24], [25] e [26] contém alguns desses usos de Grupoides de Lie, que não serão abordados neste trabalho.

---

# Capítulo 1

## Grupoides abstratos

“It turns out that the symmetry, and hence much of the structure, of such objects can be characterized algebraically if we use groupoids and not just groups.”

---

A. Weinstein [21]

Antes de compreender os grupoides de Lie, é preciso se familiarizar com a noção de grupoides abstratos, entender como eles se comportam e como manuseá-los algebricamente. Assim, neste capítulo serão introduzidos todos os conceitos iniciais da teoria que depois serão levados ao contexto diferenciável, a saber: as definições de grupoide abstrato, grupos de isotropia e órbitas, transitividade de grupoides, que serão ilustrados com diversos exemplos; as propriedades de alguns objetos que permeiam os grupoides; e, por fim, construções a partir da noção de grupoide, sendo elas categóricas (morfismos, subgrupoides, pull-back) ou específica dos grupoides, como o importante grupo de bisseções.

### 1.1 Grupoides, Fibras, Isotropias e Órbitas

**Definição 1.1.** Um *Grupoides (abstrato)* é uma categoria (pequena) em que todo morfismo é um isomorfismo. De maneira mais explícita, é um par  $(\mathcal{G}, M)$  em que os conjuntos  $\mathcal{G}$  (de flechas) e  $M$  (de objetos) são munidos dos seguintes mapas estruturais:

- Os mapas (ou projeções) de *saída* (*source*) e *término* (*target*)

$$s, t : \mathcal{G} \longrightarrow M$$

são sobrejetores e associam cada flecha  $g \in \mathcal{G}$  ao seu elemento de saída  $s(g)$  e término  $t(g)$ .

Escrevemos

$$y \xleftarrow{g} x$$

para indicar que  $s(g) = x$  e  $t(g) = y$ . A partir desses mapas, definimos a *âncora* do grupoide como sendo o mapa

$$t \times s : \mathcal{G} \ni g \mapsto (t(g), s(g)) \in M \times M$$

- O mapa de *multiplicação*

$$m : \mathcal{G}^{(2)} \longrightarrow \mathcal{G}$$

definido no conjunto  $\mathcal{G}_2 = \{(g, h) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} : s(g) = t(h)\}$  das flechas componíveis e dado por  $(g, h) \mapsto m(g, h) \doteq g \cdot h \doteq gh$ .

- O mapa (ou seção) *unidade*

$$u : M \longrightarrow \mathcal{G}$$

associa  $x \in M$  à flecha unidade/identidade  $1_x \in \mathcal{G}$  em  $x$ .

- O mapa *inversão*

$$i : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$$

associa  $g$  a sua inversa  $i(g) = g^{-1}$ .

Tais mapas satisfazem:

- *Lei da multiplicação:*  $t(m(g, h)) = t(g)$  e  $s(m(g, h)) = s(h)$ ,  $\forall (g, h) \in \mathcal{G}^{(2)}$ ,

$$x \xleftarrow{g} y \xleftarrow{h} z \implies x \xleftarrow{gh} z$$

- *Lei da associatividade:*  $m(g, m(h, k)) = m(m(g, h), k)$ ,  $\forall g, h, k \in \mathcal{G}$  componíveis,

$$x \xleftarrow{g} y \xleftarrow{h} z \xleftarrow{k} w \implies g(hk) = (gh)k$$

- *Lei das unidades:*  $\forall x \in M, \exists u(x) \doteq 1_x \in \mathcal{G}$  tal que  $s(1_x) = t(1_x) = x$ , i.e.,

$$x \xleftarrow{1_x} x, \text{ e } \forall g \in \mathcal{G}, 1_{s(g)}g = g1_{t(g)} = g$$



- *Lei das inversas:*  $\forall g \in \mathcal{G}, \exists i(g) \doteq g^{-1}$  tal que  $s(g^{-1}) = t(g)$ ,  $t(g^{-1}) = s(g)$ , i.e.,

$$x \xleftarrow{g} y \implies y \xleftarrow{g^{-1}} x, \quad \text{e} \quad gg^{-1} = 1_x = 1_{t(g)}, \quad g^{-1}g = 1_y = 1_{s(g)}$$

Dizemos que  $\mathcal{G}$  é um grupoide sobre  $M$  e denotamos por  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ . As duas setas de  $\mathcal{G}$  para  $M$  representam os dois mapas de projeção  $s$  e  $t$ .

**Observação 1.2.** De maneira geral, para falarmos melhor em associatividade, definimos

$$\mathcal{G}^{(k)} = \{(g_1, \dots, g_k) \in \mathcal{G}^k : s(g_i) = t(g_{i+1}), i = 1, 2, \dots, k\}$$

como o conjunto das  $k$ -flexas componíveis.

**Observação 1.3.** Tanto as flechas identidade  $1_x \in \mathcal{G}$  quanto as inversas  $g^{-1} \in \mathcal{G}$  respectivas a cada flecha  $g \in \mathcal{G}$  são únicas. De fato,

- Se  $1_x, 1'_x \in \mathcal{G}$  são identidades em  $x$ , então pela *Lei das unidades*,  $1_x = 1_x 1'_x = 1'_x$ ;
- Se  $k, h \in \mathcal{G}$  são inversas de  $g \in \mathcal{G}$ , então pela *Lei das inversas*,  $k = k 1_{t(g)} = kgh = 1_{s(g)}h = h$ .

**Definição 1.4.** Seja  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  um grupoide. Dado  $x \in M$ , chamamos os conjuntos  $s^{-1}(x)$  e  $t^{-1}(x)$  de  $s$ -fibra sobre  $x$  e  $t$ -fibra sobre  $x$ , respectivamente. A isotropia em  $x$  é definida por

$$\mathcal{G}_x = s^{-1}(x) \cap t^{-1}(x) \subseteq \mathcal{G}$$

Ainda, definimos a órbita de  $x$  como sendo

$$\mathcal{O}_x = \{t(g) : g \in s^{-1}(x)\} \subseteq M$$

Note que o grupoide  $\mathcal{G}$  pode ser escrito como união disjunta tanto das  $s$ -fibras quanto das  $t$ -fibras, ou seja,  $\mathcal{G} = \bigsqcup_{y \in M} s^{-1}(y) = \bigsqcup_{x \in M} t^{-1}(x)$ .

**Observação 1.5.** Uma relação de equivalência em um conjunto  $M$  pode ser vista como um subconjunto  $R$  de  $M \times M$  satisfazendo o seguinte:

- Reflexividade:

$$(x, x) \in R, \quad \forall x \in M;$$

- Simetria:

$$(y, x) \in R \implies (x, y) \in R, \quad \forall x, y \in M;$$

- Transitividade:

$$(z, y) \in R, (y, x) \in R \implies (z, x) \in R, \quad \forall x, y, z \in M.$$

Assim, uma relação de equivalência em  $M$  corresponde a uma decomposição de  $M$  na união disjunta de subconjuntos de  $M$ , a saber, suas classes de equivalência. Reciprocamente, uma decomposição de  $M$  em subconjuntos disjuntos determina uma única relação de equivalência em  $M$ , de modo que os subconjuntos correspondem às classes de equivalência da relação.

De maneira análoga, uma função  $\phi : M \longrightarrow N$  define uma relação de equivalência  $R(\phi)$  cujas classes de equivalência são os conjuntos de nível de  $\phi$ , isto é:

$$y \sim x \iff (y, x) \in R(\phi) \iff \phi(y) = \phi(x), \quad \forall x, y \in M.$$

Reciprocamente, dada uma relação  $R$  em  $M$ , denotemos por  $M/R$  o conjunto das classes de equivalência e por  $\pi_R : M \longrightarrow M/R, x \longmapsto [x]_R$  a projeção. Logo, toda relação de equivalência é da forma  $R = R(\pi_R)$ .

**Proposição 1.6.** *Seja  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  um grupoide. Então,*

- i) As isotropias  $\mathcal{G}_x$  são grupos, para todo  $x \in M$ ;*
- ii) A relação  $x \sim_{\mathcal{G}} y \iff t^{-1}(x) \cap s^{-1}(y) \neq \emptyset$  é de equivalência;*
- iii) A órbita  $\mathcal{O}_x$  é a classe de equivalência de  $x \in \mathcal{G}$  pela relação  $\sim_{\mathcal{G}}$  e, assim,*

$$M/\mathcal{G} \doteq M/\sim_{\mathcal{G}} = \{\mathcal{O}_x : x \in M\}.$$

*Esse quociente é chamado de espaço de órbitas de  $\mathcal{G}$ .*

**Demonstração.** Dado  $x \in M$ , para todo  $g, h, k \in \mathcal{G}_x$ , como  $s(g) = t(h)$  e  $s(h) = t(k)$ , então  $g(hk) = (gh)k$ , pela *Lei da associatividade*. Pela *Lei das unidades*, existe  $1_x \in \mathcal{G}_x \subseteq \mathcal{G}$  tal que  $g1_x = g = 1_xg$ . Ainda, pela *Lei das inversas*, existe  $i(g) = g^{-1} \in \mathcal{G}_x$  tal que

$$gg^{-1} = 1_{t(g)} = 1_x = 1_{s(g)} = g^{-1}g$$

Logo, (i) está provado. Agora, sobre a relação definida, note que pela *Lei das unidades*, dado  $x \in M$ , existe  $1_x \in \mathcal{G}$ , de modo que  $1_x \in \mathcal{G}_x \implies s^{-1}(x) \cap t^{-1}(x) \neq \emptyset \implies x \sim_{\mathcal{G}} x$ . Se  $x \sim_{\mathcal{G}} y$ , então existe  $g \in \mathcal{G}$  tal que  $t(g) = x$  e  $s(g) = y$ . Então a *Lei das inversas* garante que existe  $g^{-1} \in t^{-1}(y) \cap s^{-1}(x) \implies y \sim_{\mathcal{G}} x$ . Por fim, se  $x \sim_{\mathcal{G}} y$  e  $y \sim_{\mathcal{G}} z$ , então existem  $g, h \in \mathcal{G}$

tais que  $t(g) = x, s(g) = y = t(h), s(h) = z$ . Pela *Lei da multiplicação*, existe  $gh \in \mathcal{G}$  tal que  $gh \in t^{-1}(x) \cap s^{-1}(z)$  e, portanto,  $x \sim_{\mathcal{G}} z$ , o que termina a prova de (ii). O item (iii) segue imediatamente de (ii) ■

**Definição 1.7.** Seja  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  um grupoide. Dizemos que  $\mathcal{G}$  é *transitivo* se  $\mathcal{O}_x = M, \forall x \in M$ . Por outro lado,  $\mathcal{G}$  é dito *totalmente intransitivo* se  $\mathcal{O}_x = \{x\}, \forall x \in M$ .

**Definição 1.8.** Seja  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  um grupoide. Se  $s = t$ , dizemos que  $\mathcal{G}$  é um *fibrado de grupos (abstrato)* sobre  $M$ .

**Proposição 1.9.** Seja  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  um grupoide sobre  $M$ . Então,

- i)  $\mathcal{G}$  é transitivo se, e somente se, a âncora do grupoide é sobrejetora;
- ii)  $\mathcal{G}$  é totalmente intransitivo se, e somente se, é um fibrado de grupos.

**Demonstração.** i)  $\mathcal{O}_x = M, \forall x \in M \iff \forall x \in M, \forall y \in M, \exists g \in s^{-1}(x)$  tal que  $t(g) = y \iff \forall x, y \in M, \exists g \in s^{-1}(x)$  tal que  $(t \times s)(g) = (y, x) \iff (t \times s)$  é sobrejetora;

ii)  $\mathcal{O}_x = \{x\}, \forall x \in M \iff \forall x \in M, \forall g \in s^{-1}(x), t(g) = x \iff \forall g \in \mathcal{G}, s(g) = t(g)$  ■

**Observação 1.10.** Considerando a âncora do grupoide, temos a seguinte regra geral

$$\Delta_M \subseteq \text{Im}(t, s) \subseteq M \times M,$$

em que as igualdade à esquerda e à direita configuram os casos totalmente intransitivo e transitivo, respectivamente.

## 1.2 Primeiros exemplos

Neste ponto, podemos começar a apresentar alguns exemplos de grupoides abstratos.

**Exemplo 1.11.** Se  $M$  é um conjunto unitário  $\{*\}$ , a definição de grupoide se reduz à de grupo. Assim, grupos são grupoides com base trivial. Isso já aponta a dimensão da generalização que está sendo desenvolvida.

Note também que todo grupoide dessa forma é trivialmente transitivo, uma vez que a órbita do único ponto a se considerar é todo o conjunto de flexas.

**Exemplo 1.12.** No extremo oposto do exemplo 1.11 está a identificação de  $M$  como um grupoide sobre si mesmo. Explicitamente, seja  $M$  um conjunto e considere  $\mathcal{G} \doteq M, s = t = \text{id}_M$  e a multiplicação definida em  $\Delta_M$  dada por

$$m(x, x) = x, \quad \forall x \in M,$$

de modo que  $1_x = x$  e  $x^{-1} = x$ . Assim,  $M \rightrightarrows M$  é um grupóide. Note que ele é totalmente intransitivo, uma vez que sobre cada ponto  $x$  só há a flexa  $1_x$ .

Os exemplos acima são casos extremos das definições feitas até aqui. A seguir, introduziremos alguns exemplos que nos acompanharão pela teoria e que servirão para nos acostumarmos com as noções já introduzidas.

**Exemplo 1.13.** Seja  $M$  um conjunto e defina  $\mathcal{G} \doteq M \times M$ ,  $s = \text{pr}_2$ ,  $t = \text{pr}_1$  e multiplicação dada por

$$m((z, y), (y, x)) \doteq (z, x), \quad \forall x, y, z \in M.$$

Por simplicidade, denotamos a multiplicação por  $m((z, y), (y, x)) = (z, y)(y, x)$ . Assim, temos que  $1_x = (x, x)$  e  $i((y, x)) = (y, x)^{-1} = (x, y)$ . Este grupóide é chamado de *grupóide do par*, denotado por  $\text{Pair}(M)$ , é transitivo e tem isotropias triviais.

**Exemplo 1.14.** Sejam  $M, N$  conjuntos e  $\phi : M \rightarrow N$  uma função. Considerando  $\mathcal{G} \doteq R(\phi)$ , como em 1.5, com  $s = \text{pr}_2|_{R(\phi)}$ ,  $t = \text{pr}_1|_{R(\phi)}$  e multiplicação dada por

$$(z, y)(y, x) \doteq (z, x), \quad \forall x, y, z \in M \text{ com } \phi(x) = \phi(y) = \phi(z),$$

de modo que novamente  $1_x = (x, x)$  e  $(y, x)^{-1} = (x, y)$ . Assim, esse grupóide possui grupos de isotropia triviais e órbitas não triviais. Esse exemplo generaliza os dois anteriores: se  $M = N$  e  $\phi = \text{id}$ , obtemos 1.12, enquanto se  $N$  se reduzir a um ponto, obtemos 1.13.

**Exemplo 1.15.** Sejam  $M$  um conjunto e  $G$  um grupo. Defina  $\mathcal{G} \doteq M \times G$  e  $s = t = \text{pr}_M$  com multiplicação dada por

$$(x, g)(x, h) = (x, gh), \quad \forall x \in M, g, h \in G.$$

Então, temos que  $1_x = (x, 1_G)$  e  $(x, g)^{-1} = (x, g^{-1})$ , em que  $1_G \in G$  é o elemento neutro (identidade) do grupo. Note que as órbitas desse grupóide são triviais e, então, o grupóide é totalmente intransitivo. Além disso, as isotropias são todas isomorfas ao grupo  $G$ .

**Exemplo 1.16.** Novamente, sejam  $M$  um conjunto e  $G$  um grupo. Consideremos agora  $\mathcal{G} \doteq M \times G \times M$  com  $s = \text{pr}_3$ ,  $t = \text{pr}_1$  e multiplicação dada por

$$(z, h, y)(y, g, x) = (z, hg, x), \quad \forall x, y, z \in M, g, h \in G,$$

de modo que  $1_x = (x, 1_G, x)$  e  $(y, h, x)^{-1} = (x, h^{-1}, y)$ . Este grupóide é chamado de *grupóide trivial*. Assim como o anterior, os grupos de isotropia desse grupóide são todos isomorfos ao

grupo  $G$ . De fato, dado  $x \in M$ ,

$$s^{-1}(x) \cap t^{-1}(x) = \text{pr}_3^{-1}(x) \cap \text{pr}_1^{-1}(x) = \{(x, g, x) \in \mathcal{G} : g \in G\} \cong G$$

Ainda, a órbita para qualquer ponto é total, porque fixado  $x \in M$  e dado  $y \in M$ , a flecha  $(y, 1_G, x) \in s^{-1}(x)$ , em particular, é tal que  $t((y, 1_G, x)) = y$ . Logo, esse grupoide é também transitivo.

**Exemplo 1.17.** Sejam  $M, N$  conjuntos,  $G$  um grupo e  $\phi : M \longrightarrow N$  uma função. Defina

$$\mathcal{G}(\phi, G) \doteq \{(y, g, x) \in M \times G \times M : \phi(y) = \phi(x)\},$$

com  $s = \text{pr}_3|_{\mathcal{G}(\phi, G)}$ ,  $t = \text{pr}_1|_{\mathcal{G}(\phi, G)}$  e multiplicação dada por

$$(z, h, y)(y, g, x) = (z, hg, x), \quad \forall x, y, z \in M, \phi(x) = \phi(y) = \phi(z), g, h \in G,$$

de modo que  $1_x = (x, e, x)$  e  $(y, g, x)^{-1} = (x, g^{-1}, y)$ . Note que as órbitas são não triviais e que as isotropias estão novamente fixas e iguais ao grupo  $G$ . Similarmente ao exemplo 1.14, este exemplo generaliza os dois anteriores: obtemos 1.15 ao tomarmos  $M = N$  e  $\phi = \text{id}$ , assim como recuperamos 1.16 se reduzirmos  $N$  a um único ponto.

**Exemplo 1.18.** Sejam  $M$  um conjunto e  $G$  um grupo que age (à esquerda) em  $M$ , isto é,

$$G \times M \longrightarrow M, \quad (g, x) \longmapsto g \cdot x = gx$$

com as seguintes propriedades:

$$h \cdot (g \cdot x) = hg \cdot x, \quad 1_G \cdot x = x, \quad \forall x \in M, g, h \in G.$$

Assim, considere  $\mathcal{G} \doteq G \times M$  com  $s(g, x) = x$ ,  $t(g, x) = g \cdot x$  e multiplicação dada por

$$(h, g \cdot x)(g, x) = (hg, x), \quad x \in M, g, h \in G,$$

de modo que  $1_x = (e, x)$  e  $(g, x)^{-1} = (g^{-1}, g \cdot x)$ . Este grupoide é chamado de *grupoide de ação* e denotado por  $\mathcal{G} \doteq G \ltimes M$ . Note que as noções de órbita e isotropia do grupoide correspondem com as noções usuais para ações de grupos. De fato,

$$\mathcal{O}_x = \{t(g, y) \in M : (g, y) \in s^{-1}(x)\} = \{t(g, x) \in M\} = \{g \cdot x \in M\};$$

$$\mathcal{G}_x = s^{-1}(x) \cap t^{-1}(x) = \{(g, x) \in G \times M : g \cdot x = x\} \cong \{g \in G : g \cdot x = x\}.$$

Mais exemplos surgirão no Capítulo 3 quando mais estrutura for adicionada aos grupoides. Agora que já temos uma boa ideia do que são grupoides e como eles se comportam, vamos na direção de entender que propriedades eles tem e quais construções podemos obter a partir deles.

### 1.3 Ação da isotropia nas fibras

Aproveitando a aparição de ações de grupos, vejamos alguns resultados sobre a ação das isotropias nas fibras de grupoides abstratos, que auxiliarão no entendimento da estrutura desses novos objetos.

**Lema 1.19.** *Seja  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  um grupóide. Então, para cada  $x \in M$ , o grupo de isotropia  $\mathcal{G}_x$  age em  $s^{-1}(x)$  (à direita) livremente. Analogamente,  $\mathcal{G}_x$  age em  $t^{-1}(x)$  (à esquerda) livremente.*

**Demonstração.** A ação  $\mathcal{G}_x \curvearrowright s^{-1}(x)$  é dada por

$$s^{-1}(x) \times_t \mathcal{G}_x \longrightarrow s^{-1}(x), \quad (e, g) \longmapsto e \cdot g = m(e, g),$$

em que  $s^{-1}(x) \times_t \mathcal{G}_x \doteq \{(e, g) \in s^{-1}(x) \times \mathcal{G}_x : s(e) = t(g)\}$ . Esse mapa é, de fato, uma ação à direita, pois, para todo  $g, h \in \mathcal{G}_x, e \in s^{-1}(x)$ ,

- $(e \cdot g) \cdot h = m(e \cdot g, h) = m(m(e, g), h) = m(e, m(g, h)) = m(e, gh) = e \cdot (gh);$
- $e \in s^{-1}(x) \implies e \cdot 1_x = m(e, 1_x) = e.$

Resta ver que a ação é livre. Seja  $e \in s^{-1}(x)$  e  $g, h \in \mathcal{G}_x$  tais que  $e \cdot g = e \cdot h$ . Assim,

$$\begin{aligned} e \cdot g = e \cdot h &\implies m(e, g) = m(e, h) \implies m(e^{-1}, m(e, g)) = m(e^{-1}, m(e, h)) \\ &\implies m(m(e^{-1}, e), g) = m(m(e^{-1}, e), h) \implies m(m(1_x, g)) = m(m(1_x, h)) \\ &\implies g = h. \end{aligned}$$

Analogamente, a função

$$\mathcal{G}_x \times_s t^{-1}(x) \longrightarrow t^{-1}(x), \quad (g, e) \longmapsto g \cdot e = m(g, e),$$

em que  $\mathcal{G}_x \times_s t^{-1}(x) \doteq \{(g, e) \in \mathcal{G}_x \times t^{-1}(x) : s(g) = t(e)\}$ , define uma ação livre à direita  $\mathcal{G}_x \curvearrowright t^{-1}(x)$ . ■

**Lema 1.20.** *Sejam  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  um grupoide e  $x \in M$ . Então,*

$$\mathcal{O}_x \cong \frac{s^{-1}(x)}{\mathcal{G}_x}.$$

**Demonstração.** Considere a função  $t|_{s^{-1}(x)} : s^{-1}(x) \longrightarrow M$ . Note que, na verdade, a imagem dessa função é  $t(s^{-1}(x)) = \mathcal{O}_x$ , de modo que podemos escrever  $t|_{s^{-1}(x)} : s^{-1}(x) \longrightarrow \mathcal{O}_x$ , com  $e \longmapsto t(e), \forall e \in s^{-1}(x)$ . Queremos estabelecer o isomorfismo passando-se ao quociente, como no diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} s^{-1}(x) & \xrightarrow{t} & \mathcal{O}_x \\ \pi \downarrow & \nearrow \cong & \\ \frac{s^{-1}(x)}{\mathcal{G}_x} & & \end{array}$$

Assim, defina

$$\begin{aligned} T : \frac{s^{-1}(x)}{\mathcal{G}_x} &\longrightarrow \mathcal{O}_x \\ [e] &\longmapsto t(e) \end{aligned}$$

Vejamos que  $T$  está bem-definida. Dados  $e_1, e_2 \in s^{-1}(x)$  tais que  $[e_1] = [e_2]$ , então existe  $g \in \mathcal{G}_x$  tal que  $e_1 = e_2 \cdot g$ . Logo,

$$T([e_1]) = t(e_1) = t(e_2 \cdot g) = t(m(e_2, g)) = t(e_2) = T([e_2])$$

Agora, dados  $e_1, e_2 \in s^{-1}(x)$  tais que  $T([e_1]) = T([e_2])$ , então temos que  $s(e_1) = s(e_2) = x$  e  $t(e_1) = t(e_2)$ . Logo,

$$e_1 = m(1_{t(e_1)}, e_1) = m(m(e_2, e_2^{-1}), e_1) = m(e_2, m(e_2^{-1}, e_1)) = m(e_2, \underbrace{e_2^{-1}e_1}_{\in \mathcal{G}_x}) = e_2 \cdot (e_2^{-1}e_1) \Rightarrow [e_1] = [e_2].$$

Segue que  $T$  é injetora. Ainda,  $T$  é sobrejetora: dado  $y \in \mathcal{O}_x = t(s^{-1}(x))$ , existe  $e \in s^{-1}(x)$  tal que  $t(e) = y$ . Então,  $e \in s^{-1}(x)$  é tal que

$$T([e]) = t(e) = y.$$

Portanto,  $T$  é bijeção e conclui-se que  $\mathcal{O}_x \cong \frac{s^{-1}(x)}{\mathcal{G}_x}$ . ■

Esses Lemas serão fundamentais para alguns resultado estruturais de grupoides de Lie no Capítulo 3.

## 1.4 Construções Categóricas

Nesta seção, faremos uma abordagem categórica da teoria de grupoides, explorando três conceitos importantes desse ponto de vista: morfismos, subcategorias e *pull-back*.

### 1.4.1 Morfismos

Do ponto de vista categórico, é importante entender como os grupoides se relacionam uns com os outros de maneira a preservar suas estruturas, e isso é feito através de morfismos. Como grupoides são categorias, um morfismo  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  entre dois grupoides é um funtor: para cada flecha e cada objeto de  $\mathcal{G}$ , associa-se uma flecha e um objeto de  $\mathcal{H}$ , de modo que essa associação seja compatível com os diversos mapas estruturais de ambos os grupoides.

**Definição 1.21.** Sejam  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  e  $\mathcal{H} \rightrightarrows N$  grupoides (abstratos). Um *morfismo* (ou *homomorfismo de grupoides*) entre  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  e  $\mathcal{H} \rightrightarrows N$  é um par  $(\mathcal{F}, f)$  de aplicações  $\mathcal{F} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  e  $f : M \rightarrow N$  que são compatíveis com os mapas estruturais. Mais explicitamente, isso se traduz nas seguintes condições:

- i) Se  $y \xleftarrow{g} x$  em  $\mathcal{G}$ , então  $f(y) \xleftarrow{\mathcal{F}(g)} f(x)$  em  $\mathcal{H}$ ;
- ii) Se  $g, h \in \mathcal{G}$  são componíveis, então  $\mathcal{F}(gh) = \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(h)$ ;
- iii) Se  $x \in M$ , então  $\mathcal{F}(1_x) = 1_{f(x)}$ ;
- iv) Se  $y \xleftarrow{g} x$ , então  $\mathcal{F}(g^{-1}) = \mathcal{F}(g)^{-1}$ .

A condição (i) pode ser entendida pela comutatividade dos seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{H} \\ s_{\mathcal{G}} \downarrow & & \downarrow s_{\mathcal{H}} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{H} \\ t_{\mathcal{G}} \downarrow & & \downarrow t_{\mathcal{H}} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Por simplicidade, dizemos que  $\mathcal{F}$  é um morfismo de grupoides sobre  $f$  ou que  $\mathcal{F}$  *recobre*  $f$ . Se  $M = N$  e  $f$  é a identidade, dizemos que  $\mathcal{F}$  é um morfismo *estrito*.

**Observação 1.22.** Note que a equação da condição (ii) faz sentido pela condição (i), pois

$$\begin{aligned} (g, h) \in \mathcal{G}^{(2)} &\implies s_{\mathcal{G}}(g) = t_{\mathcal{G}}(h) \implies s_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}(g)) = f(s_{\mathcal{G}}(g)) = f(t_{\mathcal{G}}(h)) = t_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}(h)) \\ &\implies (\mathcal{F}(g), \mathcal{F}(h)) \in \mathcal{H}^{(2)}. \end{aligned}$$



Mais ainda, a condição (iv) segue das anteriores, uma vez que se  $y \xleftarrow{g} x$ , então  $x \xleftarrow{g^{-1}} y$ ,  $f(y) \xleftarrow{\mathcal{F}(g)} f(x)$  e  $f(y) \xleftarrow{\mathcal{F}(g^{-1})} f(x)$ , de modo que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(g^{-1})\mathcal{F}(g) &= \mathcal{F}(g^{-1}g) = \mathcal{F}(1_x) = 1_{f(x)}, \\ \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(g^{-1}) &= \mathcal{F}(gg^{-1}) = \mathcal{F}(1_y) = 1_{f(y)}.\end{aligned}$$

**Definição 1.23.** Um morfismo  $(\mathcal{F}, f) : (\mathcal{G} \rightrightarrows M) \longrightarrow (\mathcal{H} \rightrightarrows N)$  entre grupoides é um *isomorfismo* se ambos os mapas  $\mathcal{F}$  e  $f$  forem bijetores. Já um morfismo  $(\mathcal{F}, f) : (\mathcal{G} \rightrightarrows M) \longrightarrow (\mathcal{G} \rightrightarrows M)$  é dito um *automorfismo*.

**Exemplo 1.24.** Seja  $\mathcal{G}$  um grupoide sobre  $M$ . Então, a âncora  $t \times s : \mathcal{G} \longrightarrow M \times M$  é um homomorfismo estrito de  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  no grupoide do par  $M \times M \rightrightarrows M$ . De fato, tomando  $f = \text{id}$ , temos que

i) Se  $y \xleftarrow{g} x$  em  $\mathcal{G}$ , então  $(t \times s)(g) = (y, x) \implies \text{pr}_1(y, x) = y \xleftarrow{(y, x)} x = \text{pr}_2(y, x)$  em  $\mathcal{H}$ .

ii) Se  $(g, h) \in \mathcal{G}^{(2)}$ , então

$$(t \times s)(g) \circ (t \times s)(h) = (t(g), s(g))(t(h), s(h)) = (t(g), s(h)) = (t(gh), s(gh)) = (t \times s)(gh).$$

iii) Se  $x \in M$ , então  $(t \times s)(1_x^{\mathcal{G}}) = (t(1_x^{\mathcal{G}}), s(1_x^{\mathcal{G}})) = (x, x) = 1_x^{M \times M}$ .

Com isso, conclui-se que a âncora é um homomorfismo estrito entre esses grupoides.

## 1.4.2 Subgrupoides

Exploreemos, agora, mais uma noção categórica: as “sub-coisas”.

**Definição 1.25.** Um grupoide (abstrato)  $\mathcal{H} \rightrightarrows N$  é dito um *subgrupoide (abstrato)* de um grupoide  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  se existem mapas de inclusão  $\tilde{\iota} : \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$  e  $\iota : N \hookrightarrow M$  tais que o par  $(\tilde{\iota}, \iota)$  é um homomorfismo de grupoides. Se  $N = M$  e  $\iota = \text{id}$ , dizemos que  $\mathcal{H} \rightrightarrows N$  é subgrupoide *amplo* de  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ .

**Observação 1.26.** Em geral, identificamos  $\mathcal{H}$  com a sua imagem  $\tilde{\iota}(\mathcal{H})$  e  $N$  com a sua imagem  $\iota(N)$ . Desse modo, consideramos  $\mathcal{H}$  como subconjunto de  $\mathcal{G}$  e  $N$  como subconjunto de  $M$ .

Por outro lado, se  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  é um grupoide,  $\mathcal{H}$  é um subconjunto de  $\mathcal{G}$  e  $N$  um subconjunto de  $M$ , com

$$s(\mathcal{H}) = t(\mathcal{H}) = N \quad \text{e} \quad 1_x \in \mathcal{H}, \quad \forall x \in N,$$

e tal que  $\mathcal{H}$  é fechado para multiplicação e inversão do grupoide  $\mathcal{G}$ , ou seja,

$$h_2 h_1 \in \mathcal{H}, \quad \forall (h_2, h_1) \in \mathcal{H}^{(2)} \quad \text{e} \quad h^{-1} \in \mathcal{H}, \quad \forall h \in \mathcal{H},$$

então  $\mathcal{H} \rightrightarrows N$  será um subgrupoide de  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ , com os mapas estruturais de  $\mathcal{H}$  sendo as restrições dos mapas de  $\mathcal{G}$  para  $\mathcal{H}$  (para  $\mathcal{H}^{(2)}$ , no caso da multiplicação). A menos de isomorfismos estritos, todos os subgrupos de  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  são construídos dessa maneira.

**Definição 1.27.** Seja  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  um grupoide (abstrato) e seja  $N \subseteq M$ . Então, definimos a *restrição de  $\mathcal{G}$  a  $N$*  como o subgrupoide  $\mathcal{G}|_N \rightrightarrows N$ , com mapas  $s|_{\mathcal{G}|_N}, t|_{\mathcal{G}|_N}, m|_{\mathcal{G}|_N^{(2)}}, u|_N, i|_{\mathcal{G}|_N}$ , em que

$$\mathcal{G}|_N \doteq s^{-1}(N) \cap t^{-1}(N).$$

**Observação 1.28.** Essa restrição de grupoides é regida por uma propriedade universal: se  $\mathcal{H} \rightrightarrows N$  é um subgrupoide não amplo de  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ , então  $\mathcal{H}$  é subgrupoide amplo da restrição  $\mathcal{G}|_N \rightrightarrows N$ . Escrito de outra forma, a restrição  $\mathcal{G}|_N \rightrightarrows N$  é o menor subgrupoide com a propriedade de que  $\mathcal{H} \rightrightarrows N$  é seu subgrupoide amplo.

**Exemplo 1.29.** Sejam  $M, N$  conjuntos. Para cada  $\phi : M \longrightarrow N$  função, retomando o exemplo 1.14, o grupoide  $\mathcal{G} = R(\phi)$  é subgrupoide amplo do grupoide do par  $M \times M$  de 1.13. Reciprocamente, qualquer subgrupoide amplo de  $M \times M$  é obtido através de um função  $\phi : M \longrightarrow N$ .

**Exemplo 1.30.** Sejam  $M, N$  conjuntos,  $G$  um grupo e  $\phi : M \longrightarrow N$  um função. Assim, o grupoide  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\phi, G)$  apresentado em 1.17 é subgrupoide amplo do grupoide trivial  $M \times G \times M$  do exemplo 1.16.

**Exemplo 1.31.** Seja  $M$  um conjunto,  $G$  um grupo agindo em  $M$  à esquerda e  $H$  um subgrupo de  $G$  agindo também à esquerda em  $M$  por restrição. Assim, o grupoide de ação  $H \ltimes M$  é um subgrupoide amplo do grupoide de ação  $G \ltimes M$  do exemplo 1.18. Note também que cada órbita do grupoide se decompõe na união disjunta de órbitas do subgrupoide. Na literatura, esse fenômeno é chamado de *quebra de simetria*.

### 1.4.3 Pull-back

Outra construção importante para obter-se grupoides a partir de outros grupoides é a *pull-back* por um mapa entre os espaços base. Seja  $\mathcal{G}$  um grupoide sobre  $M$ . Se  $\varphi : N \longrightarrow M$  é uma função qualquer, consideremos o seguinte conjunto:

$$\varphi^* \mathcal{G} \doteq \{(y, g, x) \in N \times \mathcal{G} \times N : \varphi(y) = t(g), \varphi(x) = s(g)\}$$

Consideremos também os mapas

$$t^* \doteq t_{\varphi^*\mathcal{G}} \doteq \text{pr}_1|_{\varphi^*\mathcal{G}} : \varphi^*\mathcal{G} \subseteq N \times \mathcal{G} \times N \longrightarrow N, \quad s^* \doteq s_{\varphi^*\mathcal{G}} \doteq \text{pr}_3|_{\varphi^*\mathcal{G}} : \varphi^*\mathcal{G} \subseteq N \times \mathcal{G} \times N \longrightarrow N$$

$$\text{e } \tilde{\varphi} \doteq \text{pr}_2|_{\varphi^*\mathcal{G}} : \varphi^*\mathcal{G} \subseteq N \times \mathcal{G} \times N \longrightarrow \mathcal{G}.$$

Assim, os diagramas abaixo comutam:

$$\begin{array}{ccc} \varphi^*\mathcal{G} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathcal{G} \\ s^* \downarrow & & \downarrow s \\ N & \xrightarrow{\varphi} & M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \varphi^*\mathcal{G} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathcal{G} \\ t^* \downarrow & & \downarrow t \\ N & \xrightarrow{\varphi} & M \end{array}$$

A maneira que se define o conjunto  $\varphi^*\mathcal{G}$  é para que esses diagramas comutem. Ainda, temos

$$(\varphi^*\mathcal{G})^{(2)} = \left\{ ((y_2, g_2, x_2), (y_1, g_1, x_1)) \in \varphi^*\mathcal{G} : x_2 = y_1 \right\}.$$

Mas note que

$$((y_2, g_2, x_2), (y_1, g_1, x_1)) \in \varphi^*\mathcal{G} \implies s(g_2) = \varphi(x_2) = \varphi(y_1) = t(g_1) \implies (g_2, g_1) \in \mathcal{G}^{(2)},$$

e então podemos definir a multiplicação em  $\varphi^*\mathcal{G}$  por

$$(y_2, g_2, x_2)(y_1, g_1, x_1) = (y_2, g_2g_1, x_1), \quad ((y_2, g_2, x_2), (y_1, g_1, x_1)) \in (\varphi^*\mathcal{G})^{(2)}.$$

Logo,  $\varphi^*\mathcal{G}$  é um grupoide sobre  $N$  com projeções  $s^*, t^*$  ao definirmos

$$1_x \doteq (x, 1_{\varphi(x)}, x), \quad \forall x \in N,$$

$$(y, g, x)^{-1} \doteq (x, g^{-1}, y) \quad \forall (y, g, x) \in \varphi^*\mathcal{G}.$$

Mais ainda, nesse contexto, o par  $(\tilde{\varphi}, \varphi)$  é um morfismo de grupoides.

**Definição 1.32.** Seja  $\mathcal{G}$  um grupoide sobre  $M$ ,  $N$  um conjunto e  $\varphi : N \longrightarrow M$  uma função. O *pull-back* de  $\mathcal{G}$  para  $N$  via  $\varphi$  é o grupoide  $\varphi^*\mathcal{G}$  sobre  $N$  com mapas estruturais explicitados na discussão acima. Ainda, o morfismo  $\tilde{\varphi}$  que recobre  $\varphi$  é dito o *levantamento canônico* de  $\varphi$ .

Apesar de incompleta, a maneira mais intuitiva de visualizar o *pull-back* é notar que as fibras de grupoide original e do *pull-back* são iguais entre si, de modo que a mudança do espaço base

significa apenas um reetiquetamento dessas fibras:  $\forall x_o, y_o \in N$ ,

$$(s^*)^{-1}(x_o) = \{(y, g, x) \in \varphi^* \mathcal{G} : s^*((y, g, x)) = x_o\} = \{(y, g, x_o) \in \varphi^* \mathcal{G}\} \text{ mas então } s(g) = \varphi(x_o) \\ \cong \{g \in \mathcal{G} : s(g) = \varphi(x_o)\} = s^{-1}(\varphi(x_o)),$$

$$(t^*)^{-1}(y_o) = \{(y, g, x) \in \varphi^* \mathcal{G} : t^*((y, g, x)) = y_o\} = \{(y_o, g, x) \in \varphi^* \mathcal{G}\} \text{ mas então } t(g) = \varphi(y_o) \\ \cong \{g \in \mathcal{G} : t(g) = \varphi(y_o)\} = t^{-1}(\varphi(y_o)).$$

Consequentemente, as isotropias também são identificadas:  $(\varphi^* \mathcal{G})_x \cong \mathcal{G}_{\varphi(x)}$ , para todo  $x \in N$ .

**Observação 1.33.** O *pull-back* de grupoides é caracterizado por uma propriedade universal: dado um morfismo  $(\mathcal{F}, f)$  não estrito de um grupoide  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  em outro grupoide  $\mathcal{H} \rightrightarrows N$ , existe uma fatorização única de  $\mathcal{F}$  dada pela composição de um homomorfismo estrito  $\mathcal{F}_s$  de  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  no *pull-back* de  $\mathcal{H} \rightrightarrows N$  para  $M$  via  $f$ , seguido do levantamento canônico de  $f$ . Isso está expresso nos seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{F} & & \\ & \searrow & & \swarrow & \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\mathcal{F}_s} & f^* \mathcal{H} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathcal{H} \\ s_{\mathcal{G}} \downarrow & & \downarrow s^* & & \downarrow s_{\mathcal{H}} \\ M & \xrightarrow{\text{id}_M} & M & \xrightarrow{f} & N \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathcal{F} & & \\ & \searrow & & \swarrow & \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\mathcal{F}_s} & f^* \mathcal{H} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathcal{H} \\ t_{\mathcal{G}} \downarrow & & \downarrow t^* & & \downarrow t_{\mathcal{H}} \\ M & \xrightarrow{\text{id}_M} & M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

em que  $\mathcal{F}_s$  é dado por

$$\mathcal{F}_s(g) = (t_{\mathcal{G}}, f(g), s_{\mathcal{G}}), \quad \forall g \in \mathcal{G}.$$

## 1.5 Ação de grupoides em fibrados

Grupoides, assim como grupos, são passíveis de agir em objetos. Se, por um lado, grupos agem em conjuntos, grupoides agem em *fibrados*.

**Definição 1.34.** Um *fibrado (abstrato)* é uma tripla  $(E, M, \pi)$ , em que  $E$  e  $M$  são conjuntos denominados *espaço total* e *espaço base* do fibrado, e  $\pi : E \rightarrow M$  um mapa sobrejetor chamado de *projeção* do fibrado.

Por abuso de linguagem, diremos que  $E$  é um fibrado (abstrato) sobre  $M$  com projeção  $\pi$ , ou ainda que  $E \xrightarrow{\pi} M$  é um fibrado (abstrato).

**Definição 1.35.** Uma *ação (à esquerda)* de um grupoide  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  em um fibrado  $E \xrightarrow{\pi} M$  com

mesmo espaço base é uma aplicação

$$\begin{aligned}\mathcal{G} \times_s E &\longrightarrow E \\ (g, e) &\longmapsto g \cdot e\end{aligned}$$

em que  $\mathcal{G} \times_s E$  denota o *produto fibrado* de  $\mathcal{G}$  e  $E$  sobre  $M$ , com relação à projeção  $s$ , dado por

$$\mathcal{G} \times_s E \doteq \{(g, e) \in \mathcal{G} \times E : s(g) = \pi(e)\},$$

tal que:

- i)  $g \cdot E_{s(g)} = E_{t(g)}, \quad \forall g \in \mathcal{G};$
- ii)  $h \cdot (g \cdot e) = (hg) \cdot e, \quad \forall h, g \in \mathcal{G}^{(2)}, e \in E_{s(g)};$
- iii)  $1_x \cdot e = e, \quad \forall e \in E_x.$

**Observação 1.36.** As três condições acima podem ser interpretadas como:

- i) A translação por qualquer elemento  $g \in \mathcal{G}$  (definida apenas na fibra  $E_{s(g)}$ ) leva a fibra de  $E$  sobre  $s(g)$  na fibra de  $E$  sobre  $t(g)$ ;
- ii) A composição das translações por dois elementos de  $\mathcal{G}$  é igual à translação pelo produto destes dois elementos;
- iii) A translação pela unidade é a identidade.

Assim, a translação por qualquer elemento  $g \in \mathcal{G}$  é um isomorfismo da fibra de  $E$  sobre  $s(g)$  na fibra de  $E$  sobre  $t(g)$ , cuja inversa é dada pela translação por  $g^{-1} \in \mathcal{G}$ . Esse fato já foi usado implicitamente na condição (i) ao escrevermos  $g \cdot E_{s(g)} = E_{t(g)}$  ao invés de  $g \cdot E_{s(g)} \subseteq E_{t(g)}$ .

Desse modo, podemos retomar e generalizar o exemplo 1.18:

**Exemplo 1.37.** Seja  $\mathcal{G}$  um grupoide sobre  $M$  que age em um fibrado  $E$  sobre  $M$  à esquerda. Considere  $\tilde{\mathcal{G}} \doteq \mathcal{G} \times_s E$  com

$$\tilde{s}(g, e) = e, \quad \tilde{t}(g, e) = g \cdot e, \quad \forall g \in \mathcal{G}, e \in E,$$

e multiplicação dada por

$$(h, g \cdot e)(g, e) = (hg, e), \quad \forall g, h \in \mathcal{G}, e \in E.$$

Nesse contexto,  $1_e = (1_{\pi(e)}, e)$  e  $(g, e)^{-1} = (g^{-1}, g \cdot e)$ . Logo, o grupoide  $\tilde{\mathcal{G}} \rightrightarrows E$  é denominado o *grupoide de ação* e denotado por  $\tilde{\mathcal{G}} \ltimes E$ .

**Observação 1.38.** Tudo o que foi feito nessa subseção diz respeito a ações à esquerda e tem um análogo para ações à direita, tomando cuidado com os pontos base nas fibras.

## 1.6 Bisseções

Para finalizar esta introdução à teoria de grupoides, resta apresentar a noção de *bisseção*, que mostrará que ainda há um grupo subjacente em torno de um grupoide.

**Definição 1.39.** Seja  $E$  um fibrado (abstrato) sobre  $M$  com projeção  $\pi$ . Uma *seção* de  $M$  é um mapa  $\sigma : M \rightarrow E$  que é uma inversa à direita de  $\pi$ , i.e.,  $\sigma : M \rightarrow E$  é tal que

$$\pi(\sigma(x)) = x = \text{id}_M(x), \quad \forall x \in M.$$

Uma seção de um fibrado  $E$  é então uma escolha de  $\sigma(x)$  em cada fibra de  $E$ , de modo que a condição exigida significa apenas que a seção em um ponto  $x$  deve cair sobre  $x$ . Isso generaliza a noção de gráfico de uma função. Vale notar que a imagem da seção está em bijeção com o espaço base  $M$ , como se vê no figura 1.1.

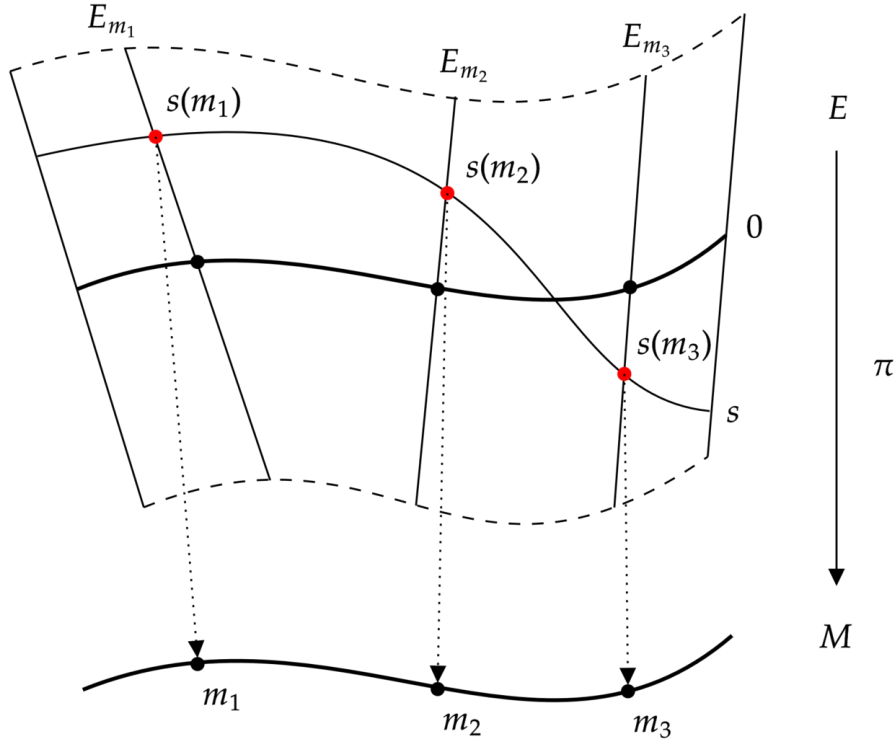
**Observação 1.40.** Na definição 1.1 de grupoide, chamamos o mapa unidade  $u : M \rightarrow \mathcal{G}$  também de *seção unidade*. Esse mapa é uma seção de  $\mathcal{G}$  no sentido apresentado na definição acima com respeito às projeções  $s$  e  $t$ .

Um grupoide pode ser visto como um fibrado tanto com projeção  $s$  quanto com projeção  $t$ . Assim, convém introduzir uma noção de seção no contexto de grupoides que, de certa maneira, capture a informação de ambas as projeções.

**Definição 1.41.** Seja  $\mathcal{G}$  um grupoide sobre  $M$ . Uma *bisseção* de  $\mathcal{G}$  é um mapa  $b : M \rightarrow \mathcal{G}$  tal que  $s \circ b = \text{id}_M$  e  $t \circ b : M \rightarrow M$  é uma bijeção. Em outras palavras, uma *bisseção* é uma seção de  $M$  com respeito à projeção  $s$  tal que  $t \circ b : M \rightarrow M$  é uma bijeção.

**Observação 1.42.** Note que a seção unidade do grupoide  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  é também uma bisseção, uma vez que

$$s \circ u = \text{id}_M = t \circ u.$$


 Figura 1.1: Visualização da seção  $s$  de um fibrado  $E$  sobre  $M$  (fonte: Wikipedia)

### 1.6.1 Estrutura de Grupo

Com essa noção em mente, gostaríamos de introduzir uma multiplicação entre bisseções que resultasse em uma bisseção. Dadas duas bisseções  $b_1, b_2 : M \rightarrow \mathcal{G}$ , poderíamos, ingenuamente, definir a multiplicação delas duas como sendo simplesmente

$$(b_1 \bullet b_2)(x) = m(b_1(x), b_2(x)) = b_1(x)b_2(x).$$

Mas isso não estaria bem-definido, uma vez que não há informação garantindo que  $b_1(x)$  e  $b_2(x)$  são componíveis, para todo  $x \in M$ . Isto é, para que essa multiplicação faça sentido, é preciso que

$$s(b_1(x)) = t(b_2(x)), \quad \forall x \in M,$$

o que não necessariamente está garantido. Mas note que, como  $b_1$  e  $b_2$  são bisseções, sabemos que  $(s \circ b_1)(x) = x$  e  $(s \circ b_2)(x) = x$ , para todo  $x \in M$ . Desse modo, olhando para a última equação destacada e sabendo da impossibilidade de obter informação sobre o término de  $b_2(x)$ , definimos o produto de duas bisseções por

$$(b_1 \bullet b_2)(x) \doteq m(b_1((t \circ b_2)(x)), b_2(x)) = b_1((t \circ b_2)(x))b_2(x), \quad \forall x \in M.$$

Agora, esta operação está bem-definida por construção, uma vez que

$$s\left(b_1((t \circ b_2)(x))\right) = \underbrace{s \circ b_1}_{\text{id}_M}((t \circ b_2)(x)) = (t \circ b_2)(x), \quad \forall x \in M.$$

Mais ainda, este produto define uma bisseção. De fato, para todo  $x \in M$

$$(s \circ (b_1 \bullet b_2))(x) = s\left(b_1((t \circ b_2)(x))b_2(x)\right) = s(b_2(x)) = \underbrace{(s \circ b_2)}_{\text{id}_M}(x) = x, \quad \text{e}$$

$$(t \circ (b_1 \bullet b_2))(x) = t\left(b_1((t \circ b_2)(x))b_2(x)\right) = t\left(b_1((t \circ b_2)(x))\right) = \underbrace{(t \circ b_1)}_{\text{bijeção}} \circ \underbrace{(t \circ b_2)}_{\text{bijeção}}(x),$$

o que implica que  $t \circ (b_1 \bullet b_2)$  é bijeção, como composta de bijeções.

**Definição 1.43.** Seja  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  um grupoide. Denotemos por  $\Gamma(\mathcal{G})$  (ou por  $\text{Bis}(\mathcal{G})$ ) o conjunto de todas as bisseções de  $\mathcal{G}$ .

**Proposição 1.44.** Seja  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  um grupoide e considere  $\Gamma(\mathcal{G})$  com a multiplicação de bisseções dado por

$$(b_1 \bullet b_2)(x) \doteq b_1((t \circ b_2)(x))b_2(x), \quad \forall b_1, b_2 \in \Gamma(\mathcal{G}), \forall x \in M.$$

Então,  $\Gamma(\mathcal{G})$  é um grupo mco respeito a esse produto.

**Demonstração.** Sejam  $b, b_1, b_2, b_3 : M \longrightarrow \mathcal{G}$  bisseções quaisquer. Assim, para a associatividade,  $\forall x \in M$ , por um lado temos que:

$$\begin{aligned} ((b_1 \bullet b_2) \bullet b_3)(x) &= (b_1 \bullet b_2)((t \circ b_3)(x))b_3(x) \\ &= \left(b_1\left((t \circ b_2)((t \circ b_3)(x))\right)b_2((t \circ b_3)(x))\right)b_3(x). \end{aligned}$$

Por outro, temos:

$$\begin{aligned} (b_1 \bullet (b_2 \bullet b_3))(x) &= b_1\left((t \circ (b_2 \bullet b_3))(x)\right)(b_2 \bullet b_3)(x) \\ &= b_1\left(t \circ \left(b_2((t \circ b_3)(x))b_3(x)\right)\right)\left(b_2((t \circ b_3)(x))b_3(x)\right) \\ &= b_1\left(t \circ \left(b_2((t \circ b_3)(x))\right)\right)\left(b_2((t \circ b_3)(x))b_3(x)\right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \left(b_1\left((t \circ b_2)((t \circ b_3)(x))\right)b_2((t \circ b_3)(x))\right)b_3(x), \end{aligned}$$

em que em  $(*)$  utiliza-se a *Lei da associatividade* do grupoide. Agora, note que a seção unidade do



grupoide é a unidade desse produto. De fato,  $\forall x \in M$ ,

$$(b \bullet u)(x) = b(\underbrace{(t \circ u)(x)}_{\text{id}_M})u(x) = b(x)1_x = b(x),$$

$$(u \bullet b)(x) = u((t \circ b)(x))b(x) = 1_{t(b(x))}b(x) = b(x).$$

Por fim, resta deduzir a inversa de uma bisseção. Se  $b_2$  fosse a inversa de  $b_1$ , então, para todo  $x \in M$ ,

$$\begin{cases} b_1((t \circ b_2)(x))b_2(x) \doteq (b_1 \bullet b_2)(x) = u(x) = 1_x \\ b_2((t \circ b_1)(x))b_1(x) \doteq (b_2 \bullet b_1)(x) = u(x) = 1_x \end{cases}$$

Multiplicando à esquerda ambos os membros da primeira equação pela inversa de  $b_1((t \circ b_2)(x))$ , obtemos:

$$b_2(x) = b_1((t \circ b_2)(x))^{-1}$$

Agora, como  $t \circ b_1 : M \rightarrow M$  é bijeção, tal mapa admite uma inversa. Logo, aplicando a segunda equação para  $(t \circ b_1)^{-1}(x) \in M$  e tomando a projeção  $t$ , temos que

$$b_2(x)b_1((t \circ b_1)^{-1}(x)) = 1_{(t \circ b_1)^{-1}(x)} \implies (t \circ b_2)(x) = t(b_2(x)) = t(1_{(t \circ b_1)^{-1}(x)}) = (t \circ b_1)^{-1}(x).$$

Dessa forma, concluímos que  $b_2(x) = b_1((t \circ b_2)(x))^{-1} = b_1((t \circ b_1)^{-1}(x))^{-1}$ . Assim, dada  $b : M \rightarrow \mathcal{G}$  bisseção, defina

$$\begin{aligned} b^{-1} : M &\longrightarrow \mathcal{G} \\ x &\longmapsto b^{-1}(x) \doteq b((t \circ b)^{-1}(x))^{-1} \end{aligned}$$

Verifiquemos que ela é a inversa de  $b$  com respeito à multiplicação em  $\Gamma(\mathcal{G})$ :

$$\begin{aligned}
 (b \bullet b^{-1})(x) &= b((t \circ b^{-1})(x))b^{-1}(x) = b\left(t\left(b((t \circ b)^{-1}(x))^{-1}\right)\right)b((t \circ b)^{-1}(x))^{-1} \\
 &= b\left(s\left(b((t \circ b)^{-1}(x))\right)\right)b((t \circ b)^{-1}(x))^{-1} \\
 &= b\left(\underbrace{(s \circ b)}_{\text{id}_M}((t \circ b)^{-1}(x))\right)b((t \circ b)^{-1}(x))^{-1} \\
 &= b((t \circ b)^{-1}(x))b((t \circ b)^{-1}(x))^{-1} = 1_x = u(x), \\
 (b^{-1} \bullet b)(x) &= b^{-1}((t \circ b)(x))b(x) = b\left((t \circ b)^{-1}((t \circ b)(x))\right)^{-1}b(x) \\
 &= b\left(\underbrace{(t \circ b)^{-1} \circ (t \circ b)}_{\text{id}_M}(x)\right)^{-1}b(x) \\
 &= b(x)^{-1}b(x) = 1_x = u(x).
 \end{aligned}$$

Portanto,  $\Gamma(\mathcal{G})$  é um grupo. ■

**Observação 1.45.** O grupo de bisseções  $\Gamma(\mathcal{G})$  vem com um homomorfismo de grupos natural

$$\begin{aligned}
 \Phi : \Gamma(\mathcal{G}) &\longrightarrow \text{Bij}(M) \\
 b &\longmapsto t \circ b
 \end{aligned}$$

De fato, se  $b_1, b_2 : M \longrightarrow \mathcal{G}$  são bisseções, então, para todo  $x \in M$ ,

$$\begin{aligned}
 \Phi(b_1 \bullet b_2)(x) &= t \circ (b_1 \bullet b_2)(x) = t \circ \left(b_1((t \circ b_2)(x))b_2(x)\right) = t \circ \left(b_1((t \circ b_2)(x))\right) \\
 &= ((t \circ b_1) \circ (t \circ b_2))(x) = (\Phi(b_1) \circ \Phi(b_2))(x).
 \end{aligned}$$

### 1.6.2 Outro modelo para bisseções

Outra maneira, talvez mais geométrica, de enxergar bisseções é como certos subconjuntos do espaço total do grupoide. A proposição a seguir apresenta essa visão.

**Teorema 1.46.** O conjunto  $\Gamma(\mathcal{G})$  das bisseções de um grupoide  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  está em correspondência 1 para 1 com os subconjuntos  $B \subseteq \mathcal{G}$  tais que  $s|_B, t|_B : B \longrightarrow M$  são bijeções.

**Demonstração.** Dada uma bisseção  $b : M \longrightarrow \mathcal{G}$ , considere  $B \doteq b(M) \subseteq \mathcal{G}$ . Sejam  $g, h \in B$  tais

que  $s|_B(g) = s|_B(h)$ . Assim, existem  $x, y \in M$  tais que  $g = b(x), h = b(y)$ . Logo,

$$\begin{aligned} x &= (s \circ b)(x) = s|_B(b(x)) = s|_B(g) = s|_B(h) = s|_B(b(y)) = (s \circ b)(y) = y \\ &\implies g = b(x) = b(y) = h \end{aligned}$$

Mais ainda, se  $x \in M$  é elemento qualquer do espaço base, então  $b(x) \in B \subseteq G$  é tal que  $s|_B(b(x)) = (s \circ b)(x) = x$ . Portanto,  $s|_B : B \rightarrow M$  é bijetora. De maneira semelhante, se  $g, h \in B$  são tais que  $t|_B(g) = t|_B(h)$ , então novamente existem  $x, y \in M$  tais que  $g = b(x), h = b(y)$ , de modo que

$$t|_B(g) = t|_B(h) \implies t|_B(b(x)) = t|_B(b(y)) \implies (t \circ b)(x) = (t \circ b)(y).$$

Como  $(t \circ b) : M \rightarrow M$  é um mapa bijetor, então  $x = y$ , o que implica que  $g = b(x) = b(y) = h$ . Ademais, dado  $x \in M$  qualquer, a bijetividade de  $(t \circ b)$  garante que existe um ponto  $y \in M$  tal que  $(t \circ b)(y) = x$  e, conseqüentemente, existe  $b(y) \in B$  tal que  $t|_B(b(y)) = x$ . Portanto,  $t|_B : B \rightarrow M$  também é bijeção.

Por outro lado, dado um subconjunto  $B \subseteq \mathcal{G}$  de modo que  $s|_B, t|_B : B \subseteq \mathcal{G} \rightarrow M$  são bijeções, considere  $b \doteq s|_B^{-1} : M \rightarrow B \subseteq \mathcal{G}$ . Assim,  $\forall x \in M$ , temos:

$$(s \circ b)(x) = s(b(x)) = s(\underbrace{s|_B^{-1}(x)}_{\in B}) = s|_B(s|_B^{-1}(x)) = \text{id}_M(x).$$

Ainda, note que para a projeção  $t$ ,

$$(t \circ b)(x) = t(b(x)) = t(\underbrace{s|_B^{-1}(x)}_{\in B}) = t|_B(s|_B^{-1}(x)) = (t|_B \circ s|_B^{-1})(x),$$

$\forall x \in M$ , o que implica que  $(t \circ b) : M \rightarrow M$  é bijeção, como composta das bijeções  $t|_B$  e  $s|_B$ . Note ainda que  $B = b(M)$ . Portanto, a correspondência está estabelecida. ■

Nesse modelo, a estrutura de grupo é dada pela multiplicação

$$B_1 \bullet B_2 = m_{\mathcal{G}}((B_1 \times B_2) \cap \mathcal{G}^{(2)}),$$

em que  $m_{\mathcal{G}} : \mathcal{G}^{(2)} \rightarrow \mathcal{G}$  é a multiplicação no grupoide  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ . Isso significa que o produto  $B_1 \bullet B_2$  consiste no subconjunto de todas as multiplicações  $g_1 g_2$  de elementos componíveis com  $g_i \in B_i$ , para  $i = 1, 2$ . Essa multiplicação é compatível com a multiplicação do modelo anterior com respeito à correspondência estabelecida acima. De fato, dadas duas bisseções  $b_1, b_2 : M \rightarrow$

$\mathcal{G}$ , sua multiplicação é dada por

$$(b_1 \bullet b_2)(x) = b_1((t \circ b_2)(x))b_2(x), \quad \forall x \in M.$$

Logo, tomando  $B_1 \doteq b_1(M)$  e  $B_2 \doteq b_2(M)$ , temos claramente que

$$\begin{aligned} (b_1 \bullet b_2)(M) &= \left\{ \underbrace{b_1((t \circ b_2)(x))}_{\in B_1} \underbrace{b_2(x)}_{\in B_2} \in \mathcal{G} : x \in M \right\} \\ &= \left\{ g_1 g_2 \in \mathcal{G} : g_1 \in B_1, g_2 \in B_2, (g_1, g_2) \in \mathcal{G}^{(2)} \right\} = m_{\mathcal{G}}((B_1 \times B_2) \cap \mathcal{G}^{(2)}), \end{aligned}$$

em que a componibilidade segue de como foi definido a multiplicação das bisseções no primeiro modelo. Com isso, segue que o conjunto das bisseções dadas como subconjuntos do espaço total do grupoide é também um grupo, cujo elemento unidade é o espaço base  $M = u(\mathcal{G})$  e cuja inversa é dada por  $B^{-1} \doteq i_{\mathcal{G}}(B)$ .

**Observação 1.47.** Este modelo de bisseção como subconjuntos tem a vantagem de ter operações mais simétricas.

**Exemplo 1.48.** Dado um grupo  $G$  e enxergando-o como um grupoide sobre um ponto  $G \rightrightarrows \{*\}$ , uma bisseção é simplesmente um elemento de  $G$  e  $\Gamma(G) = G$ .

**Exemplo 1.49.** Dado um fibrado de grupos (abstrato)  $E \xrightarrow{\pi} M$  e enxergando-o como um grupoide  $E \rightrightarrows M$  com projeções iguais a  $\pi$ , uma bisseção nada mais é do que uma seção.

**Exemplo 1.50.** Dado um conjunto  $M$  e enxergando-o como um grupoide sobre si mesmo  $M \rightrightarrows M$ , a única bisseção existente é a unidade  $u : M \longrightarrow M$ .

**Observação 1.51.** O grupo de bisseções  $\Gamma(\mathcal{G})$ , nesse modelo, também vem com um homomorfismo de grupos natural

$$\begin{aligned} \Phi : \Gamma(\mathcal{G}) &\longrightarrow \text{Bij}(M) \\ B &\longmapsto t|_B \circ (s|_B)^{-1}. \end{aligned}$$

Com isso posto, finalizamos a introdução ao reino dos grupoides abstratos e estamos prontos para adicionar estruturas a eles.

## Capítulo 2

# A Linguagem da Geometria

“L’algèbre n’est qu’une géométrie écrite,  
la géométrie n’est qu’une algèbre  
figurée.”

---

Sophie Germain [28]

A Geometria Diferencial moderna está fundamentada na noção de Variedade Diferenciável. A fim de transpor as noções abstratas de grupoides para estudarmos grupoides “geométricos” (que são compatíveis com objetos geométricos), neste capítulo apresentaremos uma visão geral dos principais resultados dessa teoria que serão utilizados no capítulo seguinte. Apenas alguns dos resultados serão provados, enquanto referências para consulta serão deixadas para os outros.

### 2.1 Variedades suaves

A noção de Variedade suave é de extrema importância em Matemática desde antes de sua formalização, aparecendo como o espaço-tempo em relatividade geral, domínios de EDO’s, espaços de fase em mecânica. A definição moderna usada atualmente é devida a H. Whitney em seu artigo [19] e pode ser encontrada em [3], [1], [2] e [4], assim como as noções adjacentes de espaço tangente à uma variedade, função suave entre variedades e a diferencial de uma tal função. Com essas noções em mente, apresentemos um primeiro Teorema fundamental da teoria.

**Teorema 2.1 (Teorema da Função Inversa).** *Sejam  $f : M \rightarrow N$  um mapa suave entre variedades suaves,  $p \in M$  e  $q \doteq f(p)$ . Se  $df_p : T_p M \rightarrow T_q N$  é um isomorfismo, então existe um aberto  $U \ni p$  tal que  $f(U) \ni q$  é aberto em  $N$  e  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  é um difeomorfismo.*

Em outras palavras, esse teorema garante que uma função entre variedades é um difeomorfismo local em torno de um ponto  $p \in M$  se, e somente se, sua diferencial em  $p$  for um isomor-

fismo.

**Definição 2.2.** Seja  $f : M \longrightarrow N$  função suave entre variedades. O *posto* de  $f$  em  $p \in M$  é o posto de  $df_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$ . Uma função suave cujo posto é o mesmo em todo ponto  $p \in M$  é dita de *posto constante*. Uma função suave é chamada de *imersão* (ou, respectivamente, *submersão*) em  $p \in M$  se  $df_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$  é injetora (respect., sobrejetora). A função será dita uma *imersão* (respect., *submersão*) se o for em todo ponto. Se  $f : M \longrightarrow N$  for uma imersão e também um homeomorfismo sobre sua imagem, diremos que  $f$  é um *mergulho*.

Com essas noções sobre mapas entre variedades, temos os seguintes Teoremas:

**Teorema 2.3 (Forma Local das submersões).** *Sejam  $M, N$  variedades suaves de dimensões  $n + k$  e  $k$ , respectivamente. Se  $f : M \longrightarrow N$  é uma submersão em  $p \in M$ , então existem coordenadas locais de  $M$  e  $N$  tais que a expressão local de  $f$  em  $p$  é a projeção canônica de  $\mathbb{R}^{n+k}$  em  $\mathbb{R}^k$ .*

**Teorema 2.4 (Teorema do Conjunto de Nível para posto constante).** *Seja  $f : M \longrightarrow N$  função suave entre variedades de posto constante igual a  $r$ . Então,  $f^{-1}(q)$  é uma subvariedade propriamente mergulhada de  $M$  de codimensão  $r$ ,  $\forall q \in N$ .*

As demonstrações de todos os Teoremas acima podem ser encontrada em [3] e [1]. O próximo resultados acerca de submersões está demonstrado em [1].

**Proposição 2.5.** *Seja  $\pi : M \longrightarrow N$  uma submersão. Então, todo ponto de  $M$  está na imagem de uma seção local suave de  $\pi$ . Mais ainda, se a submersão for sobrejetora, então  $\pi$  é um mapa quociente, e então, se  $F : M \longrightarrow Z$  for um mapa suave entre variedades constante nas fibras de  $\pi$ , então existe um único mapa suave  $\tilde{F} : N \longrightarrow Z$  tal que  $\tilde{F} \circ \pi = F$ .*

Outro conceito fundamental para Variedades é o de *partição da unidade*, que permite tornar argumentos locais em globais.

**Definição 2.6.** Seja  $M$  uma variedade suave. Uma *partição da unidade* em  $M$  é uma coleção  $\{\rho_i\}_i$  de funções suaves em  $M$  tais que:

- i)  $\rho_i(p) \geq 0, \forall p \in M, \forall i$ ;
- ii) A coleção de suportes  $\{\text{supp}(\rho_i)\}_i$  é localmente finita;
- iii)  $\sum_i \rho_i(p) = 1, \forall p \in M$  (tal soma é, na verdade, finita por (ii)).

Se  $\{U_\alpha\}_\alpha$  é uma cobertura por abertos de  $M$ , dizemos que a partição da unidade  $\{\rho_i\}_i$  é *subordinada* a  $\{U_\alpha\}_\alpha$  se, para todo  $i$ , existir  $\alpha$  tal que  $\text{supp}(\rho_i) \subseteq U_\alpha$ .

**Teorema 2.7.** *Se  $M$  é uma variedade suave e  $\{U_\alpha\}_\alpha$  é uma cobertura por abertos de  $M$ , então existe uma partição da unidade subordinada a  $\{U_\alpha\}_\alpha$ .*

Este teorema também está demonstrado em [3] e [1]. Para finalizar essa seção, introduziremos as métricas Riemannianas:

**Definição 2.8.** Seja  $M$  uma variedade suave. Uma *métrica Riemanianna*  $g$  em  $M$  é uma família de produtos internos nos espaços tangentes de  $M$  que varia suavemente pelos pontos de  $M$ . Explicitamente,  $g$  associa a cada ponto  $p \in M$  uma forma bilinear simétrica positiva definida em  $T_p M$

$$g_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R},$$

de modo que o mapa  $M \ni p \longmapsto g_p(X_p, Y_p) \in \mathbb{R}$  é suave.

Usando partições da unidade, prova-se que

**Teorema 2.9.** *Toda variedade suave admite uma métrica Riemanianna.*

Uma demonstração disso está em [6].

## 2.2 Grupos de Lie

Aqui, veremos o que são os grupos de Lie e algumas de suas propriedades importantes para o estudo de grupoides de Lie. Os livros [3] e [1] cobrem os aspectos básicos da teoria. Uma abordagem muito completa sobre grupos e álgebras de Lie é a apresentada em [7]. Em [2], a teoria de grupos de Lie também é desenvolvida, chegando até o estudo de espaços homogêneos.

**Definição 2.10.** Um *Grupo de Lie* é uma variedade suave com uma estrutura de grupo tal que a multiplicação do grupo é suave. Isso implica diretamente que o mapa de inversão do grupo também é suave.

**Definição 2.11.** Sejam  $G$  um grupo de Lie e  $M$  uma variedade. Uma *ação à direita* de  $G$  em  $M$  é um mapa suave

$$m : M \times G \longrightarrow M$$

denotado por  $m(x, g) = x \cdot g$  que satisfaz:

$$((x) \cdot h) \cdot g = x \cdot (hg), \quad x \cdot e = x, \quad \forall g, h \in G, x \in M,$$

em que  $e \in G$  é a identidade do grupo. Ainda, uma ação (à direita) do grupo de Lie  $G$  em  $M$  é dita

- i) *livre* se  $x \cdot g = x \cdot h \implies g = h$ , para algum  $x \in M$ ;
- ii) *própria* se o mapa  $(x, g) \mapsto (x, x \cdot g)$  é próprio, ou seja, se a pré-imagem de um compacto do contradomínio pelo mapa é um compacto do domínio.

O próximo Teorema está demonstrado em [7] e em [8] e é muito importante para a teoria de fibrados principais.

**Teorema 2.12.** *Se um grupo de Lie  $G$  age livre e propriamente em uma variedade  $M$ , então o quociente  $M/G$  admite uma única estrutura suave tal que o mapa quociente  $\pi : M \longrightarrow M/G$  é uma submersão.*

## 2.3 Álgebras de Lie

Discutamos, rapidamente, a construção da álgebra de Lie de um grupo de Lie, que será retomada ao fim do Capítulo 3 para servir de inspiração para a construção do algebroide de Lie do grupoide.

**Definição 2.13.** Uma *Álgebra de Lie* consiste em um espaço vetorial  $\mathfrak{g}$  munido de um produto (colchete)  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- i)  $[\cdot, \cdot]$  é bilinear;
- ii)  $[X, Y] = -[Y, X]$ , para  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ;
- iii)  $[\cdot, \cdot]$  satisfaz a identidade de Jacobi:  $[X, [Y, Z]] = [[X, Y]Z] + [Y, [X, Z]]$ ,  $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ .

Como um espaço vetorial, a álgebra de Lie de um grupo de Lie  $G$  é definida como

$$\mathfrak{g} \doteq T_e G.$$

O colchete definido nesse espaço será definido através de campos vetoriais invariantes à direita da seguinte maneira: todo  $g \in G$  age em  $G$  por translação à esquerda  $L_g$ . Um campo vetorial é dito *invariante à direita* se for invariante pela translação  $R_g$ , para todo  $g \in G$ , ou seja,

$$d(R_g)_h(X_h) = X_{hg}.$$

Um campo vetorial desse gênero é completamente determinado pelo seu valor na identidade  $e \in G$ , uma vez que essa condição implica que

$$X_g = d(R_g)_e X_e.$$



Reciprocamente, cada  $X \in \mathfrak{g}$  tem uma única extensão a um campo vetorial invariante à direita. O colchete de Lie de campos invariantes à direita é invariante à direita. Isso segue de:

**Lema 2.14.** *Seja  $f : M \rightarrow N$  suave,  $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $Y_i \in \mathfrak{X}(N)$  tais que  $df(X_i) = Y_i$ ,  $i = 1, 2$ . Se  $p \in M$ , então, para  $p \in M$ ,*

$$df[X_1, X_2]_p = [Y_1, Y_2]_{f(p)}.$$

**Demonstração.** Se  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , o *push-forward* de  $X$  por  $f$  é tal que  $f_*X \circ f = df \circ X$ , em que  $f_*X \in \mathfrak{X}(N)$ . Assim, identificando o espaço de campos em  $M$  com o de derivações

$$\mathfrak{X}(M) \cong \{g : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)\},$$

se  $g \in C^\infty(M)$ , então

$$\begin{aligned} f_*[X_1, X_2]_{f(p)}(g) &= [X_1, X_2]_p(g \circ f) = X_{1p}(X_2(g \circ f)) - X_{2p}(X_1(g \circ f)) \\ &= X_{1p}(f_*X_2(g) \circ f) - X_{2p}(f_*X_1(g) \circ f) \\ &= f_*X_1(f_*X_2(g) \circ f)_{f(p)} - f_*X_2(f_*X_1(g) \circ f)_{f(p)} \\ &= [f_*X_1, f_*X_2]_{f(p)}(g) \end{aligned}$$

Logo,

$$f_*[X_1, X_2]_{f(p)} = [f_*X_1, f_*X_2]_{f(p)} \implies df[X_1, X_2]_p = [dfX_1, dfX_2]_{f(p)} = [Y_1, Y_2]_{f(p)}.$$

■

Usa-se essa invariância para definir o colchete em  $\mathfrak{g}$ , impondo a condição de

$$[X, Y]^R = [X^R, Y^R]$$

**Observação 2.15.** Usando campos invariantes à esquerda, obteríamos o colchete oposto ao que obtivemos acima, isto é, avaliado na identidade, obteríamos o vetor oposto. Isso resultaria em mudanças de sinais em fórmulas envolvendo o colchete.

Por fim, apresentemos apenas mais dois conceitos relacionados a álgebras de Lie.

**Definição 2.16.** Um *morfismo* de álgebras de Lie  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  e  $(\mathfrak{g}', [\cdot, \cdot]')$  é uma função linear  $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  tal que

$$f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]', \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Com a noção de morfismo, podemos conectar uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de um grupo de Lie  $G$  com a álgebra de Lie dos campos de vetores em  $M$  por meio de *ações infinitesimais*.

**Definição 2.17.** Uma *ação infinitesimal* de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  em uma variedade  $M$  é um morfismo de álgebras de Lie

$$a : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

## 2.4 Fibrados

Para encerrar o capítulo, apresentaremos o básico da teoria de fibrados em Geometria Diferencial. Para se aprofundar nesse assunto, algumas referências são [10] e [8], que também abordam a teoria de conexões em fibrados.

**Definição 2.18.** Um *fibrado vetorial (real)* de dimensão  $r$  é uma tripla  $(E, \pi, M)$  em que  $E$  e  $M$  são variedades suaves e  $\pi : E \longrightarrow M$  é um mapa sobrejetor tal que, para cada  $x \in M$ ,  $\pi^{-1}(x) \doteq E_x$  tem uma estrutura de espaço vetorial (real) de dimensão  $r$  com a seguinte condição de trivialidade local: para cada  $x_0 \in M$ , existe um aberto  $U \ni x_0$  e um difeomorfismo

$$h : E|_U \doteq \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^r$$

tal que  $h$  manda cada fibra  $E_x$  para  $\{x\} \times \mathbb{R}^r$  por meio de um isomorfismo de espaços vetoriais, identificando  $\{x\} \times \mathbb{R}^r$  com  $\mathbb{R}^r$ .

**Observação 2.19.** Fibrados vetoriais complexos são definidos de maneira similar, trocando  $\mathbb{R}$  por  $\mathbb{C}$ , mas tem um comportamento bem diferente dos primos reais. Esse tipo de objeto concerne a Geometria Algébrica.

**Definição 2.20.** Seja  $E \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado vetorial. Uma *seção* de  $E$  é um mapa suave  $\sigma : M \longrightarrow E$  tal que  $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$ . Denotamos o espaço das seções suaves por  $\Gamma(E)$ . Dado um aberto  $U \subseteq M$ , o espaço de seções locais  $\Gamma(E|_U)$  consiste nas seções cujo domínio é  $U$ .

Outras operações importantes com fibrados vetoriais podem ser encontradas em [8], com destaque para a soma direta, que aparecerá em uma demonstração à frente.

**Lema 2.21.** *Todo fibrado vetorial  $E \xrightarrow{\pi} M^n$  admite uma métrica Riemanianna compatível*

**Demonstração.** Tome uma cobertura localmente finita  $\{U_i\}_i$  de  $M$  de modo a trivializar o fibrado, i.e.,  $E|_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{R}^r$ . Assim, existe um produto interno  $g_i$  em  $E|_{U_i}$  dado por

$$g_i(v_p, w_p) = \langle v, w \rangle, \quad \forall p \in U_i,$$

em que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno usual de  $\mathbb{R}^r$ . Seja  $\{\rho_i\}_i$  partição da unidade subordinada a  $\{U_i\}_i$ . Logo, como os produtos internos  $g_i$  são induzidos do produto interno euclidiano, então uma conta simples mostra que

$$g(p) \doteq \sum_i \rho_i(p) g_i(p)$$

define uma métrica Riemanianna em  $E$ . ■

Para o próximo resultado, indicamos a referência [5] para o entendimento de sequências curtas exatas de fibrados vetoriais e também para uma demonstração diferente da que será apresentada aqui.

**Teorema 2.22.** *Toda uma sequência curta exata de fibrados vetoriais  $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} F \longrightarrow 0$  cinde, ou seja, para toda sequência dessa forma, existe uma cisão.*

**Demonstração.** Seja  $g$  uma métrica Riemanianna em  $E$  como no Lema acima. Assim, a cada  $x \in M$ ,  $g$  dá um produto interno em  $E_x$ . Agora, note que, como a sequência é curta exata, o mapa  $i : K \longrightarrow M$  é injetor,  $p : E \longrightarrow F$  é sobrejetor e  $\text{Im}(i) = \text{Ker}(p)$ . Logo, considerando  $\text{Im}(i) \subseteq E$ , defina  $H \doteq (\text{Im}(i))^\perp$  o fibrado vetorial tal que  $H_x \doteq (\text{Im}(i))_x^\perp$ , em que a ortogonalidade é dada pelo produto interno na fibra. Dessa forma, vemos que

$$E \cong \text{Im}(i) \oplus H.$$

Mais ainda, identificando  $K \cong \text{Im}(i)$  e notando que, como  $\text{Im}(i) = \text{Ker}(p)$  e  $p : E \longrightarrow F$  é sobrejetor, podemos identificar  $F \cong H$ , obtemos a seguinte cisão:

$$E \cong K \oplus F.$$
■

Agora, daremos uma breve introdução aos fibrados principais:

**Definição 2.23.** Seja  $M$  uma variedade suave e  $G$  um grupo de Lie. Um  $G$ -fibrado principal sobre  $M$  consiste em uma variedade  $P$  munida de uma ação à direita de  $G$

$$P \times G \longrightarrow P, \quad (p, g) \longmapsto pg,$$

e um mapa sobrejetor

$$\pi : P \longrightarrow M$$

$G$ -equivariante, isto é,  $\pi(pg) = \pi(p), \forall p \in P, g \in G$ , que satisfaz a seguinte condição: para cada  $x_0 \in M$ , existe um aberto  $U \ni x_0$  e um difeomorfismo  $\Psi : P_U \doteq \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$  que mapeia cada fibra  $\pi^{-1}(x)$  para a fibra  $\{x\} \times G$  e que é  $G$ -equivariante. Nesse caso, a ação à direita de  $G$  em  $U \times G$  é no segundo fator:  $(x, a)g = (x, ag)$ .

O Teorema 2.12 garante a seguinte equivalência para fibrados principais.

**Proposição 2.24.** *Uma ação de um grupo de Lie  $G$  em uma variedade  $P$  é parte da estrutura de um fibrado principal se, e somente se, a ação é livre e própria. Assim sendo, a variedade base é difeomorfa a  $M = P/G$  munida da única estrutura que faz o mapa quociente  $\pi_{can} : P \longrightarrow M$  ser uma submersão, e a projeção do fibrado principal é a própria  $\pi_{can}$ .*

Com isso, estamos prontos para voltar os olhos para os grupoides com estrutura diferenciável.

## Capítulo 3

# Grupoides de Lie

“The greatest illusion of this world is the illusion of separation. Things you think are separate and different are actually one and the same.”

---

*Guru Pathik, Avatar: The Last Airbender*[27]

Neste capítulo, coração dessa monografia, é apresentada a base da teoria geral de grupoides de Lie, isto é, grupoides com uma estrutura diferenciável. Diversos resultados apresentados no Capítulo 1 serão retomados, aprofundados e utilizados para o desenvolvimento dessa teoria. Ao longo das próximas seções, teremos uma pitada de grupoides topológicos, muito presentes nos trabalhos de Ronald Brown, como [12], entenderemos a noção de bisseção para o caso Lie, assim como as bisseções locais, e serão apresentadas a estrutura de grupoides de Lie, exemplos novos e importantíssimos para o prosseguimento dos estudos na área, um resultado sobre grupoides transitivos e sua ligação com os fibrados principais, e a construção do algebroide de Lie de um grupoide de Lie.

### 3.1 Uma breve menção aos grupoides topológicos

**Definição 3.1.** Um *Grupoide topológico* é um grupoide  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  cujos conjuntos de flechas  $\mathcal{G}$  (espaço total) e de objetos  $M$  (espaço base) são espaços topológicos, cujos mapas estruturais  $s, t, u, m, i$  são todos contínuos e tais que  $s$  e  $t$  são mapas abertos.

**Observação 3.2.** Observe que em um grupoide topológico todas as  $s$ -fibras e as  $t$ -fibras são espaços topológicos, os grupos de isotopia  $\mathcal{G}_x = s^{-1}(x) \cap t^{-1}(x)$  são grupos topológicos (com a restrição da multiplicação do grupoide), as órbitas  $\mathcal{O}_x = t(s^{-1}(x))$  são subespaços topológicos

de  $M$  e o conjunto de órbitas  $M/\mathcal{G}$  tem topologia quociente induzida.

A combinação de condições exigidas nessa definição torna a estrutura do grupoide ainda mais rígida, como é apresentado na seguinte

**Proposição 3.3.** *Seja  $\mathcal{G}$  um grupoide topológico sobre  $M$ . Então, o mapa unidade  $u : M \rightarrow \mathcal{G}$  é um mergulho topológico, i.e., é um homeomorfismo sobre sua imagem (munido da topologia relativa) e o mapa inversão  $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  é um homeomorfismo.*

**Demonstração.** Já sabemos que  $u : M \rightarrow \mathcal{G}$  é contínuo e sobrejetor sobre sua imagem. A injetividade pode ser verificada rapidamente: se  $x, y \in M$  são tais que  $u(x) = u(y)$ , então

$$1_x = 1_y \implies s(1_x) = s(1_y) \implies x = y.$$

Assim, vendo o mapa unidade como  $u : M \rightarrow u(M)$ , existe uma inversa  $u^{-1} : u(M) \rightarrow M$  para ele. Seja  $V \subseteq M$  um aberto e considere  $s^{-1}(V) = \{g \in \mathcal{G} : s(g) \in V\} \subseteq \mathcal{G}$ . Como  $s : \mathcal{G} \rightarrow M$  é contínuo, então  $s^{-1}(V)$  é aberto em  $\mathcal{G}$ . Logo,

$$(u^{-1})^{-1}(V) = u(V) = \{u(x) \in \mathcal{G} : x \in V\} = s^{-1}(V) \cap u(M).$$

Então,  $(u^{-1})^{-1}(V)$  é aberto na topologia relativa do subspaço  $u(M)$  e, portanto,  $u^{-1} : u(M) \rightarrow M$  é contínua. Segue que  $u : M \rightarrow \mathcal{G}$  é mergulho topológico.

Para  $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ , basta notar que este mapa é inversa de si mesmo:

$$(i \circ i)(g) = i(g^{-1}) = g = \text{id}_{\mathcal{G}}(g).$$

Logo, como é contínuo e tem inversa contínua,  $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  é homeomorfismo. ■

Vários dos exemplos de grupoides apresentados na seção 1.2 podem ser trazidos para o caso topológico, em geral exigindo que a base do grupoide seja um espaço topológico e que os grupos, presentes em algumas construções, sejam grupos topológicos. Faremos uma retomada mais detalhada dos exemplos já apresentados para o caso diferenciável. Por ora, vamos nos ater a um exemplo significativo para a teoria topológica de grupoides ou, mais amplamente, para a topologia algébrica: o *Grupoide Fundamental*.

**Exemplo 3.4.** Seja  $M$  um espaço topológico. Defina  $\mathcal{G} \doteq C([0, 1], M) / \text{Hom}([0, 1])$ , isto é,  $\mathcal{G}$  é o espaço dos caminhos contínuos em  $M$  a menos de reparametrização. Mais explicitamente,  $\mathcal{G}$  é o quociente do conjunto de todas as curvas contínuas da forma  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  pela ação do grupo de homeomorfismos do intervalo  $[0, 1]$  que fixam as extremidades (levam 0 em 0 e

1 em 1), com  $s([\gamma]) = \gamma(0)$ ,  $t([\gamma]) = \gamma(1)$  e multiplicação dada pela concatenação de curvas  $[\gamma_2] * [\gamma_1] \doteq [\gamma_2 * \gamma_1]$ , em que

$$(\gamma_2 * \gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1) & , \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} ,$$

de modo que a unidade é dada pelos caminhos constantes, *i.e.*,  $1_x = [c_x(t)]$ , com  $c_x(t) = x$ , e a inversão é dada por  $[\gamma]^{-1} \doteq [\gamma^{-1}]$ , em que  $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$ . Este grupóide é nitidamente topológico e é chamado de *grupóide de caminhos* de  $M$ .

**Exemplo 3.5.** Seja  $M$  um espaço topológico. Defina  $\mathcal{G}$  como o espaço das classes de homotopia contínua de caminhos contínuos em  $M$ , relativa às extremidades, com as mesmas operações do exemplo anterior. Note que as isotropias desse grupóide correspondem ao grupo fundamental do respectivo ponto, *i.e.*,

$$\mathcal{G}_x = \pi_1(M, x), \quad \forall x \in M.$$

Assim, esse grupóide topológico é chamado de *grupóide fundamental* de  $M$  e denotado por  $\Pi_1(M)$ .

## 3.2 Passagem para o caso diferenciável

**Definição 3.6.** Um *Grupóide de Lie* é um grupóide  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  cujos conjuntos de flechas  $\mathcal{G}$  (espaço total) e de objetos  $M$  (espaço base) são variedades suaves, cujos mapas estruturais  $s, t, u, m, i$  são todos suaves e tais que  $s$  e  $t$  são submersões sobrejetoras.

**Observação 3.7.** A última condição da definição acima garante que  $s^{-1}(x)$  e  $t^{-1}(x)$  são variedades e que  $\mathcal{G}^{(2)}$  é subvariedade de  $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ , pelo *Teorema do Valor Regular*. A suavidade de  $m$  é para ser entendida com respeito à estrutura suave de  $\mathcal{G}^{(2)}$ .

**Observação 3.8.** A partir de agora, todas as variedades apresentadas serão Hausdorff e segundo contáveis. Uma possível exceção é o espaço total de um grupóide de Lie  $\mathcal{G}$ , que pode ser não-Hausdorff, mas mantendo as fibras de suas projeções e o espaço base  $M$  como variedades Hausdorff e segundo contáveis. Grupóides de Lie não-Hausdorff são muito comuns na teoria de folheações, que não será muito abordada neste texto. Uma referência para esse tópico é [16].

Com o novo ambiente em mente, é interessante trazer algumas das propriedades e construções feitas no Capítulo 1 para cá.

**Definição 3.9.** Sejam  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  e  $\mathcal{H} \rightrightarrows N$  grupóides de Lie. Um *morfismo* entre esses grupóides de Lie é um morfismo  $(\mathcal{F}, f)$  (no sentido abstrato) cujas componentes são suaves. Em outras

palavras, um morfismo entre grupoides de Lie é um funtor suave nas flechas e objetos/unidades.

**Definição 3.10.** Seja  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  um grupoide de Lie. Um grupoide de Lie  $\mathcal{H} \rightrightarrows N$  é dito um *subgrupoide de Lie* de  $\mathcal{G}$  se é um subgrupoide (no sentido abstrato) tal que

$$\tilde{\iota} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G} \quad \text{e} \quad \iota : N \longrightarrow M$$

são imersões suaves. Um subgrupoide de Lie é dito *amplo* se for amplo no sentido abstrato.

### 3.2.1 Exemplos

Neste momento, estamos prontos para retomar os exemplos apresentados na seção 1.2 e ir além para dar novos exemplos relevantes para a teoria diferenciável. Nos exemplos que generalizam o que foi feito no Capítulo 1, evitaremos a repetição de explicitar detalhadamente todos os mapas estruturais. As asserções sobre as isotropias, órbitas e transitividade dos grupoides apresentados até aqui continuam válidas.

**Exemplo 3.11.** Se  $M$  é reduzido a uma variedade unitária  $\{*\}$ , então a definição de grupoide de Lie se reduz à de grupo de Lie. Assim, todo grupo de Lie  $G$  é um grupoide de Lie com base trivial  $G \rightrightarrows \{*\}$ . Temos que  $G_x = G$  e  $\mathcal{O}_x = \{*\}$ .

**Exemplo 3.12.** No extremo oposto do exemplo anterior, toda variedade  $M$  pode ser vista como um grupoide de Lie sobre si mesma  $M \rightrightarrows M$ . Neste caso, as projeções são ambas iguais à identidade, todos os elementos são unidades e a multiplicação é trivial, como em 1.12. Note que  $M_x = \{x\}$  e  $\mathcal{O}_x = \{x\}$ .

**Exemplo 3.13.** Seja  $M$  uma variedade e defina

$$\text{Pair}(M) \doteq M \times M \rightrightarrows M,$$

com  $s = \text{pr}_2, t = \text{pr}_1$  e  $(z, y)(y, x) = (z, x)$ . Note que  $\text{Pair}(M)_x = \{(x, x)\}$  e  $\mathcal{O}_x = M$ . Este grupoide de Lie é chamado de *grupoide do par*.

**Exemplo 3.14.** Seja  $G \times M \longrightarrow M$  uma ação suave (à esquerda) de um grupo de Lie  $G$  em uma variedade  $M$  e considere o grupoide de Lie  $\mathcal{G} = G \ltimes M \rightrightarrows M$ , com os mapas idênticos aos definidos no exemplo 1.18. Este grupoide de Lie é chamado de *grupoide de ação* e, como observado anteriormente, tem as noções de isotropia e órbitas compatíveis com essas mesmas noções para ações de grupos de Lie. Note que um jeito equivalente de definí-lo é como subgrupoide do produto direto dos grupoides  $G \rightrightarrows \{*\}$  e  $\text{Pair}(M) \rightrightarrows M$ .



**Exemplo 3.15.** Seja  $E \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado vetorial. Tomando  $s = t = \pi$ , podemos ver  $E \rightrightarrows M$  como um grupoide de Lie, em que a multiplicação se dá pela soma nas fibras. Em  $x \in M$ , a isotropia é  $E_x \doteq \pi^{-1}(x)$  e a órbita é  $\mathcal{O}_x = \{x\}$ .

Vejamos agora alguns novos exemplos, particulares do ambiente suave.

**Exemplo 3.16.** Seja  $E \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado vetorial. Considere o conjunto

$$GL(E) \doteq \{(y, T, x) \in M \times L(E_x, E_y) \times M : T \text{ é isomorfismo}\}$$

munido dos mapas  $s = \text{pr}_3, t = \text{pr}_1$  e multiplicação definida da mesma forma que para o grupoide trivial do exemplo 1.16. Assim,  $\mathcal{G} = GL(E)$  é o *grupoide linear geral* associado ao fibrado  $E \xrightarrow{\pi} M$ . Note que  $GL(E)_x = GL(E_x)$  (como grupo linear geral associado ao espaço vetorial  $E_x$ ) e  $\mathcal{O}_x = M$ .

**Exemplo 3.17.** Seja  $\pi : M \longrightarrow N$  uma submersão sobrejetora entre duas variedades. Assim, defina

$$\mathcal{G} = M \times_N M = \{(x, y) \in M \times M : \pi(x) = \pi(y)\}.$$

Enxerguemos tal conjunto como um grupoide de Lie com projeções  $s = t = \pi$ , de modo que o resto da estrutura de grupoide vem para tornar  $\mathcal{G} = M \times_N M$  um subgrupoide de Lie de  $\text{Pair}(M)$  ou, equivalentemente, para tornar o mapa natural  $M \times_N M \longrightarrow \text{Pair}(M)$  um morfismo de grupoides de Lie. Note que os grupos de isotropia são triviais  $\mathcal{G}_x = \{(x, x)\}$ , como no grupoide dos pares, e as órbitas também:

$$\mathcal{O}_x = t(s^{-1}(x)) = \pi(\pi^{-1}(x)) = \{x\}.$$

### 3.2.2 Bisseções globais e locais

Para um grupoide abstrato  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ , vimos que uma *bisseção* de  $\mathcal{G}$  é uma seção  $b : M \longrightarrow \mathcal{G}$  tal que  $t \circ b : M \longrightarrow M$  é uma bijeção. Para grupoides de Lie, a definição só pede a mais uma regularidade compatível com a estrutura suave.

**Definição 3.18.** Seja  $\mathcal{G}$  um grupoide de Lie sobre  $M$ . Uma *bisseção (global)* de  $\mathcal{G}$  é uma seção suave  $b : M \longrightarrow \mathcal{G}$  de  $s$  tal que  $t \circ b : M \longrightarrow M$  é um difeomorfismo. Denotemos por  $\Gamma(\mathcal{G})$  ou  $\text{Bis}(\mathcal{G})$  o conjunto de todas as bisseções do grupoide de Lie  $\mathcal{G}$ .

Refazendo exatamente as mesmas deduções e demonstrações feitas no seção 1.6.1 (trocando “bijeção” por “difeomorfismo”), pode-se munir  $\Gamma(\mathcal{G})$  com a estrutura de grupo dada pela multiplicação

$$(b_1 \bullet b_2)(x) \doteq b_1((t \circ b_2)(x))b_2(x), \quad \forall b_1, b_2 \in \Gamma(\mathcal{G}), \forall x \in M,$$

em que a identidade do grupo é a seção unidade do grupoide  $u : M \longrightarrow \mathcal{G}$  e a inversa de uma bisseção  $b \in \Gamma(\mathcal{G})$ , com respeito à essa estrutura, é dada por

$$b^{-1}(x) \doteq b((t \circ b)^{-1}(x))^{-1}, \quad \forall x \in M.$$

Note que dessa forma, o produto de duas bisseções suaves é uma bisseção suave.

**Observação 3.19.** O modelo apresentado na seção 1.6.2 passa para o caso Lie com a hipótese das bisseções, como subconjuntos, serem também subvariedades de  $\mathcal{G}$ , com a propriedade de  $s$  e  $t$  serem difeomorfismos quando restritos a essa subvariedade. Assim, vale também o resultado 1.46, que estabelece a correspondência entre os modelos, e a multiplicação dada por

$$B_1 \bullet B_2 = m_{\mathcal{G}}((B_1 \times B_2) \cap \mathcal{G}^{(2)}), \quad \forall B_1, B_2 \in \Gamma(\mathcal{G})$$

está bem-definida, uma vez que, pela correspondência, existe uma bisseção  $b : M \longrightarrow \mathcal{G}$  (que é, em particular, uma seção) tal que  $b(M) = B_1 \bullet B_2$ , de modo que  $B_1 \bullet B_2$  é subvariedade. A identidade do grupo é novamente  $M$  e a inversa de  $B \in \Gamma(\mathcal{G})$  é dada por  $B^{-1} = i_{\mathcal{G}}(B)$ .

**Observação 3.20.** De modo análoga ao que foi feito nas obsevações 1.45 e 1.51, mostra-se que, independentemente do modelo,  $\Gamma(\mathcal{G})$  vem com um homomorfismo natural

$$\Phi : \Gamma(\mathcal{G}) \longrightarrow \text{Diff}(M)$$

$$b \longmapsto t \circ b$$

$$B \longmapsto t|_B \circ (s|_B)^{-1}.$$

Mais que isso, o grupo de bisseções tem três ações naturais em  $\mathcal{G}$  (adotaremos, de agora em diante, o modelo de bisseções como seções):

- Multiplicação à esquerda:  $L_b(g) \doteq b(t(g))g, \forall b \in \Gamma(\mathcal{G}), \forall g \in \mathcal{G};$
- Multiplicação à direita:  $R_b(g) \doteq g(b(s(g)))^{-1}, \forall b \in \Gamma(\mathcal{G}), \forall g \in \mathcal{G};$
- Ação adjunta:  $Ad_b(g) \doteq (L_b \circ R_b)(g) = (R_b \circ L_b)g, \forall b \in \Gamma(\mathcal{G}), \forall g \in \mathcal{G}.$

A última igualdade do terceiro item segue do seguinte:

$$\begin{aligned} (L_b \circ R_b)(g) &= L_b\left(g(b(s(g)))^{-1}\right) = b \circ t\left(g(b(s(g)))^{-1}\right)g(b(s(g)))^{-1} = b(t(g))g(b(s(g)))^{-1}, \\ (R_b \circ L_b)(g) &= R_b(b(t(g))g) = b(t(g))g\left(b \circ s(b(t(g))g)\right)^{-1} = b(t(g))g(b(s(g)))^{-1}. \end{aligned}$$

Note, por fim, que

$$s \circ L_b = s, \quad t \circ L_b = t \circ b \circ t, \quad s \circ R_b = t \circ b \circ s, \quad t \circ R_b = t.$$

**Exemplo 3.21.** Seja um grupo de Lie  $G \rightrightarrows \{*\}$  visto como um grupóide. Uma bisseção nada mais é do que um elemento de  $G$ , de modo que  $\Gamma(G) = G$  como grupos.

**Exemplo 3.22.** Seja  $M$  uma variedade vista como um grupóide de Lie sobre si mesma. Neste caso, a única bisseção existente é a identidade, o faz com que  $\Gamma(M)$  seja unitário.

**Exemplo 3.23.** Seja  $\text{Pair}(M) \rightrightarrows M$  o grupóide do par. Aqui, uma bisseção de  $\text{Pair}(M)$  é um difeomorfismo de  $M$ :  $\Gamma(\text{Pair}(M)) \cong \text{Diff}(M)$ .

**Exemplo 3.24.** Seja  $G$  um grupo de Lie que age em uma variedade  $M$ . Uma bisseção do grupóide de ação  $G \ltimes M \rightrightarrows M$  é um mapa  $x \mapsto (g(x), x)$  suave tal que  $x \mapsto g(x) \cdot x$  é um difeomorfismo.

**Exemplo 3.25.** Seja  $E \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado vetorial visto como um grupóide  $E \rightrightarrows M$ . Assim, uma bisseção desse grupóide é o mesmo que uma seção. De modo mais geral, isso é verdade para qualquer *fibrado de grupos de Lie*, que veremos adiante no exemplo 3.40.

Em geral, não existe uma bisseção (global) passando por uma flecha  $g \in \mathcal{G}$ , mas veremos adiante que podemos garantir a existência local de uma bisseção que passa pela flecha escolhida.

**Definição 3.26.** Seja  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  um grupóide de Lie. Uma *bisseção local* de  $\mathcal{G}$  é uma seção local  $b : U \rightarrow \mathcal{G}$  de  $s$ , em que  $U \subseteq M$  é aberto, tal que  $t \circ b : U \rightarrow M$  é um mergulho aberto, isto é,  $t \circ b : U \rightarrow V \subseteq M$  é um difeomorfismo entre abertos de  $M$ .

**Observação 3.27.** Uma bisseção local  $b : U \rightarrow \mathcal{G}$  age localmente em  $\mathcal{G}$  pelas mesmas ações descritas para bisseções globais:

- Multiplicação à esquerda:  $L_b : t^{-1}(U) \rightarrow t^{-1}((t \circ b)(U))$ ;
- Multiplicação à direita:  $R_b : s^{-1}(U) \rightarrow s^{-1}((t \circ b)(U))$ ;
- Ação adjunta:  $Ad_b : s^{-1}(U) \cap t^{-1}(U) \rightarrow \mathcal{G}$ .

**Proposição 3.28.** Seja  $\mathcal{G}$  um grupóide de Lie sobre  $M$ . Então, para todo  $g \in \mathcal{G}$ , existe uma bisseção local  $b : V \rightarrow \mathcal{G}$  tal que  $g \in b(V)$ .

**Demonstração.** Escrevendo  $m = \dim(M) \leq \dim(\mathcal{G}) = n$ , dado  $g \in \mathcal{G}$ , existem cartas  $(\varphi, U)$  de  $\mathcal{G}$  e  $(\psi, V)$  de  $M$ , com  $\varphi(g) = 0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $s(U) \subseteq V$  e  $\psi(s(g)) = 0 \in \mathbb{R}^m$  e tais que

$$(\psi \circ s)(g_1, \dots, g_m, g_{m+1}, \dots, g_n) = (g_1, \dots, g_m),$$

pela *Forma local das submersões*. Tome  $\{\partial g_i|_g\}_{i=1}^n$  e  $\{\partial x_j|_{s(g)}\}_{j=1}^n$  bases de  $T_g\mathcal{G}$  e  $T_{s(g)}M$ , respectivamente. Assim, temos que  $\text{Ker}(ds)_g = \text{span}\{\partial g_i|_g : m+1 \leq i \leq n\}$ . Logo, como  $\dim \text{Ker}(ds)_g = \dim \text{Ker}(dt)_g$ , existe  $W \subseteq T_g\mathcal{G}$  de modo que

$$W \oplus \text{Ker}(ds)_g = T_g\mathcal{G} = W \oplus \text{Ker}(dt)_g.$$

Dessa forma, podemos escrever  $W = \{v + Av : v \in \text{Ker}(ds)_g\}$ , de modo que a transformação  $A : \text{Ker}(ds)_g \rightarrow (\text{Ker}(ds)_g)^\perp$  é linear. Assim, ao identificarmos  $\mathbb{R}^n$  com  $T_g\mathcal{G}$  através de  $e_i \leftrightarrow \partial g_i|_g$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que, para  $|x| < \varepsilon$ ,  $x + Ax \in \varphi(U)$ , o que permite considerarmos  $\psi(V) + A\psi(V) = \varphi(U)$ . Logo, o mapa

$$\begin{aligned} b_o : \psi(V) &\longrightarrow \varphi(U) \\ x &\longmapsto x + Ax \end{aligned}$$

nos permite definir  $b = \varphi^{-1} \circ b_o \circ \psi : V \rightarrow \mathcal{G}$  tal que  $s \circ b = \text{id}_V$ ,  $db_{s(g)}(T_{s(g)}M) = W$  e  $b_o(0) = 0 = \varphi(g)$ , de modo que  $(b \circ s)(g) = g$ . Disso, segue que  $d(t \circ b)_{s(g)}$  é isomorfismo e, pelo *Teorema da Função Inversa*, existe vizinhança  $V_o$  de  $s(g)$  tal que  $(t \circ b)|_{V_o} : V_o \rightarrow (t \circ b)(V_o)$  é difeomorfismo. ■

### 3.3 Estruturas dos grupoides de Lie

Antes de apresentar e explorar mais exemplos de grupoides de Lie, faremos uma pausa para compreender o que uma estrutura diferenciável em um grupoide impõe nos demais objetos que o rodeiam. Começemos traduzindo o resultado da Proposição 3.3 para o caso Lie:

**Teorema 3.29.** *Seja  $\mathcal{G}$  um grupoide de Lie sobre  $M$ . Então, o mapa unidade  $u : M \rightarrow \mathcal{G}$  é um mergulho suave e o mapa inversão  $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  é um difeomorfismo.*

**Demonstração.** De 3.3, sabemos que  $u : M \rightarrow \mathcal{G}$  é um mergulho topológico. Ainda, como  $s \circ u = \text{id}_M$ , pela *Regra da Cadeia*,

$$ds_{1_x} \circ du_x = ds_{u(x)} \circ du_x = d(s \circ u)_x = d(\text{id}_M)_x = \text{id}_{T_x M}$$

Como  $\text{id}_{T_x M}$  é bijetora e  $ds_{1_x}$  é sobrejetora ( $s$  é submersão), segue que  $du_x$  é injetora,  $\forall x \in M$ , o que implica que  $u : M \rightarrow \mathcal{G}$  é imersão injetora. Portanto, é um mergulho suave.

Analogamente ao caso contínuo, o mapa inversão  $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  é inversa de si próprio e é suave, então é um difeomorfismo. Outra maneira de ver isso seria utilizando o *Teorema da Função*

Implícita. ■

**Observação 3.30.** A Proposição acima respalda a identificação  $M \cong u(M)$ , que poderá aparecer ao longo do texto. Isso significa identificar  $x \in M$  com  $1_x \in u(M)$ .

Os próximos Teoremas a serem apresentados garantem que os grupos de isotropia são grupos de Lie e dependem do seguinte

**Lema 3.31.** *Seja  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  um grupoide de Lie. Então, o mapa  $t_x \doteq t|_{s^{-1}(x)} : s^{-1}(x) \longrightarrow M$  tem posto constante.*

**Demonstração.** Dados  $g_1, g_2 \in s^{-1}(x)$ , defina  $h = g_1 g_2^{-1} \in \mathcal{G}$ . Assim, pela Proposição 3.28,  $\exists b : U \longrightarrow \mathcal{G}$  bisseção local tal que  $(b \circ s)(h) = h$ . Isso implica que

$$h = b(s(h)) = b(s(g_2^{-1})) = (b \circ t)(g_2).$$

Assim, tomando  $V \doteq (t \circ b)(U)$ , o difeomorfismo  $L_b|_{s^{-1}(x)} : t^{-1}(U) \cap s^{-1}(x) \longrightarrow t^{-1}(V) \cap s^{-1}(x)$  mapeia  $g_2$  em  $g_1$ . De fato,

$$L_b(g_2) = b(t(g_2))g_2 = (b \circ t)(g_2)g_2 = hg_2 = g_1.$$

Além disso,  $\forall g \in t^{-1}(U) \cap s^{-1}(x)$ , temos a comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} t^{-1}(U) \cap s^{-1}(x) & \xrightarrow{L_b|_{s^{-1}(x)}} & t^{-1}(U) \cap s^{-1}(x) \\ t_x \downarrow & & \downarrow t_x \\ U & \xrightarrow{t \circ b} & V \end{array}$$

$$\begin{aligned} (t_x \circ L_b)(g) &= t_x((b \circ t)(g)g) = t((b \circ t)(g)) = (t \circ b \circ t)(g) = (t \circ b \circ t_x)(g) \\ \implies d(t_x \circ L_b)|_{g_2} &= d((t \circ b) \circ t_x)|_{g_2} \implies d(t_x)_{g_1} \circ \underbrace{d(L_b)_{g_2}}_{\text{isomorfismo}} = \underbrace{d(t \circ b)_{t(g_2)}}_{\text{isomorfismo}} \circ d(t_x)_{g_2} \\ \implies \text{rank}(d(t_x)_{g_1}) &= \text{rank}(d(t_x)_{g_2}) \end{aligned}$$

Portanto,  $t_x : s^{-1}(x) \longrightarrow M$  tem posto constante. ■

**Teorema 3.32.** *Seja  $\mathcal{G}$  um grupoide de Lie sobre  $M$ . Então,  $t^{-1}(y) \cap s^{-1}(x) \subseteq \mathcal{G}$  é uma subvariedade mergulhada e fechada, se  $x$  e  $y$  estão na mesma órbita.*

**Demonstração.** Sabemos que  $s, t$  são submersões, então, em particular,  $s^{-1}(x)$  é subvariedade mergulhada e fechada de  $\mathcal{G}$ . Pelo Lema 3.31,  $t_x : s^{-1}(x) \rightarrow M$  tem posto constante, então

$$t^{-1}(y) \cap s^{-1}(x) = (t|_{s^{-1}(x)})^{-1}(y) = (t_x)^{-1}(y)$$

é subvariedade mergulhada e fechada de  $s^{-1}(x)$ . A asserção inicial desta demonstração agora implica que  $t^{-1}(y) \cap s^{-1}(x)$  é subvariedade mergulhada e fechada de  $\mathcal{G}$ . ■

**Corolário 3.33.** *Seja  $\mathcal{G}$  um grupoide de Lie sobre  $M$ . Então, as isotropias  $\mathcal{G}_x$  são grupos de Lie, para todo  $x \in M$ .*

**Demonstração.** Tomando  $x = y$  no Teorema 3.32, temos diretamente que  $\mathcal{G}_x = s^{-1}(x) \cap t^{-1}(x)$  é subvariedade mergulhada e fechada de  $\mathcal{G}$ . Como a multiplicação e a inversão em  $\mathcal{G}_x$  são restrições das operações do grupoide (que são suaves em  $\mathcal{G}$ ), segue que  $\mathcal{G}_x$  também herda a suavidade das operações de  $\mathcal{G}$ , tornando-se então um grupo de Lie. ■

**Proposição 3.34.** *Sejam  $\mathcal{G} \rightrightarrows M, \mathcal{H} \rightrightarrows N$  grupoides de Lie  $\mathcal{F} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  um morfismo de grupoides de Lie sobre  $f : M \rightarrow N$ . Então, as restrições*

$$\mathcal{F}|_x : \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{H}_{f(x)}$$

*são morfismos de grupos de Lie.*

**Demonstração.** A suavidade da restrição descende da suavidade de  $\mathcal{F}$ , uma vez que  $\mathcal{G}_x$  e  $\mathcal{H}_{f(x)}$  são grupos de Lie mergulhados e fechados. Basta verificar que  $\mathcal{F}|_x$  é morfismo de grupos, mas isso segue pois  $\mathcal{F}$  é morfismo dos grupoides  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{F}|_x(g_2 g_1) = \mathcal{F}(g_2 g_1) = \mathcal{F}(g_2) \mathcal{F}(g_1) = \mathcal{F}|_x(g_2) \mathcal{F}|_x(g_1), \quad \forall g_1, g_2 \in \mathcal{G}_x.$$

■

**Lema 3.35.** *Seja  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  um grupoide de Lie. Então, para cada  $x \in M$ , o grupo de isotropia  $\mathcal{G}_x$  age em  $s^{-1}(x)$  (à esquerda) propriamente.*

**Demonstração.** Mostremos que o mapa

$$\begin{aligned} \Phi : s^{-1}(x) \times \mathcal{G}_x &\rightarrow s^{-1}(x) \times s^{-1}(x) \\ (g, h) &\mapsto (g, gh) \end{aligned}$$

é próprio. Seja  $K \subseteq s^{-1}(x) \times s^{-1}(x)$  compacto e  $((g_n, h_n))_n \subseteq \Phi^{-1}(K)$  sequência tal que

$$\Phi((g_n, h_n)) = (g_n, g_n h_n) \longrightarrow (g, k).$$

Note que a continuidade dos mapas  $i : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$  e  $m : \mathcal{G}^{(2)} \longrightarrow \mathcal{G}$  do grupóide permite as seguintes passagens:

$$\begin{aligned} (g_n, g_n h_n) \longrightarrow (g, k) &\implies g_n \longrightarrow g, \quad g_n h_n \longrightarrow k \implies g_n^{-1} \longrightarrow g^{-1}, \quad g_n h_n \longrightarrow k \\ &\implies h_n = g_n^{-1} g_n h_n \longrightarrow g^{-1} k \doteq h \end{aligned}$$

Portanto,  $(g_n, h_n) \longrightarrow (g, g^{-1}k) = (g, h)$ , o que termina a demonstração. ■

**Corolário 3.36.** *Seja  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  um grupóide de Lie. Então,  $t_x \doteq t|_{s^{-1}(x)} : s^{-1}(x) \longrightarrow \mathcal{O}_x$  é um  $\mathcal{G}_x$ -fibrado principal.*

**Demonstração.** Segue da ação de  $\mathcal{G}_x$  sobre  $s^{-1}(x)$  ser livre e própria (Lemas 1.19 e 3.35). ■

Agora que sabemos um pouco mais sobre as isotropias, nada mais justo que entendermos a estrutura das órbitas.

**Teorema 3.37.** *Seja  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  um grupóide de Lie. Então, as órbitas  $\mathcal{O}_x \subseteq M$  são subvariedades imersas.*

**Demonstração.** Do Lema 1.20, temos que  $\mathcal{O}_x \cong \frac{s^{-1}(x)}{\mathcal{G}_x}$ . Como  $\mathcal{G}_x$  é grupo de Lie,  $s^{-1}(x)$  é subvariedade mergulhada de  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{G}_x$  age em  $s^{-1}(x)$  de maneira livre e própria (Lemas 1.19 e 3.35), segue de [ref Cap2] que  $\mathcal{O}_x$  é subvariedade de  $M$ . Agora, analisemos os seguintes diagramas nitidamente comutativos, em que  $\iota$  denota o mapa de inclusão dos devidos espaços:

$$\begin{array}{ccc} s^{-1}(x) & \xrightarrow{\iota|_{s^{-1}(x)}} & \mathcal{G} \\ t \downarrow & & \downarrow t \\ \mathcal{O}_x & \xrightarrow{\iota|_{\mathcal{O}_x}} & M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Ts^{-1}(x) & \xrightarrow{d(\iota|_{s^{-1}(x)})} & T\mathcal{G} \\ dt \downarrow & & \downarrow dt \\ T\mathcal{O}_x & \xrightarrow{d(\iota|_{\mathcal{O}_x})} & TM \end{array}$$

Note que a comutatividade se traduz nas expressões

$$\iota|_{\mathcal{O}_x} \circ t = t \circ \iota|_{s^{-1}(x)}, \quad d(\iota|_{\mathcal{O}_x}) \circ dt = dt \circ d(\iota|_{s^{-1}(x)}).$$

Dado  $y \in \mathcal{O}_x$ , seja  $v \in \text{Ker}(d\iota_y : T_y \mathcal{O}_x \longrightarrow T_y M)$ , i.e.,  $v \in T_y \mathcal{O}_x$  tal que  $d\iota|_{\mathcal{O}_x}(v) = 0$ . Assim, existe  $w \in Ts^{-1}(x)$  tal que  $v = dt(w)$ . Logo,

$$0 = d(\iota|_{\mathcal{O}_x})(v) = (d(\iota|_{\mathcal{O}_x}) \circ dt)(w) = (dt \circ d(\iota|_{s^{-1}(x)}))(w) = dt(w) = v.$$

Portanto,  $d\iota_y : T_y \mathcal{O}_x \longrightarrow T_y M$  é injetora, para todo  $y \in \mathcal{O}_x$ , tornando  $\iota|_{\mathcal{O}_x}$  uma imersão. ■

**Observação 3.38.** Na verdade, as órbitas são também subvariedades *iniciais*, isto é, se  $f : N \rightarrow M$  é suave e  $f(N) \subseteq \mathcal{O}_x$ , então a correstrução  $\bar{f} : N \rightarrow \mathcal{O}_x$  pode ser escrita da forma  $\pi \circ u \circ f$ , que é claramente suave.

Resumindo os resultados que obtivemos até o momento, temos o seguinte

**Teorema 3.39. (Teorema Estrutural dos Grupoides de Lie)**

Seja  $\mathcal{G}$  um grupoide de Lie sobre  $M$ . Então, para qualquer  $x \in M$ , tem-se que:

- i ) A seção unidade  $u : M \rightarrow \mathcal{G}$  é um mergulho;
- ii ) O mapa de inversão  $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  é um difeomorfismo;
- iii ) Os grupos de isotropia  $\mathcal{G}_x$  são Grupos de Lie;
- iv ) A correstrução  $t_x \doteq t|_{s^{-1}(x)} : s^{-1}(x) \rightarrow \mathcal{O}_x \subseteq M$  é um  $\mathcal{G}_x$ -fibrado principal;
- v ) As órbitas  $\mathcal{O}_x$  são subvariedades imersas iniciais de  $M$ .

### 3.4 Mais exemplos

**Exemplo 3.40.** Um fibrado de grupos de Lie (Lie group bundle)  $\pi : Q \rightarrow M$  é tal que

$$\forall x \in M, \exists U_x \subseteq M \text{ tal que } Q|_{U_x} \cong U_x \times G,$$

em que  $G$  é um grupo de Lie. Em particular, todo fibrado vetorial é um Lie group bundle ao considerarmos a estrutura aditiva nas fibras. Desse modo,  $Q \rightrightarrows M$  é um grupoide, com  $s = t = \pi$  e multiplicação dada por

$$m(g_1, g_2) = g \iff \pi(g_1) = \pi(g_2) = \pi(g), g_1 g_2 = g.$$

**Observação 3.41.** Na direção contrária do apresentado acima, todo grupoide de Lie cujas projeções são iguais ( $s = t$ ) define uma família de grupos de Lie: uma submersão sobrejetora com estrutura de grupo nas fibras de modo que a multiplicação na fibra depende suavemente do ponto base. Em geral, isso não é um Lie group bundle uma vez que não precisam ser trivializações locais. Na verdade, os grupos para fibras diferentes não precisam nem ser isomorfos como grupos de Lie, ou mesmo como variedades. Denominamos esse caso de *bundle of Lie groups*.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Aqui, demos preferência a manter a terminologia em inglês para não haver confusões numa possível tradução.



**Exemplo 3.42.** Dada uma variedade  $M$ , consideremos o *grupoide fundamental de  $M$* , visto como grupoide topológico no exemplo 3.5, mas agora no contexto suave:

$$\Pi(M) = \{[\gamma] : \gamma : [0, 1] \longrightarrow M \text{ é suave}\},$$

em que  $[\gamma]$  é a classe de homotopia da curva  $\gamma$ , relativa às extremidades. Provemos que  $\Pi(M)$  é um grupoide de Lie sobre  $M$  com projeções

$$s([\gamma]) = \gamma(0), \quad t([\gamma]) = \gamma(1),$$

e multiplicação dada por  $[\gamma] * [\eta] \doteq [\gamma * \eta]$ , definida para curvas tais que  $\gamma(0) = \eta(1)$ .

Em primeiro lugar, vejamos que  $\Pi(M)$  é uma variedade suave. Seja  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  o recobrimento universal de  $M$ . considere a aplicação

$$\begin{aligned} F : \tilde{M} \times \tilde{M} &\longrightarrow \Pi(M) \\ (\tilde{p}, \tilde{q}) &\longmapsto [\pi(\gamma)] \end{aligned}$$

em que  $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \tilde{M}$  é curva ligando  $\tilde{p}$  à  $\tilde{q}$ .  $\gamma$  é única a menos de homotopia de caminhos e, logo, está bem-definida. Note que, se  $f \in \text{Aut}(\pi)$ ,  $\pi \circ f = \pi$  e então  $F$  é equivariante pela ação diagonal de  $\text{Aut}(\pi)$  em  $\tilde{M} \times \tilde{M}$ . De fato,

$$F(f(\tilde{p}), f(\tilde{q})) = F(\tilde{p}, \tilde{q}),$$

Mais do que isso,

$$\begin{aligned} F(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1) = F(\tilde{p}_2, \tilde{q}_2) &\implies \pi(\tilde{p}_1) = \pi(\tilde{p}_2) \text{ e } \pi(\tilde{q}_1) = \pi(\tilde{q}_2) \\ &\implies \exists f, g \in \text{Aut}(\pi) \text{ tais que } f(\tilde{p}_1) = \tilde{p}_2 \text{ e } g(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_2, \end{aligned}$$

de modo que

$$F(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1) = F(\tilde{p}_2, \tilde{q}_2) \iff (\tilde{p}_2, \tilde{q}_2) = (f(\tilde{p}_1), g(\tilde{q}_1)).$$

Assim,

$$F(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1) = F(\tilde{p}_2, \tilde{q}_2) = F(f(\tilde{p}_1), g(\tilde{q}_1)) = F(\tilde{p}_1, f^{-1}g(\tilde{q}_1))$$

e portanto  $[\pi(\gamma)] = [\pi(\eta)]$ , onde  $\gamma : \tilde{p}_1 \rightarrow \tilde{q}_1$ ,  $\eta : \tilde{p}_1 \rightarrow f^{-1}g(\tilde{q}_1)$ . Agora,  $\gamma$  é um levantamento de  $\pi(\gamma)$  por  $\pi$  começando em  $\tilde{p}_1$ , e  $\eta$  um levantamento de  $\pi(\eta)$  por  $\pi$  começando em  $\tilde{p}_1$ , e portanto  $[\gamma] = [\eta]$ . Em particular,  $f^{-1}g(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1$  e portanto  $f = g$ . Mais ainda,  $F$  induz uma

bijeção:

$$\tilde{F} : \frac{\tilde{M} \times \tilde{M}}{\text{Aut}(\pi)} \longrightarrow \Pi(M).$$

Como a ação de  $\text{Aut}(\pi)$  em  $\tilde{M}$  é livre e própria, a ação diagonal também o é. Portanto, o quociente herda uma estrutura de variedade suave de dimensão  $2 \dim M$ , e  $\tilde{F}$  é um difeomorfismo. Assim,  $\Pi(M)$  torna-se uma variedade.

Para verificar que  $s$  e  $t$  são submersões suaves, fixe um ponto  $[(x, y)] \in \Pi(M)$ . Escolha seções locais  $\sigma : U \rightarrow \tilde{M}$  e  $\beta : V \rightarrow \tilde{M}$  de  $\pi$  em torno de  $\pi(x)$  e  $\pi(y)$ , respectivamente, com  $x \in \sigma(U)$ ,  $y \in \beta(V)$ . Podemos supor que  $U$  e  $V$  são domínios de trivialização do recobrimento. As aplicações

$$U \ni z \longmapsto [(\sigma(z), y)] \in \Pi(M), \quad V \ni z \mapsto [(x, \beta(z))] \in \Pi(M)$$

são seções locais suaves para  $s$  e  $t$ , respectivamente. Logo,  $s$  e  $t$  são submersões.

Agora, resta ver que os mapas estruturais são suaves.

- Projeções de saída e término: como  $s \circ \tilde{F} = \pi \circ \text{pr}_2$ ,  $t \circ \tilde{F} = \pi \circ \text{pr}_1$ , e  $\pi$  é suave, segue que  $s$  e  $t$  são suaves.
- Multiplicação: é dada por  $[(x, y)] \cdot [(y, z)] = [(x, z)] = [\text{pr}_1(x, y), \text{pr}_2(y, z)]$ , que é claramente suave.
- Seção unidade: é dada por  $u(p) = [(\sigma(p), \sigma(p))]$ , com  $\sigma$  seção local de  $\pi$ . Logo,  $u$  é suave.
- Mapa de inversão: é dado por  $\iota([(x, y)]) = [(y, x)] = [\text{pr}_2(x, y), \text{pr}_1(x, y)]$ , que também é suave.

Portanto,  $\Pi(M) \rightrightarrows M$  é um grupoide de Lie.

**Exemplo 3.43.** <sup>2</sup> Tomando  $M = \mathbb{S}^1$ , o recobrimento universal é  $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ . Neste caso:

$$\Pi(\mathbb{S}^1) \cong \frac{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \text{ um cilindro (!),}$$

em que a ação de  $\mathbb{Z}$  é por translação diagonal:  $n \cdot (x, y) = (x + n, y + n)$ . Geometricamente, um ponto  $(p, q) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  corresponde à classe do caminho que inicia em  $p$ , dá a parte inteira de  $\frac{q}{2\pi}$  voltas completas e percorre um arco adicional de comprimento  $q \bmod 2\pi$ . O grupo de isotropia

<sup>2</sup>Esse exemplo foi-me apresentado pela minha amiga e colega de estudo de grupoides Nicole Lavinia, a quem devo agradecer por enriquecer minha compreensão acerca dos grupoides por meio de um exemplo que é passível de ser desenhado. Além disso, ela também me apresentou esse jeito de introduzir o grupoide de Gauge como sequência natural da construção do grupoide Fundamental.

em um ponto  $z \in \mathbb{S}^1$  é isomorfo a  $\pi_1(\mathbb{S}^1, z) \cong \mathbb{Z}$ . Além disso, a restrição  $t_z : \{z\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  é um  $\mathbb{Z}$ -fibrado principal, isomorfo ao recobrimento universal  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ .

Inspirado no exemplo 3.42, podemos definir o *Grupoide de Gauge*:

**Exemplo 3.44.** Seja  $G$  um grupo de Lie e  $\pi : P \rightarrow M$  um  $G$ -fibrado principal. Assim, note que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Pair}(P) & \longrightarrow & \frac{\text{Pair}(P)}{G} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ P & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

representa um morfismo de grupoides de Lie, em que o quociente é pela ação diagonal de  $G$  (o quociente será variedade pois a ação é livre e própria). De fato, isso segue do seguinte

**Lema 3.45.** *Nas condições acima, a ação diagonal do grupo de Lie  $G$  em  $\text{Pair}(P)$  é compatível com a estrutura do grupoide, isto é, os mapas  $s, t, u, i, m$  são todos  $G$ -equivariantes.*

**Demonstração.** Seja  $z, y, x \in P$  e  $g \in G$ . Assim,

$$s((y, x) \cdot g) = s((y \cdot g, x \cdot g)) = x \cdot g = s((y, x)) \cdot g$$

$$t((y, x) \cdot g) = t((y \cdot g, x \cdot g)) = y \cdot g = t((y, x)) \cdot g$$

$$u(x \cdot g) = 1_{x \cdot g} = (x \cdot g, x \cdot g) = (x, x) \cdot g = u(x) \cdot g$$

$$i((y, x) \cdot g) = i((y \cdot g, x \cdot g)) = (x \cdot g, y \cdot g) = (x, y) \cdot g = i(y, x) \cdot g$$

$$m((z, y) \cdot g, (y, x) \cdot g) = m((z \cdot g, y \cdot g), (y \cdot g, x \cdot g)) = (z \cdot g, x \cdot g) = (z, x) \cdot g = m((z, y), (y, x)) \cdot g$$

■

Logo,  $\frac{\text{Pair}(P)}{G}$  tem estrutura de grupoide de Lie tal que  $\text{Pair}(P) \rightarrow \frac{\text{Pair}(P)}{G}$  é um morfismo.

Definimos, então,

$$\mathcal{G}(P) \doteq \frac{\text{Pair}(P)}{G} \rightrightarrows M$$

Os mapas estruturais são dados por:

$$s([p, q]) = \pi(q), \quad t([p, q]) = \pi(p), \quad [p', q'] \cdot [p, q] = [p', q] \text{ quando } \pi(q') = \pi(p).$$

Alternativamente, podemos descrevê-lo como:

$$\mathcal{G}(P) = \{(y, \varphi, x) \mid x, y \in M, \varphi : P_x \rightarrow P_y \text{ } G\text{-equivariante}\},$$

Neste modelo, os mapas ficam sendo análogos aos de um grupoide trivial (exemplo 1.16):

$$s(y, \varphi, x) = x, \quad t(y, \varphi, x) = y, \quad (z, \psi, y)(y, \varphi, x) = (z, \psi \circ \varphi, x).$$

Este é o *Grupoide de Gauge*, e a sua importância para a teoria ficará clara na próxima seção. Vejamos quem é o seu grupo de bisseções. Considerando o segundo modelo, notamos que uma bisseção de  $\mathcal{G}(P)$  é uma seção da forma

$$b : M \longrightarrow \mathcal{G}(P), \quad b(x) = (y(x), \varphi_x, x), \quad \varphi_x : P_x \longrightarrow P_y \text{ é } G\text{-equivariante e } x \longmapsto y(x) \text{ difeo.}$$

Note que podemos omitir  $x$  na tripla que define a bisseção. Assim, na verdade podemos identificar  $b(x) = (y(x), \varphi_x, x) \cong (y(x), \varphi_x)$ . Dessa forma, construímos um mapa

$$\Phi : P \longrightarrow P,$$

dado por  $\Phi(p) = \varphi_{\pi(p)}(p)$  que é, por construção,  $G$ -equivariante e que levanta o mapa  $x \longmapsto y(x)$ . Na verdade, a  $G$ -equivariância de  $\Phi$  o torna um automorfismo de fibrados principais, o que termina a análise com a conclusão de que o grupo de bisseções do grupoide de Gauge é o espaço de automorfismos do fibrado principal  $P$ . Reciprocamente, se tivermos  $\Phi : P \longrightarrow P$  automorfismo de fibrados principais que levanta um mapa  $f$ , então

$$b : x \longmapsto (f(x), \Phi|_{\pi^{-1}(x)}, x)$$

é a bisseção.

### 3.5 Transitividade

No Capítulo 1, definimos em 1.7 o que significa um grupoide ser transitivo ou totalmente intransitivo. Nesta seção, vamos estudar a noção de transitividade em grupoides de Lie e enxergá-la em nossos exemplos.

A Proposição 1.9 nos oferece uma caracterização para transitividade. A partir dela, temos o seguinte

**Exemplo 3.46.** Todo *Lie group bundle* é um grupoide totalmente intransitivo. Mais ainda, *bundles of Lie groups* também o são e, na verdade, há uma correspondência 1 para 1 entre *bundle of Lie groups* e grupoides de Lie totalmente intransitivos.

Alguns exemplos de grupoides transitivos estão listados abaixo:

**Exemplo 3.47.** O grupoide do par  $\text{Pair} \rightrightarrows M$  é transitivo.

**Exemplo 3.48.** Dado um grupoide de Lie  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  e uma órbita qualquer  $\iota : \mathcal{O} \longrightarrow M$ , a restrição

$$\mathcal{G}_{\mathcal{O}} \doteq \{(g, y, x) \in \mathcal{G} \times \text{Pair}(\mathcal{O}) : t(g) = y, s(g) = x\}$$

é claramente transitiva. Aqui, a restrição tem estrutura de grupoide dada como subgrupoide de  $\mathcal{G} \times \text{Pair}(\mathcal{O})$ . Note também que  $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$  é naturalmente imerso em  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{G}$  é a união disjunta dessas imersões.

**Exemplo 3.49.** Dada uma ação de um grupo de Lie  $G$  em  $M$ , o grupoide de ação  $G \ltimes M \rightrightarrows M$  é transitivo se, e somente se, a ação do grupo de Lie em  $M$  for transitiva.

**Exemplo 3.50.** O grupoide fundamental  $\Pi(M) \rightrightarrows M$  é transitivo se, e somente se,  $M$  for conexa.

**Exemplo 3.51.** Dado um  $G$ -fibrado principal  $P \xrightarrow{\pi} M$ , o seu grupoide de Gauge  $\mathcal{G}(P)$  é transitivo.

Veremos agora que o último exemplo é universal, *i.e.*, caracteriza os demais grupoides transitivos. Para isso, precisaremos do seguinte

**Lema 3.52.** *Seja  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  um grupoide de Lie transitivo. Então,  $(t, s) : \mathcal{G} \longrightarrow M$  é uma submersão sobrejetora.*

**Demonstração.** Já vimos na Proposição 1.9 que  $(t, s) : \mathcal{G} \longrightarrow M$  é sobrejetora. Agora, note que as restrições

$$t_x : s^{-1}(x) \longrightarrow M, \quad s_y : t^{-1}(y) \longrightarrow M$$

são submersões sobrejetoras uma vez que  $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_y = M$ . Seja  $g \in t^{-1}(y) \cap s^{-1}(x)$  e  $(v, w) \in T_y M \oplus T_x M$ . Assim,

$$\begin{aligned} d(t_x)_g : T_g s^{-1}(x) &\longrightarrow T_y M \text{ sobrejetora} \implies \exists v' \in T_g s^{-1}(x) = \text{Ker } ds_g \text{ t.q. } d(t_x)_g v' = dt_g v' = v, \\ d(s_y)_g : T_g t^{-1}(y) &\longrightarrow T_x M \text{ sobrejetora} \implies \exists w' \in T_g t^{-1}(y) = \text{Ker } dt_g \text{ t.q. } d(s_y)_g w' = ds_g w' = w. \end{aligned}$$

Logo,  $v' + w' \in_g \mathcal{G}$  é tal que

$$d(t, s)_g(v' + w') = (dt_g(v' + w'), ds_g(v' + w')) = (v, w).$$

Portanto,  $d(t, s)_g$  é sobrejetora, para todo  $g \in t^{-1}(y) \cap s^{-1}(x)$ , então  $(t, s) : \mathcal{G} \longrightarrow M$  é submersão. ■

**Teorema 3.53.** *Seja  $\mathcal{G}$  um grupoide de Lie transitivo sobre uma variedade  $M$ . Então,  $\mathcal{G}$  é isomorfo ao grupoide de Gauge de algum  $G$ -fibrado principal  $P \rightarrow M$ . Essa identificação depende da escolha de ponto base.*

**Demonstração.** Seja  $x_o \in M$  e considere  $G \doteq \mathcal{G}_{x_o}$ . Sabemos pelo Teorema 3.39 que  $\mathcal{O}_{x_o} \subseteq M$  é subvariedade inicial e imersa de  $M$ , mas  $\mathcal{O}_{x_o} = M$ , pois  $\mathcal{G}$  é transitivo. Logo, a estrutura suave da órbita coincide com a estrutura suave de  $M$ . Ainda por 3.39,

$$\pi \doteq t_{x_o} : P \doteq s^{-1}(x_o) \rightarrow \mathcal{O}_{x_o} = M$$

é um  $G$ -fibrado principal. Agora, identifiquemos  $\mathcal{G}$  com  $\mathcal{G}(P)$ . Definimos

$$\begin{aligned} F : \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G}(P) = \frac{\text{Pair}(P)}{G} \\ g &\mapsto [gh, h] \end{aligned}$$

com  $h \in t^{-1}(s(g)) \cap P$ , e

$$\begin{aligned} F^{-1} : \mathcal{G}(P) &\rightarrow \mathcal{G} \\ [h, k] &\mapsto hk^{-1} \end{aligned}$$

Note que  $F$  não depende de  $h \in t^{-1}(s(g)) \cap P$  e que ambos os mapas são morfismos de grupoides abstratos e inversos um do outro. Ainda, como  $(h, k) \mapsto hk^{-1}$  restrita a  $s^{-1}(x_o)^2$  é suave, então  $F^{-1}$  é suave. Mais do que isso, pelo Lema 3.52,  $(t, s)$  é submersão sobrejetora, de modo que, fixado  $g_o \in \mathcal{G}$ ,  $\exists \sigma : U \subseteq M \times M \rightarrow \mathcal{G}$  seção local de  $(t, s)$  com  $(s(g_o), x_o) \in U$ . Assim,

$$\varphi(g) = [g\sigma(s(g), x_o), \sigma(s(g), x_o)]$$

ao redor de  $g_o$ , o que implica a suavidade. ■

O que esse resultado está dizendo é que há uma correspondência 1 para 1 entre fibrados principais e grupoides transitivos.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Fibrados} \\ \text{Principais} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Grupoides} \\ \text{Transitivos} \end{array} \right\}$$

Como a teoria de fibrados principais é muito rica e abre portas para outras áreas de interesse em Geometria Diferencial, como a teoria de  $G$ -estruturas, essa correspondência incita o questiona-

mente de se é possível abordar tópicos de estudo que utilizam fibrados principais por meio de grupoides transitivos, e quais generalizações seriam possíveis a partir disso. Isso é assunto atual de pesquisa em Geometria Abstrata e uma referência para tal assunto é o recente artigo [26].

### 3.6 Algebroide de Lie do Grupoide de Lie

Agora, construiremos o algebroide de Lie de um grupoide. Note, primeiramente, que diferentemente do caso de grupos e álgebras de Lie, agora temos uma unidade para cada ponto do espaço base. Assim, esperamos que o algebroide de Lie do grupoide seja um fibrado vetorial sobre  $M$ . Além disso, a multiplicação à direita está definida apenas nas  $s$ -fibras, de modo que, para falarmos sobre campos invariantes à direita em  $\mathcal{G}$ , devemos nos restringir aos campos tangentes às  $s$ -fibras, isto é, a seções de

$$T^s\mathcal{G} = \text{Ker } ds \subseteq T\mathcal{G}.$$

Inspirado no que foi feito na seção 2.3, definimos o *algebroide de Lie* de um grupoide  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  como o fibrado vetorial  $\mathcal{A} = \text{Lie}(\mathcal{G}) \doteq T^s\mathcal{G}|_M = u^*T^s\mathcal{G}$  cujas fibras em  $x \in M$  coincidem com o espaço tangente à unidade  $1_x$  de  $s^{-1}(x)$  (porque escolhemos fazer a construção para campos invariantes à direita). O colchete de  $\mathcal{A}$  será na verdade um colchete nas seções  $\Gamma(\mathcal{A})$ . Identifiquemos  $\Gamma(\mathcal{A})$  com o espaço de campos invariantes à direita em  $\mathcal{G}$ . Para isso, note que a fibra de  $T^s\mathcal{G}$  em uma flecha  $h \in s^{-1}(y)$  é dada por  $T_h^s\mathcal{G} \doteq T_h s^{-1}(y)$ , de modo que, para todo  $g \in t^{-1}(y)$ , a diferencial da multiplicação à direita por  $g$  induz um mapa

$$dR_g : T_h^s\mathcal{G} \longrightarrow T_{hg}^s\mathcal{G}.$$

Logo, podemos descrever o espaço dos campos invariantes à direita em  $\mathcal{G}$ :

$$\mathfrak{X}_{\text{inv}}^s(\mathcal{G}) = \{X \in \Gamma(T^s\mathcal{G}) : X_{hg} = dR_g(X_h), \forall (h, g) \in \mathcal{G}^{(2)}\}.$$

**Lema 3.54.**  $[\mathfrak{X}_{\text{inv}}^s(\mathcal{G}), \mathfrak{X}_{\text{inv}}^s(\mathcal{G})] \subseteq \mathfrak{X}_{\text{inv}}^s(\mathcal{G})$ .

**Demonstração.** Precisamos primeiro checar que  $[\Gamma(T^s\mathcal{G}), \Gamma(T^s\mathcal{G})]$  permanece  $s$ -vertical ( $ds(X) = 0$ ), i.e.,  $[\Gamma(T^s\mathcal{G}), \Gamma(T^s\mathcal{G})] \subseteq \Gamma(T^s\mathcal{G})$ . Note que

$$X \in \Gamma(T^s\mathcal{G}) = \Gamma(\text{Ker } ds) \implies X_g \in T_g^s\mathcal{G}, \forall g \in \mathcal{G} \implies ds(X_g) = 0.$$

Se  $X, Y \in \Gamma(T^s\mathcal{G})$ , então  $ds(X_g) = 0 = ds(Y_g), \forall g \in \mathcal{G}$ . Logo, pelo Lema 2.14,

$$ds[X, Y]_g = [ds(X), ds(Y)]_{s(g)} = 0 \implies [X, Y] \in T^s\mathcal{G}.$$

Agora, se  $X, Y \in \mathfrak{X}_{\text{inv}}^s(\mathcal{G})$ , então, para todo  $(h, g) \in \mathcal{G}^{(2)}$ ,  $X_{hg} = dR_g X_h$ ,  $Y_{hg} = dR_g Y_h$  e

$$dR_g([X, Y]_h) = dR_g[X, Y]_h = [dR_g X, dR_g Y]_{R_g(h)} = [dR_g X, dR_g Y]_{hg} = [X, Y]_{hg}$$

■

Agora, dado  $\sigma \in \Gamma(\mathcal{A})$ , então  $\tilde{\sigma}_g = dR_g(\sigma_{t(g)})$  define um campo invariante à direita. De fato,

$$dR_g(\tilde{\sigma}_h) = dR_g(dR_h(\sigma_{t(h)})) = dR_{hg}(\sigma_{t(hg)}) = \tilde{\sigma}_{hg}.$$

Reciprocamente, dado um campo  $X \in \mathfrak{X}_{\text{inv}}^s(\mathcal{G})$ , notamos que a invariância dada pela equação

$$X_g = dR_g(X_{1_{t(g)}})$$

nos permite determinar  $X$  pelos seus valores nas unidades  $u(M) \cong M$ , de modo que definindo  $\sigma \doteq X|_M \in \Gamma(\mathcal{A})$ , temos que  $X = \tilde{\sigma}$ . Portanto, estabelecemos a identificação

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathcal{A}) &\longleftrightarrow \mathfrak{X}_{\text{inv}}^s(\mathcal{G}) \\ \sigma &\longmapsto \tilde{\sigma} \end{aligned}$$

Ainda,  $\mathfrak{X}_{\text{inv}}^s(\mathcal{G})$  é subálgebra de Lie de da álgebra  $\mathfrak{X}(\mathcal{G})$  dos campos de vetores em  $\mathcal{G}$  com o colchete usual de campos. Isso segue pelo Lema anterior, ou seja, o colchete de campos se restringe a campos invariantes à direita. Assim,

**Definição 3.55.** O colchete de Lie no algebroide  $\mathcal{A} = \text{Lie}(\mathcal{G})$  é o colchete de Lie em  $\Gamma(\mathcal{G})$  advindo do colchete em  $\mathfrak{X}_{\text{inv}}^s(\mathcal{G})$  pelo isomorfismo descrito acima. O colchete em  $\Gamma(\mathcal{A})$  é unicamente determinado pela expressão

$$\widetilde{[\sigma, \sigma']}_\mathcal{A} = [\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}']$$

A última peça para a estrutura do algebroide  $\mathcal{A}$  é a seguinte:

**Definição 3.56.** A âncora de  $\mathcal{A}$  é o mapa de fibrado

$$\rho_\mathcal{A} \doteq dt|_\mathcal{A} : \mathcal{A} \longrightarrow TM.$$



A próxima definição resume o que foi discutido até aqui.

**Definição 3.57.** O *Algebroide de Lie do Grupoide de Lie*  $\mathcal{G}$  é o fibrado vetorial  $\mathcal{A} = \text{Lie}(\mathcal{G}) \doteq T^s\mathcal{G}|_M$  munido do colchete  $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{A}}$  em  $\Gamma(\mathcal{A})$  e da âncora  $\rho_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow TM$ .

Veremos agora que o colchete e a âncora do algebroide se relacionam por uma identidade do tipo *Leibniz*.

**Proposição 3.58.** *Seja  $\mathcal{A}$  o algebroide de Lie do grupoide  $\mathcal{G}$ . Então, para todos  $\sigma, \sigma' \in \Gamma(\mathcal{A})$  e  $f \in C^\infty(M)$ ,*

$$[\sigma, f\sigma'] = f[\sigma, \sigma'] + \mathcal{L}_{\rho(\sigma)}(f)\sigma'.$$

**Demonstração.** Note que

$$\widetilde{f\sigma'}_g = dR_g(f\sigma'_{t(g)}) = (f \circ t)dR_g(\sigma'_{t(g)}) = (f \circ t)\widetilde{\sigma'}_g.$$

Logo,

$$[\widetilde{\sigma}, \widetilde{f\sigma'}]_{\mathcal{A}} = [\widetilde{\sigma}, \widetilde{f\sigma'}] = [\widetilde{\sigma}, (f \circ t)\widetilde{\sigma'}] = (f \circ t)[\widetilde{\sigma}, \widetilde{\sigma'}] + \mathcal{L}_{\widetilde{\sigma}}(f \circ t)\widetilde{\sigma'}.$$

Se  $g \in \mathcal{G}$ , então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\widetilde{\sigma}}(f \circ t)(g) &= d(f \circ t)_g \widetilde{\sigma}(g) = df_{t(g)} \circ dt_{1_{t(g)}}(\sigma(t(g))) = df_{t(g)} \circ dt_g(\widetilde{\sigma}(g)) = \mathcal{L}_{\rho(\sigma)}(f)(t(g)) \\ \implies [\sigma, f\sigma'] &= f[\sigma, \sigma'] + \mathcal{L}_{\rho(\sigma)}(f)\sigma'. \end{aligned}$$

■

**Observação 3.59.** A escolha por desenvolver a estrutura do algebroide a partir de campos invariantes à direita não tem nenhuma grande vantagem. O Teorema a seguir apresenta a relação entre outros possíveis modelos de fibrados para o algebroide (não discutiremos a estrutura do algebroide).

**Teorema 3.60.** *Seja  $u : \mathcal{G} \longrightarrow M$  a seção unidade do grupoide  $\mathcal{G}$ . Então, adotado a notação  $T\mathcal{G}|_M \doteq u^*T\mathcal{G}$ ,*

$$T^t\mathcal{G}|_M \cong T^s\mathcal{G}|_M \cong \frac{T\mathcal{G}|_M}{TM} \doteq \nu_{\mathcal{G}}(M).$$

**Demonstração.** O primeiro isomorfismo sai pelo seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & di|_{u^*T^t\mathcal{G}} & & & & \\
 & \swarrow & & \searrow & & & \\
 T^t\mathcal{G}|_M & \hookrightarrow & T^t\mathcal{G}|_M & \xrightarrow{di} & T^s\mathcal{G} & \hookleftarrow & T^s\mathcal{G}|_M \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 M & \xrightarrow{u} & \mathcal{G} & \xrightarrow{i} & \mathcal{G} & \xleftarrow{u} & M
 \end{array}$$

Agora, considere a seguinte sequência curta exata de fibrados vetoriais:

$$0 \longrightarrow TM \xrightarrow{du} T\mathcal{G}|_M \xrightarrow{\tau} \frac{T\mathcal{G}|_M}{TM} \longrightarrow 0$$

Pela exatidão da sequência, sabemos que  $\text{Im}(u^*) = \text{Ker}(\tau)$ . Assim, pelo Teorema 2.22, existe uma cisão da sequência, que pelo Teorema ??, pode ser entendido como a identificação

$$T\mathcal{G}|_M \cong du(TM) \oplus \frac{T\mathcal{G}|_M}{TM}$$

Por outro lado, temos outra sequência curta exata que cinde canonicamente por  $du : TM \longrightarrow T\mathcal{G}|_M$ :

$$0 \longrightarrow T^s\mathcal{G}|_M \hookrightarrow T\mathcal{G}|_M \xrightarrow{ds} TM \longrightarrow 0$$

A cisão dessa sequência nos garante que

$$T\mathcal{G}|_M \cong du(TM) \oplus T^s\mathcal{G}|_M$$

Logo, concluímos que  $T^s\mathcal{G}|_M \cong \frac{T\mathcal{G}|_M}{TM} = \nu_{\mathcal{G}}(M)$  e esta identificação pode ser feita pelo mapa  $\frac{T\mathcal{G}|_M}{TM} \ni [v] \longmapsto \text{pr}_2(v) \in T^s\mathcal{G}|_M$ . ■

Agora, daremos exemplos do cálculo de algebroides de alguns dos grupoides que estudamos. Um procedimento ingênuo, mas natural, para realizar esse cálculo, é seguir os seguintes passos:

- 1) Entender o fibrado  $\text{Ker } ds \hookrightarrow T\mathcal{G}$  e restringí-lo a  $M$ ;
- 2) Entender o mapa  $dt : T\mathcal{G} \longrightarrow TM$  e depois restringí-lo à âncora  $dt|_{\text{Ker } ds|_M}$ ;
- 3) Já com o algebroide  $\mathcal{A} \doteq \text{Ker } ds|_M$ , entender  $\Gamma(\mathcal{A})$ , entender como passar de um elemento desse conjunto a um campo invariante de  $\mathcal{G}$  e, por fim, definir o colchete pela regra  $[\alpha, \beta]|_x = [\alpha^R, \beta^R]|_x$

**Exemplo 3.61.** Para o grupoide do par  $\text{Pair}(M) \rightrightarrows M$ , sabemos que  $s^{-1}(x) \cong M$ . Para entender o fibrado envolvido, note que

$$ds : T\text{Pair}(M) = \{(v_x, v_y) : v_x \in T_x M, v_y \in T_y M\} \longrightarrow TM, \quad (v_x, v_y) \longmapsto v_y$$

Logo,  $\text{Ker } ds = \{(v_x, 0_y) : v_x \in T_x M\}$ , e então

$$\text{Lie}(\text{Pair}(M)) = \text{Ker } ds|_M \{(v_x, 0_x) : v_x \in T_x M\} \cong TM.$$

Já a âncora é dada por  $\rho : dt|_{\text{Ker } ds|_M} : \text{Ker } ds|_M \cong TM \longrightarrow TM$ . Mas

$$dt : (v_x, v_y) \longmapsto v_x \text{ e, em particular, } dt : (v_x, 0_x) \longmapsto v_x.$$

Assim,  $\rho = \text{id}_{TM}$ . Por fim, Note que  $\Gamma(\mathcal{A}) = \Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ , de modo que  $\alpha \in \mathfrak{X}(M)$  implica  $\alpha : M \ni p \longmapsto \alpha(p) \in T_p M$  suave. Então, dado  $\alpha \in \Gamma(\mathcal{A})$ , temos que, para  $g = (g_1, g_2) \in \text{Pair}(M)$ ,

$$R_g : Ts^{-1}(g_1) \ni (x, y) \longmapsto (x, y)(g_1, g_2) = (x, g_2), \quad dR_g : \text{Ker } ds = Ts^{-1}(g_1) \ni (v_x, 0_y) \longmapsto (v_x, 0_{g_2}),$$

de modo que  $\alpha^R(g) = dR_g \circ \alpha(t(g)) = dR_g \circ v_{t(g)} = v_{t(g)}$  após identificação, e, portanto,

$$[\alpha, \beta]_{\mathcal{A}}|_x = [\alpha^R, \beta^R]|_x = [\alpha, \beta]_{\mathfrak{X}(M)}|_x.$$

**Exemplo 3.62.** Para o caso de *Lie group bundles*  $\pi : Q \longrightarrow M$ , temos que  $s = t = \pi$ , então  $ds = dt = d\pi$ . Logo  $\text{Ker } ds = \text{Ker } d\pi$ , de modo que o fibrado é dado por

$$\text{Ker } ds|_M = \text{Ker } d\pi|_M \longrightarrow M.$$

Note que  $dt = d\pi : TQ \longrightarrow TM$ , e então  $\rho = dt|_{\text{Ker } ds|_M} = d\pi|_{\text{Ker } d\pi|_M} = 0$  é o mapa nulo. Agora,  $\Gamma(\mathcal{A}) = \Gamma(\text{Ker } d\pi|_M)$  Assim, se  $\alpha \in \Gamma(\mathcal{A})$ , então

$$\alpha(p) \in T_{1_p} \pi^{-1}(p) = \text{Lie}(\pi^{-1}(p)),$$

em que  $\pi^{-1}(p)$  é um grupo de Lie, ou seja,  $\alpha(p)$  está na respectiva álgebra de Lie. Logo,

$$R_g : s^{-1}(t(g)) = \pi^{-1}(\pi(g)) \longrightarrow s^{-1}(s(g)) = \pi^{-1}(\pi(g))$$

é apenas a translação do grupo de Lie. Portanto,

$$[\alpha, \beta]|_{t(g)}(g) \doteq [\alpha^R, \beta^R]|_{t(g)}(g) = [dR_g \circ \alpha(t(g)), dR_g \circ \beta(t(g))] = dR_g[\alpha, \beta]_{t(g)}.$$

**Exemplo 3.63.** Vejamos agora o grupóide de ação  $\mathcal{G} = G \ltimes M \rightrightarrows M$ . Lembre que  $s = \text{pr}_2 : \mathcal{G} \longrightarrow$

$M$ , então  $ds = d(\text{pr}_2) : T\mathcal{G} \longrightarrow TM$  é tal que  $ds(v_g, v_x) = v_x$ . Logo,

$$\text{Ker } ds = \{(v_g, 0_x) \in T\mathcal{G} : v_g \in T_g\mathcal{G}, 0_x \in Tx_M\} \cong \text{pr}_2^*TG \cong TG \times M,$$

e então

$$\text{Ker } ds|_M = \{(v_{u(x)}, 0_x) = v_e, 0_x) : x \in M\} \cong \mathfrak{g} \times M.$$

Como  $t : (g, x) \longmapsto g \cdot x$ , então  $dt(v_g, v_x) \in TM$  e a âncora

$$\rho = dt|_{\text{Ker } ds|_M} : \text{Ker } ds|_M \longrightarrow TM, \rho(v_e, 0_x) = dt(v_e, 0_x) \in TM$$

é a ação infinitesimal associada à ação do grupo de Lie. Assim, como  $\mathcal{A} = \mathfrak{g} \times M$ , seções são da forma

$$\sigma : M \longrightarrow \mathfrak{g} \times M, x \longmapsto (v_{(x)}, x),$$

e então  $\Gamma(\mathcal{A}) \cong \text{Diff}(M, \mathfrak{g})$  e o colchete é dado pela expressão

$$[\alpha, \beta]|_x = [\alpha(x), \beta(x)]_{\mathfrak{g}} + \mathcal{L}_{\rho(\alpha(x))}\beta|_x - \mathcal{L}_{\rho(\beta(x))}\alpha|_x.$$

Note que para seções da forma  $\alpha : x \longmapsto (a, x)$  e  $\beta : x \longmapsto (b, x)$ , com  $a, b \in \mathfrak{g}$  independentes de  $x \in M$ , o colchete se torna o colchete da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , de modo que a expressão acima é a única extensão do colchete a todas as seções que satisfazem Leibniz.

**Exemplo 3.64.** Por fim, calculemos o algebroide do grupoide de Gauge  $\mathcal{G}(P) = \frac{\text{Pair}(P)}{G}$ . Nesse caso, seguir os passos listados não ajudará muito. Já sabemos, pela observação feita ao o introduzirmos no exemplo 3.44, que este grupoide tem uma estrutura herdada do grupoide do par.

$$\begin{array}{ccc} \text{Pair}(P) & \longrightarrow & \frac{\text{Pair}(P)}{G} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ P & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

Logo, podemos passar do fibrado do grupoide do par para o do de Gauge, de modo que

$$T_{u(P)}^s \text{Pair}(P) \longrightarrow T_{u(M)}^s \left( \frac{\text{Pair}(P)}{G} \right) \cong \frac{T_{u(P)}^s \text{Pair}(P)}{G} \implies TP \longrightarrow \frac{TP}{G} = \text{Lie} \left( \frac{\mathcal{G}(P)}{G} \right)$$

e o fibrado que será o algebroide do grupoide de Gauge é  $\frac{TP}{G}$ . Devido a isso, podemos identificar seções com campos invariantes. Note também que

$$\begin{array}{ccc} TP & \xrightarrow{\text{id}} & TP \\ \text{pr} \downarrow & & \downarrow d\pi \\ \frac{TP}{G} & \xrightarrow{\rho} & TM \end{array}$$

de modo que  $\rho([v]) = d\pi(v)$ , que está bem definido. Já o colchete para elementos  $\alpha \in \Gamma(TP/G) \cong \mathfrak{X}_{G\text{-inv}}(P)$  é da forma

$$[\alpha, \beta] = [X_\alpha, X_\beta] \in \mathfrak{X}_{G\text{-inv}}(P).$$

Com isso, encerra-se a apresentação dos tópicos estudados. Não poderia finalizar este texto sem antes citar um conhecimento profundo que me acompanhou por toda esta jornada e que de certo modo a justifica:

"It is important to draw wisdom from many different places. If we take it from only one place, it becomes rigid and stale. Understanding others, the other elements, and the other nations, will help you to become whole."

- Iroh, Avatar: The Last Airbender [27]



# Referências Bibliográficas

## Livros

- [1] Lee, John. *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2ª edição, 2000.
- [2] Matsushima, Yozo. *Differentiable Manifolds*, Pure and Applied Mathematics, a series of monographs and textbooks, Marcel Dekker Inc., 1972.
- [3] Gorodski, Claudio. *Smooth Manifolds*, Springer International Publishing, 2020.
- [4] de Melo, Welington. *Topologia das Variedades*, Coleção Fronteiras da Matemática, SBM, 1ª edição, 2019.
- [5] Lang, Serge. *Introduction to Differentiable Manifolds*, Springer, Second Edition, 2002.
- [6] Gorodski, Claudio. *An introduction to Riemannian geometry*, versão preliminar, 2012.
- [7] San Martin, Luiz A. B.. *Grupos de Lie*, Editora da Unicamp, 2016.
- [8] Crainic, Marius. *Mastermath course differential geometry 2015/2016*. Lecture Notes. University of Utrecht, 2016.
- [9] Conrad, Keith. *Splitting of short exact sequences for modules*, Lecture notes.
- [10] Kobayashi, Shoshichi, and Nomizu, Katsumi. *Foundations of differential geometry, volume 1*, Wiley, 1996.
- [11] Forger, Frank M. *Fibrados, Conexões e Classes Características*, Notas de aula, 2011.
- [12] Brown, Ronald. *Topology and Groupoids*, Createspace, March, 2006.
- [13] Mackenzie, Kirill. *Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry*, Cambridge University Press, 2010.
- [14] Mackenzie, Kirill. *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*, Cambridge University Press, 2013.
- [15] Forger, Frank M. *Grupoides e Algebroides de Lie*, Notas de aula, 2010.
- [16] Moerdijk, I. and Mrcun, J. *Introduction to Foliations and Lie Groupoids*, Cambridge University Press, 2010.
- [17] Meinrenken, Eckhard. *Lie groupoids and Lie algebroids*, Lecture notes, 2017.
- [18] Cannas da Silva, Ana; Weinstein, Alan. *Geometric Models for Noncommutative Algebras*, American Mathematical Society, 1999.

## Artigos e periódicos

- [19] Whitney, Hassler. *Differentiable Manifolds*, Annals of Mathematics, **37** (1936), 645–680.
- [20] Atiyah, Michael. *On Algebra vs. Geometry*, the American Mathematical Monthly, v. 108 or 109, Aug. or Sept, 2001.
- [21] Weinstein, Alan. *Groupoids: Unifying Internal and External Symmetry*, Notices of the AMS, **v.43, n.7** (1996), 744-752.
- [22] Bursztyn, Henrique; del Hoyo, Matias. *Lie Groupoids*, arXiv:2309.14105v1, 2023.
- [23] Crainic, Marius; Fernandes, Rui. *Lecture notes on the integrability of Lie brackets*, Geometry & Topology Monographs v.17, 2011, p 1–107.
- [24] del Hoyo, Matias L. *Lie groupoids and differentiable stacks*, arXiv preprint arXiv:1212.6714, 2012.
- [25] del Hoyo, Matias L. *Lie groupoids and their orbispaces*, Portugaliae Mathematica 70.2 (2013): 161-209.
- [26] Garmendia, Alfonso, and Cattafi, Francesco. *PB-groupoids vs VB-groupoids*, arXiv preprint arXiv:2406.06259v3, 2024.

## Outros

- [27] DiMartino, Michael Dante; Konietzko, Bryan. *Avatar: The Last Airbender*, Nickelodeon Animation Studio, 2005-2008.
- [28] Oeuvres Philosophiques de Sophie Germain (1879), edited by Hippolyte Stupuy.