

VALDEK SANTOS SANTANA JUNIOR

Simulação de Monte Carlo para VaR de Crédito

Monografia submetida à apreciação de banca examinadora da Coordenadoria Acadêmica do PECE, como exigência parcial para obtenção do grau de Especialização em Engenharia Financeira, elaborada sob a orientação do Professor João Luiz Chela.

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Programa de Educação Continuada em Engenharia

Fevereiro/2014

MBA/EF
2014
S59A

Esc Politécnica-Bib Eng Eletr



M2014J

1. Engenharia fin an cia

*

M2014J

[2509498]

JUNIOR, VALDEK S. S. Simulação de Monte Carlo para VaR de Crédito. São Paulo, 2014. Monografia de Especialização (MBA Engenharia Financeira) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo: Programa de Educação Continuada em Engenharia.

RESUMO

O presente trabalho tem o propósito de apresentar o conceito de risco de crédito, o conceito de VaR (*value at risk*) e apresentar diferentes abordagens para o cálculo do VaR de uma carteira de crédito. Partindo do modelo de distribuições estatísticas e, finalizando com simulações de Monte Carlo, este trabalho irá apresentar os métodos utilizados e seus respectivos resultados.

Palavras chaves: risco de crédito, VaR, *value at risk*, simulações, Monte Carlo, probabilidade de *default*, perda esperada, perda dado *default*.

JUNIOR, VALDEK S. S. **Simulação de Monte Carlo para VaR de Crédito.** São Paulo, 2014. Monografia de Especialização (MBA Engenharia Financeira) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo: Programa de Educação Continuada em Engenharia.

ABSTRACT

This paper aims to introduce the concept of credit risk, the concept of VaR (value at risk) and present different approaches for calculating the VaR of a portfolio of credit. Starting with statistical distributions and ending with Monte Carlo simulations, this paper will present the methods used and their results.

Keywords: credit risk, VaR, value at risk, simulations, Monte Carlo, probability of default, expected loss, loss given default

LISTA DE ABREVEAÇÕES E SIGLAS

AC – Antes de Cristo

APR – Ativo ponderado pelo risco

BIS – *Bank for International Settlements*

EAD – Exposição dado *default*

FSA – *Financial Services Authority*

IRB – *Internal ratings based*

LGD – Perda dado *default*

MDB – Bancos de desenvolvimento multilaterais

OECD – Organização de cooperação econômica e desenvolvimento

PD – Probabilidade de *default*

PE – perda esperada

PSE – Entidades do setor público

VAR - *Value at Risk*

VOL – Volatilidade

LISTA DE QUADROS E GRÁFICOS

Quadro 1 – Peso variável de acordo com o tipo do ativo – Basiléia I.....	5
Quadro 2 – Peso variável de acordo com o tipo do ativo – Basiléia II.....	9
Quadro 3 – Matriz de correlação de clientes – correlação 10%	31
Quadro 4 – Triangular inferior da decomposição de Cholesky – correlação 10%	32
Quadro 5 – Matriz de correlação de clientes – correlação 45%	33
Quadro 6 – Triangular inferior da decomposição de Cholesky – correlação 45%	33
Quadro 7 – Matriz de correlação de clientes – correlação 80%	34
Quadro 8 – Triangular inferior da decomposição de Cholesky – correlação 80%	35
Gráfico 1 – Distribuição de perdas – Distribuição Binomial.....	20
Gráfico 2 – Distribuição de perdas – Distribuição de Poisson	22
Gráfico 3 – Distribuição de perdas – Distribuição Normal	24
Gráfico 4 – Distribuições de perdas usando distribuições estatísticas	25
Gráfico 5 – Distribuição de perdas – Monte Carlo puro.....	26
Gráfico 6 – Distribuição de perdas – Monte Carlo e distribuição Gama	28
Gráfico 7 – Distribuição uniforme independente.....	30
Gráfico 8 – Variáveis normais independentes	31
Gráfico 9 – Distribuição uniforme cópulas – correlação 10%	32
Gráfico 10 – Variáveis normais correlacionadas – correlação 10%	33
Gráfico 11 – Distribuição uniforme cópulas – correlação 45%	34
Gráfico 12 – Variáveis normais correlacionadas – correlação 45%	34
Gráfico 13 – Distribuição uniforme cópulas – correlação 80%	35
Gráfico 14 – Variáveis normais correlacionadas – correlação 80%	36
Gráfico 15 – Distribuição uniforme – agrupado	36

Gráfico 16 – Variáveis normais correlacionadas – agrupado	37
Gráfico 17 – Distribuição de perdas – correlação 30%	39
Gráfico 18 – Distribuição de perdas – correlação 60%	39
Gráfico 19 – Distribuição de perdas – correlação 90%	40
Gráfico 20 – Distribuição de perdas com cópulas – agrupado	40
Gráfico 21 – Distribuições de perdas usando Monte Carlo	41
Gráfico 22 – Distribuições de perdas usando Monte Carlo com cópulas Gaussianas	41
Gráfico 23 – Resultado das simulações de Monte Carlo.....	42
Gráfico 24 – Resultado geral das simulações	44

SUMÁRIO

Conteúdo

INTRODUÇÃO	1
1. REFERENCIAL TEÓRICO	2
1.1 Risco de crédito.....	2
1.2 Acordo de Basiléia	3
1.2.1 Basiléia I	4
1.2.2 Basiléia II	6
1.2.3 Basiléia II e o risco de crédito	7
1.2.3.1 Abordagem padronizada.....	8
1.3 <i>Default</i> e probabilidade de <i>default</i>	10
1.4 Exposição dado <i>default</i>	11
1.5 Perda dado <i>default</i>	12
1.6 Perda esperada.....	12
1.7 Perda não esperada.....	12
1.8 Correlação de <i>default</i>	13
2. VaR – VALUE AT RISK.....	14
2.1 Definição	14
2.2 Modelo KMV.....	15
2.3 CreditMetrics	15
2.4 Modelo de fatores.....	16
2.5 CreditRisk+.....	16
2.6 Simulação de Monte Carlo	17
3 SIMULAÇÕES.....	18
3.1 Modelo Binomial.....	19
3.1.1 Distribuição Binomial.....	19
3.1.2 Utilização do modelo	19

3.1.3 Resultados	20
3. 2 Modelo de Poisson.....	21
3.2.1 Distribuição de Poisson.....	21
3.2.2 Utilização do modelo.....	21
3.2.3 Resultados	22
3.3 Modelo Distribuição Normal	22
3.3.1 Distribuição Normal.....	22
3.3.2 Utilização do modelo.....	23
3.3.3 Resultados	24
3.5 Simulação de Monte Carlo pura	25
3.5.1 Utilização do modelo.....	25
3.5.2 Resultados	26
3.6 Simulação de Monte Carlo utilizando distribuição Gama para taxa de volatilidade	26
3.6.1 Distribuição Gama.....	26
3.6.2 Utilização do modelo.....	27
3.6.3 Resultados	28
3.7 Simulação de Monte Carlo – clientes correlacionados.....	29
3.7.1 Cópias Gaussianas.....	29
3.7.2 Triangular Inferior da decomposição de Cholesky	29
3.7.3 Exemplos da utilização de cópias gaussianas para correlação entre clientes	29
3.7.4 Utilização do modelo.....	37
3.7.5 Resultados	38
3.8 Comparação das Simulações de Monte Carlo	40
4 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES	43
CONCLUSÃO.....	45
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	46

INTRODUÇÃO

O risco de crédito é tão antigo quanto os próprios empréstimos. Acredita-se que o Código de Hamurabi de cerca de 1800 AC incluía muitas sessões relativas à regulamentação do crédito na Babilônia. O risco de crédito é a mais antiga forma de risco nos mercados financeiros. Se crédito for definido como a expectativa de uma quantia em dinheiro dentro de um intervalo de tempo limitado, o risco de crédito será a chance de que a expectativa não se cumpra. O risco de crédito é a consequência de uma transação contratada entre um fornecedor de fundos e um usuário desses fundos (Paschoarelli, 2007, p.35).

O objetivo deste trabalho consiste em aplicar diferentes métodos para o cálculo de *ValueatRisk* (VaR) de uma carteira de crédito.

Para isso, o primeiro capítulo apresenta o conceito do risco de crédito e seus principais tipos. Iremos abordar o risco de crédito, Acordo de Basiléia I e II, suas particularidades e métodos de utilização. Também iremos falar sobre variáveis importantes que fazem parte de qualquer modalidade de cálculo de VaR, que são: probabilidade de *default*, exposição dado *default*, perda dado *default*, perda esperada, perda não esperada e correlação de *default*.

Este trabalho explica no segundo capítulo, o conceito de VaR, alguns exemplos de utilização e alguns modelos que são usados amplamente para risco de crédito, tais como: o modelo KMV, *CreditMetrics*, modelo de Fatores, *CreditRisk+* e simulação de Monte Carlo.

O terceiro capítulo irá apresentar e simular as diferentes abordagens apresentadas neste trabalho. Iremos iniciar apresentando a carteira teórica de clientes de crédito utilizada em todas as simulações e por fim iremos apresentar as simulações realizadas para cada modelo diferente, suas respectivas distribuições de perda e algumas comparações e observações.

No quarto capítulo iremos apresentar e comparar o resultado final das simulações e, por fim, iremos apresentar a conclusão deste trabalho.

1. REFERENCIAL TEÓRICO

1.1 Risco de crédito

O risco de crédito surge quando as contrapartes não desejam ou não são capazes de cumprir suas obrigações contratuais. Seu efeito é medido pelo custo de reposição dos fluxos de caixa, caso a outra parte fique inadimplente. Essa perda engloba a exposição, ou montante em risco, e a taxa de recuperação, definida como o montante pago ao credor.

Todavia, perdas devidas ao risco de crédito podem ocorrer antes da própria inadimplência. De modo geral, o risco de crédito deveria ser definido como perdas potenciais em valores marcados a mercado, que seriam incorridas caso houvesse um evento de crédito. Esse evento ocorre quando há mudança na capacidade da contraparte em honrar suas obrigações. Portanto, mudanças nos preços de mercado da dívida, em resposta a mudanças de classificação de risco ou de percepção do mercado sobre inadimplência, podem também ser vistas como risco de crédito, criando uma sobreposição entre risco de mercado e risco de crédito.

Debêntures, empréstimos e derivativos possuem exposição a risco de crédito. Tradicionalmente, as exposições a risco de crédito podiam ser medidas facilmente como o valor de face da dívida, porém, com derivativos como swap, a exposição a risco de crédito é muito menor porque o valor inicial do swap é geralmente nulo. No caso, a exposição é a mudança no valor da posição, se esta for positiva, quando ocorre a inadimplência. Portanto, medir o risco de crédito do swap envolve análise detalhada da interação entre os riscos de mercado e de crédito.

O risco de crédito também inclui o risco soberano. Um exemplo de sua ocorrência é quando países impõem controles cambiais que impossibilitam às contrapartes honrar suas obrigações. Enquanto o risco de inadimplência é especificamente relacionado às empresas, o risco soberano aplica-se exclusivamente a países.

Uma forma particular de risco de crédito é o risco de liquidação, que ocorre quando dois pagamentos são efetuados no mesmo dia. Esse risco está presente quando a contraparte pode inadimplir depois que a instituição fez seu pagamento. No dia da liquidação, a exposição à inadimplência da contraparte é

equivalente ao valor total do pagamento devido. Em contraste, a exposição anterior à liquidação é somente o valor líquido dos dois pagamentos.

O risco de liquidação é muito presente em operações de câmbio, que implicam troca de pagamentos em moedas diferentes em horários diferentes, como por exemplo na Europa no período da manhã para entrega nos Estados Unidos um pouco mais tarde. Efetivamente, quando o Herstatt Bank faliu, em 1974, havia recebido pagamentos de várias contrapartes, mas se tornou inadimplente antes de efetuar os pagamentos para as outras pontas da transação, desestabilizando potencialmente o sistema bancário global. A quebra desse banco serviu como ímpeto para a criação do Comitê da Basiléia, o qual 14 anos depois, promulgou as exigências de adequação de capital para o sistema bancário.

O risco de crédito é controlado por limites de crédito sobre valores nacionais, exposições correntes e futuras e, cada vez mais, medidas de prevenção como a exigência de colateral ou a marcação das posições a mercado. Os avanços metodológicos na quantificação de risco de mercado estão se estendendo para o risco de crédito.

1.2 Acordo de Basiléia

O Comitê de Basiléia, como é internacionalmente conhecido, se constitui de um fórum de autoridades de supervisão bancária estabelecido em 1975 pelos presidentes dos bancos centrais dos países do Grupo dos Dez, o G-10, com a finalidade de ampliar a colaboração internacional entre os órgãos responsáveis pela supervisão dos bancos (ANDREZO e LIMA, 2002, p.242; BCBS, 2004b, p. 11).

Estes países “[...] são representados por seus bancos centrais e também pela autoridade com responsabilidade formal pela supervisão prudencial dos negócios bancários quando tal atribuição não pertencer ao banco central” (BIS, 2007), como é o caso, por exemplo, da Inglaterra que tem como banco central (autoridade monetária) o Banco da Inglaterra e como autoridade de regulação e supervisão órgão denominado Autoridade de Serviços Financeiros (FSA – *Financial Services Authority*).

O Comitê de Basiléia se reúne quatro vezes por ano, geralmente no Banco de Compensações Internacionais (BIS – *Bank for International Settlements*),

na Basileia, Suíça, onde está localizada a sede do BIS, que também provê o Secretariado do Comitê.

Sua linha de atuação consiste em formular padrões supervisórios gerais, bem como linhas de ação e recomendações de melhores práticas, ficando a critério das autoridades nacionais de supervisão sua adoção nas condições julgadas mais adequadas às características de cada nação. O comitê declara que atua visando incentivar a convergência de abordagens e padrões de supervisão, sem no entanto buscar uma harmonização detalhada das técnicas supervisórias dos países-membro.

1.2.1 Basileia I

Consubstanciado no documento “Convergência Internacional de mensuração de Capital e Padrões de Capital”, de julho de 1988 e com implementação prevista para o final de 2002 para os membros do G-10, Basileia I estabelecia padrões comuns para regular o capital próprio mínimo a ser exigido das instituições financeiras que operassem nas jurisdições desses países.

Em linhas gerais, Basileia I estabeleceu que o capital mínimo necessário para cobrir os riscos e preservar a capacidade de pagamento das instituições financeiras deveria corresponder a 8% da soma de seus ativos. Cada ativo, no entanto, seria computado em função de um peso variável de acordo com seu respectivo risco, compondo assim o APR – ativo ponderado pelo risco.

Para cômputo do APR, os ativos foram agrupados, conforme suas características, em quatro faixas distintas, com percentuais de ponderação sobre o valor de cada ativo variando entre 0, 20, 50 e 100%. Assim, a aplicação da exigência de capital de 8% do APR levaria ao cálculo do valor mínimo de capital próprio a ser exigido de cada instituição.

Um ativo, por exemplo, com risco ponderado em 50% implicaria uma alocação de capital de 4% do seu valor, calculada da seguinte forma: 8% (exigência de capital) multiplicado por 50% (fator de ponderação) multiplicado pelo valor do ativo. Um ativo ponderado a 100% implicaria alocação de capital de 8% do seu valor (8% de 100% do valor do ativo). A somatória dos capitais necessários à cobertura do risco de cada ativo resultaria no capital mínimo a ser exigido da instituição financeira.

Quadro 1
Peso variável de acordo com o tipo do ativo – Basiléia I

Fator	Risco	Ativos a serem ponderados
0%	Nulo	• Caixa e ouro • Créditos contra governo central e Banco Central, em moeda nacional • Créditos contra governos desde que membros da OECD
20%	Reduzido	• Créditos contra bancos multilaterais de desenvolvimento ou garantidos por estes • Créditos contra bancos sediados em países da OECD • Créditos contra bancos sediados em países fora da OECD, com prazo de até um ano
50%	Reduzido	• Financiamentos imobiliários com hipoteca residencial
100%	Normal	• Créditos contra o setor privado • Créditos de governos não membro da OECD • Créditos contra bancos sediados em países fora da OECD, com prazo superior a um ano • Créditos contra empresas comerciais do setor público • Ativo permanente e todos os outros ativos
0, 10, 20 ou 50% (Critério nacional)		• Créditos contra entidades domésticas do setor público, exceto governo central e banco central

OECD é composta dos seguintes países (por ordem de ingresso): Áustria, Bélgica, Canadá, Dinamarca, França, Alemanha, Grécia, Islândia, Irlanda, Itália, Luxemburgo, Países Baixos, Noruega, Portugal, Espanha, Suécia, Suíça, Turquia, Reino Unido, Estados Unidos, Japão, Finlândia, Austrália, Nova Zelândia, México, República Tcheca, Hungria, Coreia do Sul e Polônia (Jorion, Philippe, 2003, p.50)

Além dos fatores de ponderação, dois aspectos são fundamentais na estrutura de Basiléia I: a importância do capital para cobertura dos riscos e os tipos de riscos que o acordo buscava cobrir.

1.2.2 Basiléia II

O objetivo do Comitê da Basiléia com a edição de Basiléia II foi criar uma “[...] estrutura que fortaleça ainda mais a solidez e a estabilidade do sistema bancário internacional e, ao mesmo tempo, mantenha consistência suficiente para que o regulamento de adequação de capital não seja fonte significativa de desigualdade competitiva entre os bancos internacionalmente ativos.” (BBS, 2004b, p.11).

Em consonância com este objetivo, o Comitê entende que o acordo “[...] promoverá a adoção de práticas de administração de riscos mais sólidas pelo setor bancário, e considera esse um dos seus mais importantes benefícios”.

Apresentado em sua versão final em junho de 2004, após cinco anos de discussões a partir da primeira versão divulgada para consulta pública, Basiléia II visa atualizar o acordo que o precede, suprimindo suas deficiências e limitações.

A nova versão do acordo de capitais busca apresentar alternativas mais sofisticadas para o cálculo do capital mínimo regulamentar, aproximando o capital exigido para fins regulatórios do capital econômico calculado pelos próprios bancos para fins de gestão de seus negócios (LIMA, 2005, p.107), bem como ampliando a gama de riscos para os quais se exige cobertura de capital.

Com implementação iniciada a partir do início de 2007 nos países membros do G-10, Basiléia II passou a exigir a alocação de capital não apenas para os riscos de crédito e de mercado, mas também para os riscos de natureza operacional, apresentando uma abordagem mais sensível ao risco efetivamente incorrido e com opções com complexidade variada e crescente.

Deste modo, apresenta alternativas de cálculo de capital regulamentar que variam desde abordagens padronizadas para medir o risco, muito semelhantes a Basiléia I, até abordagens avançadas e complexas, onde o capital regulatório é calculado a partir das próprias medidas de risco que os bancos utilizam internamente na gestão dos seus negócios.

A alocação de capital para suportar riscos representa a base fundamental de Basiléia II, como também o era para Basiléia I, mas desta feita com mais ênfase no uso de informações internas, conforme o próprio comitê admite ao reconhecer a

importância do uso maior de avaliações de risco fornecidas pelos sistemas internos dos bancos, como dados para os cálculos de capital (BCBS, 2004b, p.12).

Ao cálculo do capital regulatório com base em métodos internos, juntam-se o processo de revisão desse processo pela autoridade de supervisão bancária e a disciplina imposta pelo mercado, formando três pilares nos quais apoia-se a nova estrutura regulatória:

- Pilar 1: Requerimentos de capital: cálculo dos requerimentos de capital para risco de crédito, risco de mercado e risco operacional, efetuado pelos próprios bancos com base em metodologias mais sensíveis ao risco que as previstas por Basiléia I;
- Pilar 2: Revisão pela supervisão: processo de autorização, revisão e validação pela supervisão bancária, assegurando a integridade das avaliações realizadas no Pilar 1;
- Pilar 3: Disciplina de mercado: disciplina imposta pelo mercado, decorrente obrigatoriedade de divulgação de informações de maneira proporcional à complexidade das metodologias utilizadas para cálculo do próprio capital.

Esses três pilares atuam de maneira mutuamente complementar, com a função de assegurar que o capital calculado e alocado pelos bancos como necessário à cobertura dos seus riscos seja efetivamente superior ao mínimo necessário para tal.

No que tange aos riscos, Basiléia II absorve a abordagem para riscos de mercado definida na Emenda de 2006, de modo que os avanços encontram-se na inclusão dos riscos operacionais e na completa revisão do tratamento para o risco de crédito.

A descrição a seguir apresenta os aspectos do documento “Convergência Internacional de Mensuração de Capital e padrões de Capital: estrutura revisada” relevantes aos objetivos deste trabalho.

1.2.3 Basiléia II e o risco de crédito

Para a mensuração do risco de crédito, Basiléia II apresenta três abordagens, também crescente sofisticação e sensibilidade ao risco: uma primeira

baseada em modelo padronizado e outras duas baseadas nos modelos que os bancos utilizam internamente, chamadas de abordagens IRB – *Internal Ratings Based*, sendo uma básica, denominada *Foudation* IRB e outra avançada, *Advanced* IRB.

1.2.3.1 Abordagem padronizada

A abordagem padronizada guarda semelhanças com Basiléia I, pois é baseada em categorias padronizadas de risco. São mais categorias, representando um conjunto mais amplo de ativos, cujos percentuais são padronizados também em função do risco apurado em cada crédito. Na apuração do risco de cada crédito, podem ser usadas avaliações realizadas externamente, como as realizadas por agências de classificação de riscos previamente habilitadas junto ao órgão regulador.

As classes de risco padronizadas reconhecidas são as seguintes:

- Soberano: exposições a governos centrais e bancos centrais;
- PSE – *PublicSectorEntities*: entidades não federais do setor público, como governos regionais e órgãos administrativos;
- MDB – *MultilateralDevelopmentBanks*: bancos multilaterais de desenvolvimento como BID e BIRD;
- Bancos: crédito interbancário;
- Corretoras e distribuidoras;
- *Corporate*: créditos a grandes empresas;
- Varejo: Crédito com características típicas de varejo, como diversificação, baixas exposições individuais e direcionado a pessoas físicas e jurídicas de pequeno porte;
- Hipotecas residenciais;
- Hipotecas comerciais;
- Vencidos: parte não coberta por garantia em créditos vencidos há mais de 90 dias;
- Riscos elevados: créditos classificados abaixo de B- (soberanos), BB- (*corporate*);
- Outros ativos: não enquadrados nas categorias acima.

Com base nas categorias de ativos acima relacionadas e na classificação de risco atribuída, aplicam-se fatores de ponderação, que podem ser variáveis em função do risco ou não.

No caso de créditos soberanos, bancos, *corporates*, esses fatores são variáveis em função do risco individualmente atribuído a cada crédito. No caso de créditos de varejo e hipotecas, esses fatores de ponderação são fixos.

Quando se tratam de créditos vencidos, os fatores de ponderação variam 50 a 150% do valor do crédito, de modo inversamente proporcional à cobertura de provisões.

A seguir, os fatores de ponderação das principais classes de ativos serão apresentados.

Quadro 2
Peso variável de acordo com o tipo do ativo – Basiléia II

Exposição de crédito	Avaliação de Risco					
	AAA/AA-	A+/A-	BBB+/BBB-	BB+/B-	Abaixo B-	Não Classificados
Soberanos	0%	20%	50%	100%	150%	100%
Bancos – opção 1	20%	50%	100%	100%	150%	100%
Bancos – opção 2	20%	40%	50%	100%	150%	50%
Bancos – curto prazo	20%	20%	20%	50%	150%	20%
<i>Corporates</i>	20%	50%	100%	100%	150%	100%
Hipoteca residencial	Não se aplica					35%
Hipoteca comercial						100%
Varejo						75%

Sua aplicação pode ser exemplificada da seguinte forma: um crédito detido por uma instituição financeira contra uma grande empresa classificada como risco AA será ponderado a 20% do seu valor para cômputo do APR. Assim, o capital alocado para a cobertura desse risco especificamente será o equivalente a 1,6% do valor da exposição (8% do APR). O risco, quando válido para determinação do fator de ponderação, é apurado com base na classificação das agências de classificação de risco.

Um aspecto que limita o alcance da abordagem padronizada é justamente essa característica de atrelamento dos fatores de ponderação à avaliação das agências de classificação de riscos. São poucos os países que têm mercados de classificação de risco desenvolvidos, com volume relevante de empresas e créditos devidamente analisados e classificados, a ponto de criar um vínculo efetivo entre o risco e o capital bancário, conforme tratado pelo BID ao discutir a implementação de Basileia na América Latina.

1.3 Default e probabilidade de default

Por definição, um instrumento de dívida pode experimentar uma perda somente se houver tido um *default* (inadimplemento). No entanto, não há qualquer definição-padrão do que constitua um *default*. Podem ser utilizadas diferentes definições para diferentes propósitos. Normalmente, ocorre um *default* quando são satisfeitas qualquer uma das seguintes condições:

- Um empréstimo é posicionado como não-provisionado;
- Já tenha ocorrido uma baixa (do ativo);
- O devedor passou de mais de 90 dias de inadimplência;
- O devedor entrou com pedido de falência.

As definições de referência de *default* segundo o *Bank of International Settlement* (BIS) para fins do Novo Acordo da Basileia refletem vários desses eventos.

“Considera-se que ocorreu um *default* em relação a um determinado devedor quando um ou ambos os eventos seguintes tenha(m) ocorrido:

- O banco considera improvável que o devedor pague totalmente suas obrigações de crédito a ele, sem recursos pelo primeiro a ações tais como executar garantias (se mantido)
- O devedor está atrasado por mais de 90 dias em qualquer obrigação de crédito material ao banco. Saques a descoberto serão considerados como inadimplentes uma vez que o cliente tenha violado um limite aconselhado ou avisado de um limite menor do que os atuais empréstimos em aberto”.

A perda medida no evento de *default*, e da mesma maneira a perda dado o *default*, claramente dependerá da definição adotada de *default* (bem como da definição de “perda”. Muitos exemplos de *default* sob a definição podem incorrer em nenhuma perda havida. Por exemplo, uma empresa pode ficar inadimplente decorridos os 90 dias em um pagamento de empréstimo e, subsequentemente, saldar todas as suas obrigações. Este evento contaria como um *default*, mas resultaria numa recuperação total. Um banco que ignora esses eventos subestimaria as taxas de recuperação, uma vez que a exposição de risco e a recuperação total não seriam incluídas nos dados de perdas do banco. O modelo do banco subsequentemente geraria um quadro extremamente pessimista das perdas dado o *default*. Para ser correto, esses eventos de recuperação total podem, internamente e em seus próprios termos, ser especiais e, portanto, garantir modelagens separadas.

A probabilidade de *default* (PD) representa a probabilidade do tomador de recursos se tornar inadimplente em determinado intervalo de tempo.

1.4 Exposição dado *default*

O acordo de Basiléia II define exposição dado *default* (EAD) como o valor da exposição da instituição financeira, seja ela efetiva ou contingente, perante o tomador ou contraparte no momento da concretização do evento de *default*. O EAD é determinado no exato momento do *default* e não pode ser menor que o valor contábil da operação. Podemos usar como exemplo um empréstimo para um cliente de varejo, o tomador tem os compromissos financeiros no decorrer do financiamento. Caso aconteça um evento de *default* no tomador, considerando o valor fixo do empréstimo, o EAD será o montante que o tomador ainda deve para o credor.

1.5 Perda dado *default*

A perda dado o *default* (LGD) é, de modo geral, definida como a fração de perdas a uma exposição de risco em *default*, mas usualmente o problema está nos detalhes. Uma vez que tenha ocorrido um evento de *default*, a LGD inclui três tipos de perda:

- A perda do principal;
- Os custos resultantes de empréstimos não-performados, ou seja, as receitas de juros esperados no passado;
- As despesas relativas ao “*workout*” (cobranças, departamento jurídico, etc.).

De modo geral há três modos de medir a LGD para um instrumento.

1. LGD do mercado: observada a partir de preços de mercado de títulos sob *default*, ou empréstimos comercializáveis logo após o evento real de *default*.
2. LGD do “*workout*”: o conjunto de fluxos de caixa estimados resultantes do processo de “*workout*” e/ou cobranças, apropriadamente descontado, e a estimada exposição de risco.
3. LGD sugerida do mercado: LGDs derivadas de preços de títulos de risco (mas não sob *default*) utilizando um modelo teórico de apreçamento de ativos.

1.6 Perda esperada

Perda dado o *default*, ou perda esperada (PE), é o montante de perda esperado em caso de *default*. Para o seu cálculo, multiplicamos a exposição do empréstimo pela probabilidade de *default* do tomador do empréstimo.

Fórmula para o cálculo da perda esperada: $PE = (PD \times LGD \times EAD)$

1.7 Perda não esperada

São perdas associadas à incerteza da concessão de crédito. São as perdas maiores do que as esperadas e advindas da variação da taxa de inadimplência ao longo do tempo. Seu cálculo exige hipóteses sobre o

comportamento desta taxa assim como sua distribuição de probabilidade (Aragão, Cezar, 2003).

1.8 Correlação de *default*

No caso mais simples, a correlação de *default* é causada se uma empresa é credor de outra. Mas primariamente, e de forma geral, isso acontece pois as fortunas de empresas individuais estão ligadas com a saúde de outras empresas da mesma indústria ou via a saúde da economia geral. De certo modo, todas as empresas sofrem ou prosperam juntas. Correlação também existe entre duas empresas de uma mesma indústria devido as condições econômicas para a determinada indústria.

Além do cenário empresarial, temos também o cenário de varejo, onde os tomadores de crédito (pessoas físicas) podem sofrer de acordo com as condições de mercado, eventos inesperados dentro de uma comunidade, dentro de um grupo empresarial. Pessoas da mesma família possuem uma correlação se tratando de crédito. O mesmo acontece para crédito consignado na folha de pagamento de uma empresa, onde o credor financia o tomador através da folha de pagamento do empregador do tomador. Caso o empregador entre em *default*, todos os empréstimos consignados que são descontados diretamente na folha de pagamento do tomadores serão prejudicados (Douglas J. Lucas, 1995).

2. VaR – VALUE AT RISK

2.1 Definição

O VaR, de forma intuitiva, sintetiza a maior (ou pior) perda esperada dentro de determinado período de tempo e intervalo de confiança. De modo mais formal, o VaR descreve o percentil da distribuição de retornos projetada sobre um horizonte estipulado. Se c for o nível de confiança selecionado, o VaR corresponderá ao $(1 - c)$ percentil da distribuição. Por exemplo, com nível de confiança de 95%, o VaR deve ser tal que ele exceda 5% do número total de observações da distribuição (Jorion, Philippe, p.19).

O VaR é um método de mensuração de risco que utiliza técnicas estatísticas, comumente usadas em outras áreas técnicas. Formalmente, o VaR mede a pior perda esperada ao longo de determinado intervalo de tempo, sob condições normais de mercado e dentro de determinado nível de confiança. Com base em fundamentos científicos, fornece aos usuários uma medida concisa do risco de mercado. Por exemplo um banco poderá informar que o VaR diário de sua carteira é de US\$35 milhões, ao nível de confiança de 99%, isto é, há apenas uma oportunidade em 100, sob condições normais de mercado, de ocorrência de prejuízo superior a US\$35 milhões. Esse único valor resume a exposição do banco ao risco de mercado, assim como a probabilidade de uma oscilação adversa. Além disso, ele mede o risco utilizando a mesma unidade de moeda que o resultado do banco, ou seja, dólares. Assim, acionistas e administradores podem decidir se esse nível de risco é aceitável. Caso não seja, o processo que conduziu ao cálculo do VaR pode ser usado para a decisão de onde reduzir o risco.

Em contraste com instrumentos tradicionais de medida de risco, o VaR fornece visão agregada dos riscos de carteira que leva em consideração a alavancagem, as correlações e as posições atuais. Como resultado, é realmente uma medida antecedente de risco. Entretanto, o VaR não se aplica somente a derivativos, mas a todo instrumento financeiro. Ademais, a metodologia de risco de mercado pode também ser estendida para outros tipos de riscos financeiros.

A revolução do VaR veio à tona por causa de convergência de fatores que incluem: a pressão pelos reguladores por um melhor controle de risco financeiro; a globalização dos mercados financeiros, levando à exposição a um número maior de

fontes de risco; os avanços tecnológicos que tornaram o gerenciamento de risco de empresas uma realidade não muito distante.

2.2 Modelo KMV

O modelo KMV baseia-se na hipótese de que o mercado é a fonte mais eficiente de informações acerca da saúde financeira de uma empresa. Por esta hipótese, assume-se que o preço das ações de empresas negociadas em mercado aberto reflete as expectativas do mercado acerca da empresa.

A função de pagamento de um empréstimo está diretamente relacionada com o valor de mercado da empresa devedora. Se o valor de mercado de seus ativos superar o valor do empréstimo, os proprietários da empresa têm um incentivo para pagar ao credor e reter o valor residual como lucro. Caso contrário, a empresa devedora poderá tomar a decisão de entregar os seus ativos.

O principal motivo que inviabiliza a sua utilização no mercado brasileiro é a necessidade de mercados líquidos de ações e opções negociados em bolsa, contemplando todos os ativos da carteira de crédito.

2.3 CreditMetrics

O modelo *CreditMetrics* é baseado na abordagem de risco de *spread*. Ele exige a marcação a mercado da carteira de crédito, de forma semelhante ao modelo utilizado pelo *Riskmetrics* para avaliação de risco de mercado. O modelo *CreditMetrics* procura estabelecer qual será a perda de uma carteira de crédito devido a alterações na classificação de crédito dos devedores e eventuais ocorrências de *default*.

Este cálculo exige o conhecimento do valor de mercado do empréstimo e de sua volatilidade. No entanto, estes valores não são diretamente observáveis no mercado. A fim de contornar este problema, utilizam-se dados disponíveis sobre a classificação do crédito do devedor, as probabilidades de que esta classificação mude ao longo do tempo (mapeadas em uma matriz de alteração de *rating*), os índices de recuperação de cada faixa de classificação e os *spreads* do mercado secundário. A partir desses dados, obtém-se estimativas do valor de mercado e de sua volatilidade, possibilitando o cálculo do valor em risco (VaR) de um devedor ou da carteira de crédito.

No Brasil não temos mercado secundário de crédito, ou seja, as operações são levadas ao vencimento. Além disso, não existe uma agência independente que seja provedora de *ratings* de crédito, bem como a matriz de transição.

2.4 Modelo de fatores

O modelo de fatores da McKinsey é baseado na relação entre as probabilidades de *default* dos devedores e fatores macroeconômicos. Assim como no modelo *CreditMetrics*, parte-se de uma matriz de alteração de *ratings*. Entretanto as probabilidades podem variar ao longo do tempo de acordo com o estado da economia. Por exemplo, em um período de recessão essas probabilidades são mais elevadas e, como consequência, as probabilidades de melhora na classificação do tomador serão menores.

As probabilidades de alteração de rating são modeladas como função de variáveis macroeconômicas defasadas, de um fator de choque econômico geral e de fatores de choque para cada uma das variáveis. A distribuição de valores dos empréstimos obtida como base na matriz condicional pode ser usada no cálculo do VaR de carteira.

Dados macroeconômicos sem quebras estruturais são praticamente inexistentes no mercado brasileiro, resultado das inúmeras mudanças de regime econômico que passamos ao longo dos últimos anos (Rocha e Bender, 2000). Por este motivo este modelo não é o mais adequado para o mercado brasileiro.

2.5 CreditRisk+

Este modelo trata o risco de *default*, ou seja, o risco do devedor não cumprir suas obrigações. Os devedores são classificados em faixas, cada qual associada a uma probabilidade de ocorrência de *default*. O modelo assume que todos os contratos de empréstimos são levados ao vencimento, ou seja, o pagamento ou o *default* acarretam em uma perda equivalente ao valor integral do empréstimo, excluída a taxa de recuperação.

O procedimento envolve ainda a estimação da distribuição de perdas da carteira de contratos de empréstimo. A partir desta distribuição, é possível calcular as perdas esperadas, as não esperadas, o valor em risco (VaR) e o capital

econômico da empresa detentora dos contratos. O capital econômico é definido como o valor estimado para cobrir qualquer perda entre a esperada e o percentual desejado para a taxa de solvência do detentor. O modelo também permite realizar análises de cenários e diversas medidas de sensibilidade.

O fator da maioria das operações de empréstimo serem levadas até o vencimento e, principalmente, a inexistência de mercado secundário para contratos de crédito, sugere a utilização deste modelo para a mensuração do risco de uma carteira de crédito no mercado brasileiro. Por exemplo, a inexistência de mercado secundário dificulta a estimação dos *spreads* aplicados sobre estes contratos, dificultando a utilização do modelo *CreditMetrics*.

2.6 Simulação de Monte Carlo

As nossas simulações de Monte Carlo foram divididas em dois grupos: o primeiro grupo com três testes utilizando distribuição Binomial, Poisson e Normal, e os o segundo grupo simulando cliente por cliente (Monte Carlo puro).

3. SIMULAÇÕES

Em todas as simulações nós utilizamos uma carteira fictícia de 150 clientes e 2.500 cenários diferentes. Os parâmetros de EAD, PD e LGD foram calculados através de números aleatórios. O método utilizado foi definir limites (mínimo e máximo) e sortear números aleatórios dentro destes limites. No caso do EAD estipulamos limites entre R\$10.000,00 e R\$300.000,00. No caso da PD, da volatilidade da PD e a LGD os números foram entre 0 e 1. Com isso, conseguimos sortear para cada cliente da carteira as variáveis de EAD, PD, etc. Após a geração destes parâmetros, os resultados foram:

- EAD: mínimo: R\$10.000, média: R\$155.667, máximo: R\$290.000, soma da carteira: 23.350.000;
- PD: mínimo: 0,08%, média: 12,57%, máxima: 34,57%;
- Volatilidade da PD: mínima: 0,22%, média: 50,44%, máxima: 98,43%;
- LGD: mínima: 0,39%, média: 46,22%; máxima: 99,66%.

Apresentaremos dois grupos de simulações. O primeiro grupo de três simulações irá utilizar diferentes distribuições de probabilidade para calcular o VaR da carteira. Estas simulações assumem que toda a carteira de crédito é homogênea, isto é, todos os clientes possuem os mesmos valores de EAD, PD e LGD. Além disso, todos os eventos de *default* são independentes. Por este motivo, nós iremos utilizar como parâmetros: número de clientes: 150, EAD médio: R\$155.666,67, LGD médio: 46,22%, PD média: 12,57%.

Para o segundo grupo de simulações iremos utilizar métodos de Monte Carlo, começando por uma implementação mais simples com menos parâmetros e então avançando para deixar o modelo mais fiel e robusto para o controle de crédito.

Para todos os modelos de Monte Carlo nós iremos gerar o gráfico de Distribuição de Perdas utilizando o mesmo método. Este método consiste em calcular a perda esperada da carteira que é a média de todas as perdas simuladas e, utilizando uma distribuição normal, nós iremos calcular a probabilidades daquele cenário ocorrer. Desta forma, nós conseguimos gerar os respectivos gráficos de Distribuição de Perdas das simulações de Monte Carlo.

3.1 Modelo Binomial

3.1.1 Distribuição Binomial

Em teoria das probabilidades e estatística, a distribuição binomial é a distribuição de probabilidade discreta do número de sucessos numa sequência de n tentativas tais que as tentativas são independentes; cada tentativa resulta apenas em duas possibilidades, sucesso ou fracasso; a probabilidade de cada tentativa, p , permanece constante.

$$f(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

para $k = 0, 1, 2, \dots, n$ e onde $\binom{n}{k}$ é uma combinação.

Exemplo: seja X uma variável aleatória que contém o número de caras saídas em 12 lançamentos de uma moeda honesta. A probabilidade de sair 5 caras em 12 lançamentos, $P(X=5)$, é dada por:

$$k = 5, n = 12, p = 0.5$$

$$f(5; 12, 0.5) = \binom{12}{5} 0.5^5 (1 - 0.5)^{12-5} = 0.19$$

3.1.2 Utilização do modelo

Para esta simulação nós precisamos calcular o número de clientes, o EAD médio, o LGD médio e a PD média. Com isso, nós iremos simular n clientes entrando em *default*, sua respectiva perda e probabilidade.

Para o cálculo de PE, todos os clientes da carteira de crédito estão agrupados pela média de EAD, LGD e PD, neste caso, $PE = N \times EAD \times LGD \times PD$ onde N é igual ao número de clientes na carteira.

Para calcular a probabilidade de um determinado número de *defaults* ocorrer utilizando a distribuição Binomial, nós utilizamos:

$$f(k; n, p)$$

onde k = quantidade de *defaults* dentre os clientes da carteira; n = ao número de clientes na carteira e p a PD média de todos os clientes da carteira.

Para o cálculo de VaR utilizamos uma função de Interpolação utilizando como parâmetros a probabilidade acumulada de *defaults*, suas respectivas perdas e um índice de confiança.

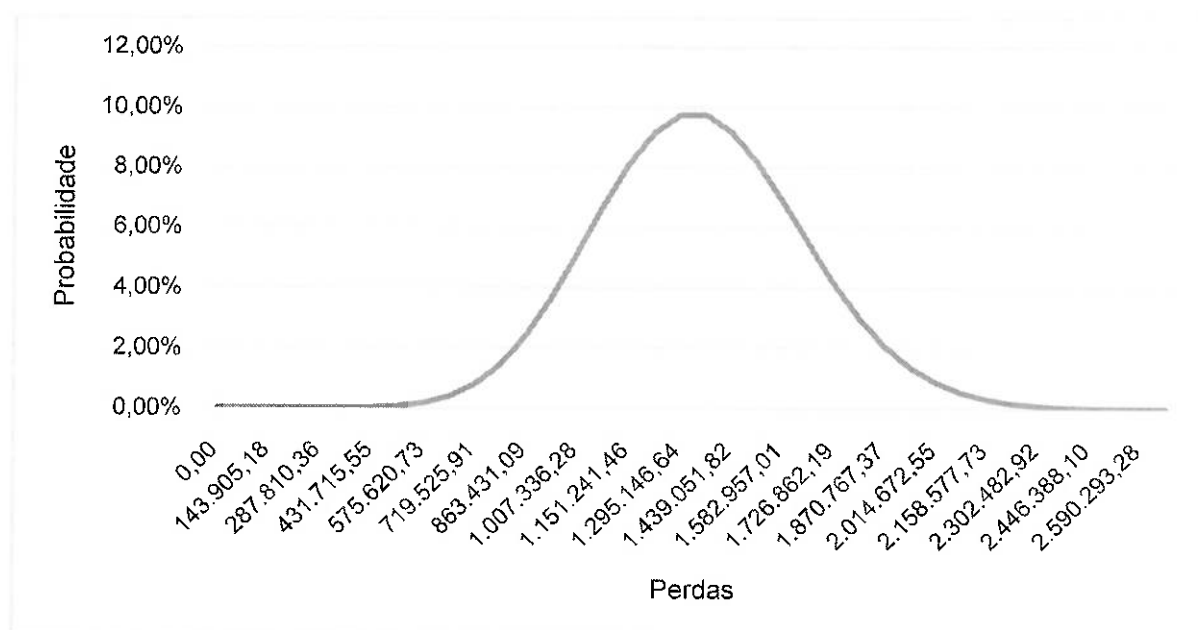
Para cada cenário simulado nós temos a probabilidade do cenário acontecer, o valor da perda caso o cenário ocorra e a probabilidade acumulada. A probabilidade do cenário acontecer é calculada utilizando a Distribuição Binomial. Com estes dados em mãos conseguimos gerar um gráfico de Distribuição de Perdas que mostra a probabilidade (eixo y) da perda (eixo x) acontecer.

3.1.3 Resultados

Considerando a carteira com 150 clientes, fizemos simulações utilizando como variável aleatória a quantidade de *defaults* que poderiam ocorrer como parâmetro do cálculo da distribuição binomial. Testamos desde nenhum cliente em *default* até todos os clientes em *default*. Utilizando um intervalo de confiança de 99%, tivemos como resultado: perda esperada: R\$1.356.583,57, VaR: R\$ 2.040.234,68.

Gráfico 1

Distribuição de perdas –Distribuição Binomial



3.2 Modelo de Poisson

3.2.1 Distribuição de Poisson

Na teoria da probabilidade e na estatística, a distribuição de Poisson é uma distribuição de probabilidade de variável aleatória discreta que expressa a probabilidade de uma série de eventos ocorrerem num certo período de tempo, se estes eventos ocorrerem independentemente de quando ocorreu o último evento. A probabilidade de que existam exatamente k ocorrências (sendo k um inteiro não negativo) é:

$$f(k; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

onde e é a base do logaritmo natural ($e = 2.71828 \dots$); $k!$ é o fatorial de k ; λ é um número real, igual ao número esperado de ocorrências que ocorrem num dado intervalo de tempo.

3.2.2 Utilização do modelo

Este método também utiliza os dados de EAD, LGD e PD agrupados conforme a simulação anterior. O que muda neste caso é o cálculo da probabilidade de ocorrer o *default*, nós usamos Poisson ao invés de Binomial.

Aplicando a fórmula da distribuição de Poisson ao nosso modelo temos:

$$f(k; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

onde k = quantidade de *defaults* dentre os clientes da carteira; $\lambda = N \times PD$ (Média).

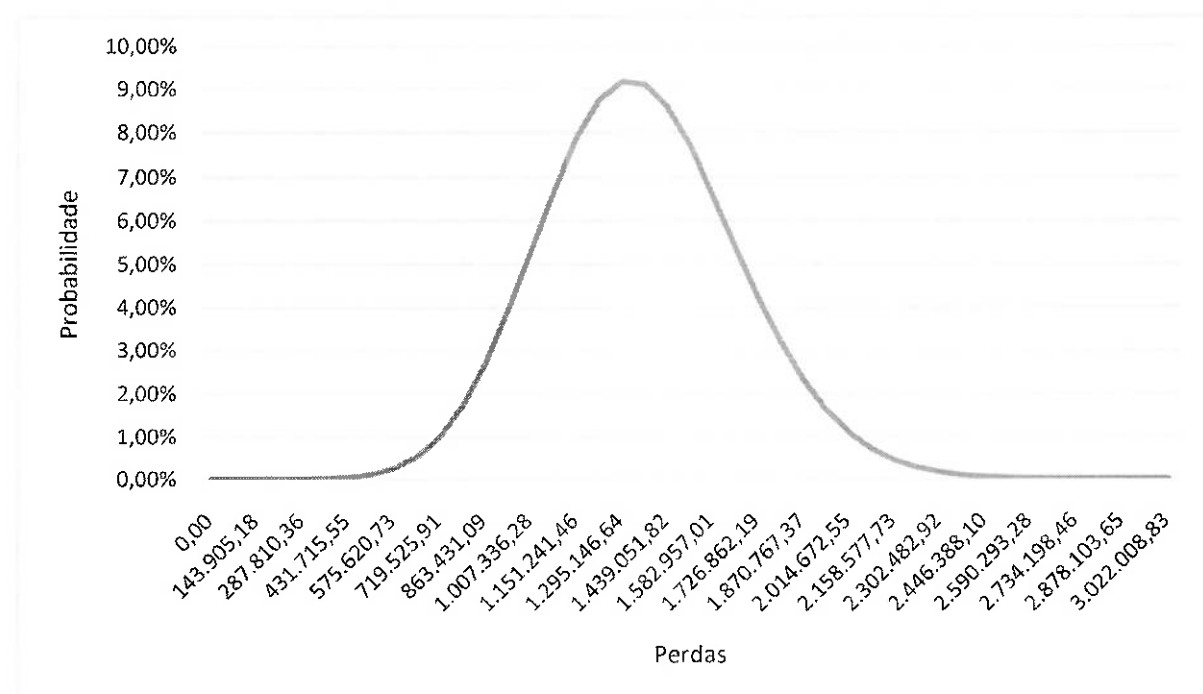
Do mesmo modo do modelo binomial, nós calculamos para cada cenário de teste a perda esperada do cenário e também a probabilidade do cenário acontecer. Desta forma, utilizando a distribuição de Poisson, conseguimos elaborar o gráfico exibido abaixo onde mostra a probabilidade (eixo y) de uma perda (eixo x) acontecer.

3.2.3 Resultados

Considerando a carteira com 150 clientes, fizemos simulações utilizando como variável aleatória a quantidade de *defaults* que poderiam ocorrer como parâmetro do cálculo da distribuição de Poisson. Testamos desde nenhum cliente em *default* até todos os clientes em *default*. Utilizando um intervalo de confiança de 99%, tivemos como resultado: perda esperada: R\$1.356.583,57, VaR: R\$2.099.005,41.

Gráfico 2

Distribuição de perdas – Distribuição de Poisson



3.3 Modelo Distribuição Normal

3.3.1 Distribuição Normal

A distribuição normal desempenha papel central em estatística, pois descreve adequadamente muitas populações. Posteriormente, P.S. Laplace provou o teorema central do limite, demonstrando que a média converge para uma distribuição normal conforme aumenta o número de observações. Também, à medida que cresce a quantidade de tiragens independentes (isto é, no exemplo em questão, aumentando a quantidade de dados de dois para um número maior) a distribuição tende a ser normal. Isso explica por que a distribuição normal possui lugar de destaque na estatística.

Uma aplicação direta dessas observações seculares é a avaliação do risco de crédito. Considere-se o problema de avaliar o risco incorrido pelo capital de uma carteira volumosa, composta de grande quantidade de pequenos créditos ao consumidor. Individualmente, a inadimplência total (excluem-se pagamentos parciais) de cada empréstimo pode ser modelada por uma distribuição binomial, com apenas duas realizações. No limite, porém, a distribuição de uma soma de variáveis binomiais independentes converge para uma distribuição normal, o que, por conseguinte, demonstra que a carteira pode ser modelada por uma distribuição normal à medida que aumenta a quantidade de créditos. Deve-se notar que esse resultado depende muito da condição de independência das inadimplências. Se uma recessão severa assolar a economia, é provável que muitas inadimplências ocorrerão ao mesmo tempo, o que invalidará a aproximação normal.

Uma distribuição normal possui propriedades convenientes. Em particular, a distribuição inteira pode ser caracterizada por seus dois primeiros momentos, ou seja, sua média e sua variância $N(\mu, \sigma^2)$. O primeiro parâmetro representa a localização e o segundo, a dispersão. A função de distribuição possui a seguinte expressão:

$$f(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{[-(\frac{1}{2\sigma^2})(x-\mu)^2]}$$

Essa função, que também constitui a essência do modelo de precificação de opções de Black & Scholes, poderia ser tabulada para diferentes valores de μ e σ . Todavia, isso pode ser simplificado de forma considerável, por meio das tabelas para uma distribuição normal, com média zero e variância unitária, denominada função de distribuição normal padrão. Começa-se com uma variável normal padrão, ϵ , de modo que $\epsilon = N(0,1)$. Define-se agora X como:

$$X = \mu + \epsilon \sigma$$

3.3.2 Utilização do modelo

Para modelar a probabilidade de N *defaults* ocorrerem, nós iremos utilizar como variável aleatória X o número de *defaults* que iremos testar. Iremos utilizar como média $\mu = N \times PD \text{ Médio}$ e como desvio padrão $\sigma = \sqrt{\mu * (1 - PD \text{ Médio})}$.

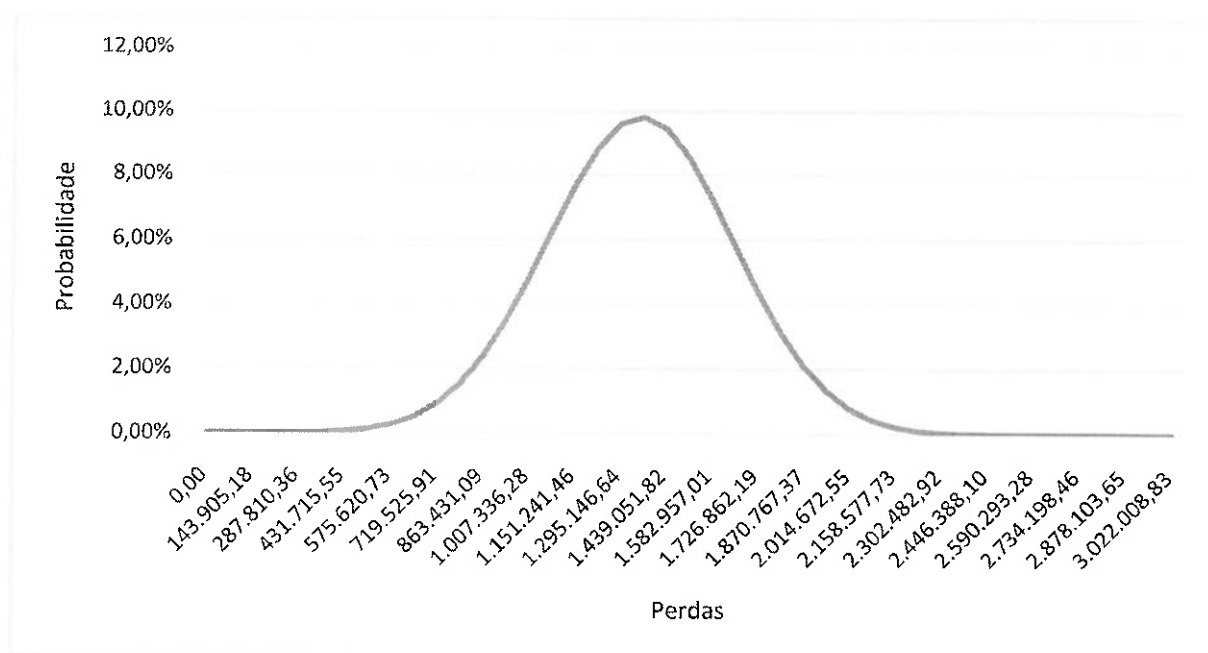
Dado o X , a média e o desvio padrão, conseguimos montar a distribuição de probabilidades da normal.

Desta vez, para calcular a distribuição de perdas, utilizamos as probabilidades de cada cenário ocorrer e então, utilizando a distribuição normal, conseguimos gerar o gráfico de distribuição de perdas.

3.3.3 Resultados

Considerando a carteira com 150 clientes, fizemos simulações utilizando como variável aleatória a quantidade de *defaults* que poderiam ocorrer como parâmetro do cálculo da distribuição Normal. Testamos desde nenhum cliente em *default* até todos os clientes em *default*. Utilizando um intervalo de confiança de 99%, tivemos como resultado: perda esperada: R\$1.356.583,57, VaR: R\$2.040.702,15.

Gráfico 3
Distribuição de perdas – Distribuição Normal



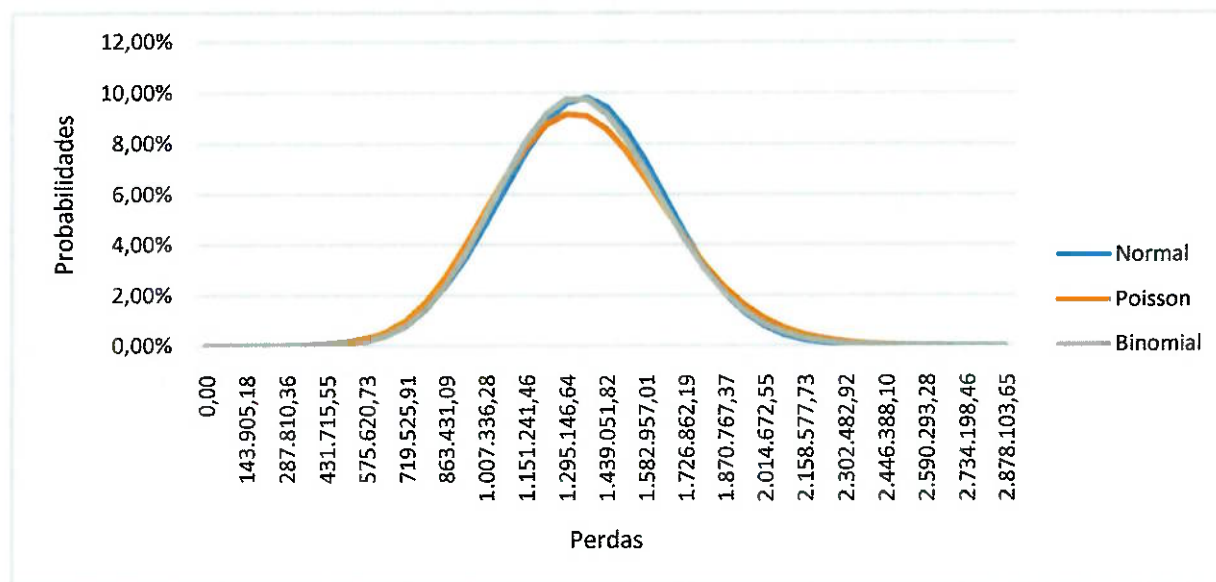
3.4 Comparação dos resultados entre os modelos Binomial, Poisson e Normal

Como podemos ver, o resultado dos três testes ficaram bem parecidos. A vantagem deste método é que a velocidade computacional exigida para concluir os cálculos é pequena. A desvantagem destes métodos é que eles consideram que a

PD, EAD e LGD são homogêneas e independentes entre os clientes da carteira. De fato nossa carteira não é homogênea.

Gráfico 4

Distribuições de perdas usando distribuições estatísticas



3.5 Simulação de Monte Carlo pura

3.5.1 Utilização do modelo

Considerando a carteira com 150 clientes, simulamos 2.500 cenários. Nestas simulações, para cada cenário, simulamos a possibilidade de cada cliente estar em *default*. Como cada cliente tem a sua própria PD, nós calculamos a perda de cada cenário simulado somando as perdas de cada cliente dentro da simulação corrente. Neste caso, a fórmula para calcular a perda do cliente é:

$$perda = EAD * LGD, \quad \alpha \leq PD$$

onde o número aleatório α é $\leq PD$ do cliente e,

$$perda = 0, \quad \alpha > PD$$

onde o número aleatório α é maior que a PD do cliente. O número aleatório α tem distribuição uniforme U [0, 1].

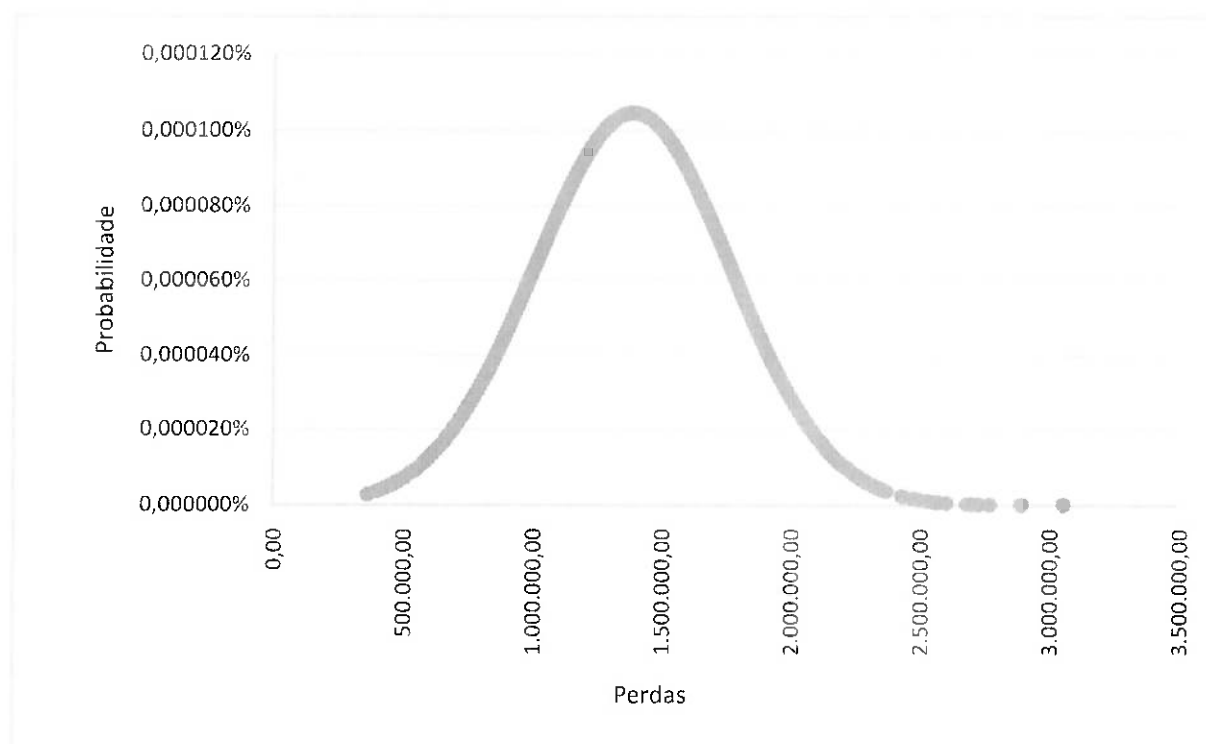
Desta forma, a perda total de um cenário simulado corresponde a soma das perdas simuladas de cada um dos 150 clientes da carteira.

3.5.2 Resultados

Após simular os 2.500 cenários de perdas dos clientes nós conseguimos calcular a perda esperada (PE) da carteira e, com a PE também calculada, conseguimos então calcular o VaR da carteira através do Percentil das perdas de cada cenário utilizando como parâmetro um intervalo de confiança.

Utilizando o intervalo de confiança de 99%, obtivemos como resultado: perda esperada: R\$1.389.171,38, VaR: R\$2.342.239,95, desvio padrão de perdas: R\$378.059,84.

Gráfico 5
Distribuição de perdas –Monte Carlo puro



3.6 Simulação de Monte Carlo utilizando distribuição Gama para taxa de volatilidade

3.6.1 Distribuição Gama

A distribuição gama tem grande importância tanto na teoria estatística quanto nas aplicações da metodologia estatística, fornecendo uma representação útil para muitas situações físicas. Como a soma de variáveis exponenciais independentes tem distribuição gama, toma-se adequada para a teoria dos contadores aleatórios e outros processos estocásticos associados com o tempo, em

particular, aqueles relativos às precipitações meteorológicas e aos estudos envolvendo tempo de vida de componentes.

Podemos tomar como exemplo uma variável aleatória X . X tem uma distribuição Gama com parâmetros α e β , denotando-se $X \sim Ga(\alpha, \beta)$, se sua função de densidade é dada por:

$$p(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \beta, \quad x > 0$$

para $\alpha, \beta > 0$

$$E(X) = \alpha/\beta \text{ e } V(X) = \alpha/\beta^2$$

A distribuição Gama Inversa é definida por $X \sim GI(\alpha, \beta)$ se sua função de densidade é dada por

$$p(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} e^{-\beta/x}, \quad x > 0$$

para $\alpha, \beta > 0$

$$E(X) = \frac{\beta}{\alpha-1} \text{ e } V(X) = \frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-1)}$$

3.6.2 Utilização do modelo

Neste modelo nós geramos dois números aleatórios com distribuição uniforme $U(0,1)$, o primeiro tem o mesmo papel da Simulação Monte Carlo Pura, que é a comparação em relação a PD do cliente, o segundo número aleatório entra para compor a geração de números aleatórios utilizando uma distribuição Gama. Na simulação pura, nós usávamos a PD do cliente diretamente para simular se o cliente está em *default*, neste caso, nós iremos utilizar a PD em uma outra função para então chegar a uma nova PD que leva em consideração a volatilidade da taxa de *default* do cliente. Esta nova função adiciona uma volatilidade a PD do cliente, deixando de ser constante.

Lembrando da fórmula anterior para a perda de um determinado cliente:

$$perda = EAD * LGD, \quad \alpha \leq PD$$

Neste modelo temos:

$$perda = EAD * LGD, \quad \alpha \leq m$$

$$\text{onde } m = PD \times \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} e^{-\beta/x} \div \sum PD$$

Repare que m representa a distribuição Gama Inversa. $\alpha = (\sum PD \div \sum VOL)^2$ e $\beta = (\sum VOL^2) \div \sum PD$.

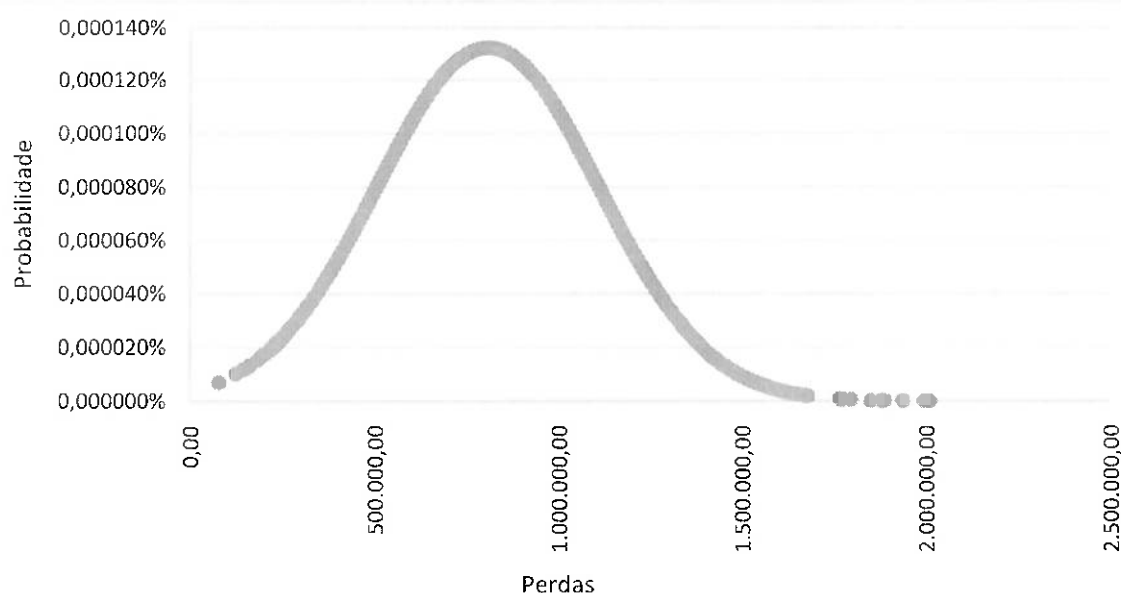
Após o novo cálculo de perda, temos os mesmos parâmetros necessários para o cálculo do VaR.

3.6.3 Resultados

Considerando a carteira com 150 clientes, simulamos 2.500 cenários. Nestas simulações, para cada cenário, simulamos a possibilidade de cada cliente estar em *default*. Utilizando um intervalo de confiança de 99%, tivemos como resultado: perda esperada: R\$806.985,96, VaR: R\$1.596.706,49, desvio padrão de perdas: R\$310.741,58.

Gráfico 6

Distribuição de perdas – Monte Carlo e distribuição Gama



3.7 Simulação de Monte Carlo – clientes correlacionados

3.7.1 Cópulas Gaussianas

Cópula é uma função usada como método para transformar distribuições marginais em uma distribuição multivariada. A cópula é uma representação uniforme marginal de uma função de distribuição multivariada.

Dentro do contexto das nossas simulações, nós iremos correlacionar os clientes da carteira de crédito utilizando uma matriz de correlação (cópula Gaussiana). Após a criação desta matriz de correlação, nós iremos gerar uma nova matriz chamada de Triangular Inferior da Decomposição de Cholesky.

3.7.2 Triangular Inferior da decomposição de Cholesky

Decomposição de Cholesky é a decomposição de uma matriz no produto do triangular inferior de uma matriz e sua conjugada transposta, muito útil para soluções numéricas eficientes e Simulações de Monte Carlo. Foi descoberta por André-Louis Cholesky. Quando aplicável, a decomposição de Cholesky é muito eficiente em resolver sistemas de equações lineares.

A triangular inferior da decomposição de Cholesky pode ser definida por

$$A = LDL^*$$

onde A é a decomposição, L é a matriz triangular inferior, D é a matriz diagonal.

3.7.3 Exemplos da utilização de cópulas gaussianas para correlação entre clientes

Nossa carteira de clientes proposta neste trabalho possui 150 clientes, porém, para ilustrar os benefícios e vantagens de utilizar cópulas na simulação de Monte Carlo nós iremos ilustrar com uma carteira de 2 clientes.

A seguir iremos calcular números aleatórios com distribuição uniforme $U(0,1)$ e então calcular as variáveis normais deste número aleatório, com estas informações, conseguiremos calcular a distribuição uniforme independente e as variáveis normais independentes (gráfico abaixo).

Com as variáveis normais calculadas e com a triangular inferior de Cholesky calculada, conseguimos aplicar o cálculo de cópulas para matrizes multivariadas e então conseguimos calcular as novas variáveis normais e sua nova distribuição utilizando a correlação entre as probabilidades originais de *default* e suas respectivas correlações entre clientes, gerando assim uma nova probabilidade de *default*.

Para calcular a variável normal correlacionada utilizando as cópulas gaussianas,

$$R = * (A \times X *)$$

onde A é a matriz triangular inferior de Cholesky e $X *$ é a matriz de variáveis normais transposta. O resultado R é o transposto do resultado da multiplicação matricial entre A e X transposto.

Gráfico 7
Distribuição uniforme independente

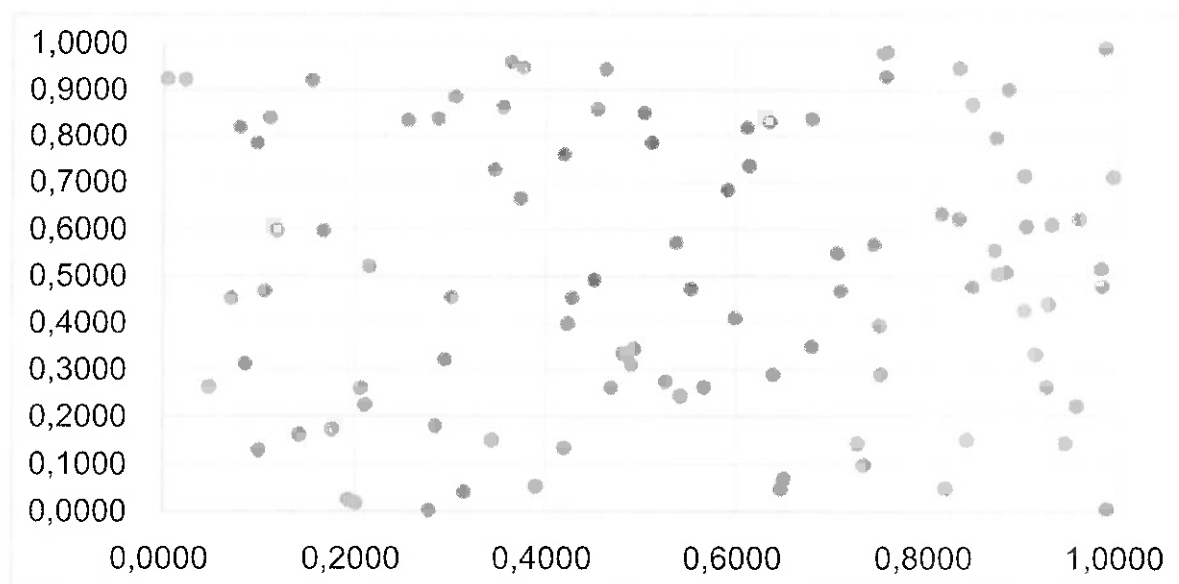
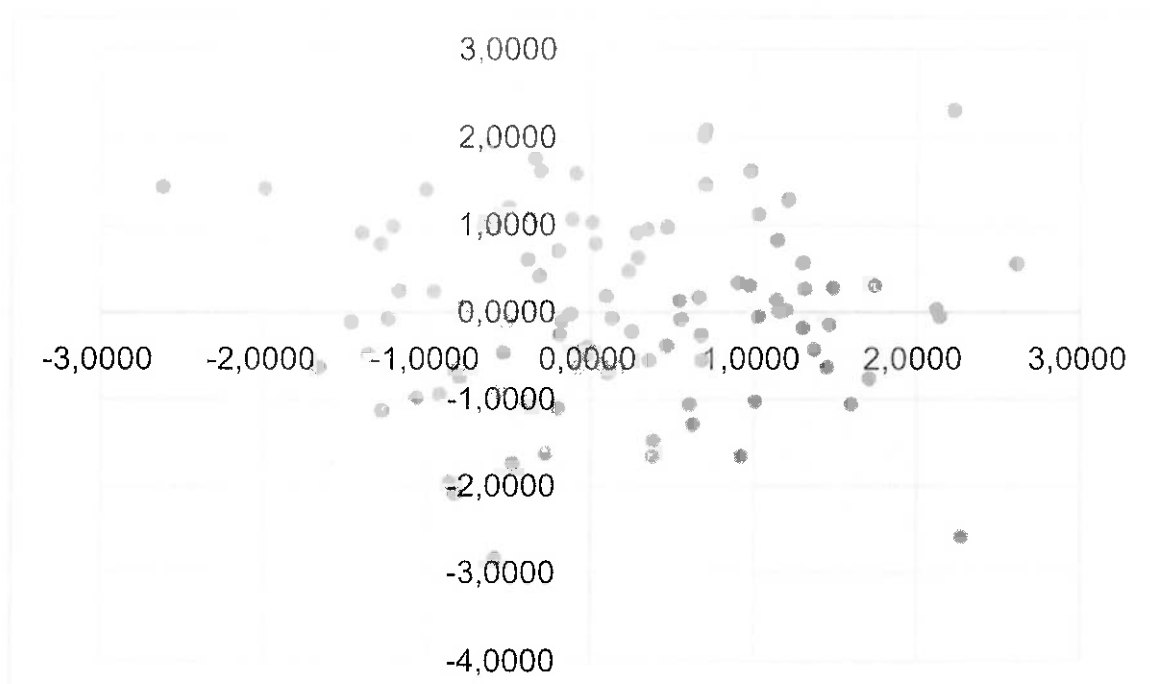


Gráfico 8
Variáveis normais independentes



Em risco de crédito o fato de uma empresa entrar em *default* pode impactar diretamente na probabilidade de empresas credoras serem afetadas e, consequentemente influenciar no seu próprio risco de *default*. Este exemplo é fácil de ilustrar se imaginarmos um fornecedor de porte pequeno que tem apenas dois clientes. Caso um dos clientes deste fornecedor entre em *default*, o fornecedor pode ficar em apuros e consequentemente aumentar o seu próprio risco de entrar em *default*.

Fizemos algumas simulações com números aleatórios com distribuição uniforme $U(0,1)$ para ilustrar o uso de cópulas nesta carteira de 2 clientes. Foram realizados 100 cenários de testes diferentes para cada percentual de correlação entre clientes. Para cada simulação, nós definimos a matriz de correlação dos clientes e a matriz utilizada para o cálculo de cópulas que é a triangular inferior da decomposição de Cholesky. Utilizamos como matriz de correlação os valores: 10%, 45% e 80%.

Os resultados estão abaixo representados por gráficos.

Quadro 3
Matriz de correlação de clientes – correlação 10%

	Cliente 1	Cliente 2
Cliente 1	100%	10%
Cliente 2	10%	100%

Quadro 4**Triangular inferior da decomposição de Cholesky – correlação 10%**

	Cliente 1	Cliente 2
Cliente 1	1	0
Cliente 2	0,1000	0,9950

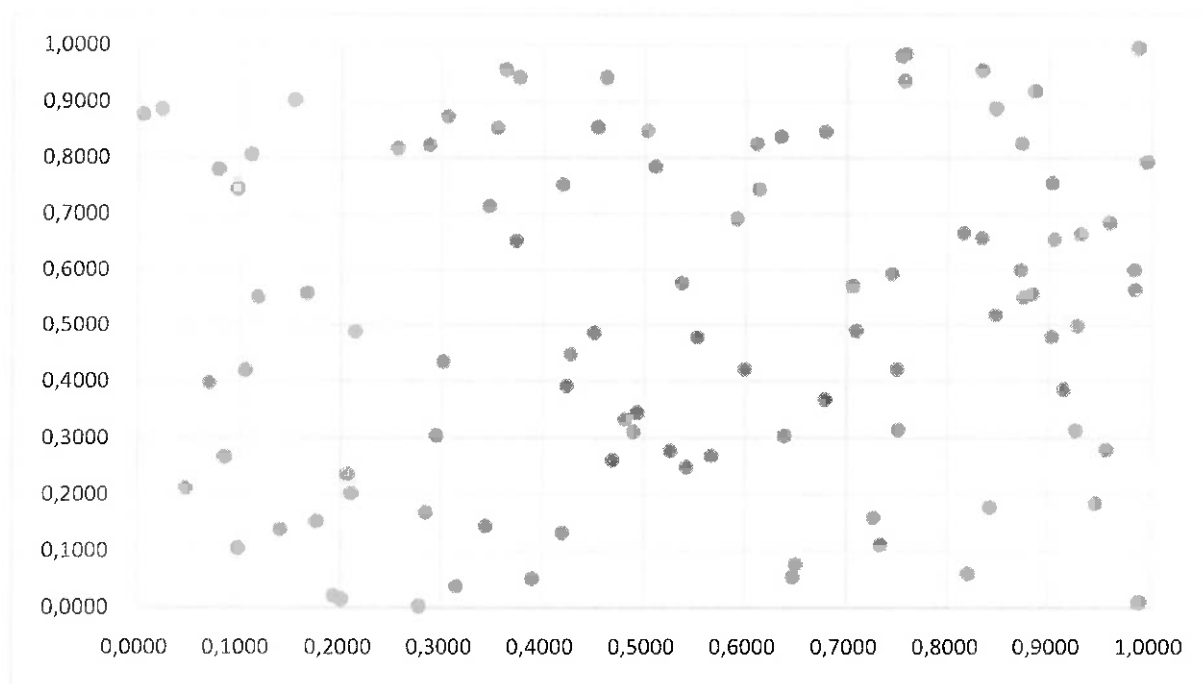
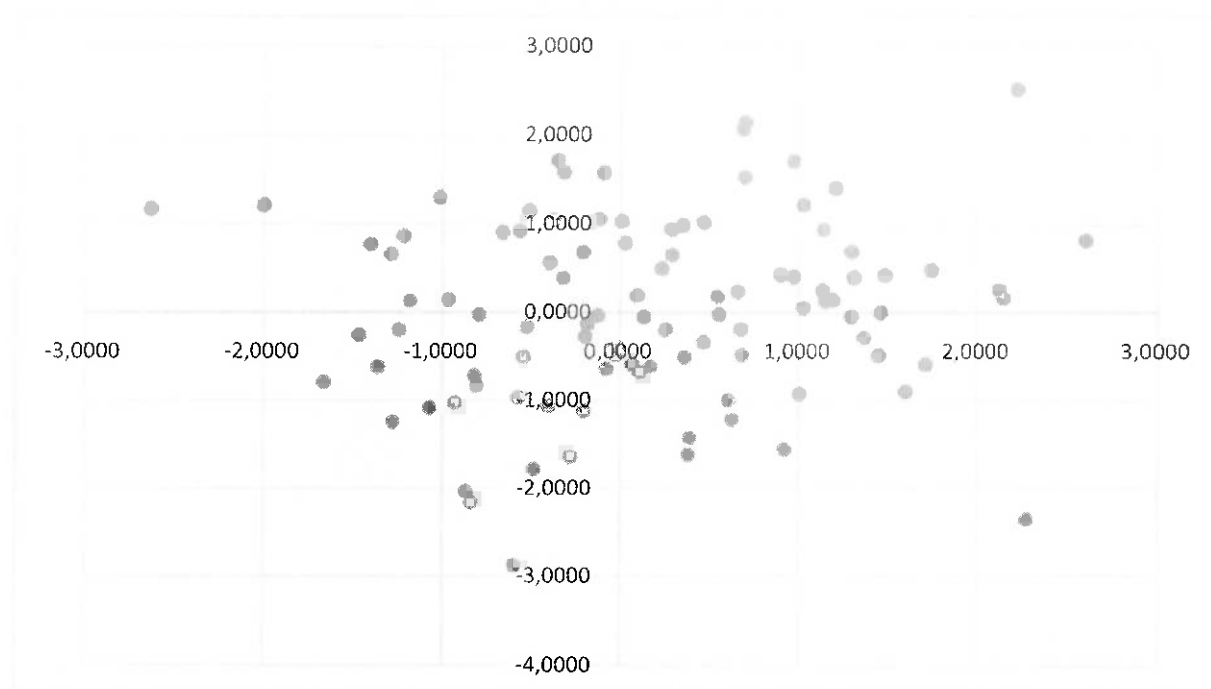
Gráfico 9**Distribuição uniforme cópulas – correlação 10%**

Gráfico 10
Variáveis normais correlacionadas – correlação 10%



Quadro 5
Matriz de correlação de clientes – correlação 45%

	Cliente 1	Cliente 2
Cliente 1	100%	45%
Cliente 2	45%	100%

Quadro 6
Triangular inferior da composição de Cholesky – correlação 45%

	Cliente 1	Cliente 2
Cliente 1	1	0
Cliente 2	0,4500	0,8930

Gráfico 11
Distribuição uniforme cópulas – correlação 45%

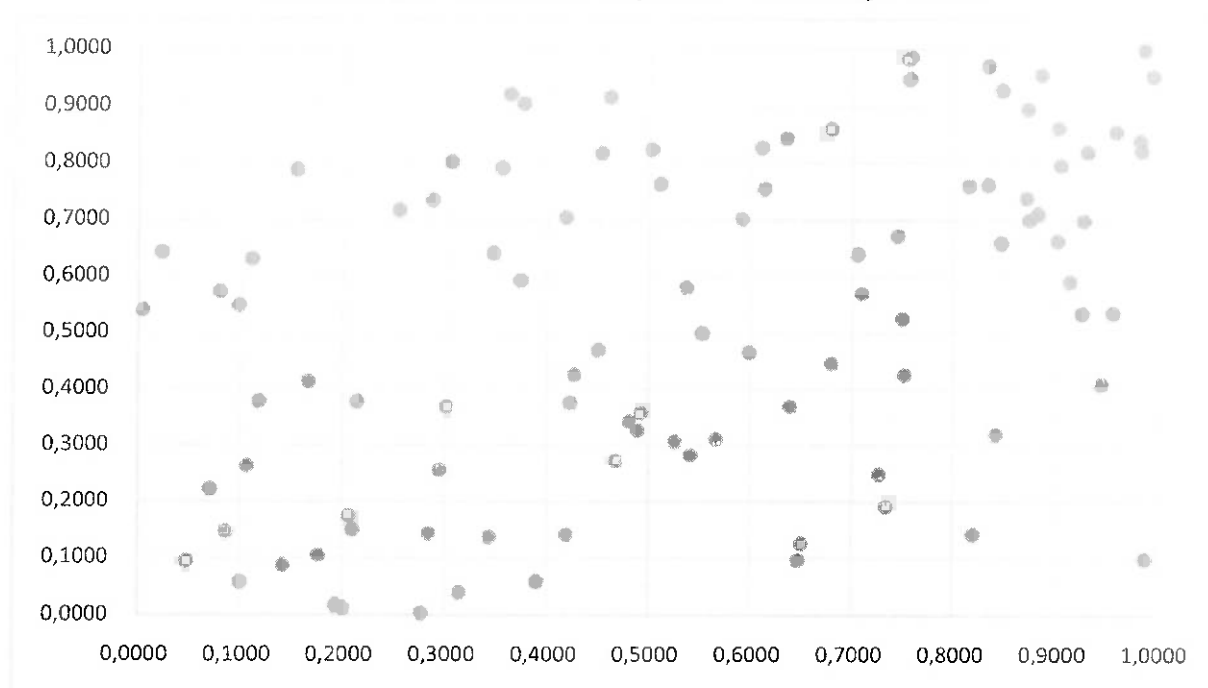
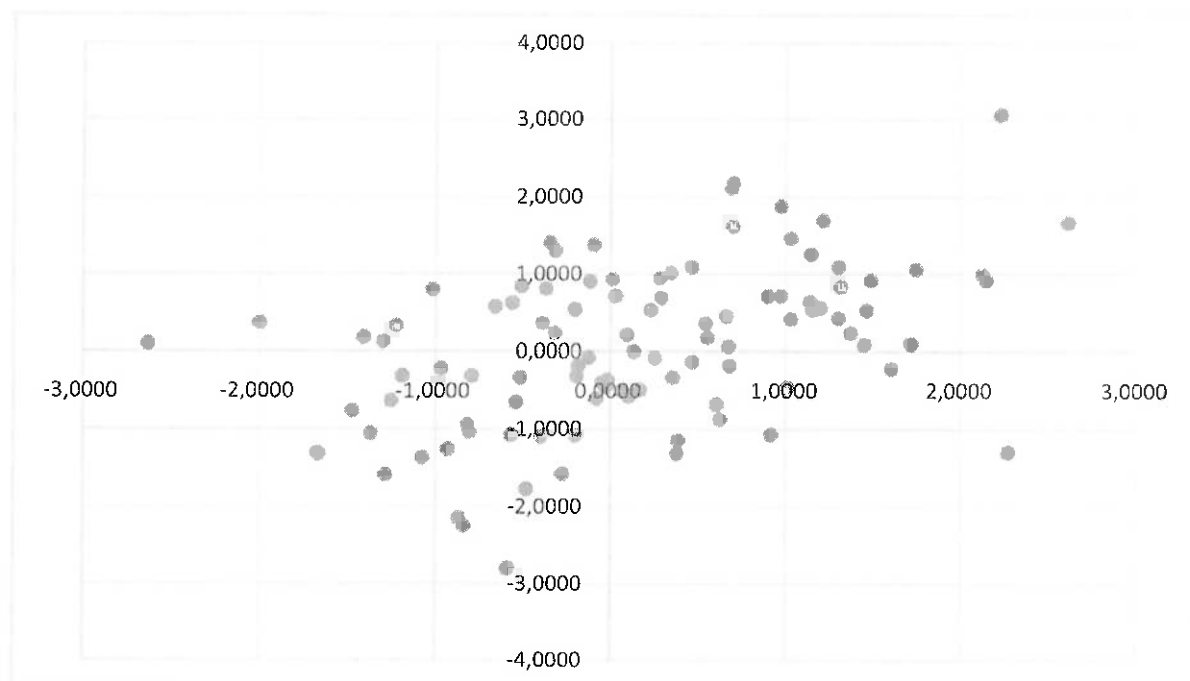


Gráfico 12
Variáveis normais correlacionadas – correlação 45%



Quadro 7
Matriz de correlação de clientes – correlação 80%

	Cliente 1	Cliente 2
--	-----------	-----------

Cliente 1	100%	80%
Cliente 2	80%	100%

Quadro 8**Triangular inferior da decomposição de Cholesky – correlação 80%**

	Cliente 1	Cliente 2
Cliente 1	1	0
Cliente 2	0,8000	0,6000

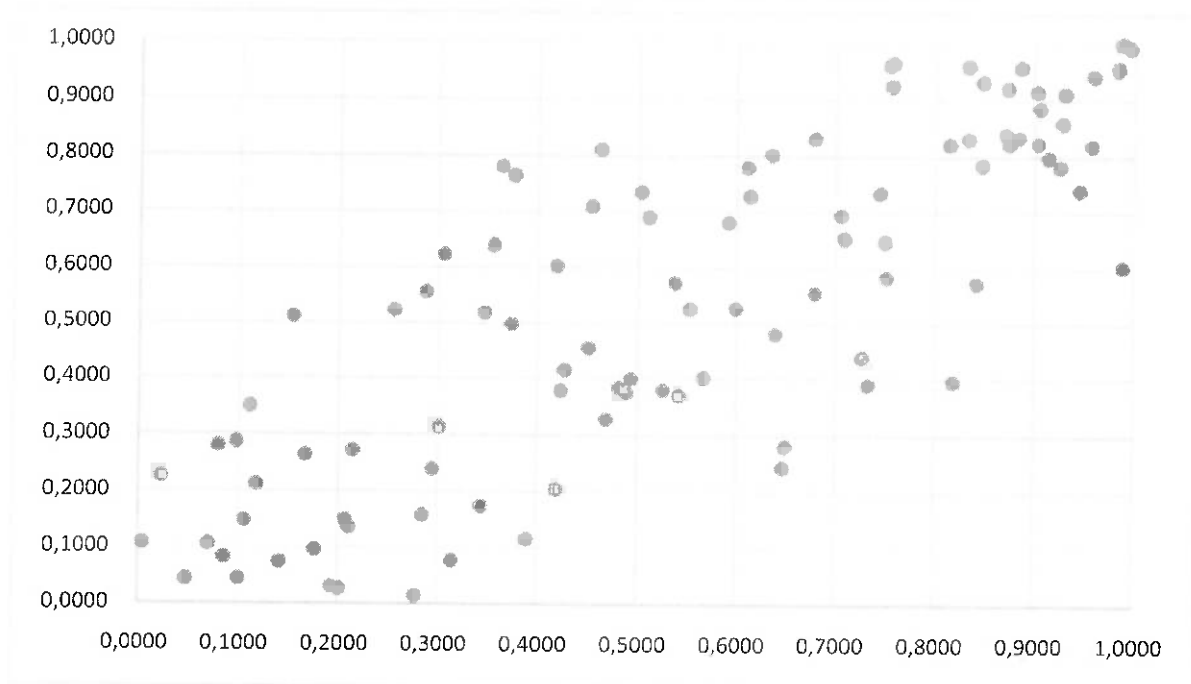
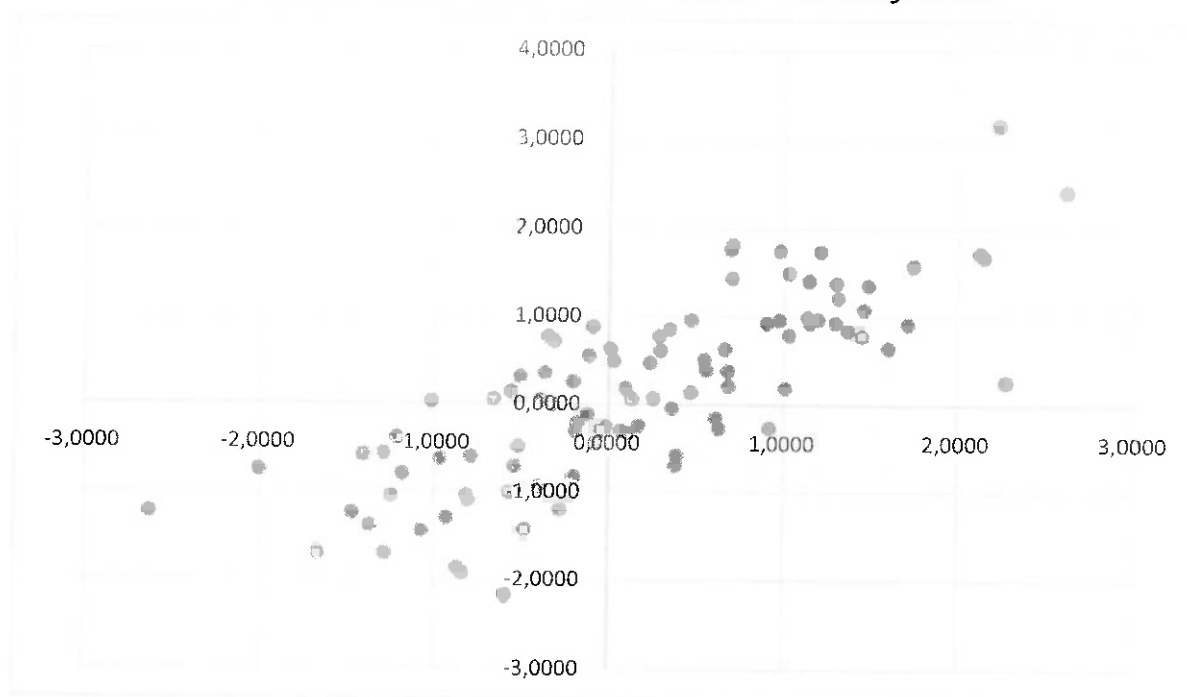
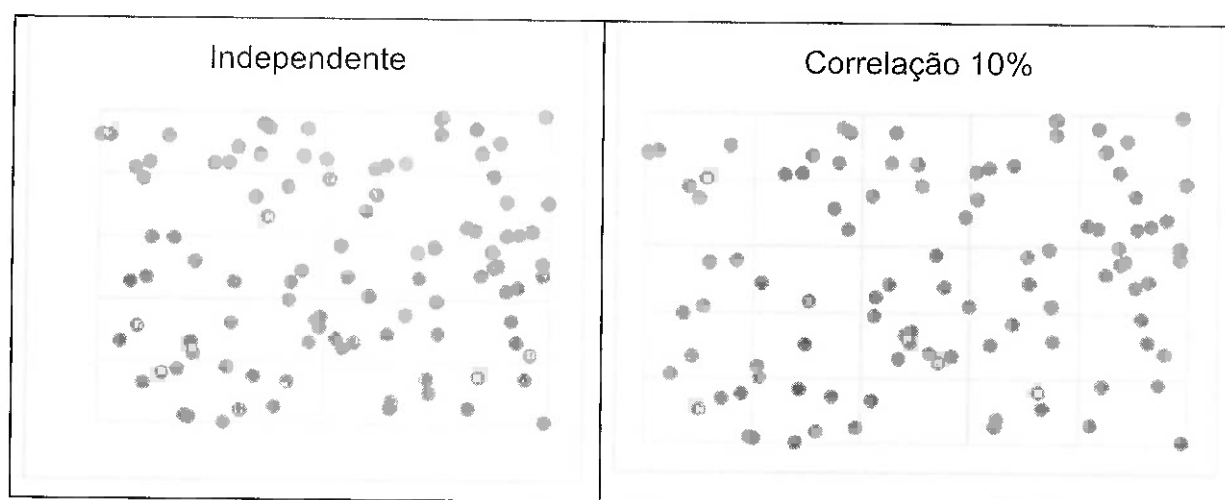
Gráfico 13**Distribuição uniformecópulas – correlação 80%**

Gráfico 14
Variáveis normais correlacionadas – correlação 80%



Apenas para efeito de comparação, podemos colocar lado a lado o gráfico de dispersão de cada simulação, e ver mais de perto o efeito de usar cópulas para correlacionar os eventos de *default* dos clientes da carteira.

Gráfico 15
Distribuição uniforme– agrupado



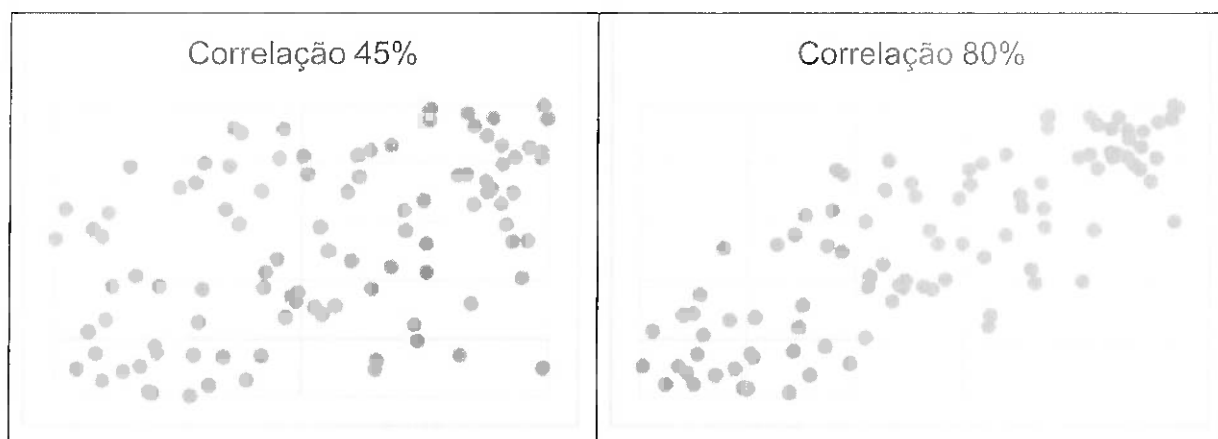
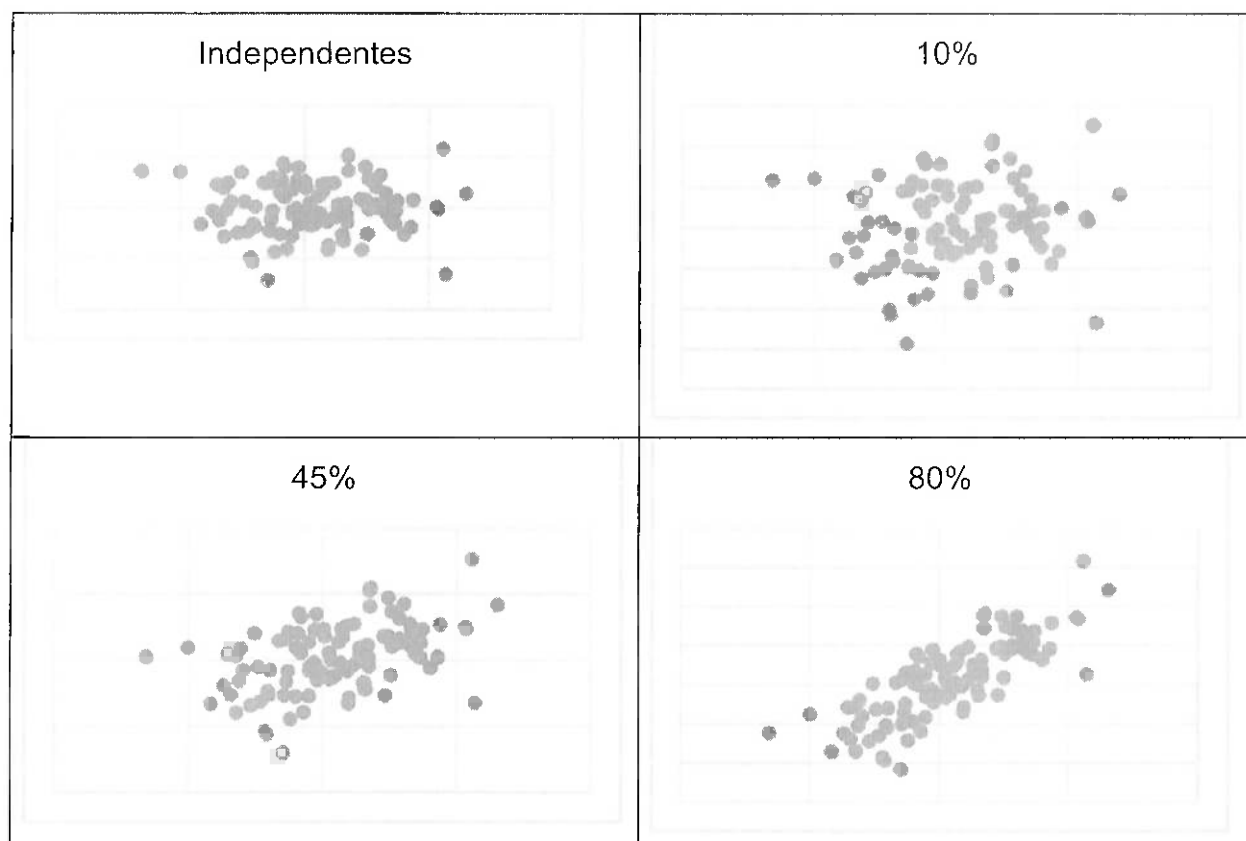


Gráfico 16
Variáveis normais correlacionadas - agrupado



3.7.4 Utilização do modelo

Este modelo é o mais complexo de todas as simulações feitas até aqui. Para cobrir todos os passos eu irei separar em tópicos:

1. Criar uma matriz de números aleatórios (um para cada cliente para cenário);

2. Definir a matriz de correlação entre os clientes da carteira;
3. Calcular a matriz triangular inferior, que é a matriz de correlação entre os clientes utilizando a decomposição de Cholesky;
4. Utilizando o modelo de Cópulas Gaussianas, iremos criar a distribuição normal das probabilidades utilizando a matriz de números aleatórios com matriz triangular inferior;
5. Com o valor da probabilidade em mãos, iremos utilizar a mesma abordagem das demais simulações de Monte Carlo para chegar na perda esperada do cenário em questão, porém, agora, a função que é utilizada contra a PD do cliente é o resultado da Cópula Gaussiana utilizando a triangular inferior e os números aleatórios.

3.7.5 Resultados

Para esta simulação em específico nós consideramos 3 diferentes matrizes de correlação. Para ver de perto o efeito que cada taxa de correlação produz no resultado final, nós fizemos 3 grupos de simulações com 500 cenários cada. Consideramos as correlações de 30%, 60% e 90% entre os clientes.

Nesta simulação nós geramos os dados aleatórios uniformes com distribuição $U(0,1)$ e os armazenamos de forma estática. Fizemos isso para levar em conta o mesmo cenário de probabilidades para todos os testes, alterando apenas a correlação entre os clientes, desta forma, podemos ver de fato apenas o efeito das diferentes matrizes de correlação no resultado final do cálculo do VaR.

Utilizando um fator de correlação de 30% e um intervalo de confiança de 99%, tivemos como resultado: perda esperada: R\$1.352.744,24, VaR: R\$5.619.012,90, desvio padrão de perdas: R\$1.252.213,82.

Utilizando um fator de correlação de 60% e um intervalo de confiança de 99%, tivemos como resultado: perda esperada: R\$1.315.453,72, VaR: R\$8.287.131,57, desvio padrão de perdas: R\$1.862.697,87.

Utilizando um fator de correlação de 90% e um intervalo de confiança de 99%, tivemos como resultado: perda esperada: R\$1.332.638,61, VaR: R\$10.157.077,81, desvio padrão de perdas: R\$2.539.525,56.

Gráfico 17
Distribuição de perdas – correlação 30%

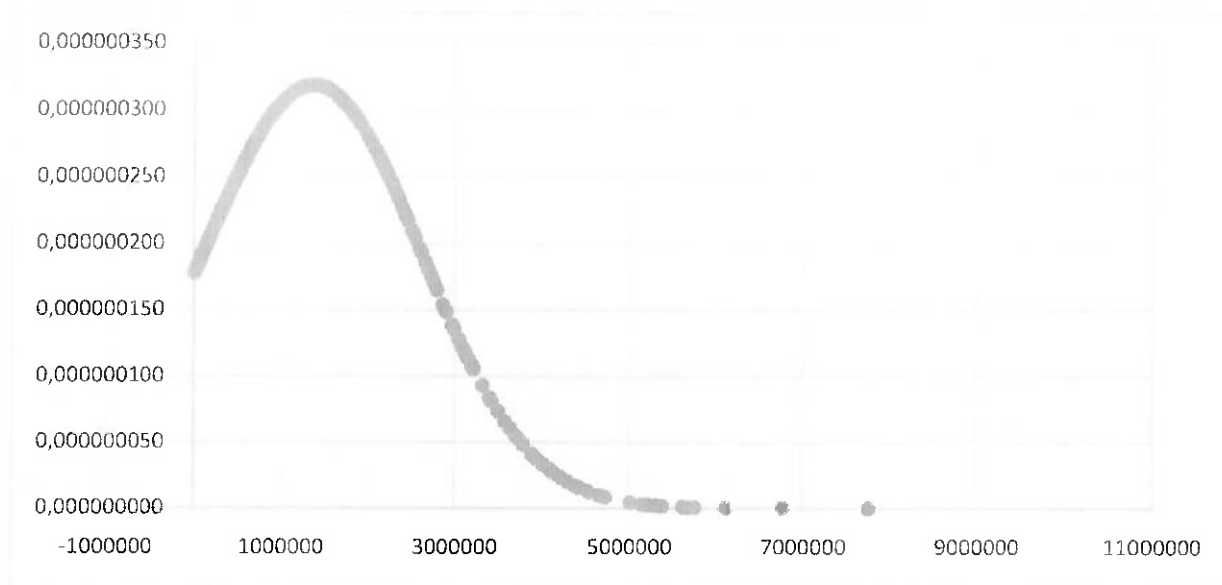


Gráfico 18
Distribuição de perdas – correlação 60%

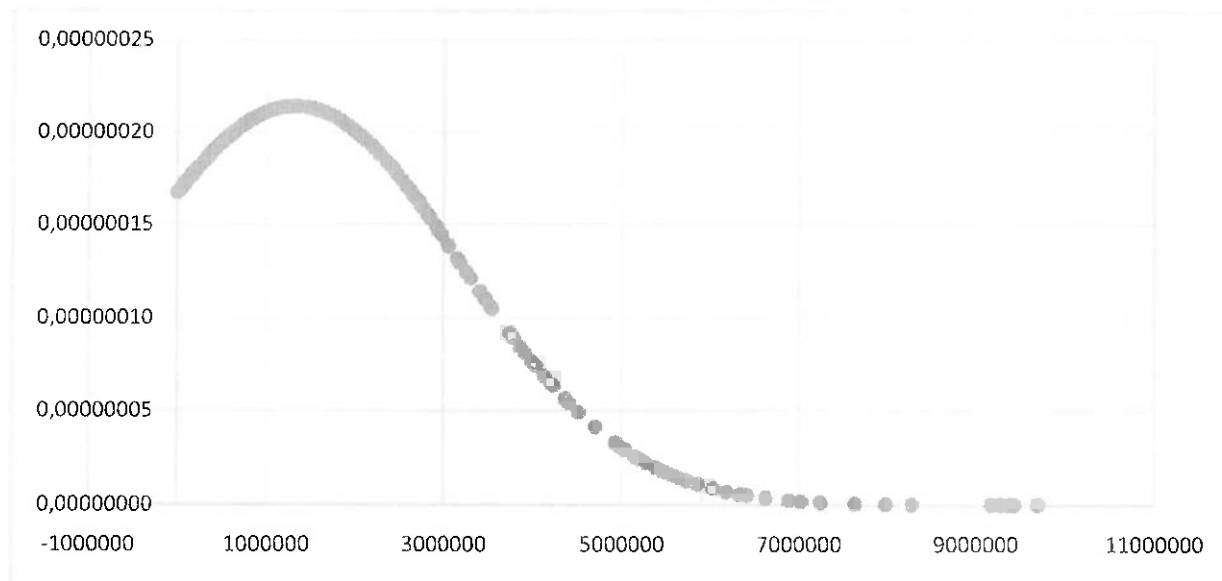


Gráfico 19
Distribuição de perdas – correlação 90%

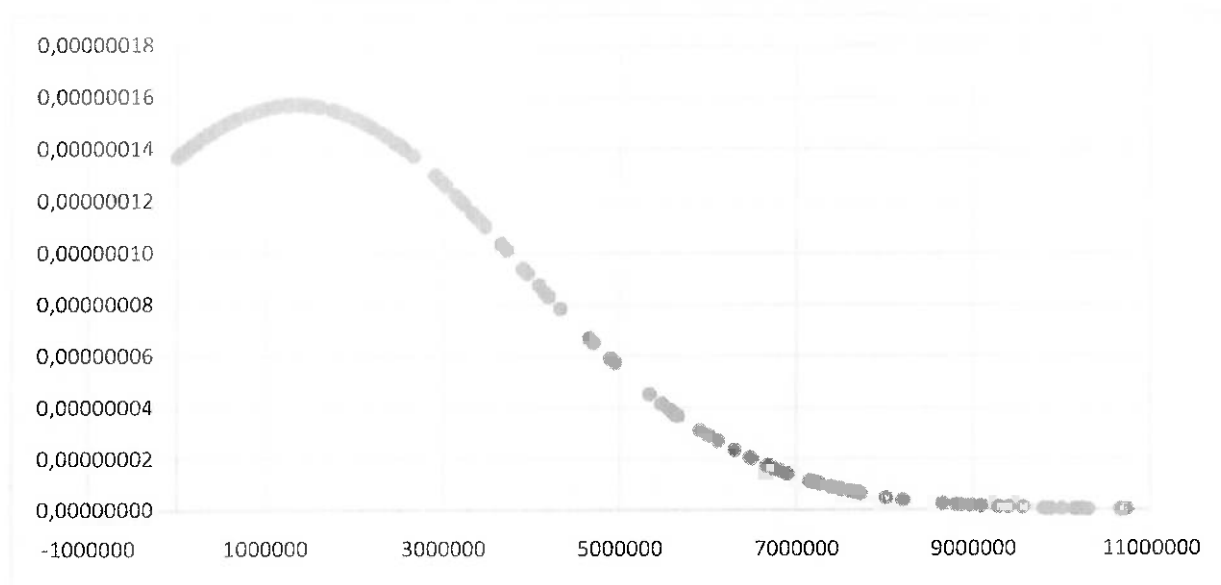
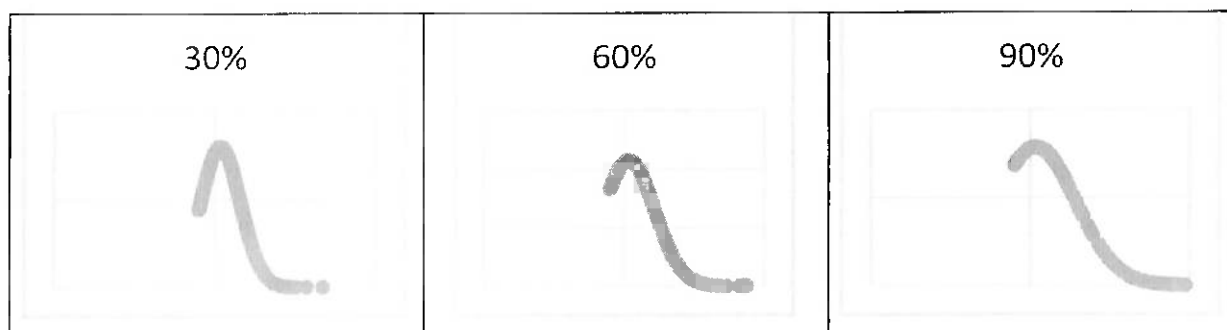


Gráfico 20
Distribuição de perdas com cópulas – agrupado



3.8 Comparação das Simulações de Monte Carlo

A seguir temos o gráfico de comparação entre os três métodos de Monte Carlo utilizados. Os dois primeiros métodos possuem um resultado semelhante, sendo que o método com volatilidade é o menos pessimista de todos, pois adiciona uma taxa de volatilidade à PD do cliente.

Gráfico 21
Distribuições de perdas usando Monte Carlo

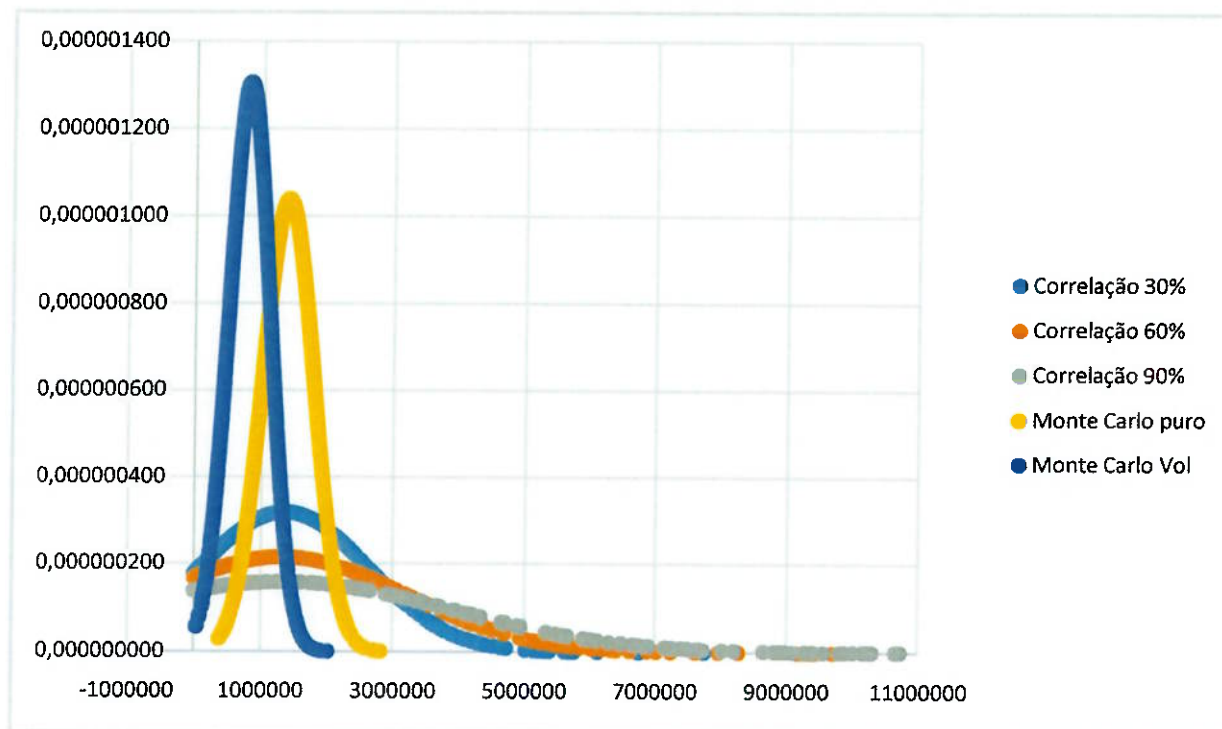


Gráfico 22
Distribuições de perdas usando Monte Carlo com cópulas Gaussianas

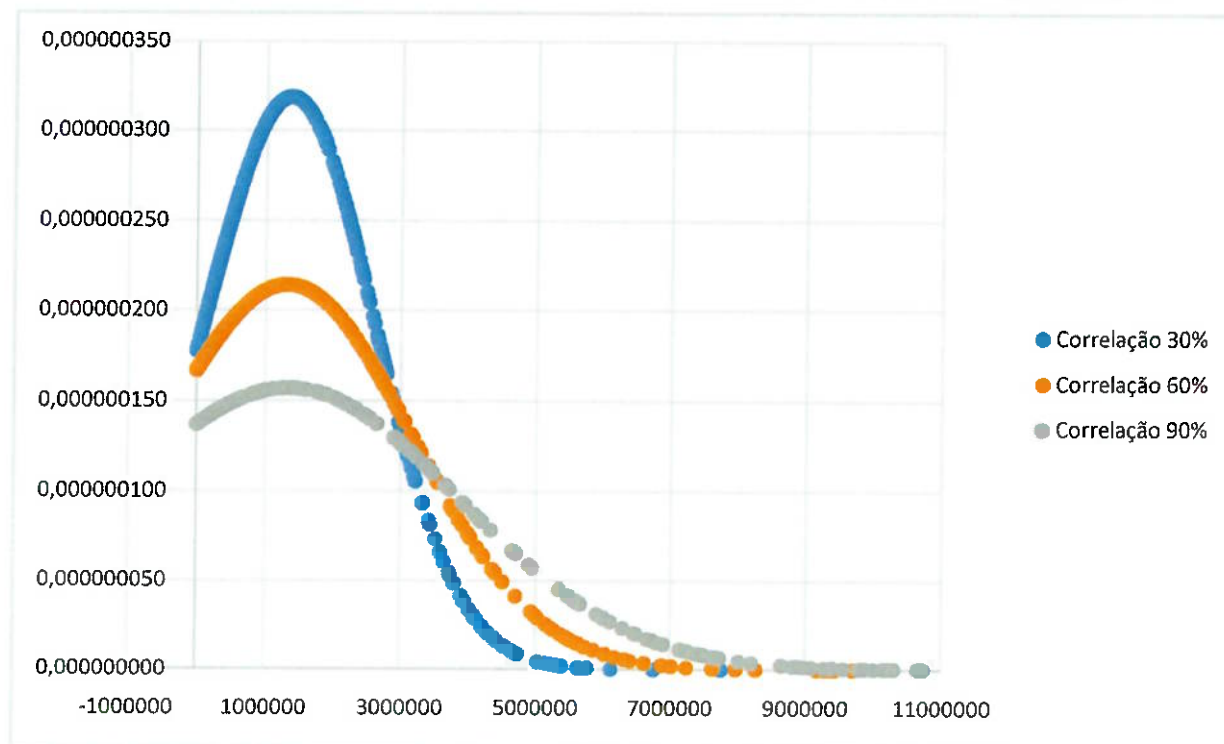
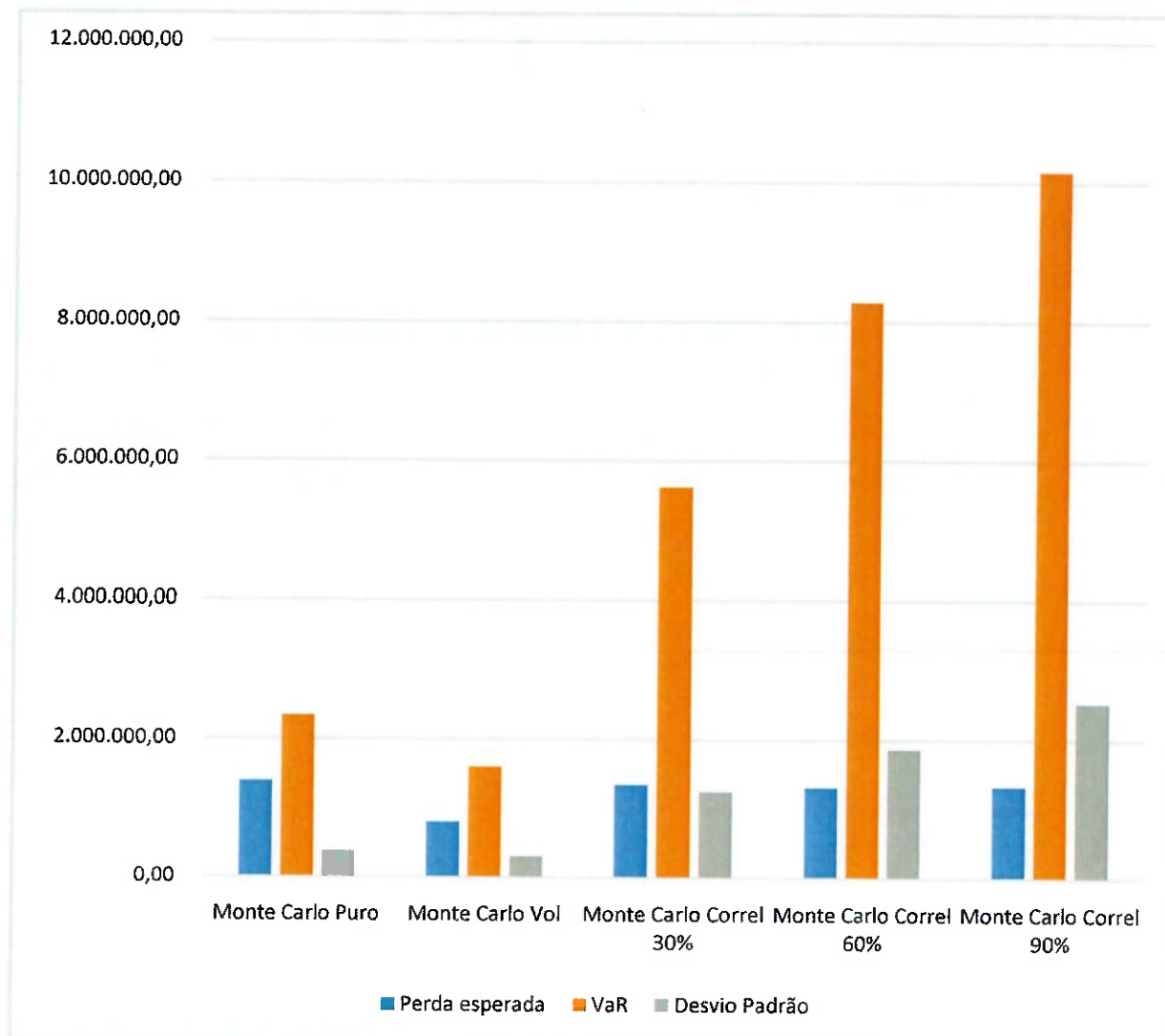


Gráfico 23
Resultado das simulações de Monte Carlo



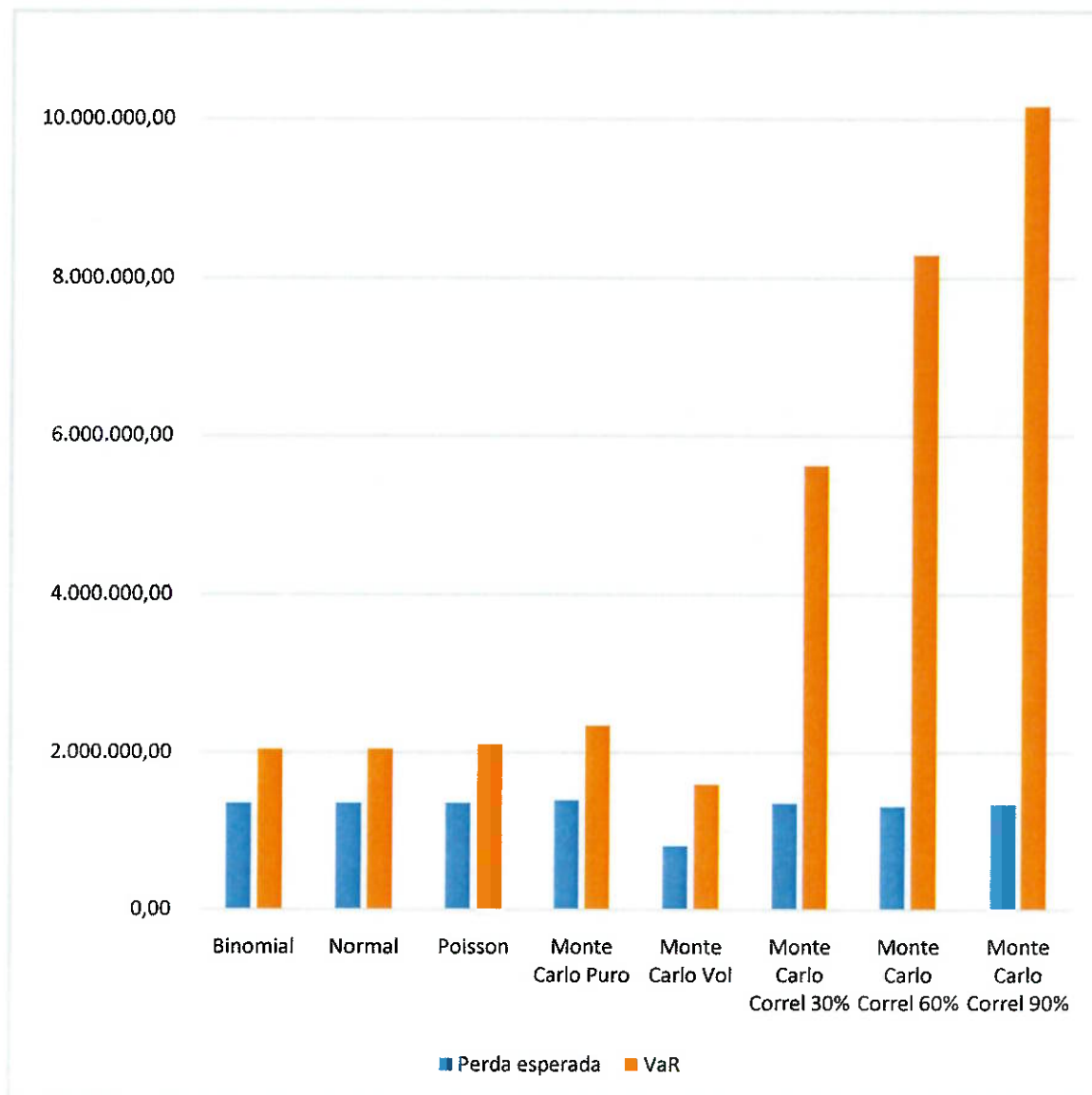
4. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES

Vimos diferentes tipos de simulações para cálculo do VaR. As simulações que utilizam distribuição Binomial, Poisson e Normal tiveram resultados bem parecidos. Parecidos até mesmo com as simulações utilizando Monte Carlo Puro e Monte Carlo com Volatilidade. Isso é um ponto interessante pois, nos três primeiros casos, agrupamos os clientes e utilizamos as médias de EAD, LGD e PD para o cálculo conjunto do VaR. Por este mesmo motivo a perda esperada (PE) dos modelos Binomial, Poisson e Normal estão iguais.

Na segunda parte dos testes utilizando Simulações de Monte Carlo, podemos identificar diferenças mais claras nos resultados. Monte Carlo com volatilidade tem um VaR e um PE menor devido ao fato de adicionar uma taxa de volatilidade à PD, isso é, esta taxa pode influenciar positivamente (o cliente com alto índice de *default* dado a volatilidade não entra em *default*) como negativamente. Os resultados mostraram que esta volatilidade diminui o número de *defaults* dos clientes da carteira.

O último teste cria uma correlação entre todos os clientes da carteira. Fica bem visível o quanto VaR resultante é pessimista. Por considerar que o *default* de um determinado cliente irá influenciar diretamente em outros clientes, a perda esperada é mais alta e, principalmente, o VaR é muito mais pessimista.

Gráfico 24
Resultado geral das simulações



CONCLUSÃO

Neste trabalho, propomos a utilização de simulações utilizando distribuições Binomial, Poisson, Normal e Monte Carlo para a análise de uma carteira de crédito. Ficou claro para nós que o modelo de Monte Carlo é mais completo e que considera as probabilidades de *default* dos clientes individualmente, principalmente pelo fato dos modelos Binomial, Poisson e Normal considerarem que o EAD, LGD e PD dos clientes de uma mesma carteira são idênticos.

Para casos onde de fato o EAD, PD e LGD são idênticos, os métodos que utilizam distribuições de probabilidade são mais interessantes, devido ao fato de demandar muito menos recurso computacional. No caso de Monte Carlo, a exigência computacional é muito maior.

Após simular 6.950 cenários diferentes vimos que os dois modelos que mais se diferem dos demais são a Simulação de Monte Carlo com volatilidade e correlacionando clientes.

A princípio podemos dizer que o modelo que correlaciona os clientes é o mais pessimista de todos, e na minha opinião, o mais realista também. De fato, sempre que algum tomador de fundos entra em *default*, ele irá comprometer o caixa do seu credor (seja o tomador uma pessoa física ou jurídica). Por conta disso, acredito que esta é a modelagem mais segura e robusta para ser aplicada em risco de crédito.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALTMAN, Edward, RESTI Andrea, SIRONI Andrea. *Mensuração de Análise de Recuperação de Crédito: O Novo Desafio do Risco de Crédito*. Rio de Janeiro, 2006. QualityMark.
- ARAGÃO, César. *Analisando o risco de uma carteira de crédito via Simulações de Monte Carlo*. Rio de Janeiro, 2003.
- CHERUBINI, Umberto. *Copula methods in finance*. Umberto Cherubini, Elisa Luciano, and Walter Vecchiato. John Wiley & Sons Inc. 2004.
- HOLTON, Glyn A. *Value-at-Risk: THEORY and PRACTICE*. Academic Press. 2003.
- JACKEL, Peter. *Monte Carlo methods in finance*. 2002. John Wiley & Sons Ltd.
- JOHNSTON, John. *Econometric Methods: International Edition* 1991. Singapore. 1984.
- JORION, Philippe. *Value at risk: a nova fonte de referência para a gestão do risco financeiro*. 2.ed. São Paulo. Bolsa de Mercadorias & Futuros, 2003.
- LUCAS, Douglas J. *Default Correlation and Credit Analysis*. Salomon Swapco Inc. New Yor. 2005.
- PASCHOARELLI, Rafael. *Probabilidade de default: Modelo de cálculo com árvores binomiais*. São Paulo, 1ª edição, 2007. Saint Paul Institute of Finance.
- RUBINSTEN, Reuven Y. *Simulation and the Monte Carlo Method: Wiley series in probability and mathematical statistics*. 1981. Technion, Israel Institute of Technology. John Wiley & Sons.
- VERRONE, Marco Antonio Guimarães. *Basiléia II no Brasil: Uma reflexão com foco na regulação bancária para Risco de Crédito – Resolução CMN. 2682/99*. São Paulo, 2007. Universidade de São Paulo.
- VOGLIOTTI, Rodrigo. *Mensuração da Exposição no Momento do Default (EAD) para Derivativos de Balcão através da Simulação de Monte Carlo*. São Paulo, 2012.
- YANAKA, Guilherme M. *Modelo Interno de Risco de Crédito de Basiléia II: Possíveis impactos no capital mínimo exigido dos bancos*. São Paulo. 2009.