

Universidade de São Paulo

Escola de Engenharia de São Carlos

Trabalho de Conclusão de Curso

# Análise de um sistema pendular com excitação paramétrica no suporte

*Autor:*

Guilherme Nascimben Santos

*Orientador:*

Prof. Dr. Hélio Aparecido Navarro

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

S237a Santos, Guilherme Nascimben  
Análise de um sistema pendular com excitação  
paramétrica no suporte / Guilherme Nascimben Santos ;  
orientador Hélio Aparecido Navarro. -- São Carlos, 2011.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em  
Engenharia Mecatrônica) -- Escola de Engenharia de São  
Carlos da Universidade de São Paulo, 2011.

1. Dinâmica. 2. Pendulo. 3. Equações de Lagrange.  
4. Diagrama de fase. I. Título.

## FOLHA DE AVALIAÇÃO

**Candidato(s):** Guilherme Nascimben Santos

**Título:** Análise de um sistema pendular com excitação paramétrica no suporte

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Escola de Engenharia de São Carlos da  
Universidade de São Paulo  
Curso de Engenharia Mecatrônica

## BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Álvaro Costa Neto

Nota atribuída: 10 ( DEZ )

  
(assinatura)

Prof. Dr. Luiz Augusto Martin Gonçalves

Nota atribuída: 10 ( DEZ )

  
(assinatura)

Prof. Dr. Helio Aparecido Navarro (orientador)

Nota atribuída: 10 ( DEZ )

  
(assinatura)

Média: 10 ( DEZ )

Resultado: Aprovado

**Data:** 02/06/2011

## Resumo

Neste trabalho, realizaremos a modelagem de um sistema pendular com excitação paramétrica no suporte. Para encontrarmos a equação que rege o movimento do mecanismo, faremos um estudo teórico das equações de Lagrange e aplicaremos o conceito aprendido para o caso em estudo. Depois, a modelagem do sistema será feita através do software MSC. Adams/View e os resultados das simulações plotados e analisados na forma de gráficos  $\theta-t$  e dos diagramas de fase. Por isso, também estará presente um estudo sobre os diagramas de fase e as possíveis interpretações que se pode tirar desses gráficos. Por fim, os resultados considerando o caso amortecido e não amortecido serão analisados.

## Sumário

<b>1</b>	<b>Coordenadas Generalizadas</b>	<b>10</b>
1.1	Definições . . . . .	10
1.2	Velocidades generalizadas . . . . .	11
1.3	Energia Cinética . . . . .	12
1.4	Momento generalizado . . . . .	14
1.5	Força generalizada . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Equações de Lagrange</b>	<b>18</b>
<b>3</b>	<b>Sistemas sujeitos a vínculos</b>	<b>21</b>
3.1	Exemplo de Sistema Sujeito a Vínculos . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Plano de Fase</b>	<b>28</b>
4.1	Diagrama de fase para a equação do pêndulo . . . . .	28
4.2	Sistemas Conservativos . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Análise de um sistema pendular com excitação paramétrica no suporte</b>	<b>37</b>
5.1	Equações de movimento . . . . .	37
5.2	Resultados das simulações . . . . .	39
5.2.1	Resultados para o caso em que $\theta_{inicial} = 0^\circ$ . . . . .	40
5.2.2	Resultados para o caso em que $\theta_{inicial} = 1^\circ, 10^\circ, 25^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ e $180^\circ$ . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Análise de um sistema pendular amortecido com excitação paramétrica no suporte</b>	<b>44</b>
6.1	Forças dissipativas . . . . .	44
6.2	Equações de movimento . . . . .	45

6.3	Resultados das simulações . . . . .	46
6.3.1	Resultados para o caso em que $\theta_{inicial} = 1^\circ$ . . . . .	47
6.3.2	Resultados para o caso em que $\theta_{inicial} = 10^\circ$ . . . . .	49
6.3.3	Resultados para o caso em que $\theta_{inicial} = 25^\circ$ . . . . .	51
6.3.4	Resultados para o caso em que $\theta_{inicial} = 45^\circ$ . . . . .	53
6.3.5	Resultados para o caso em que $\theta_{inicial} = 90^\circ$ . . . . .	56
6.3.6	Resultados para o caso em que $\theta_{inicial} = 135^\circ$ . . . . .	58
6.3.7	Resultados para o caso em que $\theta_{inicial} = 180^\circ$ . . . . .	60
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>62</b>

## Lista de Figuras

1	Sistema Pendular . . . . .	21
2	Cilindro rolando para baixo num plano inclinado . . . . .	22
3	Pêndulo Simples . . . . .	28
4	Diagrama de fase para o pendulo simples . . . . .	30
5	Partícula unitária com a ação da força $f(x)$ . . . . .	32
6	Partícula unitária $P$ vinculada a uma mola de comprimento natural $l = AO$ . . . . .	33
7	Diagrama de fase para $\ddot{x} = -x^3$ . . . . .	33
8	Diagramas de fase típicos advindos dos pontos estacionários da energia pontencial . . . . .	36
9	Sistema pendular com excitação paramétrica no suporte . . . . .	37
10	Modelo do pêndulo excitado no <i>MSC.ADAMS/View 2005</i> , com $\theta = 0^\circ$ . . . . .	40
11	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 0^\circ$ . . . . .	40
12	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta_{inicial} = 1^\circ$ . . . . .	41

13	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta_{inicial} = 10^\circ$ . . . . .	41
14	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta_{inicial} = 25^\circ$ . . . . .	42
15	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta_{inicial} = 45^\circ$ . . . . .	42
16	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta_{inicial} = 90^\circ$ . . . . .	42
17	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta_{inicial} = 135^\circ$ . . . . .	43
18	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta_{inicial} = 180^\circ$ . . . . .	43
19	Sistema pendular com excitação paramétrica no suporte . . . . .	45
20	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 1^\circ$ e $\beta = 0,1 \text{ Nms/rad}$ . . . . .	47
21	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 1^\circ$ e $\beta = 0,01 \text{ Nms/rad}$ . . . . .	48
22	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 1^\circ$ e $\beta = 0,001 \text{ Nms/rad}$ . . . . .	48
23	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 1^\circ$ e $\beta = 0,0001 \text{ Nms/rad}$ . . . . .	48
24	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 1^\circ$ e $\beta = 0,00001 \text{ Nms/rad}$ . . . . .	49
25	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 10^\circ$ e $\beta = 0,1 \text{ Nms/rad}$ . . . . .	49
26	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 10^\circ$ e $\beta = 0,01 \text{ Nms/rad}$ . . . . .	50
27	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 10^\circ$ e $\beta = 0,001 \text{ Nms/rad}$ . . . . .	50
28	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 10^\circ$ e $\beta = 0,0001 \text{ Nms/rad}$ . . . . .	50
29	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 10^\circ$ e $\beta = 0,00001 \text{ Nms/rad}$ . . . . .	51
30	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 25^\circ$ e $\beta = 0,1 \text{ Nms/rad}$ . . . . .	51
31	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 25^\circ$ e $\beta = 0,01 \text{ Nms/rad}$ . . . . .	52
32	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 25^\circ$ e $\beta = 0,001 \text{ Nms/rad}$ . . . . .	52
33	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 25^\circ$ e $\beta = 0,0001 \text{ Nms/rad}$ . . . . .	52
34	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 25^\circ$ e $\beta = 0,00001 \text{ Nms/rad}$ . . . . .	53
35	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 45^\circ$ e $\beta = 0,1 \text{ Nms/rad}$ . . . . .	53

36	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 45^\circ$ e $\beta = 0,01 \text{ Nms/rad}$	54
37	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 45^\circ$ e $\beta = 0,001 \text{ Nms/rad}$	54
38	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 45^\circ$ e $\beta = 0,0001 \text{ Nms/rad}$	54
39	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 45^\circ$ e $\beta = 0,00001 \text{ Nms/rad}$	55
40	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 90^\circ$ e $\beta = 0,1 \text{ Nms/rad}$	56
41	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 90^\circ$ e $\beta = 0,01 \text{ Nms/rad}$	56
42	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 90^\circ$ e $\beta = 0,001 \text{ Nms/rad}$	57
43	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 90^\circ$ e $\beta = 0,0001 \text{ Nms/rad}$	57
44	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 90^\circ$ e $\beta = 0,00001 \text{ Nms/rad}$	57
45	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 135^\circ$ e $\beta = 0,1 \text{ Nms/rad}$	58
46	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 135^\circ$ e $\beta = 0,01 \text{ Nms/rad}$	58
47	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 135^\circ$ e $\beta = 0,001 \text{ Nms/rad}$	59
48	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 135^\circ$ e $\beta = 0,0001 \text{ Nms/rad}$	59
49	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 135^\circ$ e $\beta = 0,00001 \text{ Nms/rad}$	59
50	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 180^\circ$ e $\beta = 0,1 \text{ Nms/rad}$	60
51	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 180^\circ$ e $\beta = 0,01 \text{ Nms/rad}$	60
52	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 180^\circ$ e $\beta = 0,001 \text{ Nms/rad}$	61
53	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 180^\circ$ e $\beta = 0,0001 \text{ Nms/rad}$	61
54	Gráfico de $\theta-t$ e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com $\theta = 180^\circ$ e $\beta = 0,00001 \text{ Nms/rad}$	61



# 1 Coordenadas Generalizadas

## 1.1 Definições

As equações de movimento de um sistema podem ser escritas em termos de diversos tipos de coordenadas, como, por exemplo, coordenadas cartesianas, cilíndricas ou esféricas. Todos os sistemas de coordenadas serão englobados, aqui, sob o nome de **coordenadas generalizadas**. Um sistema de coordenadas generalizadas é aquele em que as posições das partículas de um modelo podem ser completamente especificadas por esse sistema.

Nos problemas em que é necessário usar coordenadas generalizadas, caso não se saiba como escrever diretamente as equações de movimento, de Newton, usando essas coordenadas, podem-se escrever as equações de movimento em termos de coordenadas cartesianas e, então, transformá-las em coordenadas generalizadas (como, por exemplo, transformar as coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  em coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ , para o movimento de uma partícula no plano). No entanto, seria desejável e conveniente um método geral pelo qual se estabelecessem diretamente as equações de movimento em termos de um conjunto de coordenadas generalizadas apropriadas, sem precisar fazer essa transformação de coordenadas cartesianas para generalizadas. Além disso, seriam desejáveis também métodos gerais para escrever e, talvez, resolver as equações do movimento em termos de qualquer sistema de coordenadas. Tal método foi formulado por *Joseph-Louis Lagrange* e será o nosso objeto de estudo neste trabalho.

Designam-se, normalmente, as coordenadas generalizadas pela letra  $q$  com um índice numérico. Um conjunto de  $n$  coordenadas generalizadas seria, então, designado por  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Logo, uma partícula que se mova no plano pode ter o seu movimento especificado pelas coordenadas  $q_1$  e  $q_2$ , as quais podem ser, por exemplo, coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  ou polares  $r$  e  $\theta$ . Portanto, um sistema com  $N$  partículas pode ser especificado por  $3N$  coordenadas cartesianas  $x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N$  ou por um conjunto de  $3N$  coordenadas generalizadas  $q_1, q_2, q_3, q_4, \dots, q_{3N}$ .

Como as coordenadas generalizadas, assim como as coordenadas cartesianas, devem ter um conjunto definido de valores para cada configuração do sistema, podemos concluir que existe uma relação entre as coordenadas generalizadas  $q_1, \dots, q_{3N}$  e as coordenadas cartesianas. Portanto, as coordenadas generalizadas serão função das coordenadas cartesianas. Como as coordenadas cartesianas podem estar em movimento (para os casos em que é usado sistema de coordenadas em movimento), as coordenadas generalizadas poderão ser, também, função do tempo. Portanto, podemos escrever:

$$\begin{cases} q_1 = q_1(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N; t) \\ q_2 = q_2(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N; t) \\ \vdots \\ q_{3N} = q_{3N}(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N; t) \end{cases} \quad (1)$$

Da mesma forma, as coordenadas cartesianas também serão função das coordenadas generalizadas e, possivelmente, do tempo:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) \\ y_1 = y_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) \\ \vdots \\ z_N = z_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) \end{cases} \quad (2)$$

Caso as equações (1) sejam conhecidas, pode-se obter  $x_1, y_1, \dots, z_N$  para determinar as equações (2) e vice-versa.<sup>1</sup> Como exemplo, as equações abaixo relacionam as coordenadas polares  $r$  e  $\theta$  de uma partícula no plano com as coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$ :

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} r = (x^2 + y^2)^{1/2} \\ \theta = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \end{cases} \quad (3)$$

## 1.2 Velocidades generalizadas

Quando se descreve um sistema de partículas usando um conjunto de coordenadas generalizadas  $q_1, \dots, q_{3N}$ , a derivada em relação ao tempo,  $\dot{q}_k$ , de uma coordenada  $q_k$  qualquer é denominada **velocidade generalizada** associada a esta coordenada. As velocidades generalizadas podem ser obtidas derivando-se, em relação ao tempo, as equações (1) e (2), de acordo com a regra da diferenciação de funções implícitas. Por exemplo, derivando as equações (2), obtemos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_1}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial x_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \dot{z}_N = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_N}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial z_N}{\partial t} \end{cases} \quad (4)$$

A título de ilustração, calculemos, usando as relações (4), as velocidades nas direções  $x$  e  $y$  em termos das velocidades generalizadas  $\dot{r}$  e  $\dot{\theta}$ , usando as equações (3) (note que, para esse caso,  $r = q_1$  e  $\theta = q_2$ ).

Calculemos primeiramente as derivadas parciais:

---

<sup>1</sup>Há uma condição matemática que deve ser satisfeita para que as equações (1) sejam resolvidas, resultando nas equações (2), e vice-versa. Caso essa condição não seja satisfeita, as equações (1) não definem um conjunto de coordenadas generalizadas. Porém, em praticamente todos os casos de interesse, ficará evidente, a partir das definições geométricas das coordenadas generalizadas, se elas são ou não um conjunto legítimo de coordenadas. Logo, não será preciso aplicar o conceito matemático para o sistema de coordenadas escolhido.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \theta & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r \cdot \sin \theta & \frac{\partial x}{\partial t} &= 0 \\
\frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cdot \cos \theta & \frac{\partial y}{\partial t} &= 0
\end{aligned} \tag{5}$$

Agora, substituindo esses valores nas equações (4), temos:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\partial x}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial t} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\
\dot{y} &= \frac{\partial y}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial y}{\partial t} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta
\end{aligned} \tag{6}$$

### 1.3 Energia Cinética

Sabemos que a energia cinética de um sistema de  $N$  partículas, em termos de coordenadas cartesianas, é:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \tag{7}$$

Substituindo, na relação acima, os resultados das equações (4), obtém-se a energia cinética em termos das coordenadas generalizadas:

Relembrando a teoria sobre produto de somatórias:

$$\begin{aligned}
\sum_i^N P_i &= P_1 + P_2 + \dots + P_n \\
\left( \sum_i^N P_i \right)^2 &= (P_1 + P_2 + \dots + P_n)(P_1 + P_2 + \dots + P_n) = \sum_i^N \sum_l^N P_i P_l
\end{aligned} \tag{8}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(\dot{x}_i)^2 &= \left( \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 = \left( \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)^2 + 2 \left( \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \frac{\partial x_i}{\partial t} + \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{3N} \sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + 2 \left( \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \frac{\partial x_i}{\partial t} + \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2
\end{aligned} \tag{9}$$

Realizando o mesmo procedimento para  $(\dot{y}_i)^2$  e  $(\dot{z}_i)^2$  é fácil verificar que a energia cinética, em termos das coordenadas generalizadas, será dada por:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \\ &= \sum_{k=l}^{3N} \frac{1}{2} A_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^{3N} B_k \dot{q}_k + T_0, \end{aligned} \tag{10}$$

onde

$$\begin{aligned} A_{kl} &= \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial q_l} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \frac{\partial z_i}{\partial q_l} \right), \\ B_k &= \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right), \\ T_0 &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left[ \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Os coeficientes  $A_{kl}$ ,  $B_k$ ,  $T_0$  são funções das coordenadas  $q_1, \dots, q_{3N}$ , e também de  $t$ , no caso de sistemas de coordenadas em movimento. Se  $A_{kl}$  for igual a zero, exceto quando  $k = l$ , as coordenadas serão *ortogonais*. Os coeficientes  $B_k$  e  $T_0$  são iguais a zero quando  $t$  não aparece explicitamente nas equações (2), isto é, quando o sistema de coordenadas generalizadas não varia com o tempo. Verifica-se que a energia cinética, em geral, contém três conjuntos de termos:

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

onde  $T_2$  contém termos quadráticos das velocidades generalizadas,  $T_1$  contém termos lineares e  $T_0$  é independente das velocidades. Os termos  $T_1$  e  $T_0$  só aparecem em sistemas de coordenadas em movimento; em sistemas de coordenadas fixos, a energia cinética será quadrática nas velocidades generalizadas.

Por exemplo, em coordenadas polares planas (equações (3)), a energia cinética será

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \tag{11}$$

a qual pode ser obtida por substituição direta das equações (6) em (7).

Em vez de determinar-se primeiramente a energia cinética em coordenadas cartesianas e, depois, transformá-la em termos de coordenadas generalizadas, como no exemplo acima, às vezes é mais eficiente escrever a energia cinética diretamente em termos das coordenadas generalizadas, a partir do conhecimento de seu significado geométrico, sendo, então, possível resolver o problema escolhendo-se apropriadamente as coordenadas generalizadas sem escrever explicitamente as equações de transformação (1) e (2). Por exemplo,

é fácil chegar à equação (11) a partir do significado geométrico das coordenadas  $r$  e  $\theta$ , observando-se que a velocidade linear associada à variação de  $r$  é  $\dot{r}$  e a associada a  $\theta$  é  $r\dot{\theta}$ . Como as direções das velocidades associadas a  $r$  e  $\theta$  são perpendiculares, o quadrado da velocidade total será<sup>2</sup>

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

Quando os sistemas de mais do que uma partícula são descritos em termos de coordenadas generalizadas, em geral é mais seguro escrever primeiramente a energia cinética em coordenadas cartesianas e transformá-la em coordenadas generalizadas. Entretanto, em alguns casos, é possível escrever a energia cinética diretamente em coordenadas generalizadas. Por exemplo, quando um corpo rígido gira em torno de um eixo, sabe-se que a energia cinética é igual a  $\frac{1}{2}I\omega^2$ , onde  $\omega$  é a velocidade angular em torno do eixo e  $I$  é o momento de inércia de massa. Se a velocidade linear de cada partícula do sistema puder ser escrita diretamente em termos das coordenadas e velocidades generalizadas, então escreve-se imediatamente a energia cinética.

#### 1.4 Momento generalizado

A partir da equação (7) conseguimos verificar que os componentes do momento linear (ou quantidade de movimento linear) de uma partícula  $i$  é dado por:

$$p_{ix} = m_i\dot{x}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \quad p_{iy} = m_i\dot{y}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \quad p_{iz} = m_i\dot{z}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i}$$

Já no caso de uma partícula que se move no plano e considerando o sistema de coordenadas polar, as derivadas de  $T$  em relação a  $\dot{r}$  e  $\dot{\theta}$  (equação (11)) será dada por:

$$p_r = m\dot{r} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \quad (12)$$

,

onde  $p_r$  é o componente do momento linear na direção de crescimento de  $r$ , e  $p_\theta$  é o momento angular em relação à origem.

De fato, não é difícil demonstrar que, para qualquer coordenada  $q_k$  que mede um deslocamento linear de uma partícula ou grupo de partículas numa dada direção, o momento linear da partícula ou do grupo de partículas na direção dada será  $\partial T/\partial \dot{q}_k$ ; e que para uma coordenada  $q_k$  qualquer, que mede deslocamento angular de uma partícula ou grupo de partículas em relação a um eixo, os seus momentos angulares em relação ao eixo serão  $\partial T/\partial \dot{q}_k$ . Isto sugere a definição do **momento generalizado**  $p_k$  associado à coordenada  $q_k$  por

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

---

<sup>2</sup>Deve-se tomar cuidado ao aplicar este método, caso as velocidades associadas às variações das coordenadas não sejam perpendiculares

Se  $q_k$  é uma distância,  $p_k$  é o momento linear correspondente. Se  $q_k$  for um ângulo,  $p_k$  será o momento angular correspondente. Em outros casos,  $p_k$  terá outro significado físico. De acordo com a equação (10), o momento generalizado  $p_k$  será

$$p_k = \sum_{l=1}^{3N} A_{kl} \dot{q}_l + B_k$$

### 1.5 Força generalizada

Para definir agora uma força generalizada, será conveniente definir antes as forças em termos do trabalho por elas realizadas quando as partículas se movem. Imagine um sistema de partículas nas posições especificadas pelas coordenadas  $x_1, y_1, z_1, \dots, z_N$  e sob a ação das forças  $F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, \dots, F_{Nz}$ . Se cada partícula do sistema fosse deslocada para uma posição nas vizinhanças, as novas posições seriam especificadas pelas coordenadas  $x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, z_1 + \delta z_1, \dots, z_N + \delta z_N$ , e o trabalho realizado seria

$$\delta W = \sum_{i=1}^N (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) \quad (13)$$

Conhecendo-se as forças, pode-se calcular  $\delta W$  para um conjunto qualquer de pequenos deslocamentos,  $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ . Reciprocamente, conhecendo-se, experimentalmente ou teoricamente, o trabalho  $\delta W$  para um conjunto de deslocamentos  $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$  qualquer, então com o auxílio da equação (13) determinam-se as forças. E para obter as forças será preciso escrever a equação (13) para  $3N$  deslocamentos independentes. O conjunto de acréscimos  $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$  deve representar quaisquer possíveis deslocamentos pequenos, chamados **deslocamentos virtuais** do sistema, porque não representam necessariamente um movimento real do sistema. Os acréscimos  $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$  podem ser representados em termos de coordenadas generalizadas como se segue:

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \sum_{k=1}^{3N} \frac{\delta x_i}{\delta q_k} \delta q_k \\ \delta y_i &= \sum_{k=1}^{3N} \frac{\delta y_i}{\delta q_k} \delta q_k \\ \delta z_i &= \sum_{k=1}^{3N} \frac{\delta z_i}{\delta q_k} \delta q_k \end{aligned} \quad (14)$$

onde  $\delta q_1, \dots, \delta q_{3N}$  são as diferenças entre as coordenadas generalizadas, associadas a cada um dos dois conjuntos de posições das partículas. No caso de sistemas de coordenadas em movimento, considera-se o tempo como fixo; isto é, expressam-se as variações da posição em termos do sistema de coordenadas em um determinado tempo  $t$ . Substituindo-se as equações (14) na equação (13) e arrumando os termos, tem-se:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{3N} Q_k \delta q_k \quad (15)$$

onde

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\delta x_i}{\delta q_k} + F_{iy} \frac{\delta y_i}{\delta q_k} + F_{iz} \frac{\delta z_i}{\delta q_k} \right) \quad (16)$$

O coeficiente  $Q_k$  depende das forças exercidas sobre as partículas, das coordenadas  $\delta q_1, \dots, \delta q_{3N}$  e, possivelmente, também do tempo  $t$ . Em vista da similaridade na forma das equações (13) e (15), será natural chamar a quantidade  $Q_k$  de **força generalizada** associada à coordenada  $q_k$ . Define-se a força generalizada  $Q_k$  diretamente, sem referência ao sistema de coordenadas cartesianas, como o coeficiente que determina o trabalho realizado num deslocamento virtual em que somente  $q_k$  varia:

$$\delta W_k = Q_k \delta q_k \quad (17)$$

onde  $\delta W_k$  é o trabalho realizado quando o sistema se move, de maneira que  $q_k$  aumenta de  $\delta q_k$  e todas as outras coordenadas permanecem constantes. Observe que o trabalho na equação (13) e, portanto, também na equação (17) deve ser calculado a partir dos valores das forças para as posições  $x_1, \dots, z_N$ , ou  $q_1, \dots, q_{3N}$ ; isto é, não se deve levar em conta nenhuma variação das forças durante um deslocamento virtual. Se as forças  $F_{1x}, \dots, F_{Nz}$  forem conservativas, ou seja, derivarem de uma energia potencial  $V(x_1, \dots, z_N)$ :

$$F_{kx} = \frac{\partial V}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = \frac{\partial V}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = \frac{\partial V}{\partial z_k}, \quad k = 1, \dots, N.$$

então

$$\delta W = -\delta V = -\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \delta z_i \right)$$

Escrevendo-se  $V$  em termos de coordenadas generalizadas, então

$$\delta W = -\delta V = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial q_k} \delta q_k$$

Comparando essa equação com a equação (15), verifica-se que

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (18)$$

que mostra que também nesse sentido a definição de  $Q_k$  como força generalizada é natural. A equação (18) também pode ser verificada através do cálculo direto de  $\partial V / \partial q_k$ :

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = -Q_k$$

Como exemplo, podemos calcular as forças generalizadas associadas com as coordenadas  $r$  e  $\theta$  para uma partícula submetida à ação da força

$$F = F_x \hat{x} + F_y \hat{y} = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta}$$

Usando-se a definição (16), com o auxílio das equações (5), tem-se:

$$\begin{aligned} Q_r &= F_x \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \frac{\partial y}{\partial r} = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta = F_r \\ Q_\theta &= F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r F_x \sin \theta + r F_y \cos \theta = r F_\theta \end{aligned} \tag{19}$$

Verifica-se que  $Q_r$  é o componente da força na direção  $r$  e  $Q_\theta$  é o torque exercido no sentido de crescimento de  $\theta$ .

Usualmente é mais rápido usar a definição (17), pois permite contornar totalmente as coordenadas cartesianas. Considerando-se um pequeno deslocamento em que  $r$  varia para  $r + \delta r$  e  $\theta$  permanecendo constante, o trabalho será

$$\delta W = F_r \delta r$$

A partir desta relação, a primeira das equações (19) pode ser obtida. Considerando-se um deslocamento em que  $r$  é constante e  $\theta$  aumenta de  $\delta \theta$ , o trabalho será

$$\delta W = (F_\theta r) \delta \theta$$

A partir desta relação, a segunda das equações (19) pode ser obtida.

Em geral, se  $q_k$  for uma coordenada que mede a distância em que uma parte do sistema mecânico se deslocou em determinada direção, e se  $F_k$  for o componente, nesta direção, da força total que atua sobre esta parte do sistema, então o trabalho realizado quando  $q_k$  aumenta de  $\delta q_k$ , com todas as outras coordenadas permanecendo constantes, será

$$\delta W_k = F_k \delta q_k$$

Comparando-se esse resultado com a equação (17), obtém-se



$$Q_k = F_k$$

Neste caso, a força generalizada  $Q_k$  é exatamente a força comum  $F_k$ . Se  $q_k$  medir a rotação angular de uma parte do sistema em torno de um eixo arbitrário e se  $N_k$  for o torque total em relação a este eixo, que atua nesta parte do sistema, então o trabalho realizado quando  $q_k$  sofre um acréscimo de  $\delta q_k$  será

$$\delta W = N_k \delta q_k$$

Comparando-se este resultado com a equação (17), obtém-se

$$Q_k = N_k$$

A força generalizada  $Q_k$  associada à coordenada angular  $q_k$  é o torque.

## 2 Equações de Lagrange

Levando-se em consideração o que foi feito até agora (generalização de coordenadas, momentos, forças etc), podemos chegar à seguinte questão: será que conseguimos achar uma generalização para a equação de movimento de um sistema? Ou seja, será que, dado um sistema, conseguimos achar as equações de movimento para qualquer tipo de coordenada adotada utilizando somente um método genérico? Para responder essa pergunta, vamos ao seguinte procedimento:

A analogia que conduziu à definição de momento generalizado e força generalizada faz pensar que as equações do movimento generalizadas podem ser obtidas igualando-se a taxa de variação com o tempo de cada momento  $p_k$  à força  $Q_k$  correspondente, ou seja:

$$\frac{dp_k}{dt} = Q_k$$

Para verificar esta suposição, calcula-se a taxa de variação com o tempo de  $p_k$ :

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

Para prosseguir, começa-se com as equações do movimento, de Newton, em coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_i &= F_{ix} \\ m\ddot{y}_i &= F_{iy} \\ m\ddot{z}_i &= F_{iz} \end{aligned} \quad [i = 1, \dots, N] \tag{20}$$

Nesse caso, expressa-se  $T$  em coordenadas cartesianas (equação (7)). Derivando  $T$  com relação à coordenada generalizada  $\dot{q}_k$ , temos

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \left( \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) \quad (21)$$

onde  $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dots, \dot{z}_N$  são dados em função de  $q_1, \dots, q_{3N}$ ;  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}$ , e  $t$  de acordo com a equação (4). Tomando-se as derivadas das equação (4), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \\ \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial y_i}{\partial q_k}, \\ \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial z_i}{\partial q_k}. \end{aligned} \quad [i = 1, \dots, N; k = 1, \dots, 3N] \quad (22)$$

Como  $\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$  e  $\frac{\partial x_i}{\partial t}$  são funções apenas de  $q_1, \dots, q_{3N}$  e  $t$ , substituindo-se as equações (22) na equação (21) e derivando novamente em relação a  $t$ , tem-se:

$$\frac{dp_k}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \left( \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) + \sum_{i=1}^N m_i \left( \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \quad (23)$$

De acordo com as equações do movimento, de Newton (20), e da definição (16), o primeiro termo da equação (23) torna-se

$$\sum_{i=1}^N m_i \left( \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = Q_k$$

As derivadas que aparecem no último termo da equação (23) são calculadas da seguinte maneira:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$$

onde se usa a equação (4). Expressões similares podem ser obtidas para  $y$  e  $z$ . Logo, a última soma na equação (23) torna-se

$$\sum_{i=1}^N m_i \left( \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{i=1}^N m_i \left( \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

Então, finalmente, tem-se

$$\frac{dp_k}{dt} = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad (24)$$

Portanto, o que se imaginou inicialmente não estava correto, pois é preciso somar o termo  $\partial T/\partial q_k$  à força generalizada  $Q_k$  para obter a taxa de variação com o tempo do momento generalizado,  $\dot{p}_k$ . Porém, mesmo que não seja o que pensamos inicialmente, conseguimos chegar à uma equação de movimento generalizada.

Como exemplo de que a equação está correta, pegaremos o caso de movimento de uma partícula em coordenadas polares. Nesse caso, considerando a energia cinética dada pela equação (11), temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} &= mr\dot{\theta}^2 \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

e usando-se as Eqs (12) e (19), a equação de movimento (24) para  $q_k = r$  torna-se:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= F_r + mr\dot{\theta}^2 \\ mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} &= F_\theta \end{aligned}$$

Comparando essas equações com o resultado direto da aplicação das leis de movimento de Newton, vemos que são as mesmas equações, e mais: com muito mais facilidade, conseguimos chegar à equação de movimento na direção do raio e de  $\theta$  para um sistema de coordenadas polares, sem que haja a necessidade de derivar versores.

As equações (24) são usualmente escritas na forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (25)$$

e são as **Equações de Lagrange**. Ou seja, as equações de Lagrange são as equações de movimento de Newton, só que para um caso geral. Portanto, temos as equações de movimento para qualquer sistema de coordenadas que você quiser adotar para resolver o problema!

No caso em que exista uma energia potencial, de modo que as forças  $Q_k$  são derivadas de funções energia potencial (equação(18)), pode-se introduzir a **função lagrangiana**,

$$L(q_1, \dots, q_{3N}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}; t) = T - V$$

onde  $T$  depende de  $q_1, \dots, q_{3N}$  e  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}$ , mas  $V$  só depende de  $q_1, \dots, q_{3N}$  (e possivelmente de  $t$ ), de forma que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k},$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} + Q_k$$

Assim, as equações (25), neste caso, podem ser escritas na forma compacta

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, 3N$$

Em muitos casos, as equações de movimento podem ser escritas na forma compacta acima.

Concluindo, como as equações de Lagrange foram obtidas a partir das equações do movimento, de Newton, não representam propriamente uma nova teoria da Física, mas, simplesmente, uma maneira diferente, mas equivalente, de expressar essas mesmas leis.

### 3 Sistemas sujeitos a vínculos

*Vínculo* é uma restrição na liberdade do movimento de um sistema de partículas sob uma condição que deve ser satisfeita por suas coordenadas, ou por variações permitidas em suas coordenadas. Para corpos rígidos, os vínculos exigem que as distâncias relativas entre todos os pares de partículas permaneçam constantes. Já no caso de um sistema pendular, o vínculo (corda) exige que a partícula siga uma trajetória circular, de raio igual ao comprimento da corda,  $l$ , como ilustra a Fig. 1.

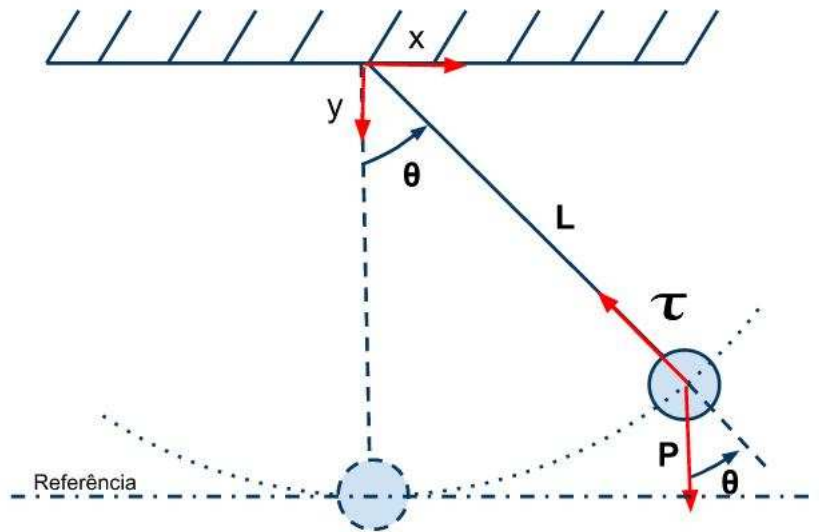


Figura 1: Sistema Pendular

Os vínculos que podem ser expressados na forma de uma equação que relaciona as coordenadas chamam-se **holônomos**. Um exemplo é o caso de um cilindro rolando (Fig. 2) em um plano inclinado sem deslizar. O sistema é especificado pelas coordenadas  $s$  e  $\theta$  medindo, respectivamente, o tanto que o cilindro andou para frente e o tanto que ele rotacionou. Porém, para determinar sua posição sabendo que ele não desliza, podemos associar a coordenada  $s$  à  $\theta$  pela seguinte equação:

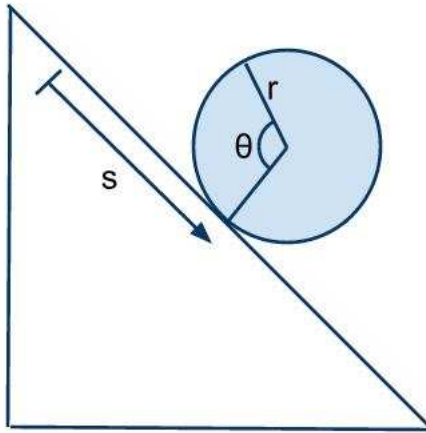


Figura 2: Cilindro rolando para baixo num plano inclinado

$$\Delta s = r\theta$$

Já no caso do cilindro rolar com deslizamento, não poderíamos relacionar as coordenadas. Nesse caso, o vínculo não seria holônomo. Os vínculos holônomos são bastante comuns na prática e serão eles o material de estudo daqui em diante.

O número de maneiras independentes com que um sistema mecânico é capaz de mover-se sem violar os vínculos existentes chama-se número de **graus de liberdade** do sistema. Para um sistema holonômico, o número de graus de liberdade será igual ao número mínimo de coordenadas necessárias para especificar a configuração do sistema. Por exemplo, uma partícula movendo-se no espaço tem três graus de liberdade (coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ ), mas se estiver vinculada para se mover ao longo de uma curva, terá somente um (coordenada  $s$  que mede a distância da partícula à origem da curva). Um sistema de  $N$  partículas livres tem  $3N$  graus de liberdade (três para cada partícula). Um corpo rígido tem seis graus de liberdade (três de translação e três de rotação) e um corpo rígido que gira em torno de um eixo tem um único grau de liberdade ( $\theta$ ).

Para um sistema holonômico de  $N$  partículas submetidas a  $c$  vínculos independentes, os vínculos podem ser expressos por meio de equações que relacionam as  $3N$  coordenadas cartesianas (e possivelmente o tempo, no caso de os vínculos variarem com este), na forma

$$\begin{aligned}
h_1(x_1, y_1, \dots, z_N; t) &= a_1 \\
h_2(x_1, y_1, \dots, z_N; t) &= a_2 \\
&\vdots \\
h_c(x_1, y_1, \dots, z_N; t) &= a_c
\end{aligned} \tag{26}$$

onde  $h_1, \dots, h_c$  são funções especificadas. Como essas equações são independentes, é possível resolvê-las para  $c$  coordenadas cartesianas em termos das outras  $3N - c$  coordenadas e das constantes  $a_1, \dots, a_c$  (e, possivelmente, do tempo). Desse modo, só é preciso especificar  $3N - c$  coordenadas cartesianas para especificar completamente a configuração do sistema; as demais podendo ser determinadas por meio das equações (26). Portanto, o número de graus de liberdade do sistema é

$$f = 3N - c.$$

É possível considerar como coordenadas generalizadas essas  $3N - c$  coordenadas cartesianas e as  $c$  constantes  $a_1, \dots, a_c$ . Assim,  $c$  coordenadas generalizadas são trivializadas, no sentido de que são mantidas constantes pelos vínculos ao longo de todo o movimento. Também é possível definir as  $3N - c$  coordenadas generalizadas não-triviais  $q_1, \dots, q_f$  de qualquer maneira conveniente. De maneira geral, temos então

$$\begin{aligned}
q_1 &= q_1(x_1, y_1, \dots, z_N; t) \\
q_2 &= q_2(x_1, y_1, \dots, z_N; t) \\
&\vdots \\
q_f &= q_f(x_1, y_1, \dots, z_N; t) \\
q_{f+1} &= h_1(x_1, y_1, \dots, z_N; t) = a_1 \\
&\vdots \\
q_{f+c} &= h_c(x_1, y_1, \dots, z_N; t) = a_c
\end{aligned}$$

Essas equações definem um conjunto de  $3N$  coordenadas  $q_1, \dots, q_f; a_1, \dots, a_c$ , e são análogas às equações (1).

Para exemplificar, consideremos um corpo simples formado por duas partículas ligadas por uma haste rígida sem massa de comprimento  $l$ . Essas duas partículas estão, portanto, sob ação de um vínculo que faz com que elas permaneçam sempre separadas por uma distância  $l$ . Em coordenadas cartesianas, o vínculo será

$$[(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2} = l$$

Essa é a equação (26) nesse caso específico. Há apenas uma equação porque, nesse problema simples, apenas um vínculo está presente. Para esse sistema, podemos escolher, por exemplo, as três coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$  de uma das partículas e coordenadas esféricas  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$  para localizar a outra partícula em relação a ela. O vínculo, então, assume a forma simples

$$r = l,$$

o que trivializa a coordenada radial. Logo, restam apenas cinco coordenadas,  $x, y, z, \theta$  e  $\phi$  para determinar, e elas especificam completamente a configuração do sistema, já que sabemos de antemão que a distância entre as duas partículas é sempre  $l$ . Claramente, tal sistema holonômico tem cinco graus de liberdade.

Considere  $Q_1, \dots, Q_f, Q_{f+1}, \dots, Q_{f+c}$  como forças generalizadas, correspondentes às coordenadas  $q_1, \dots, q_f; a_1, \dots, a_c$ . Assim, há um conjunto de equações de Lagrange para coordenadas com vínculos e outras para as coordenadas sem vínculos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, f \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{a}_j} - \frac{\partial T}{\partial a_j} = Q_{f+j}, \quad j = 1, \dots, c; \quad c + f = 3N \quad (28)$$

A importância desta separação em dois grupos de equações está no fato de as forças de vínculo poderem ser escolhidas de forma que não realizem trabalho, a não ser que os vínculos sejam violados. Se isto for verdade, então, de acordo com a definição (17) de força generalizada, as forças de vínculo não contribuem para a força generalizada  $Q_k$ , associada a uma coordenada sem vínculo  $q_k$ . Como os valores das coordenadas de vínculo  $a_1, \dots, a_c$  são mantidas constantes, resolvem-se as equações (27) para o movimento do sistema em termos das coordenadas  $q_1, \dots, q_f$ , tratando  $a_1, \dots, a_c$  como constantes conhecidas, sem, no entanto, conhecer as forças de vínculo. É uma grande vantagem, porque as forças de vínculo dependem do movimento do sistema e não poderão, em geral, ser determinadas até que o movimento o tenha sido. Tudo que, em geral, se sabe sobre as forças de vínculos é que elas têm valores, quaisquer que sejam, necessários para manter os vínculos. Após obter a solução das equações (27) e determinar  $q_1(t), \dots, q_f(t)$ , pode-se, então, caso se deseje, substituir essas funções nas equações (28) e calcular as forças de vínculo. Este aspecto pode ter considerável interesse para os engenheiros que querem verificar se os vínculos são suficientemente fortes para resistir a essas forças. As equações de Lagrange reduzem o problema de determinação do movimento de um sistema holônomo qualquer, com  $f$  graus de liberdade, a um outro de resolução de  $f$  equações diferenciais de segunda ordem (27). Quando se fala de coordenadas generalizadas, as coordenadas de vínculo  $a_1, \dots, a_c$  podem ou não ser incluídas, de acordo com a conveniência.

Se as forças  $Q_1, \dots, Q_f$  forem obtidas a partir de uma função energia potencial, então é possível definir uma função lagrangiana  $L(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$  que pode, em alguns casos, depender de  $t$ , e que também pode depender das constantes  $a_1, \dots, a_c$ . Então, as primeiras  $f$  equações de Lagrange (27) poderão ser escritas na seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, f \quad (29)$$

Um outro modo de analisar um sistema através das equações de Lagrange, que é usado na prática será descrito a seguir.

Considere um sistema sujeito tanto a forças conservativas,  $Q_k^p$  ( $p$  de potencial) como a não conservativas,  $Q_k$ . Escrevemos, então, as equações de Lagrange da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k + Q_k^p \quad (30)$$

Como  $Q_k^p$  é uma força conservativa, ela deriva de uma energia potencial, ou seja

$$Q_k^p = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (31)$$

Sabemos que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \quad (32)$$

pois  $V$  não varia com a velocidade  $\dot{q}_k$ . Portanto, podemos subtrair (32) no lado esquerdo da equação (30) que não alterará o resultado. Além disso, substituindo (31) em (30), temos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_k} = Q_k$$

Desta forma, temos o seguinte resultado:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k \quad (33)$$

Lembre-se que, nesse caso, as forças conservativas já estão presentes dentro da fórmula de  $L$ , portanto  $Q_k$  refere-se somente às forças não conservativas.

### 3.1 Exemplo de Sistema Sujeito a Vínculos

Como exemplo de um sistema sujeito a vínculo, peguemos o caso de um pêndulo, como ilustrado na Fig. 1. Sabemos que a energia cinética em coordenadas cartesianas é dada por

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Utilizando o sistema de coordenadas com origem localizada na união da corda com a parede, como ilustra a figura, temos:

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta & \dot{x} &= l \cos \theta \dot{\theta} & \dot{x}^2 &= l^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 \\ y &= l \cos \theta & \dot{y} &= -l \sin \theta \dot{\theta} & \dot{y}^2 &= l^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$



$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2 \dot{\theta}^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

Portanto, conseguimos achar o valor de  $T$  em coordenadas polares. Estamos utilizando coordenadas polares porque o vínculo (corda) faz com que uma das coordenadas,  $r = l$ , permaneça constante nessa direção, podendo ser considerada como coordenada de vínculo. Com isso, podemos utilizar a equação (27), onde haverá somente uma coordenada generalizada  $q_k = \theta$ .

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta$$

Para calcular  $Q_\theta$ , basta calcular o trabalho na direção de  $\theta$ , ou seja,

$$\delta W_\theta = -Pl \sin \theta \delta \theta = -mgl \sin \theta \delta \theta$$

Portanto, por comparação com a equação (17), sabemos que

$$Q_\theta = -mgl \sin \theta$$

Com isso,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \quad \Rightarrow \quad m l^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Ou seja, encontramos a equação do movimento na direção de  $\theta$ . Note que não houve a necessidade de considerar a força na direção radial,  $\tau$ , porque ela não realiza trabalho, a menos que o vínculo seja violado.

Existe uma forma ainda mais simples de calcular a equação de movimento do sistema. Note que o peso  $P$  é a única força que realiza trabalho no sistema (a tração  $\tau$  é sempre perpendicular ao movimento) e mais:  $P$  é uma força conservativa. Portanto, podemos utilizar a função lagrangiana  $L = T - V$ . Assim, a equação (29) fica:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Considerando a linha de referência como indicada na Fig. 1, temos que

$$V = -mgl \cos \theta$$

O que implica que

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Que é o mesmo resultado encontrado anteriormente.

Para encontrarmos a força de vínculo  $\tau$ , basta utilizar a equação (28), como foi comentado. Nesse caso, a equação ficaria

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{l}} - \frac{\partial T}{\partial l} = Q_l$$

Como temos a parcela  $\partial T / \partial \dot{l}$  na equação acima, devemos considerar, desde o começo da análise que  $l$  pode variar (note que, para o caso anterior, consideramos que  $l$  era fixo, porque era uma das coordenadas de vínculo). Nesse caso

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta & \dot{x} &= l \cos \theta \dot{\theta} + \dot{l} \sin \theta \\ y &= l \cos \theta & \dot{y} &= -l \sin \theta \dot{\theta} + \dot{l} \cos \theta \end{aligned}$$

Continuando os cálculos como feito anteriormente é fácil verificar que

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{l} + l^2\dot{\theta}^2)$$

Além disso, também sabemos que o trabalho virtual na direção de  $l$  é dado por

$$\delta W_l = -\tau \delta l + mg \cos \theta \delta l$$

Portanto,

$$Q_l = mg \cos \theta - \tau$$

Então

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{l}} - \frac{\partial T}{\partial l} = Q_l \quad \Rightarrow \quad -ml\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - \tau \quad \Rightarrow \quad \tau = m(g \cos \theta + l\dot{\theta}^2)$$

## 4 Plano de Fase

Muito poucas equações diferenciais ordinárias possuem solução explícitas expressa em termos finitos, pois o repertório de equações padrões em que as soluções podem ser expressas (polinomiais, exponenciais, senoidais, e assim por diante) é muito limitado para acomodar a ampla variedade de equações diferenciais encontradas na prática. Além disso, quando conseguimos encontrar a solução, muitas vezes é complicado fazer alguma interpretação física com ela. Portanto, torna-se interessante fazer uma análise qualitativa da equação para que, assim, possamos deduzir algumas características importantes sem, no entanto, resolvê-la. Nesse capítulo, introduzimos uma maneira geométrica, chamada de **plano de fase**, de obter características como equilíbrio, periodicidade, crescimento ilimitado, estabilidade etc, de uma equação diferencial.

### 4.1 Diagrama de fase para a equação do pêndulo

O pêndulo clássico constitui uma boa maneira para que possamos analisar, através do plano de fase, algumas das principais características da solução de uma equação diferencial particular.

Considere o sistema pendular da Fig. 3. Com uma análise rápida, através das equações de Lagrange, conseguimos chegar à equação de movimento do problema, como descrito abaixo:

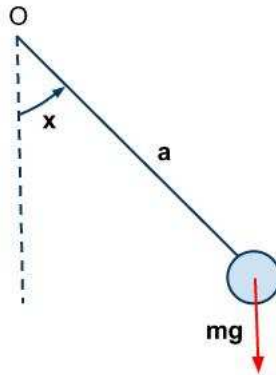


Figura 3: Pêndulo Simples

Sabemos que  $T = \frac{1}{2}ma^2\dot{x}^2$  (atenção para o fato de  $\theta$  e  $l$  serem, neste caso, respectivamente igual a  $x$  e  $a$ ). Além disso, é fácil ver que  $V = mg(a \cos x)$ . Como o sistema é conservativo, podemos utilizar a lagrangiana  $L = T - V$  para resolver o problema. Portanto, basta aplicar a equação de Lagrange a seguir para chegar na equação de movimento para o pêndulo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0 \quad (34)$$

onde  $\omega^2 = g/a$ .

Podemos converter a equação (34) em outra que relaciona  $x$  com  $\dot{x}$  através do seguinte procedimento:

Multiplicando a equação de movimento acima por  $m$ , temos que

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 \sin x \quad \Rightarrow \quad m \frac{dv}{dt} = -m\omega^2 \sin x$$

onde  $v = \dot{x}$ . Multiplicando ambos os lados da equação por  $v$ , temos

$$mv \frac{dv}{dt} = -m\omega^2 v \sin x \quad (35)$$

Agora note que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (v^2) = \frac{1}{2} m \frac{d}{dv} (v^2) \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{dt} \quad (36)$$

Substituindo a equação anterior na equação (35), temos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) = -m\omega^2 v \sin x \quad (37)$$

Note novamente que

$$\frac{d}{dt} (-\cos x) = -\frac{d}{dx} \cos x \frac{dx}{dt} = v \sin x$$

Substituindo a expressão anterior na equação (37), temos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) = -m\omega^2 \frac{d}{dt} (-\cos x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 - m\omega^2 \cos x \right) = 0$$

Com isso, chegamos na seguinte expressão

$$\frac{1}{2} mv^2 - m\omega^2 \cos x = E$$

É interessante ressaltar que esta é a equação de *conservação de energia*, uma vez, se a multiplicarmos por  $a^2$ , chegamos na equação na forma

$$\frac{1}{2}ma^2v^2 - mga \cos x = E_{mec} \quad \Rightarrow \quad \text{Energia cinética de P} + \text{Energia potencial de P} = E_{mec}$$

Simplificando a equação anterior, chegamos na relação pretendida:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \omega^2 \cos x = C$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária. Isolando  $\dot{x}$ , temos

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2} (C + \omega^2 \cos x)^{1/2} \quad (38)$$

Essa é a equação diferencial de primeira ordem para  $x(t)$ . É com esta equação que iremos trabalhar para revelar as principais características do sistema analisado. Para tanto, tomemos uma nova variável  $y$  definida por

$$\dot{x} = y$$

Com isso, a equação (38) se torna

$$y = \pm\sqrt{2}(C + \omega^2 \cos x)^{1/2} \quad (39)$$

O plano composto pela abscissa  $x$  e a ordenada  $y$  é chamado de **plano de fase**. Plotando o gráfico de  $y$  contra  $x$  usando diferentes valores de  $C$  obtemos o chamado **diagrama de fase**, ilustrado na Fig. 4. Cada uma das curvas presentes no diagrama são chamadas de **caminhos de fase**. Vários tipos de caminhos de fase podem ser identificados em termos de  $C$ . Nos caminhos que passam por  $(-\pi, 0)$  e  $(\pi, 0)$ ,  $C = \omega^2$ . Nos caminhos contidos no interior destes últimos,  $\omega^2 > C > -\omega^2$ . Já nos caminhos do lado de fora,  $C > \omega^2$ . A equação (39) implica uma periodicidade de  $2\pi$  em  $x$ , como mostrado na Fig. 4.

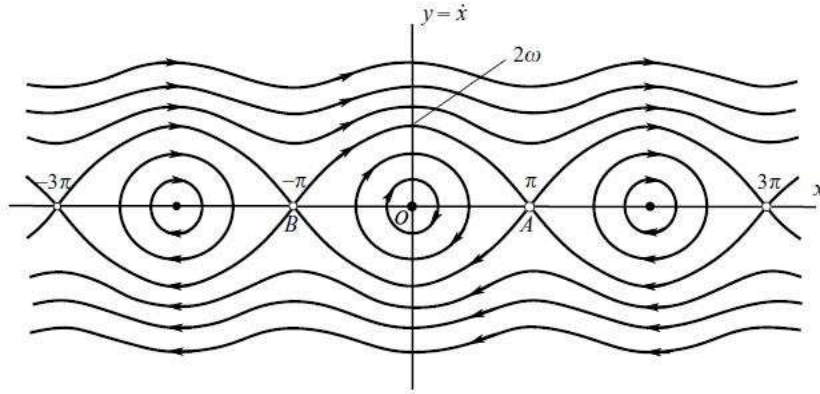


Figura 4: Diagrama de fase para o pêndulo simples

Um par de valores  $(x, y)$ , ou  $(x, \dot{x})$ , representado por um ponto no gráfico é chamado de **estado do sistema**, que é a representação do sistema em um dado momento, ou seja, a posição e a velocidade deste em um instante específico. Nota-se também que um estado  $(x, \dot{x})$  representa uma condição inicial para a equação diferencial (34). Portanto, um dado estado determina todas as posições subsequentes do sistema, que são obtidas seguindo-se o caminho de fase que passe pelo ponto  $P:(x, y)$ , onde  $(x, y)$  é o estado inicial.

As setas na Fig. 4 indicam a direção que devemos seguir no caminho de fase conforme o tempo passa. Isso é determinado notando-se que, se  $y > 0$ , ou seja,  $\dot{x} > 0$ , então o valor de  $x$  deve aumentar com o tempo. Por isso que as direções das setas apontam sempre da esquerda para direita na metade superior do plano e da direita para a esquerda na metade inferior.

Apesar do tempo não aparecer explicitamente no plano de fase, podemos deduzir várias características de movimento do pêndulo. O mais óbvio é onde o pêndulo permanece em repouso, quando  $x = 0$  e  $\dot{x} = 0$ , que é a origem da Fig. 4. A correspondente função do tempo  $x(t) = 0$  é uma solução constante perfeitamente legítima da equação (34). Nesse caso, plano de fase corresponde a um simples ponto.

Se em vez de um fio tivéssemos um corpo preso ao suporte por uma haste leve, teríamos uma segunda posição de equilíbrio, onde o pêndulo está balanceado na vertical. Esse é o caso em que  $x = \pi$ ,  $\dot{x} = 0$ , que consiste em uma outra solução constante do problema, representada pelo ponto  $A$  no diagrama de fase. A mesma situação física é representada pelo ponto  $B$ , onde  $x = -\pi$  e  $\dot{x} = 0$ . De fato, o estado  $x = n\pi$ ,  $\dot{x} = 0$ , onde  $n$  é um inteiro, corresponde fisicamente a um desses dois pontos de equilíbrio descritos. Na verdade, descrevemos somente uma parte do diagrama de fase, em que o padrão repete-se periodicamente. Não há, neste caso, uma relação de um pra um entre o estado físico do pêndulo e os pontos no diagrama de fase: vários pontos podem representar o mesmo estado físico.

Uma vez que os pontos  $O$ ,  $A$ ,  $B$  representam estados de equilíbrio físico do problema, eles são chamados de **pontos de equilíbrio** no diagrama de fase.

Agora consideremos os caminhos circulares próximos à origem na Fig. 4. Eles indicam **movimentos periódicos**, em que o pêndulo balança para frente e para trás. A **amplitude** de oscilação é o máximo valor de  $x$  encontrado na curva.

As linhas em forma de onda mais em cima e mais abaixo da Fig. 4, em que  $\dot{x}$  possui um sinal constante e  $x$  aumenta ou decresce continuamente, corresponde a **movimentos rotacionais** do pêndulo, em que ele gira continuamente em volta do ponto  $O$  da Fig. (34). As flutuações em  $\dot{x}$  são devidas à influência gravitacional, e os caminhos de fase em que  $\dot{x}$  é muito grande são praticamente linhas retas paralelas ao eixo  $x$ , em que as flutuações são quase imperceptíveis.

Podemos discutir, também, a **estabilidade** dos dois pontos típicos de equilíbrio,  $O$  e  $A$ . Se o estado inicial corresponde a um deslocamento próximo do ponto  $O$ , o caminho de fase será algum daqueles próximos à origem da Fig. 4. Portanto, o pêndulo oscila com pequenas amplitudes em volta de  $O$ . Nesse caso, chamamos o ponto de equilíbrio  $O$  de **estável**. Se o estado inicial corresponde a um deslocamento próximo do ponto  $A$  (posição de equilíbrio vertical da haste), o caminho de fase representará uma situação em que o pêndulo será carregado para longe de seu ponto de equilíbrio caso sofra alguma pequena variação de posição, podendo cair tanto em um movimento periódico de grande amplitude quanto em um movimento rotacional. Nesse caso, o ponto de equilíbrio é chamado de **instável**.

## 4.2 Sistemas Conservativos

Considere o conjunto de equações da forma

$$\ddot{x} = f(x) \tag{40}$$

Substitua  $\dot{x}$  por uma nova variável  $y$ , como feito anteriormente. Nesse caso, temos

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x)$$

Quando  $f(x)$  é não-linear, a análise da solução da equação (40) pode ser feita com a ajuda de um sistema mecânico cuja equação é da mesma forma desta. Por isso, considere o sistema da Fig. 5, onde uma partícula  $P$ , de massa unitária, pode se mover ao longo do eixo  $Ox$  impulsionada por uma força  $f(x)$ , que depende somente do deslocamento ao longo da coordenada  $x$  e é positiva quando age na direção positiva de  $x$ . Com isso, a equação de movimento de  $P$  toma a forma da Eq. (40). Às vezes, por intuição física, conseguimos prever qual é o comportamento mais provável da partícula para uma função força específica. Por exemplo, suponha que

$$\ddot{x} = f(x) = 1 + x^2$$

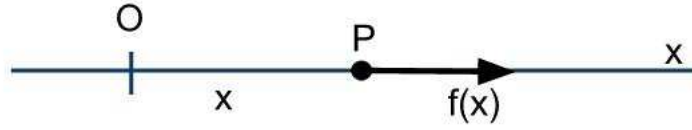


Figura 5: Partícula unitária com a ação da força  $f(x)$

Nesse caso,  $f(x) > 0$  sempre. Isso implica que  $f$  age da esquerda para direita na Fig. 5. Não há ponto de equilíbrio no sistema e, com isso, podemos esperar que, independente da posição inicial,  $P$  será transportado para longe até o infinito e não haverá comportamento oscilatório.

A seguir, suponha que

$$f(x) = -\lambda x, \quad \lambda > 0$$

onde  $\lambda$  é uma constante. A equação de movimento é

$$\ddot{x} = -\lambda x$$

Essa é a força em uma partícula unitária exercida por uma mola linear de rigidez  $\lambda$ , pegando a origem no ponto onde a mola tem seu comprimento natural  $l$  (Fig. 6). Nós sabemos por experiência que tal mola causa oscilação. A causa da oscilação é que  $f(x)$  é uma força **restauradora**, significando que sua direção é sempre tal que tente levar  $P$  em direção à origem.

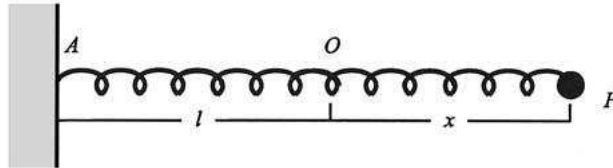


Figura 6: Partícula unitária  $P$  vinculada a uma mola de comprimento natural  $l = AO$ . O deslocamento de  $P$  em relação a  $O$  é  $x$

Agora considere uma mola tendo uma relação não-linear entre a sua tensão e extensão:

$$\text{tension} = -f(x)$$

onde  $f(x)$  tem a propriedade restauradora, ou seja



$$\begin{aligned}
f(x) &> 0 && \text{para } x < 0 \\
f(0) &= 0 \\
f(x) &< 0 && \text{para } x > 0
\end{aligned} \tag{41}$$

Nós deveríamos esperar comportamento oscilatório também para esse caso. A equação

$$\ddot{x} = -x^3$$

é desse tipo, e o plano de fase é mostrado no diagrama de baixo da Fig. 7 (o gráfico de cima será explica mais adiante). Porém, a figura nos diz muito mais do que isso: a oscilação não consiste somente de um movimento de vai-e-vem, mas é estritamente regular e periódico. Como próximo passo, faremos uma análise mais detalhada do resultado obtido.

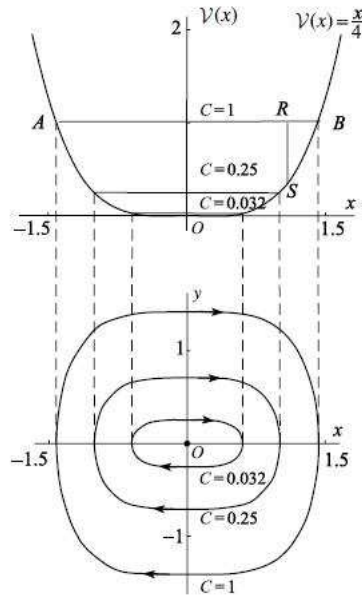


Figura 7: Diagrama de fase para  $\ddot{x} = -x^3$

Voltando para o caso geral, assuma que  $x(t)$  representa uma solução particular da equação (40). Quando a partícula  $P$  na Fig. 5 se move de uma posição  $x$  até uma outra próxima,  $x + \delta x$ , o trabalho realizado em  $P$  pela  $f(x)$  é dado por

$$\delta W = f(x)\delta x$$

Esse trabalho vai incrementar a energia cinética na partícula (unitária), onde  $T = \frac{1}{2}\dot{x}^2$ :

$$\delta T = \delta W = f(x)\delta x$$

Divida por  $\delta x$  e faça  $\delta x \rightarrow 0$ . Obtemos

$$\frac{dT}{dx} = f(x) \quad (42)$$

Agora defina uma função  $V(x)$  pela relação

$$\frac{dV}{dx} = -f(x) \quad (43)$$

onde  $V(x)$  é chamada de **função potencial** para  $f(x)$ . Particularmente,

$$V(x) = - \int f(x)dx$$

onde  $\int f(x)dx$  vale para qualquer integral indefinida particular de  $f(x)$ . Integral indefinida envolve uma constante arbitrária; qualquer constante pode ser escolhida aqui por conveniência, mas é necessário mantê-la durante todo o problema para que, assim,  $V(x)$  tenha um sentido único e definido. Se especificarmos um sistema que irá auto-gerar uma força  $f(x)$ , como a mola da Fig 6, ou o campo gravitacional da terra, então  $V(x)$  é a energia potencial física armazenada no sistema, em qualquer instante, mais uma constante. De (42) e (43) obtemos

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0 \quad (44)$$

Portanto, em um movimento em particular, temos

$$T + V = \text{constante} \quad (45)$$

ou, explicitamente,

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \int f(x)dx = C \quad (46)$$

onde  $C$  é um parâmetro que depende de um movimento particular e de uma função potencial que foi escolhida. Conforme cobrimos todos os valores de  $C$  consistentes com cada valor de  $x$ , cobrimos todos os possíveis movimentos.

Tendo em vista a equação (45), os sistemas governados pela equação  $\ddot{x} = f(x)$  são chamados de **sistemas conservativos**. Da equação (46), temos

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2}(C - V(x))^{1/2} \quad (47)$$

As equações equivalente no plano de fase são

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x)$$

Com isso, (47) se torna

$$y = \pm\sqrt{2}(C - V(x))^{1/2} \quad (48)$$

que é a equação dos caminhos de fase.

Como exemplo da aplicação de  $V(x)$  para construir o diagrama de fase, vamos mostrar como ficariam as soluções da equação

$$\ddot{x} + x^3 = 0$$

Nesse caso,  $f(x) = -x^3$ , que é uma força restauradora, de acordo com o que foi discutido até agora. Portanto, esperamos oscilações. Façamos:

$$V(x) = -\int f(x)dx = \frac{1}{4}x^4,$$

em que assumimos que a constante arbitrária é zero, por simplicidade. Da equação (48), os caminhos de fase são dados por

$$y = \pm\sqrt{2}(C - V(x))^{1/2} = y = \pm\sqrt{2}(C - \frac{1}{4}x^4)^{1/2} \quad (49)$$

A figura 7 ilustra como a estrutura do diagrama de fase é construída a partir da equação (49). Para que obtenhamos qualquer valor real para  $y$ , devemos ter  $C \geq 0$ . No diagrama superior, é mostrado o gráfico de  $V(x) = \frac{1}{4}x^4$  junto com três linhas horizontais para valores representativos de  $C > 0$ . A distância RS é igual a  $C - \frac{1}{4}x^4$  para  $C = 1$  e uma valor típico de  $x$ . A parte relevante do gráfico, para o qual  $y$  na equação (49) adquire valores reais é a parte abaixo de AB. Então, para um ponto em específico do segmento,  $y = \pm\sqrt{2}(RS)^{1/2}$ . Esses dois valores são colocados no diagrama inferior da Fig. 3. O processo completo para  $C = 1$  produz uma curva fechada no diagrama de fase, representando um movimento periódico. Para valores maiores ou menores de  $C$ , são produzidas ovais maiores ou menores, respectivamente. Quando  $C = 0$ , há somente um ponto, que é o ponto de equilíbrio estável localizado na origem.

Pontos de equilíbrio do sistema  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = f(x)$  ocorrem em pontos onde  $y = 0$  e  $f(x) = 0$  ou, alternativamente,

$$y = 0, \quad \frac{dV}{dx} = 0,$$

da equação (43). Por isso, os valores de  $x$  são tais que  $V(x)$  assume valores mínimos, máximos ou de pontos de inflexão, e o tipo de ponto de equilíbrio é diferente para cada um dos casos. A Figura 8 mostra como a natureza desses pontos pode ser estabelecida através do mesmo método utilizado no exemplo anterior:

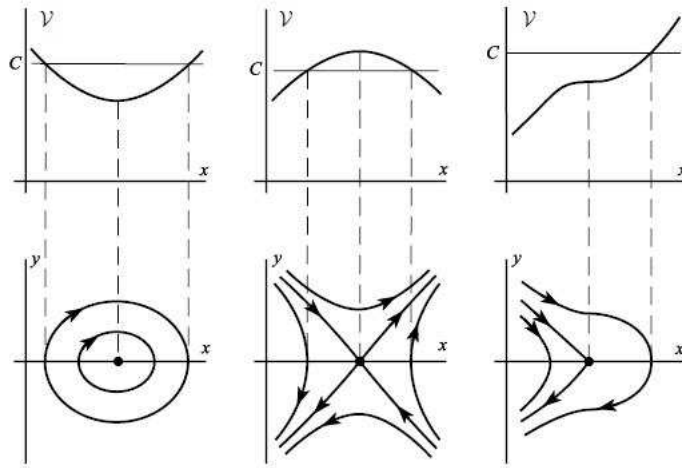


Figura 8: Diagramas de fase típicos advindos dos pontos estacionários da energia pontencial

- Um **ponto de mínimo** em  $V(x)$  produz um **centro** (ponto de equilíbrio estável);
- Um **ponto de máximo** em  $V(x)$  produz um **ponto de sela** (ponto de equilíbrio instável);
- Um **ponto de inflexão** em  $V(x)$  produz um **vértice**.

Considere esses resultados em termo da força  $f(x)$  no modelo mecânico. Suponha que  $f(x_c) = 0$  tal que  $x = x_c$ ,  $y = 0$  é um ponto de equilíbrio. Se  $f(x)$  muda de sinal de positivo para negativo conforme  $x$  aumenta passando por  $x_c$ , então  $f(x)$  é uma força restauradora (equação (41)). Como  $dV/dx = -f(x)$ , esse caso também é a condição para que  $V(x)$  seja mínimo. Por isso, uma força restauradora sempre gera um centro.

Se  $f(x)$  muda de negativo para positivo conforme  $x$  aumenta passando por  $x_c$ , a partícula é repelida do ponto de equilíbrio. Portanto, esperamos que seja um equilíbrio instável, em termos gerais. Já que  $V(x)$  tem um valor máximo em  $x_c$  nesse caso, o ponto  $(x_c, 0)$  é um ponto de sela. Portanto, a expectativa se confirma.

## 5 Análise de um sistema pendular com excitação paramétrica no suporte

Considere o sistema da Fig. 9 abaixo

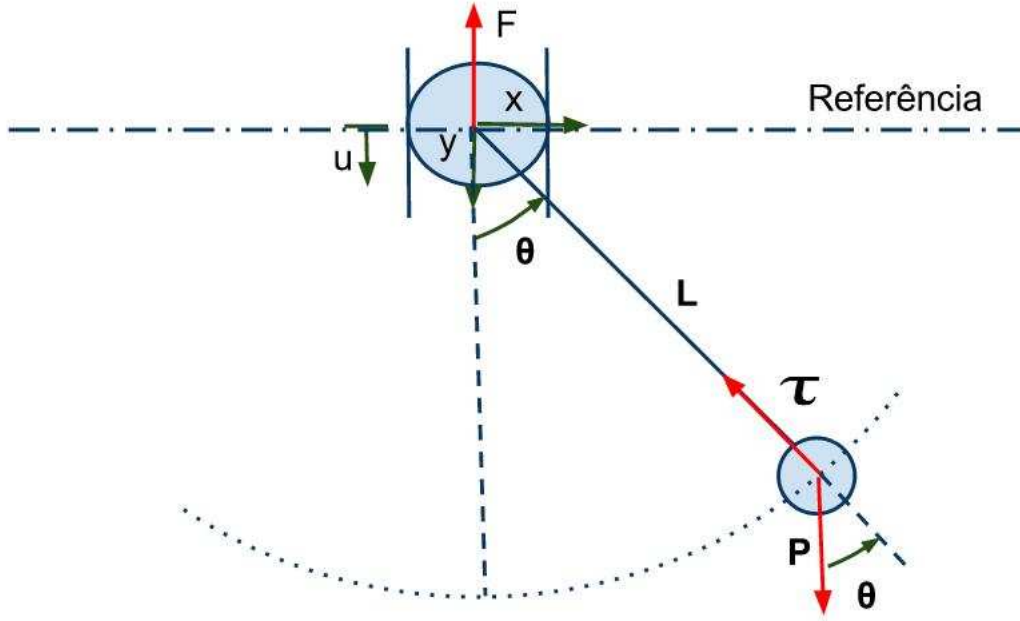


Figura 9: Sistema pendular com excitação paramétrica no suporte

### 5.1 Equações de movimento

Calcularemos as equações de movimento utilizando o método de Lagrange para este caso. Olhando para o sistema, verificamos que basta conhecer os valores de  $\theta$  e  $u$  para saber qual a configuração do sistema em qualquer instante. Partiremos das coordenadas cartesianas para chegar na equação da energia cinética em termos de  $\theta$  e  $u$ . Feito isso, calcularemos a força generalizada relacionada a cada uma das coordenadas e, com esses dados obtidos, basta aplicar na equação de Lagrange, como se segue:

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta & \dot{x} &= l \dot{\theta} \cos \theta \\ y &= l \cos \theta + u & \dot{y} &= -l \dot{\theta} \sin \theta + \dot{u} \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}^2 - 2l \dot{\theta} \dot{u} \sin \theta + \dot{u}^2)$$

Cálculo da equação de movimento na direção de  $\theta$ :

Através do conceito de trabalho virtual, calcularemos  $Q_\theta$ . Mantendo-se  $u$  constante e variando  $\theta$  (observe que  $F$  não varia com  $\theta$ ), temos:

$$\delta W_\theta = -P \sin \theta (l \delta \theta) = -mg \sin \theta (l \delta \theta) \quad \Rightarrow \quad Q_\theta = -mgl \sin \theta$$

Aplicando os resultados obtidos na equação de Lagrange para a coordenada  $q_k = \theta$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{\sin \theta}{l} (\ddot{u} - g)$$

Cálculo da equação de movimento na direção de  $u$ :

Através do conceito de trabalho virtual, calcularemos  $Q_u$ . Mantendo-se  $\theta$  constante e variando  $u$ , temos:

$$\delta W_\theta = -F \delta u + P \delta u = (-F + mg) \delta u \quad \Rightarrow \quad Q_u = mg - F$$

Aplicando os resultados obtidos na equação de Lagrange para a coordenada  $q_k = u$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial T}{\partial u} = Q_u \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} = g - \frac{F}{m} + l(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta)$$

Com isso, encontramos as equações de movimento para as coordenadas  $\theta$  e  $u$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{\sin \theta}{l} (\ddot{u} - g) \\ \ddot{u} = g - \frac{F}{m} + l(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) \end{cases}$$

Podemos resolver o sistema de uma outra maneira também usada na prática da engenharia: utilizando a Eq. (33). Nesse caso, a equação de Lagrange será

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta$$

Porém, devemos prestar atenção ao fato de que  $Q_\theta = 0$ , uma vez que a força generalizada na Eq. (33) é devido somente às forças não conservativas atuando na direção de  $q_k$  que, neste caso, é  $\theta$ . Adotando a referência como indicado na Fig 9

$$V = -P(l \cos \theta + u) = -mg(l \cos \theta + u) \quad \Rightarrow \quad L = T - V = \frac{1}{2}m(l^2 \dot{\theta}^2 - 2l\dot{\theta}\dot{u} \sin \theta + \dot{u}^2) + mg(l \cos \theta + u)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{\sin \theta}{l} (\ddot{u} - g)$$

Aplicando o mesmo procedimento para a direção  $u$ , temos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial L}{\partial u} = Q_u$$

Porém, neste caso,  $Q_u \neq 0$ , pois existe a força não-conservativa,  $F$ , atuando na direção de  $u$ . Portanto, para encontrar  $Q_u$  utilizamos o procedimento de trabalho virtual para as forças não conservativas ( $W^{nc}$ ), como se segue:

$$\delta W^{nc} = -F \delta u \quad \Rightarrow \quad Q_u = -F$$

Utilizando o valor de  $L$  encontrado anteriormente e o valor de  $Q_u$  acima, temos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial L}{\partial u} = Q_u \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} = g - \frac{F}{m} + l(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta)$$

Portanto, chegamos às mesmas equações de movimento nas direções  $\theta$  e  $u$ .

## 5.2 Resultados das simulações

Para o cálculo de  $\theta(t)$ - $t$  e do diagrama de fase  $(\theta-\dot{\theta})$ , do sistema pendular excitado, fazemos uso da seguinte equação

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin \theta}{l}(\ddot{u} - g)$$

O sistema de unidades utilizado será o S.I. Assumimos os seguintes valores para os parâmetros da equação

$$\begin{aligned} l &= 300mm \\ u(t) &= 0.1 \sin(5t) \\ g &= 9.81m/s^2 \end{aligned}$$

Além disso, assumimos que a haste e o suporte não possuem massa.

Utilizando a ferramenta *MSC. ADAMS/View 2005*, fornecida pela empresa *Multicorpos Engenharia S/S Ltda*, foi simulado o pêndulo excitado descrito acima e coletado os resultados. Os tempos de simulação variam de acordo com a análise feita, sendo que, quando o sistema tende a permanecer no mesmo regime durante todo o tempo, usa-se menos tempo de simulação do que em outros casos. Portanto, as escalas dos gráficos serão diferentes. Com isso, conseguimos plotar os seguintes gráficos:

### 5.2.1 Resultados para o caso em que $\theta_{inicial} = 0^\circ$

Esse é o caso mais simples, em que, começando o pêndulo na vertical para baixo, como mostrado na figura 10, é começada a simulação.

Nessa situação, como não há inclinação da esfera, a haste permanecerá na vertical e, portanto, o valor de  $\theta$  será sempre constante e igual a 0, como mostrado na figura 11a. Além disso, o plano de fase será dado, como no caso de um pêndulo simples, por um ponto, já que  $\theta = 0$  e  $\dot{\theta} = 0$  durante toda a simulação. Para esse caso, o gráfico é ilustrado na figura 11b.

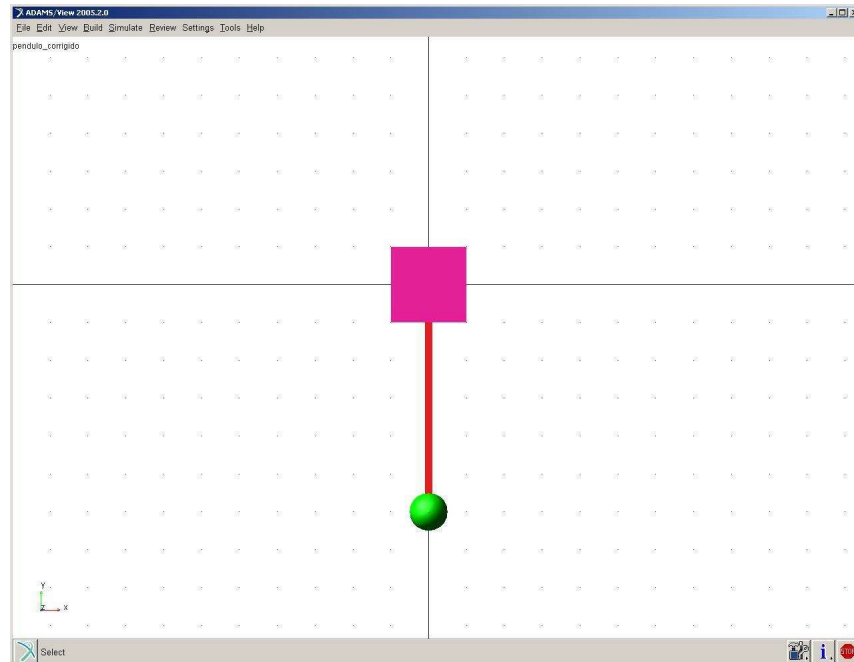


Figura 10: Modelo do pêndulo excitado no *MSC.ADAMS/View 2005*, com  $\theta = 0^\circ$



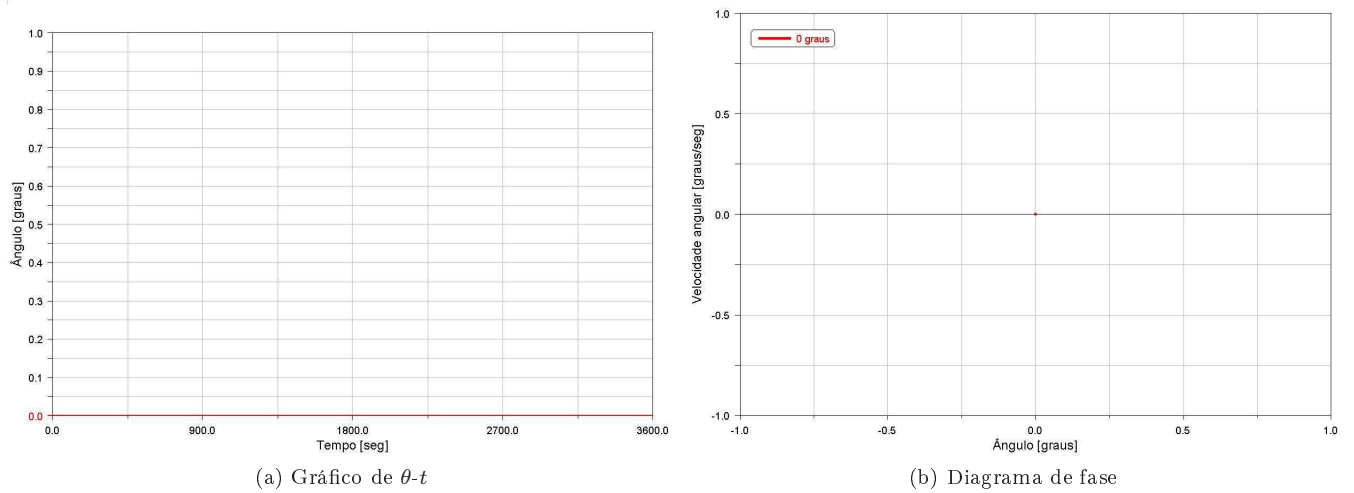


Figura 11: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 0^\circ$

### 5.2.2 Resultados para o caso em que $\theta_{inicial} = 1^\circ, 10^\circ, 25^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ e $180^\circ$

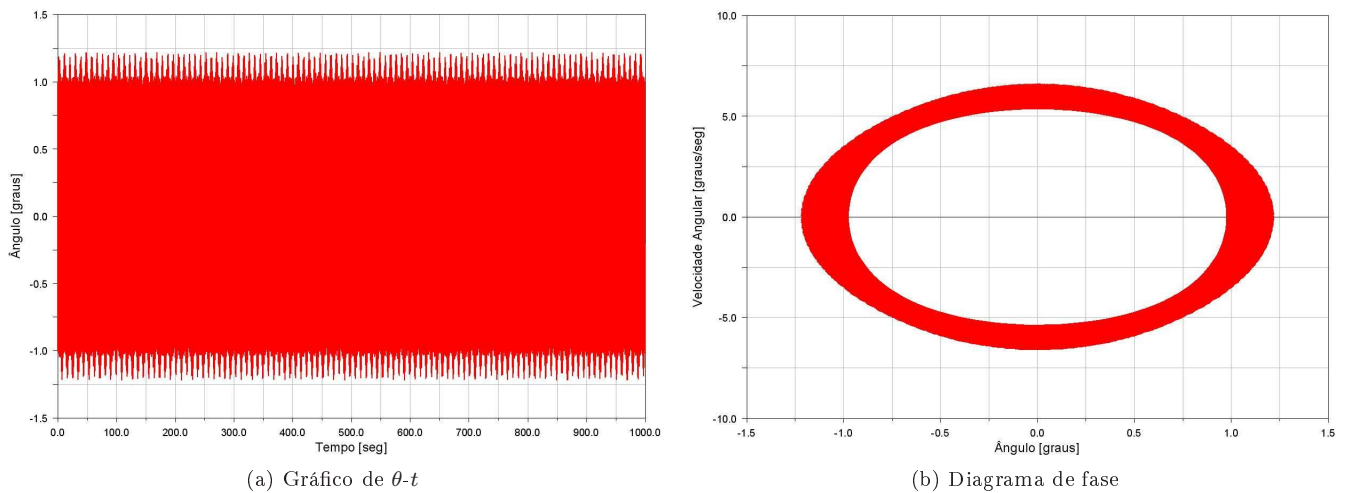
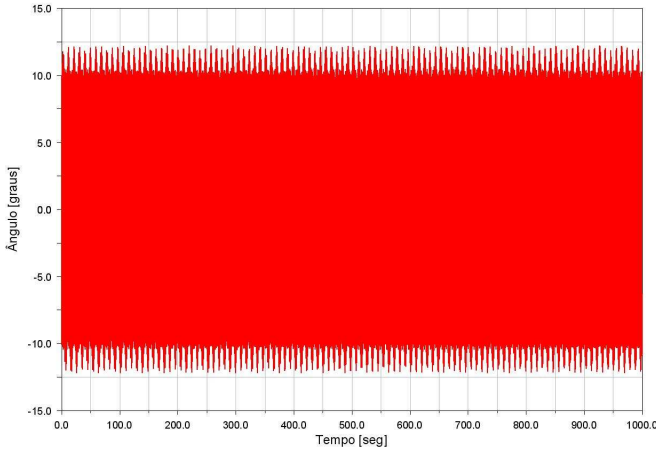
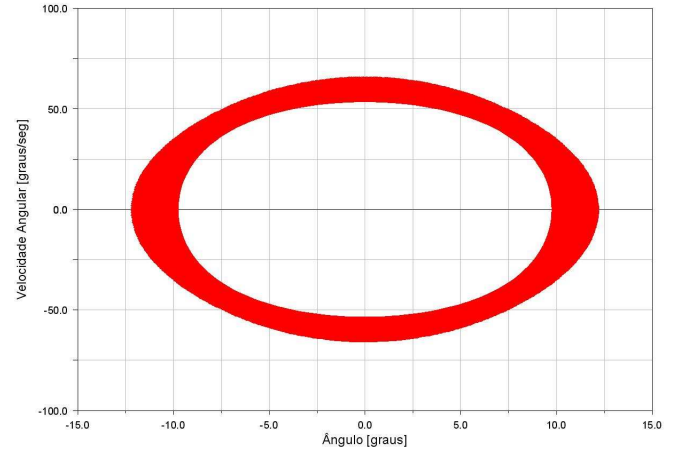


Figura 12: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta_{inicial} = 1^\circ$

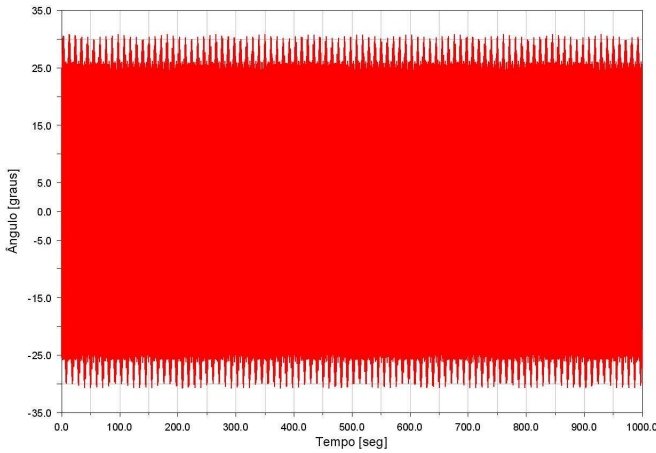


(a) Gráfico de  $\theta$ - $t$

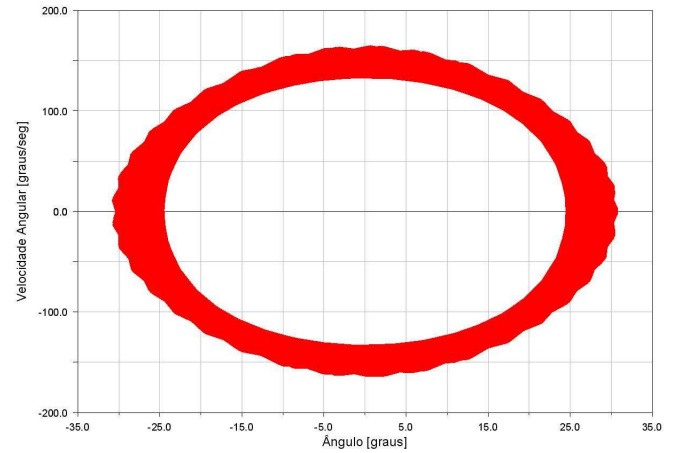


(b) Diagrama de fase

Figura 13: Gráfico de  $\theta$ - $t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta_{inicial} = 10^\circ$

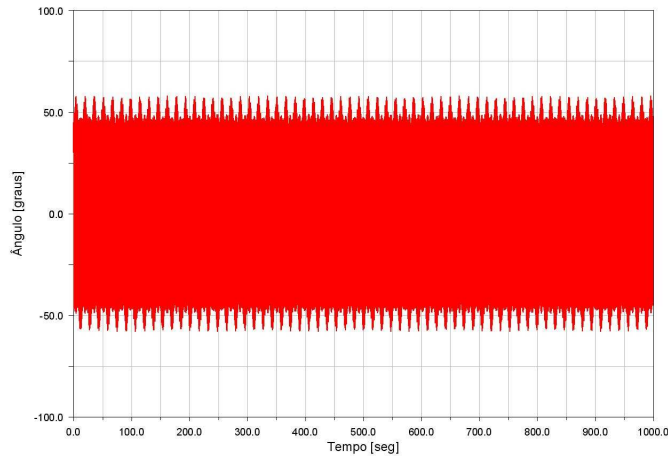


(a) Gráfico de  $\theta$ - $t$

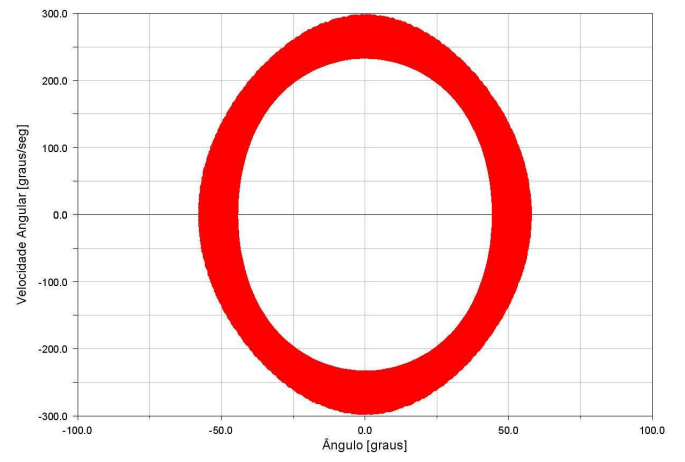


(b) Diagrama de fase

Figura 14: Gráfico de  $\theta$ - $t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta_{inicial} = 25^\circ$

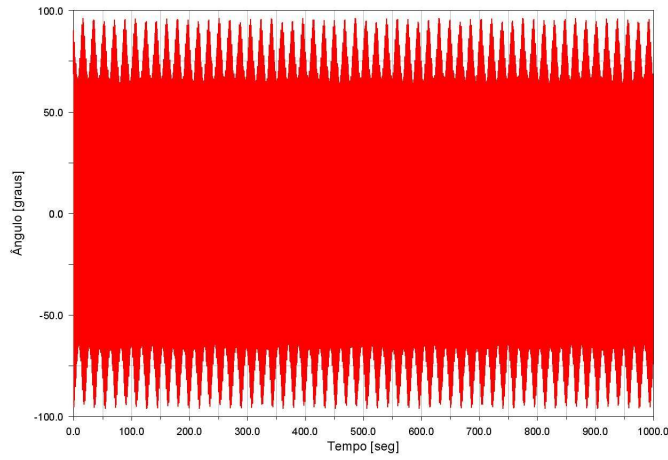


(a) Gráfico de  $\theta$ - $t$

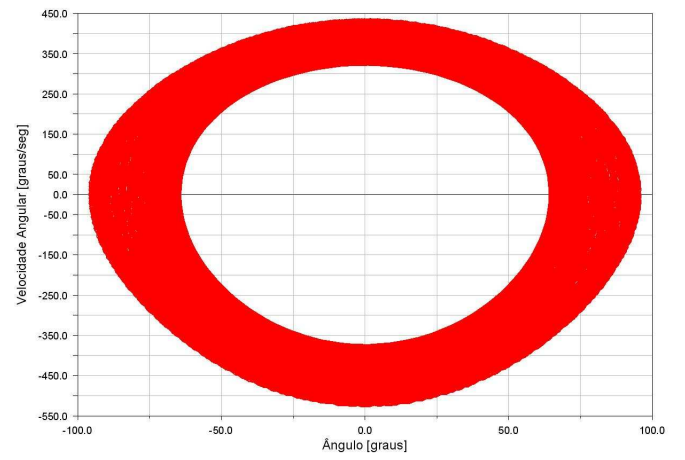


(b) Diagrama de fase

Figura 15: Gráfico de  $\theta$ - $t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta_{inicial} = 45^\circ$

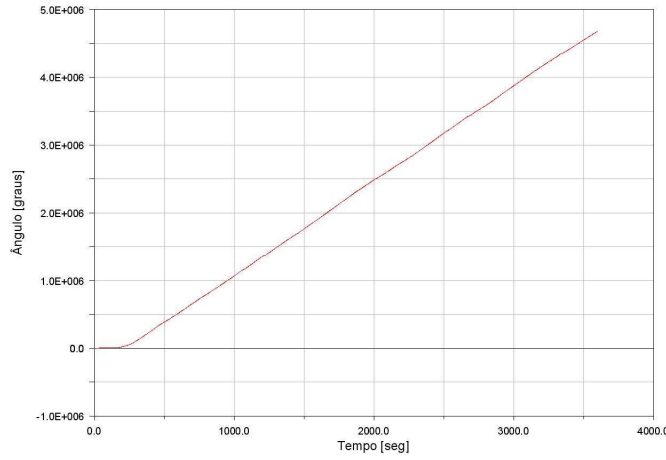


(a) Gráfico de  $\theta$ - $t$

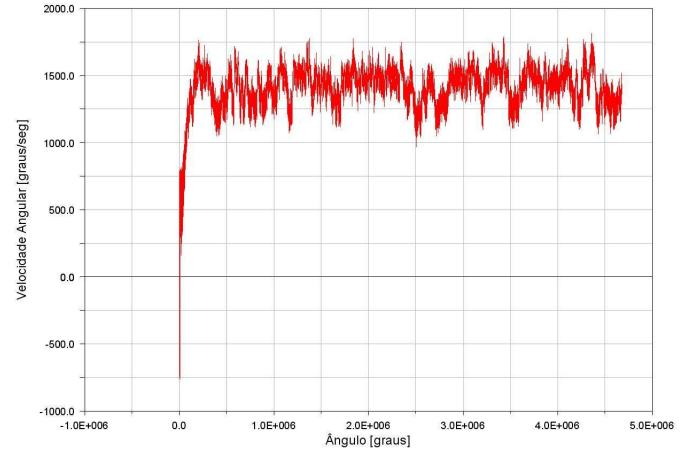


(b) Diagrama de fase

Figura 16: Gráfico de  $\theta$ - $t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta_{inicial} = 90^\circ$

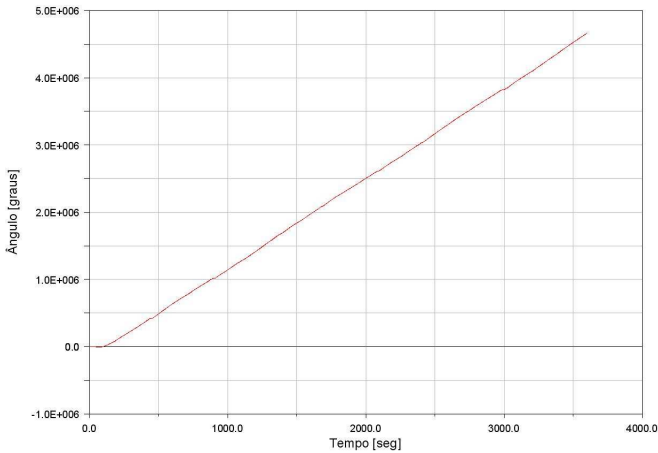


(a) Gráfico de  $\theta$ - $t$

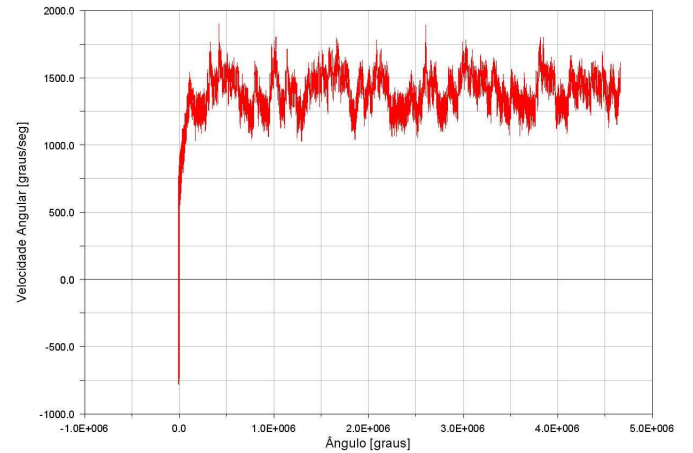


(b) Diagrama de fase

Figura 17: Gráfico de  $\theta$ - $t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta_{inicial} = 135^\circ$



(a) Gráfico de  $\theta$ - $t$



(b) Diagrama de fase

Figura 18: Gráfico de  $\theta$ - $t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta_{inicial} = 180^\circ$

Para valores de  $\theta_{inicial} < 135^\circ$  vemos que o sistema se comporta da mesma maneira que um pêndulo sem excitação no suporte. Ou seja, permanece em movimentos oscilatórios de amplitudes proporcionais às inclinações iniciais. A diferença é que a excitação no suporte faz com que essa amplitude oscile levemente com o tempo em volta do ângulo correspondente, o que pode ser visto através da espessura do diagrama de fase, indicando que o sistema passou por vários tipos de oscilações. Caso tivesse mantido a mesma amplitude durante toda a simulação, o diagrama de fase deveria ser composto somente por uma linha, como é o caso estudado para o pêndulo simples.

Já para a configuração em que  $\theta_{\text{inicial}} = 135^\circ$  e  $180^\circ$  temos um caso um pouco distinto. Nesses dois estados iniciais, o sistema passa por um período de transição, em que oscila e rotaciona aleatoriamente. Transcorrido um tempo, o pêndulo atinge o regime rotacional e o mantém durante toda a simulação restante. Por limitações do software utilizado para realizar a simulação, não foi possível continuar *ad infinitum*, mas, pelos gráficos, sugere-se que o sistema permanecerá assim continuamente.

Tendo em vista que acontece essa mudança de comportamento no sistema, é natural admitirmos que existe um ponto entre  $90^\circ$  e  $135^\circ$  em que a transição ocorre. Com uma análise mais aprofundada do caso, poderíamos tentar encontrar qual seria esse ponto para diferentes tamanhos de haste, massa e excitação no suporte.

## 6 Análise de um sistema pendular amortecido com excitação paramétrica no suporte

Na prática da engenharia, convivemos sempre com problemas que envolvem forças de atrito que tendem a fazer com que o sistema perca energia e páre de funcionar. No caso do pêndulo estudado, se fôssemos simular em um laboratório o seu comportamento real para compará-lo com a teoria realizada até então, teríamos de levar em conta a resistência do ar, que tenderia a fazer com que o sistema perdesse energia, até que parasse de se mover. Por isso, faremos uma análise mais detalhada do sistema já visto acrescido de uma força de arrasto que simulará um amortecimento exercido pela resistência do ar na prática.

Antes de acrescentarmos uma equação que relaciona a força de arrasto do ar com o coeficiente de amortecimento, faremos uma breve introdução à teoria forças dissipativas, explicando de onde surge a força que iremos utilizar.

### 6.1 Forças dissipativas

Antes de acrescentarmos a força de resistência do ar para tornar o problema mais real, vamos fazer uma breve explicação sobre as forças dissipativas em geral.

Forças dissipativas são forças que fazem com que o sistema perca energia quando em movimento. É claro que a energia é conservada em geral, mas parte dela é perdida em forma de calor (movimento interno das peças do sistema) ou radiação.

Esse tipo de força pode ser representada, de forma geral, pela seguinte expressão

$$|\vec{F}| = a(\vec{r}, t) |\vec{v}|^n$$

onde  $\vec{v}$  é a velocidade relativa entre os dois objetos de contato e  $a(\vec{r}, t)$  é uma função de  $\vec{r}$  e  $t$ .

Dependendo do valor de  $n$  podemos ter diferentes tipos de forças dissipativas.

Para o caso em que  $n = 0$  e  $a(\vec{r}, t) = \mu |F_{\text{normal}}|$ , temos o seguinte

$$|\vec{F}| = \mu |F_{\text{normal}}|$$

que é a situação em que a força dissipativa é a força de atrito entre duas superfícies (**fricção**). Nesse caso, a força sempre tenta se opor ao movimento relativo entre as duas superfícies.

Há também o caso em que  $n = 1$  e  $a(\vec{r}, t) = \beta$ , ou seja

$$|\vec{F}| = \beta |\vec{v}|$$

Esse é o caso em que a força dissipativa é uma **força viscosa**. É apropriado para análises em que a velocidade relativa entre a superfície e o fluido no qual o sistema está em contato é pequena.

Para o caso em que a velocidade relativa entre essas duas partes do sistema é grande (Reynolds elevado), é mais apropriada uma análise em que  $n = 2$ .

No problema que estamos analisando, faremos uso da expressão de uma força viscosa para representar a resistência do ar, uma vez que estamos considerando que o sistema está sujeito a uma ventilação natural, fazendo com que a velocidade relativa entre o ar e o sistema seja pequena.

## 6.2 Equações de movimento

Primeiramente, vamos encontrar as equações de movimento para o sistema a ser estudado, que está ilustrado na figura 19.

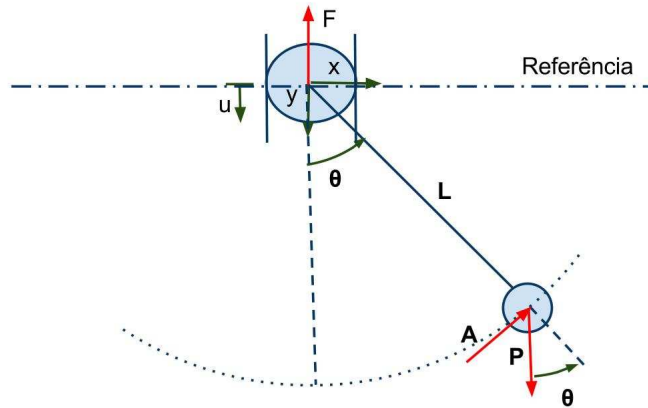


Figura 19: Sistema pendular com excitação paramétrica no suporte

A força representada pela letra **A** é a força de arrasto (força de resistência do ar) para o sistema pendular com excitação paramétrica no suporte. Essa força age sempre no sentido contrário ao movimento na direção

da velocidade. Portanto, será sempre perpendicular à haste. Além disso, assumiremos que a força de resistência do ar será dada por

$$A = \beta \dot{\theta}$$

como comentado anteriormente.

Façamos, primeiramente, a análise teórica para encontrar as equações de movimento do sistema.

Encontramos a energia cinética através do mesmo procedimento utilizado anteriormente, ou seja,

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta & \dot{x} &= l \dot{\theta} \cos \theta \\ y &= l \cos \theta + u & \dot{y} &= -l \dot{\theta} \sin \theta + \dot{u} \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 - 2l\dot{\theta}\dot{u}\sin\theta + \dot{u}^2)$$

Feito isso, calcularemos a força generalizada relacionada a cada uma das coordenadas e, com esses dados obtidos, basta aplicar as equações de Lagrange para chegar ao resultado desejado:

Cálculo da equação de movimento na direção de  $\theta$ :

Através do conceito de trabalho virtual, calcularemos  $Q_\theta$ . Mantendo-se  $u$  constante e variando  $\theta$  (observe que  $F$  não varia com  $\theta$ ), temos:

$$\delta W_\theta = -P \sin \theta (l \delta \theta) - A (l \delta \theta) = -mg \sin \theta (l \delta \theta) - \beta \dot{\theta} (l \delta \theta) \quad \Rightarrow \quad Q_\theta = -mgl \sin \theta - l\beta \dot{\theta}$$

Aplicando os resultados obtidos na equação de Lagrange para a coordenada  $q_k = \theta$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{\sin \theta}{l}(\ddot{u} - g) - \frac{\beta}{ml} \dot{\theta}$$

Uma vez que a força de arrasto é sempre na direção perpendicular ao movimento, não terá influência no cálculo do trabalho virtual realizado pelo sistema na direção  $u$ . Portanto, a equação nessa direção será a mesma que a encontrada para o caso do sistema não amortecido:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial T}{\partial u} = Q_u \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} = g - \frac{F}{m} + l(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta)$$

Com isso, encontramos as equações de movimento para as coordenadas  $\theta$  e  $u$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{\sin \theta}{L}(\ddot{u} - g) - \frac{\beta}{ml}\dot{\theta} \\ \ddot{u} = g - \frac{F}{m} + l(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) \end{cases}$$

### 6.3 Resultados das simulações

Para o cálculo de  $\theta(t)$ - $t$  e do diagrama de fase  $(\theta-\dot{\theta})$ , do sistema pendular excitado, fazemos uso da seguinte equação

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin \theta}{L}(\ddot{u} - g) - \frac{\beta}{ml}\dot{\theta}$$

O sistema de unidades utilizado será o S.I. Assumimos os mesmos valores que anteriormente para os parâmetros da equação, ou seja,

$$\begin{aligned} l &= 300mm \\ u(t) &= 0.1 \sin(5t) \\ g &= 9.81m/s^2 \end{aligned}$$

Além disso, assumiremos vários valores para  $\beta = 0, 1; 0, 01; 0, 001; 0, 0001$  e  $0, 00001 \text{ Nms/rad}$ , testando, assim, a influência do amortecimento no movimento do pêndulo. Os comentários pertinentes vêm abaixo das figuras.



### 6.3.1 Resultados para o caso em que $\theta_{inicial} = 1^\circ$

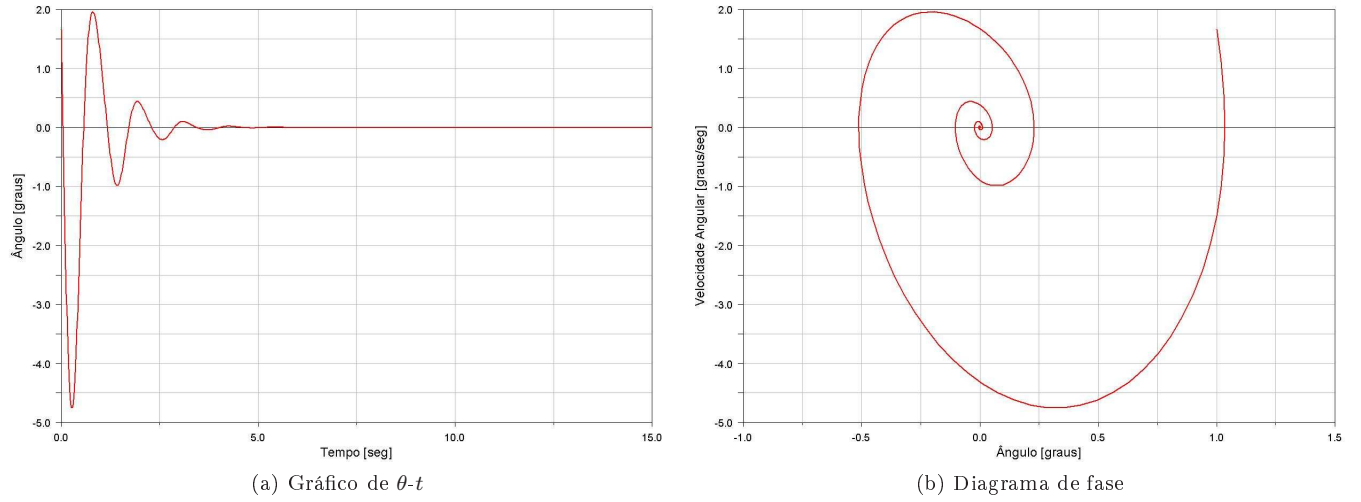


Figura 20: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 1^\circ$  e  $\beta = 0,1 \text{ Nms/rad}$

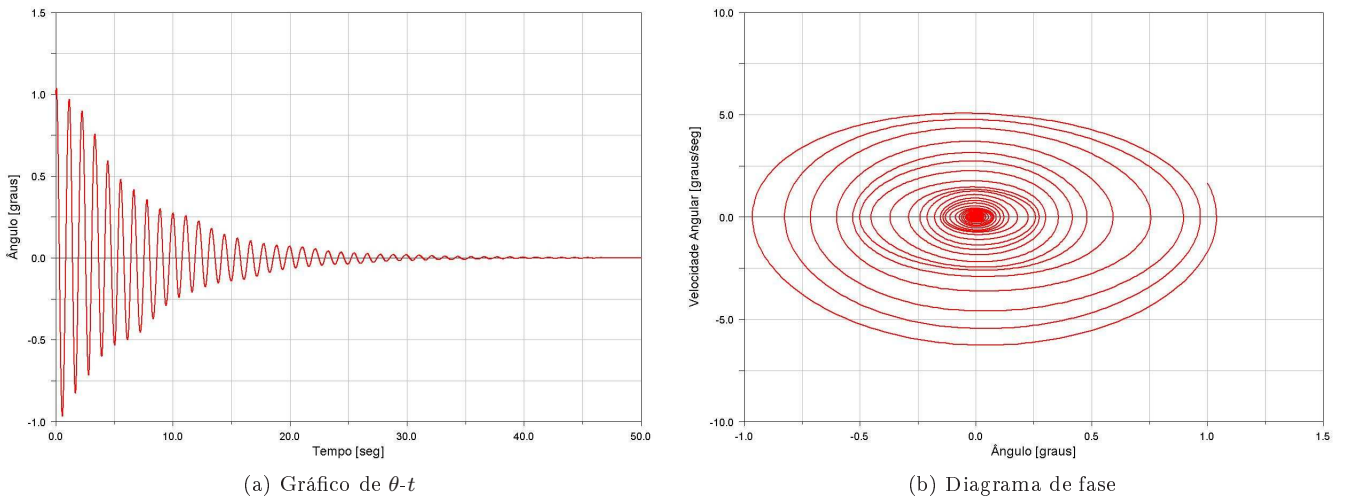
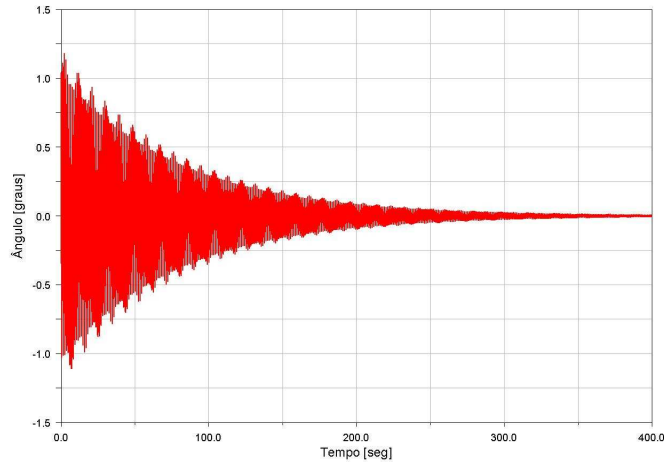
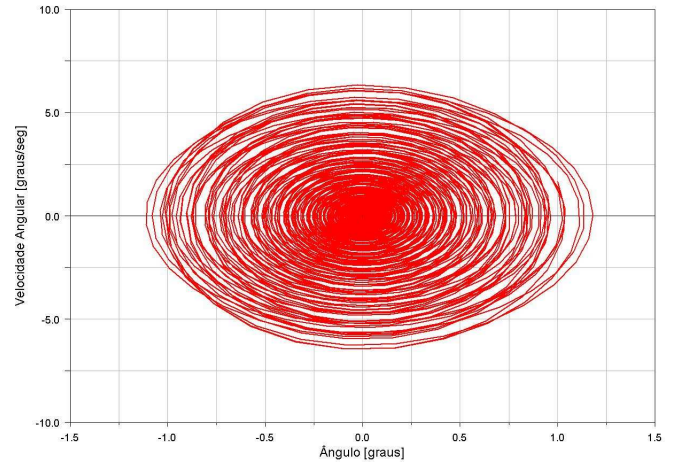


Figura 21: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 1^\circ$  e  $\beta = 0,01 \text{ Nms/rad}$

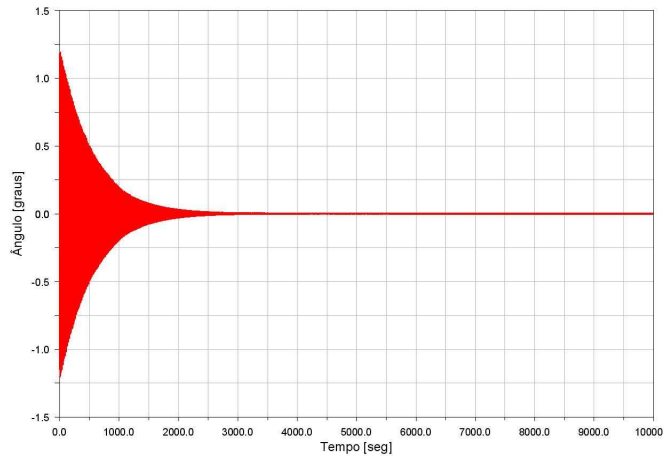


(a) Gráfico de  $\theta-t$

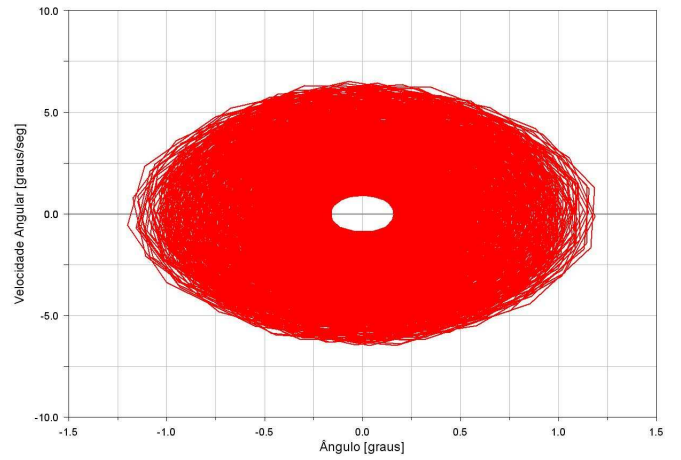


(b) Diagrama de fase

Figura 22: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 1^\circ$  e  $\beta = 0,001 \text{ Nms/rad}$

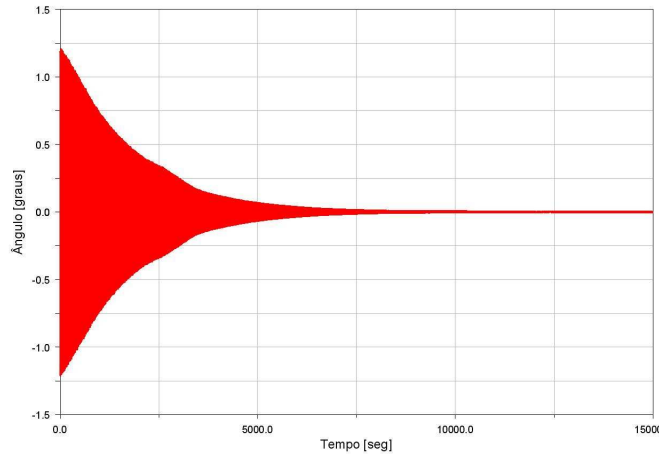


(a) Gráfico de  $\theta-t$

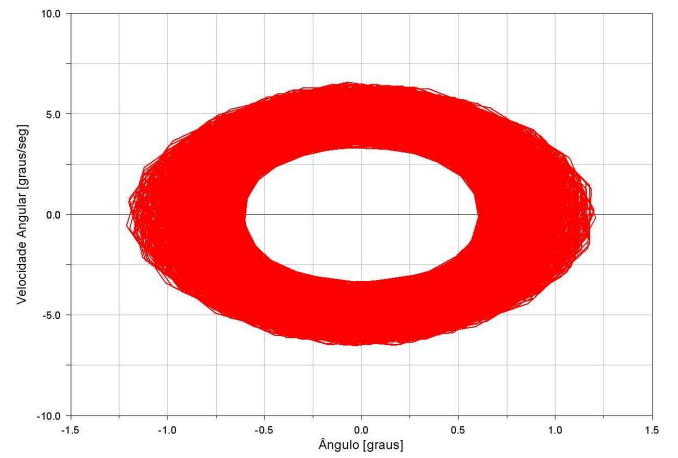


(b) Diagrama de fase

Figura 23: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 1^\circ$  e  $\beta = 0,0001 \text{ Nms/rad}$



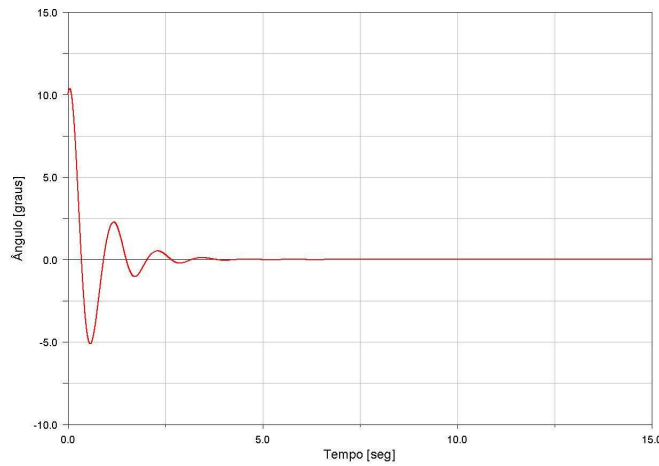
(a) Gráfico de  $\theta-t$



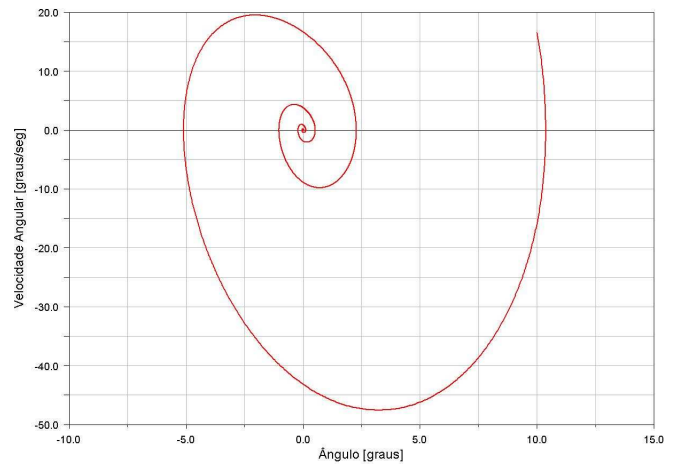
(b) Diagrama de fase

Figura 24: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 1^\circ$  e  $\beta = 0,00001 \text{ Nms/rad}$

### 6.3.2 Resultados para o caso em que $\theta_{inicial} = 10^\circ$

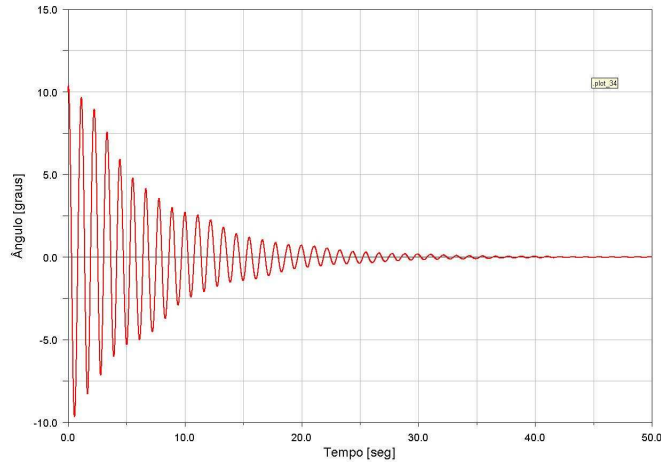


(a) Gráfico de  $\theta-t$

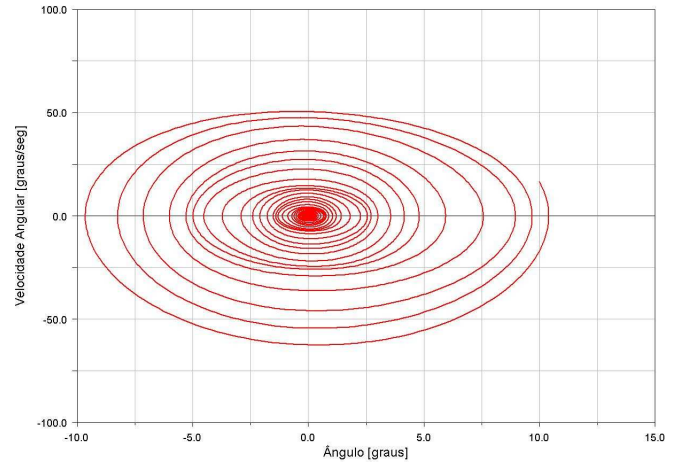


(b) Diagrama de fase

Figura 25: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 10^\circ$  e  $\beta = 0,1 \text{ Nms/rad}$

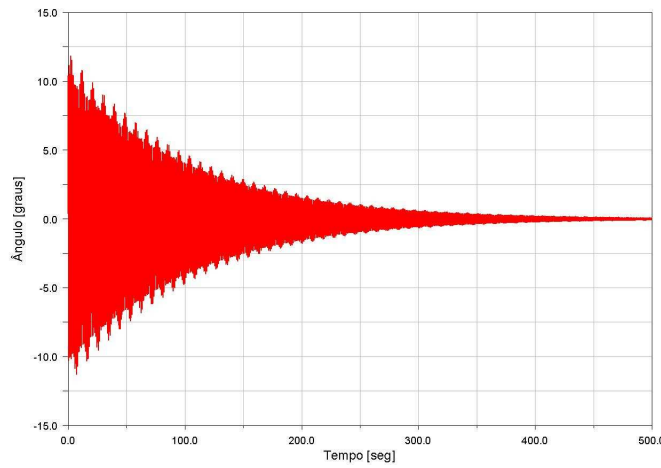


(a) Gráfico de  $\theta-t$

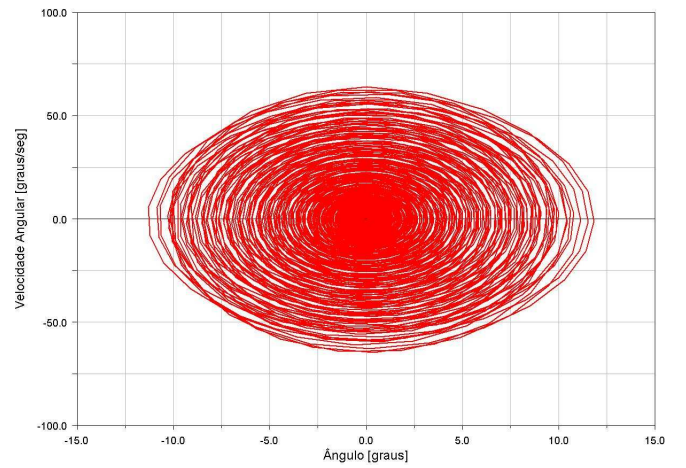


(b) Diagrama de fase

Figura 26: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 10^\circ$  e  $\beta = 0,01 \text{ Nms/rad}$

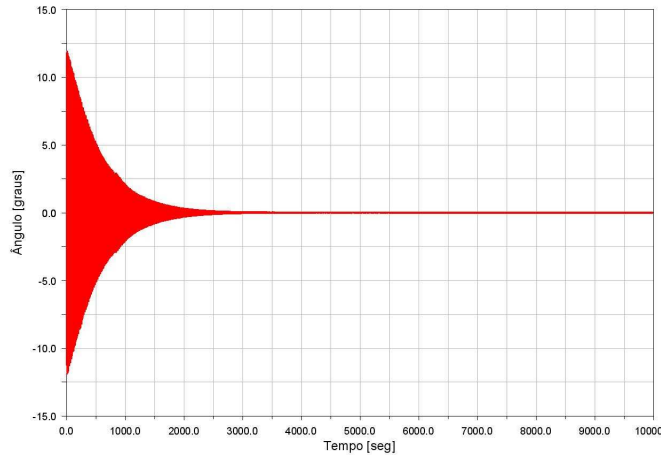


(a) Gráfico de  $\theta-t$

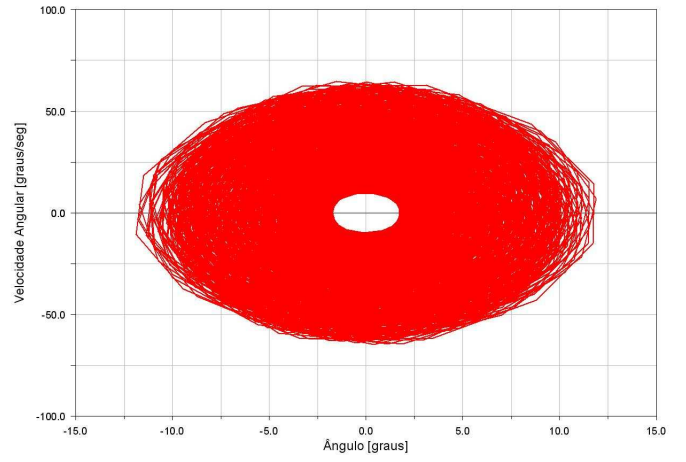


(b) Diagrama de fase

Figura 27: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 10^\circ$  e  $\beta = 0,001 \text{ Nms/rad}$

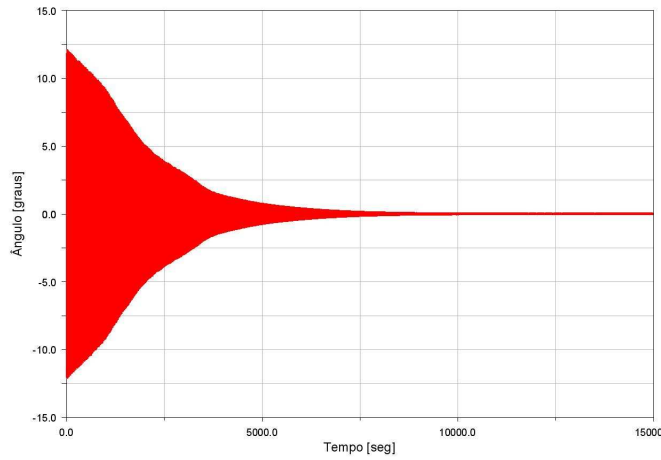


(a) Gráfico de  $\theta-t$

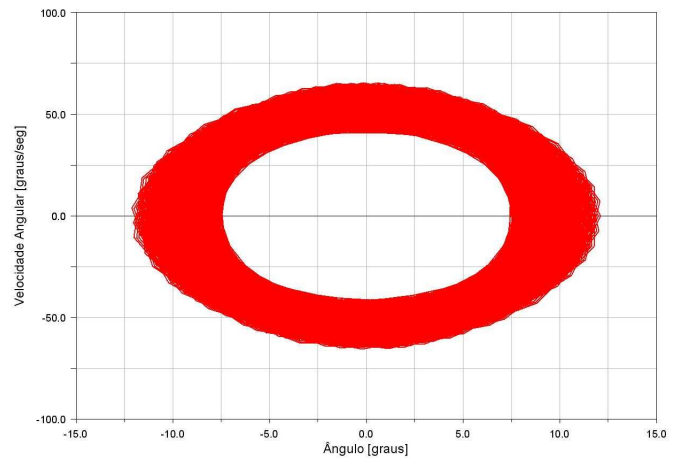


(b) Diagrama de fase

Figura 28: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 10^\circ$  e  $\beta = 0,0001 \text{ Nms/rad}$



(a) Gráfico de  $\theta-t$



(b) Diagrama de fase

Figura 29: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 10^\circ$  e  $\beta = 0,00001 \text{ Nms/rad}$

### 6.3.3 Resultados para o caso em que $\theta_{inicial} = 25^\circ$

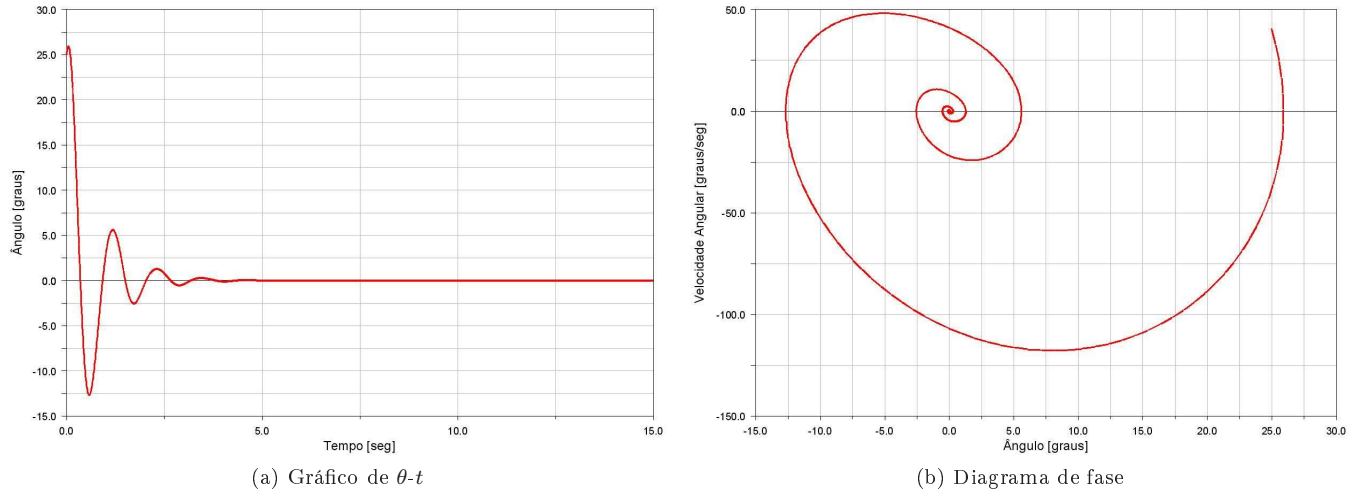


Figura 30: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 25^\circ$  e  $\beta = 0,1 \text{ Nms/rad}$

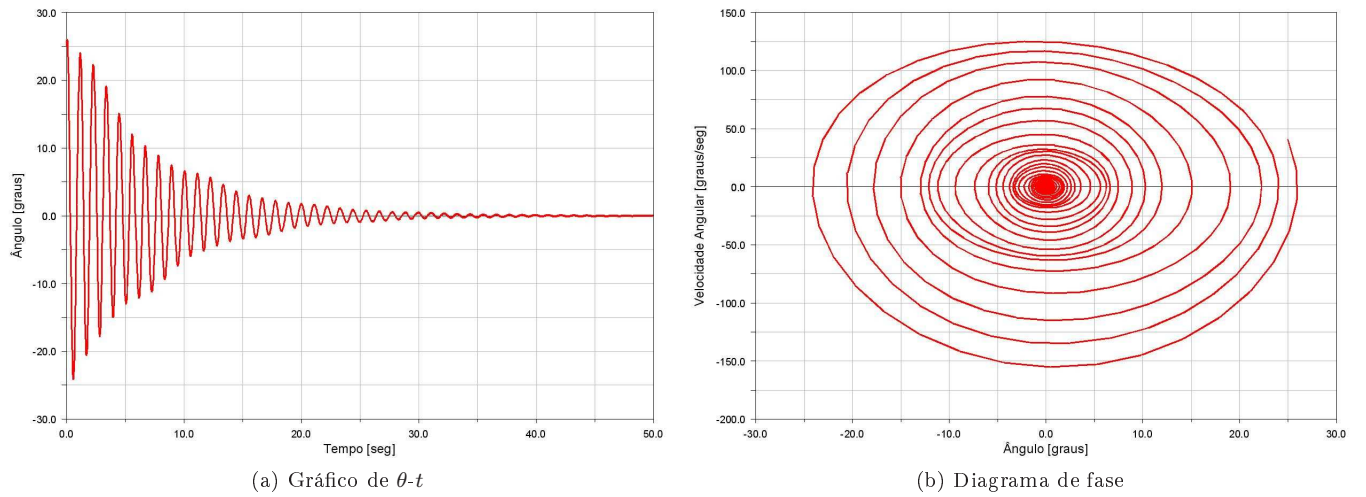
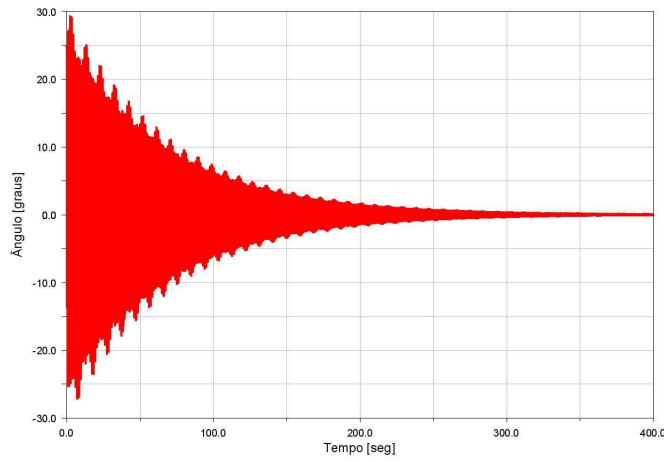
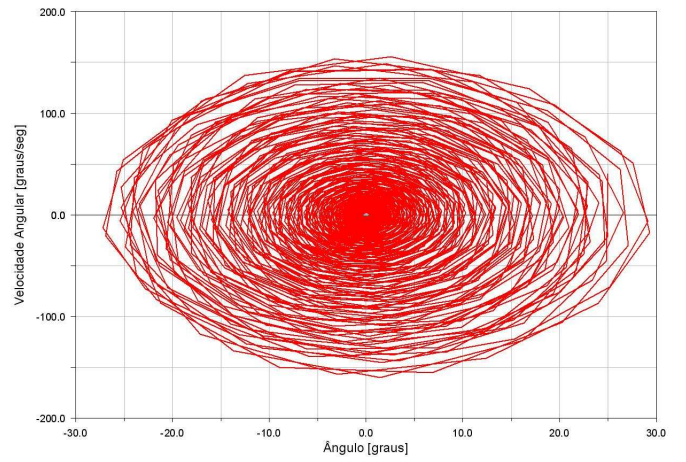


Figura 31: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 25^\circ$  e  $\beta = 0,01 \text{ Nms/rad}$

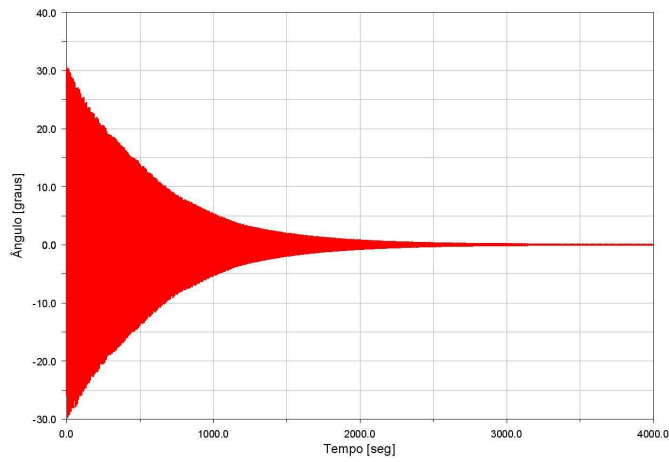


(a) Gráfico de  $\theta-t$

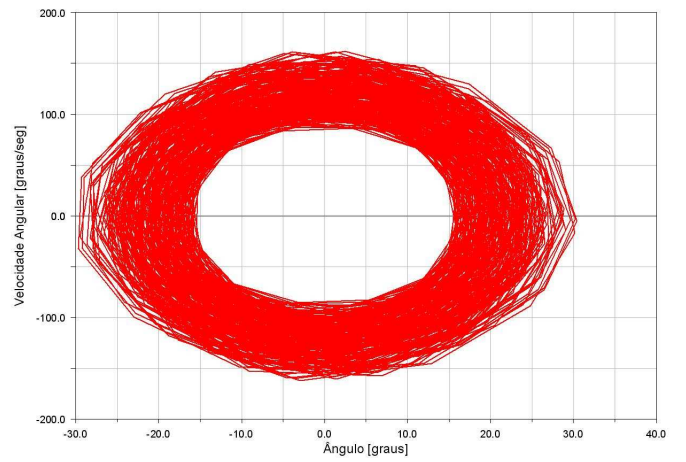


(b) Diagrama de fase

Figura 32: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 25^\circ$  e  $\beta = 0,001 \text{ Nms/rad}$

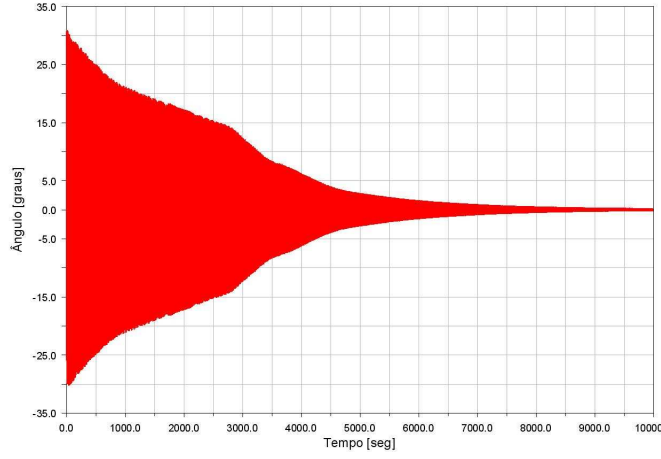


(a) Gráfico de  $\theta-t$

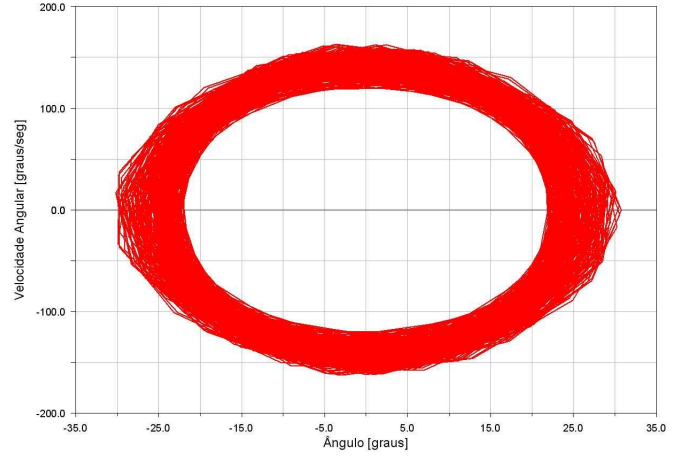


(b) Diagrama de fase

Figura 33: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 25^\circ$  e  $\beta = 0,0001 \text{ Nms/rad}$



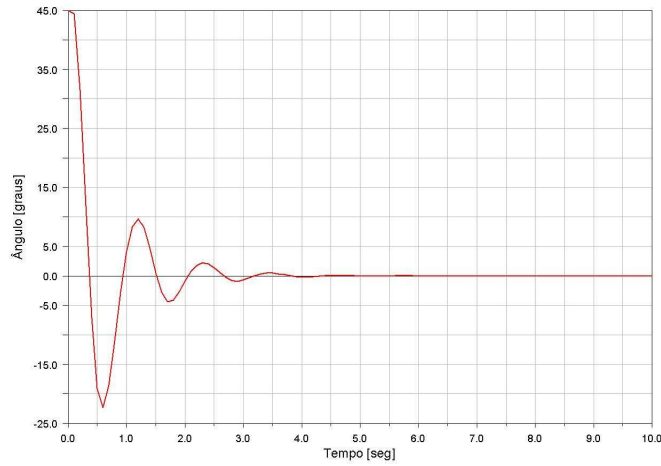
(a) Gráfico de  $\theta-t$



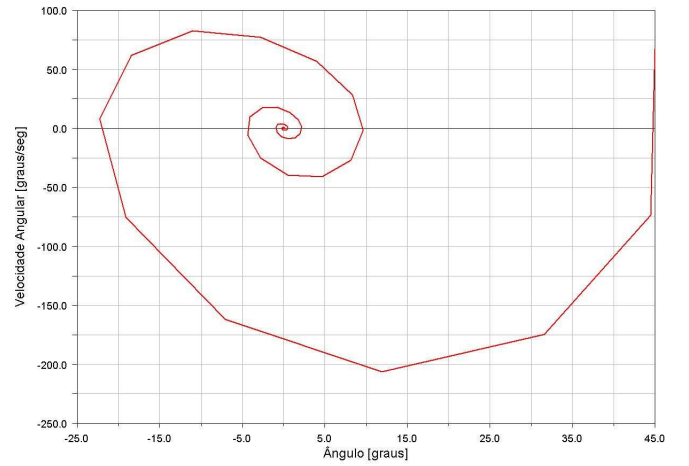
(b) Diagrama de fase

Figura 34: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 25^\circ$  e  $\beta = 0,00001 \text{ Nms/rad}$

### 6.3.4 Resultados para o caso em que $\theta_{inicial} = 45^\circ$



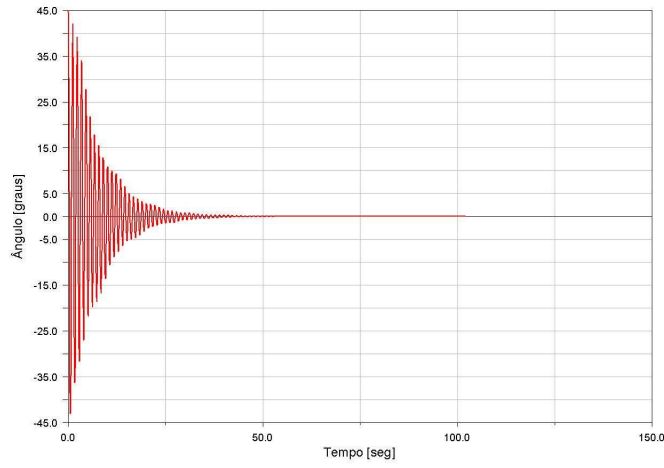
(a) Gráfico de  $\theta-t$



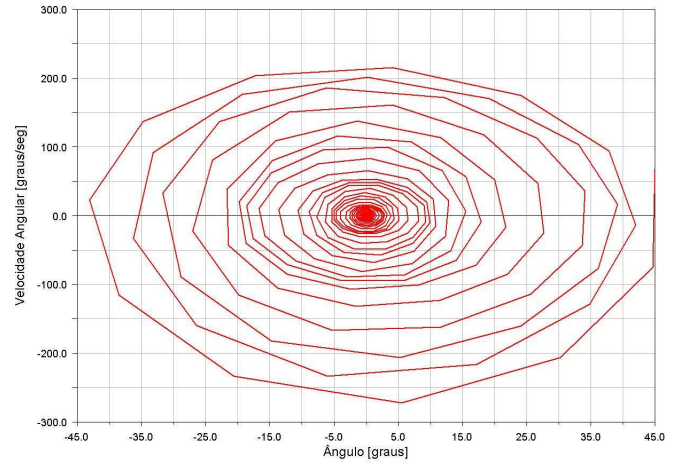
(b) Diagrama de fase

Figura 35: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 45^\circ$  e  $\beta = 0,1 \text{ Nms/rad}$



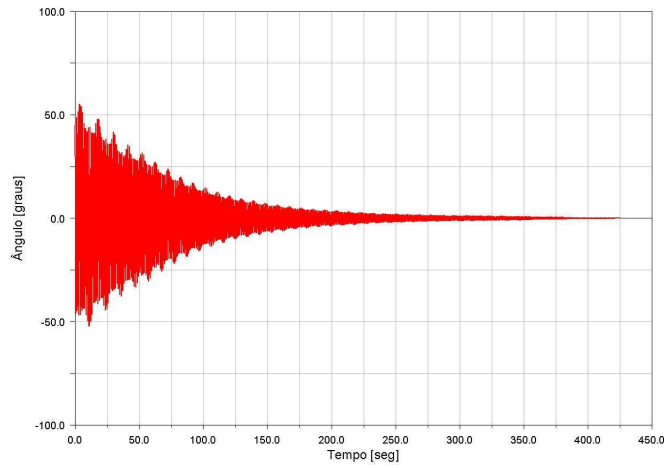


(a) Gráfico de  $\theta-t$

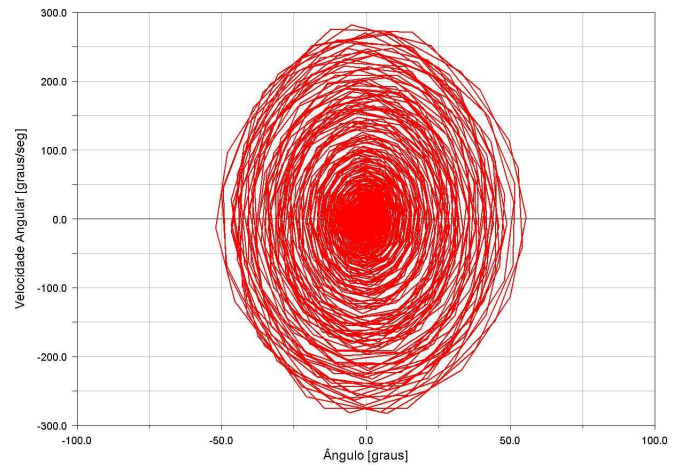


(b) Diagrama de fase

Figura 36: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 45^\circ$  e  $\beta = 0,01 \text{ Nms/rad}$

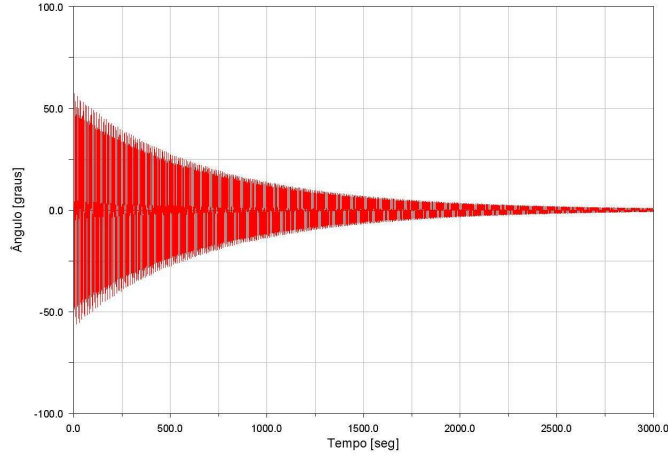


(a) Gráfico de  $\theta-t$

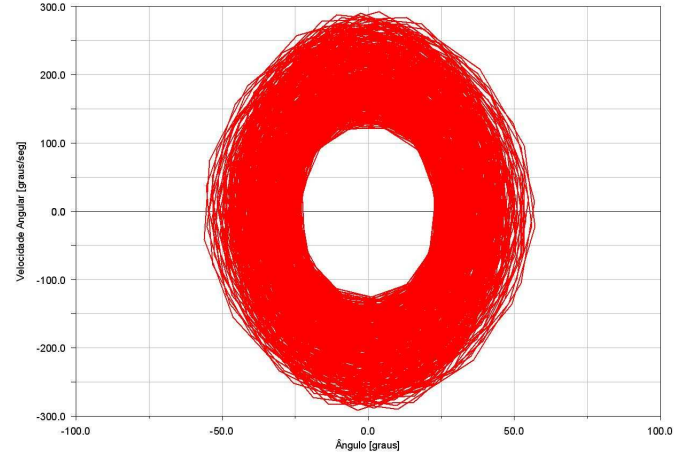


(b) Diagrama de fase

Figura 37: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 45^\circ$  e  $\beta = 0,001 \text{ Nms/rad}$

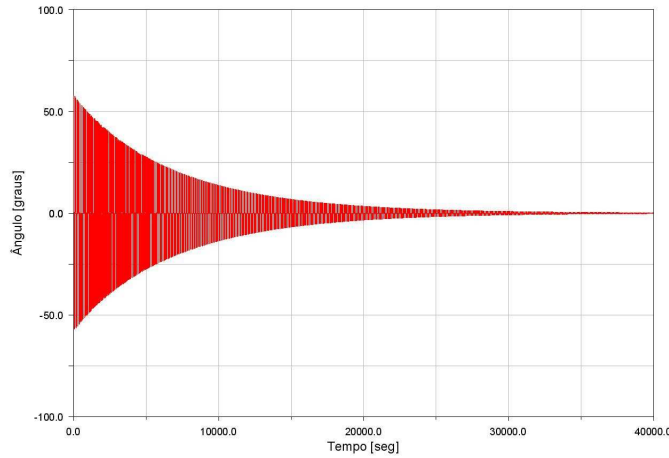


(a) Gráfico de  $\theta-t$

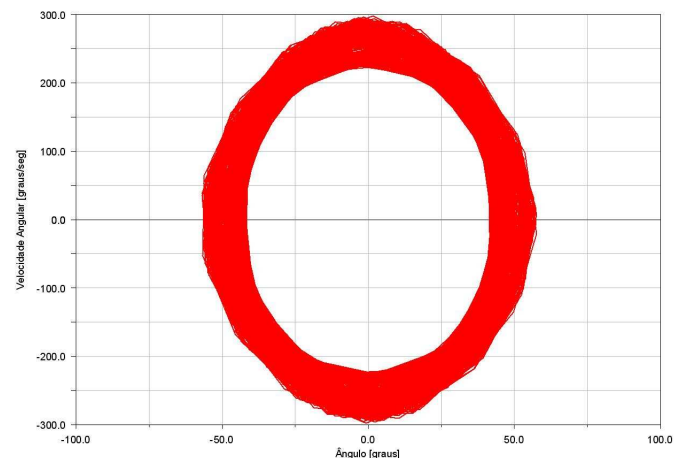


(b) Diagrama de fase

Figura 38: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 45^\circ$  e  $\beta = 0,0001 \text{ Nms/rad}$



(a) Gráfico de  $\theta-t$



(b) Diagrama de fase

Figura 39: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 45^\circ$  e  $\beta = 0,00001 \text{ Nms/rad}$

Para os casos ilustrados acima, para valores de  $\beta = 0,1; 0,01$  e  $0,001$ , o sistema oscila com amplitude cada vez menores até atingir a posição de equilíbrio estável. É fácil notar tal comportamento através da análise de qualquer um dos gráficos. Nas figuras de  $\theta-t$ , vemos que o gráfico "afunila" em direção à  $\theta = 0$ . Já no diagrama de fase, vemos que o sistema espirala em direção à origem que, como estudado, equivale ao ponto de equilíbrio estável do sistema. Vale notar que, quanto menor o amortecimento, mais tempo o pêndulo demora para atingir o equilíbrio.

Já para os casos em que  $\beta = 0,0001$  e  $0,00001$ , inicialmente o sistema oscila até atingir uma amplitude levemente maior do que a inicial. Vê-se isso no começo dos gráficos de  $\theta-t$ . Transcorrido um tempo, a amplitude começa a diminuir até atingir um valor próximo à excitação inicial (aproxime-se dos diagramas de fase para conseguir notar), onde permanecerá em regime oscilatório permanentemente.

É natural se imaginar que existe um valor de  $\beta$  em que essa mudança de comportamento do sistema ocorra. Fica como uma oportunidade de estudo mais aprofundado tentar encontrar qual é esse valor para cada uma das configurações de tamanho de haste, massa e excitação no suporte.

### 6.3.5 Resultados para o caso em que $\theta_{inicial} = 90^\circ$

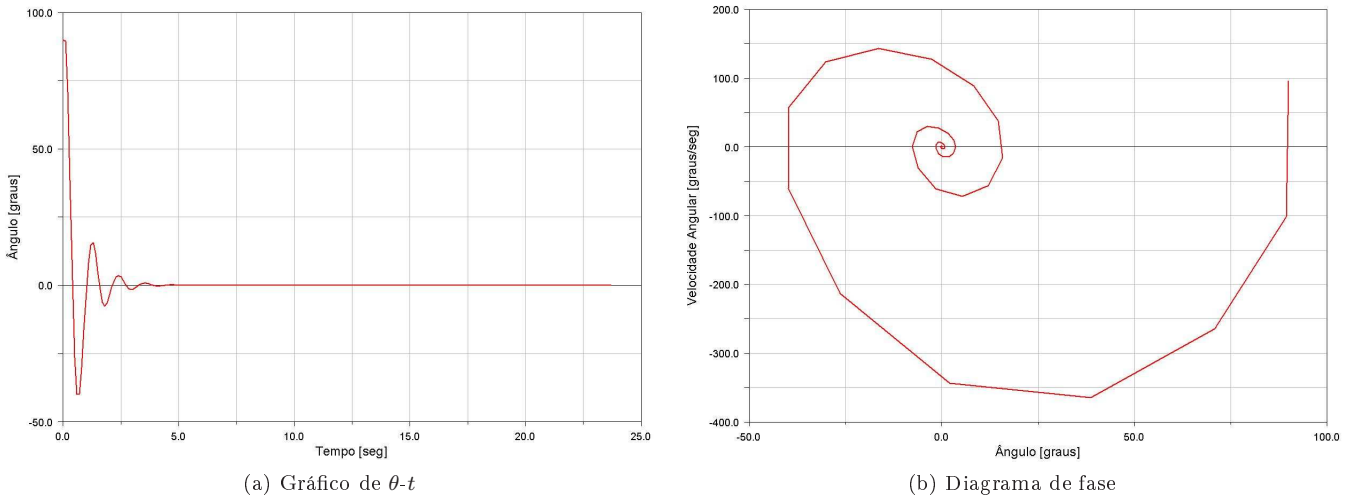
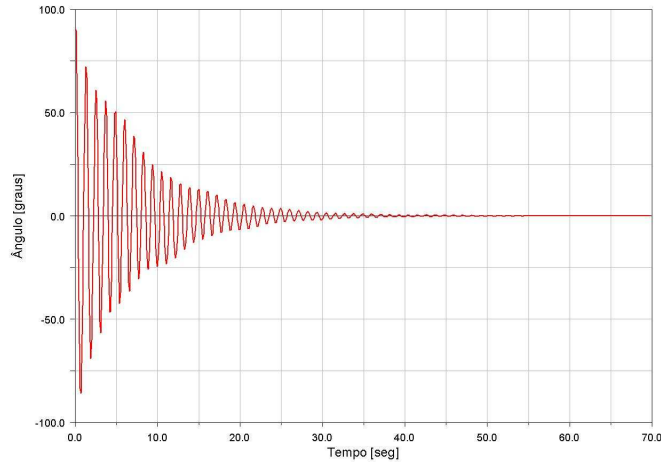
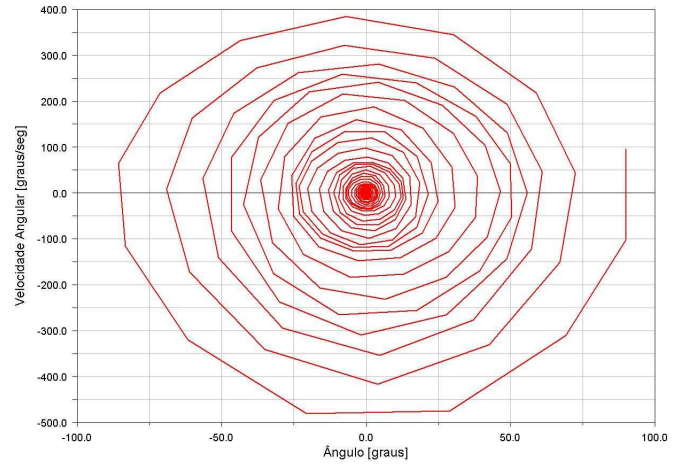


Figura 40: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 90^\circ$  e  $\beta = 0,1 \text{ Nms/rad}$

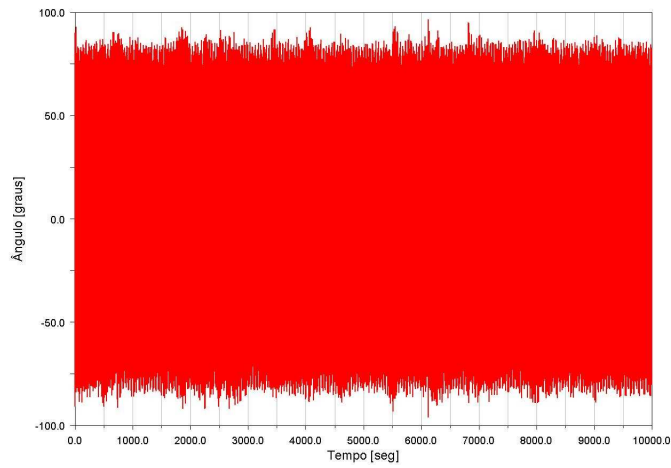


(a) Gráfico de  $\theta-t$

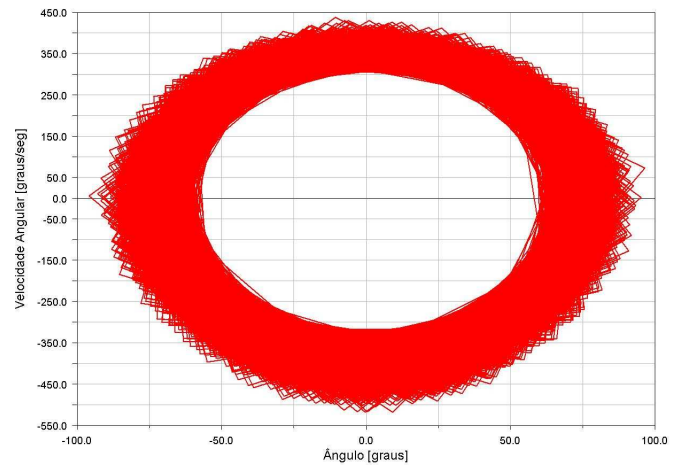


(b) Diagrama de fase

Figura 41: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 90^\circ$  e  $\beta = 0,01 \text{ Nms/rad}$

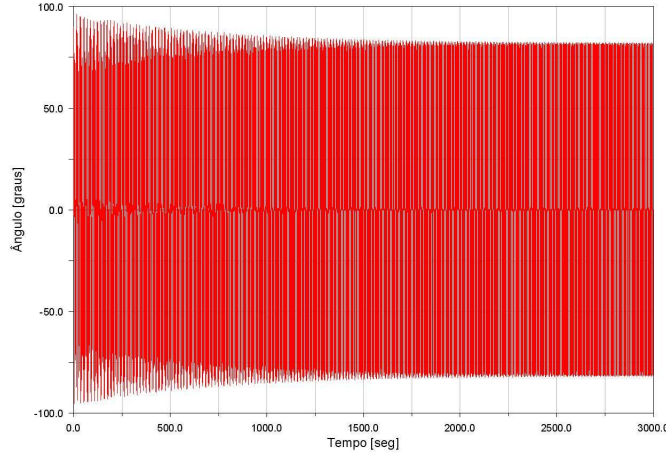


(a) Gráfico de  $\theta-t$

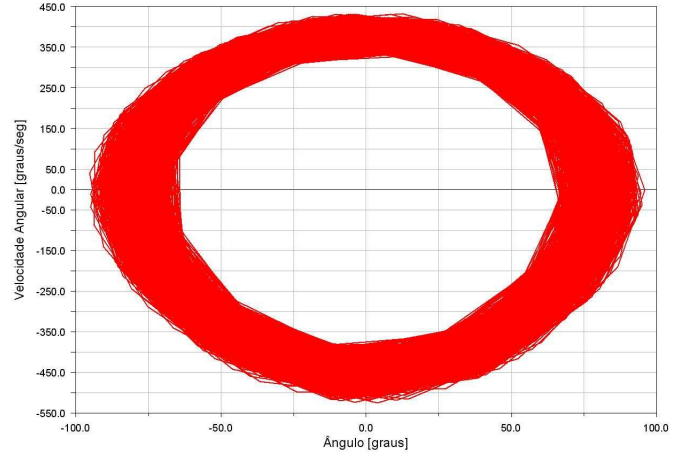


(b) Diagrama de fase

Figura 42: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 90^\circ$  e  $\beta = 0,001 \text{ Nms/rad}$

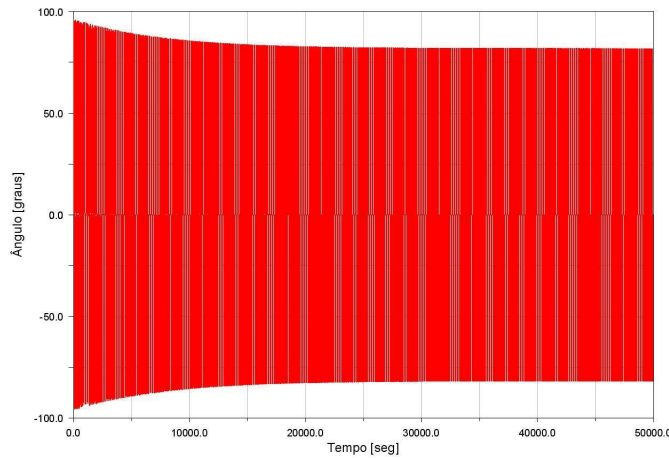


(a) Gráfico de  $\theta-t$

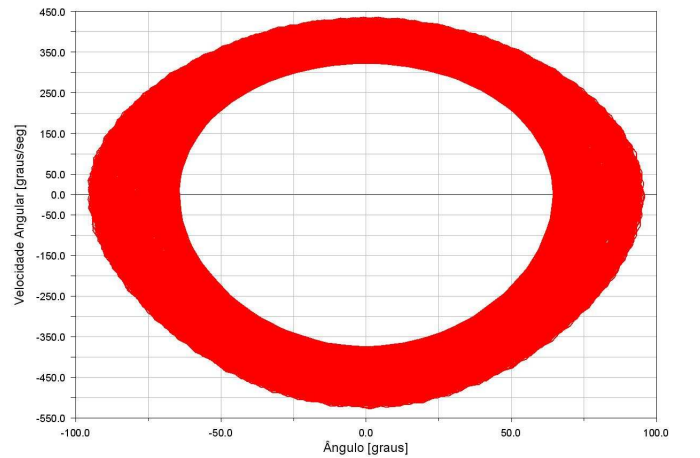


(b) Diagrama de fase

Figura 43: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 90^\circ$  e  $\beta = 0,0001 \text{ Nms/rad}$



(a) Gráfico de  $\theta-t$



(b) Diagrama de fase

Figura 44: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 90^\circ$  e  $\beta = 0,00001 \text{ Nms/rad}$

Nesse caso, conseguimos notar apenas uma diferença mais significativa com relação aos casos anteriores: o pêndulo tende ao ponto de equilíbrio estável somente para os valores de  $\beta = 0, 1$  e  $0,01$ . Para os outros amortecimentos, o pêndulo muda para o segundo tipo de comportamento: no começo aumenta a amplitude de oscilação e depois diminui até um valor próximo à amplitude de oscilação inicial, onde entrará em regime oscilatório permanente.

Para  $\theta = 90^\circ$  o pêndulo mudou de comportamento quando sujeito a um  $\beta$  maior do que nos casos

estudados anteriormente. Portanto, fica também como oportunidade de estudo mais aprofundado, a tentativa de encontrar uma relação entre os valores de amplitude inicial e os valores de  $\beta$  em que o sistema começa a alterar seu comportamento, para cada configuração diferente do sistema.

### 6.3.6 Resultados para o caso em que $\theta_{inicial} = 135^\circ$

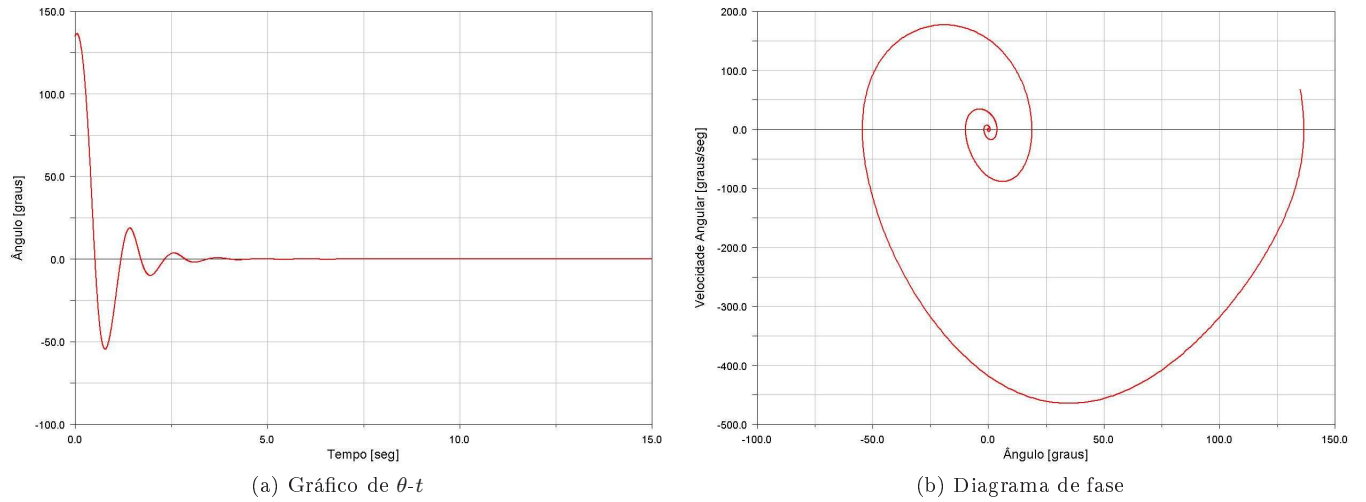


Figura 45: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 135^\circ$  e  $\beta = 0,1 \text{ Nms/rad}$

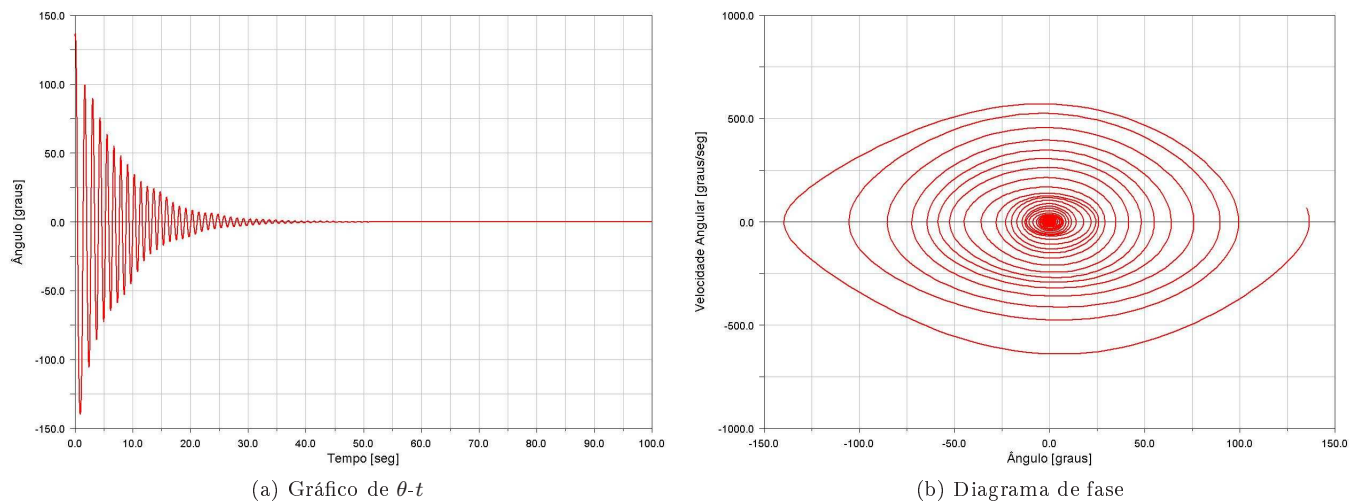
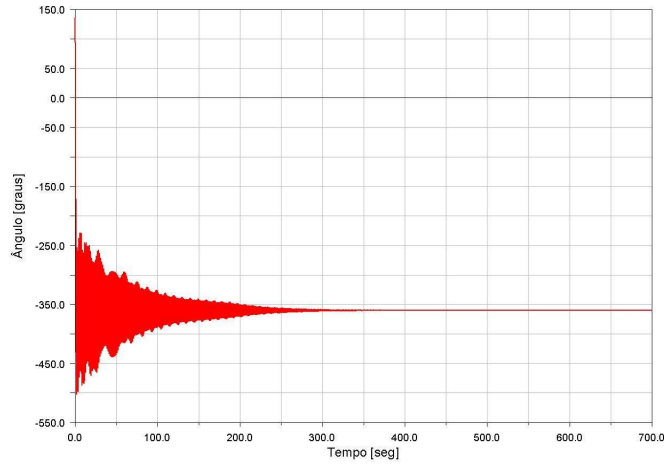
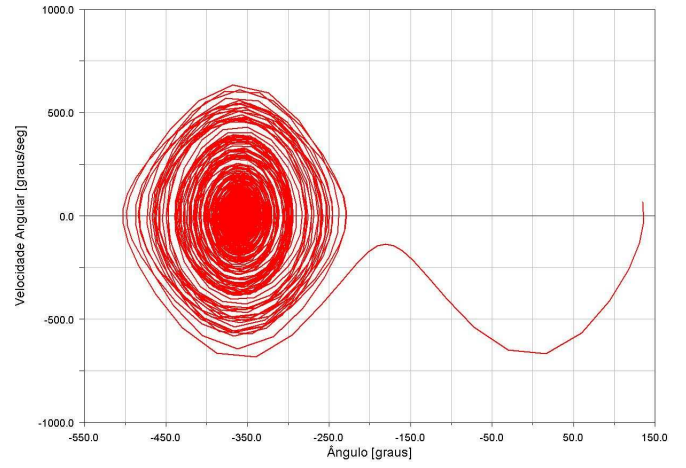


Figura 46: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 135^\circ$  e  $\beta = 0,01 \text{ Nms/rad}$

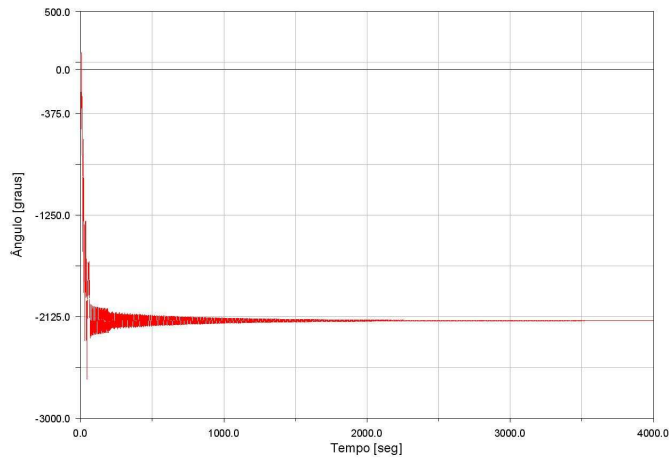


(a) Gráfico de  $\theta-t$

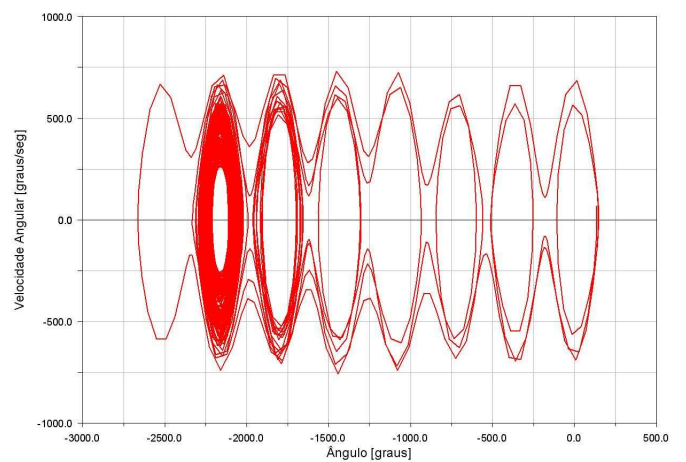


(b) Diagrama de fase

Figura 47: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 135^\circ$  e  $\beta = 0,001 \text{ Nms/rad}$



(a) Gráfico de  $\theta-t$

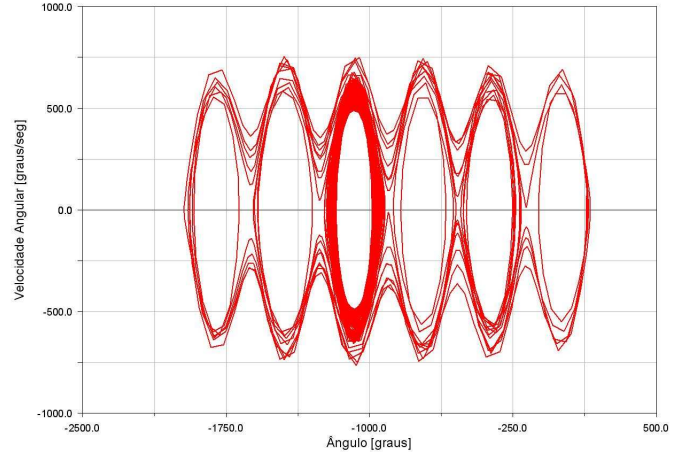


(b) Diagrama de fase

Figura 48: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 135^\circ$  e  $\beta = 0,0001 \text{ Nms/rad}$



(a) Gráfico de  $\theta-t$

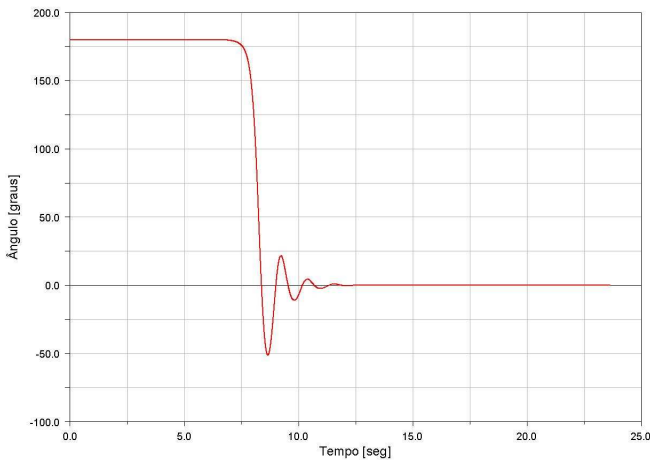


(b) Diagrama de fase

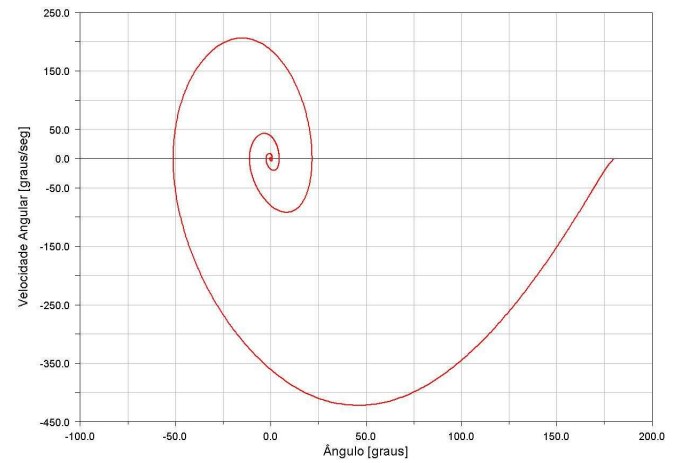
Figura 49: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 135^\circ$  e  $\beta = 0,00001 \text{ Nms/rad}$

### 6.3.7 Resultados para o caso em que $\theta_{inicial} = 180^\circ$

Os resultados para esses casos são mostrados nas figuras 50, 51, 52, 53, 54.



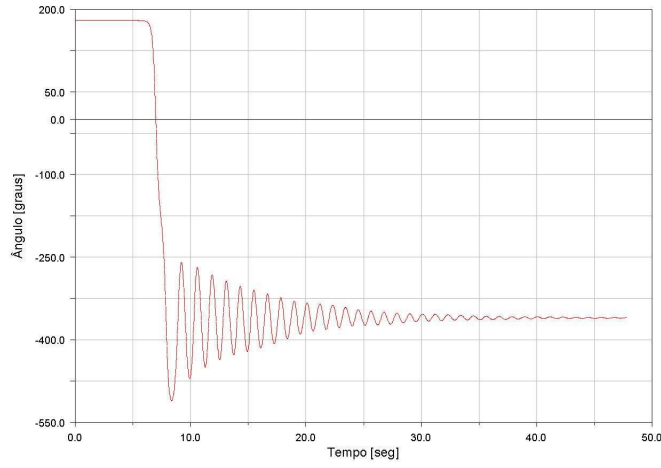
(a) Gráfico de  $\theta-t$



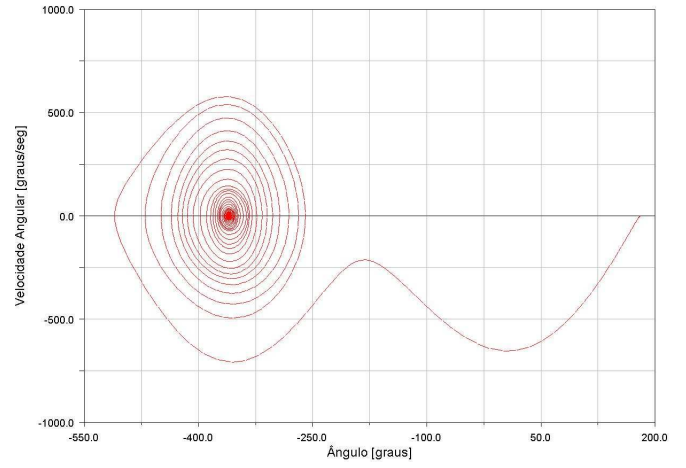
(b) Diagrama de fase

Figura 50: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 180^\circ$  e  $\beta = 0,1 \text{ Nms/rad}$



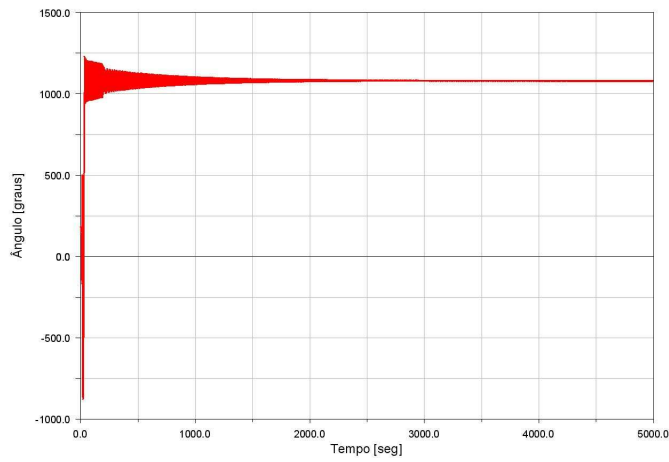


(a) Gráfico de  $\theta-t$

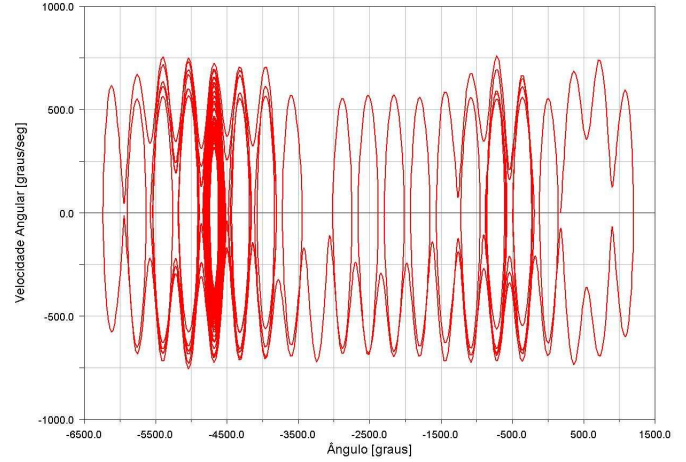


(b) Diagrama de fase

Figura 51: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 180^\circ$  e  $\beta = 0,01 \text{ Nms/rad}$

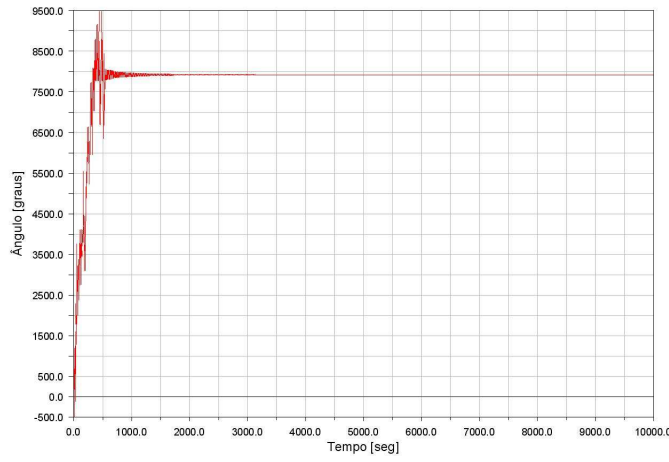


(a) Gráfico de  $\theta-t$

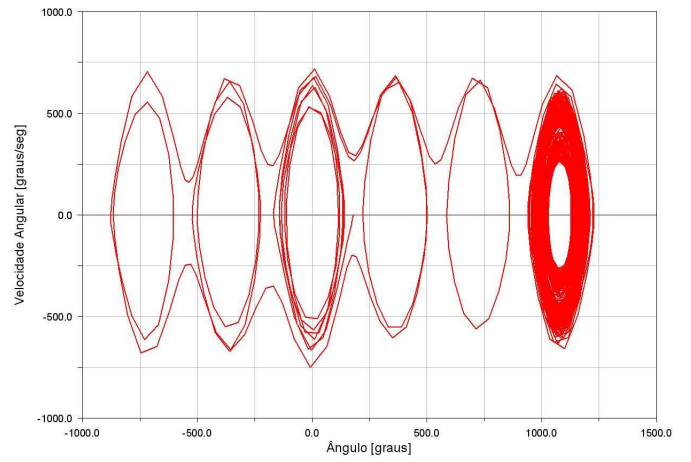


(b) Diagrama de fase

Figura 52: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 180^\circ$  e  $\beta = 0,001 \text{ Nms/rad}$

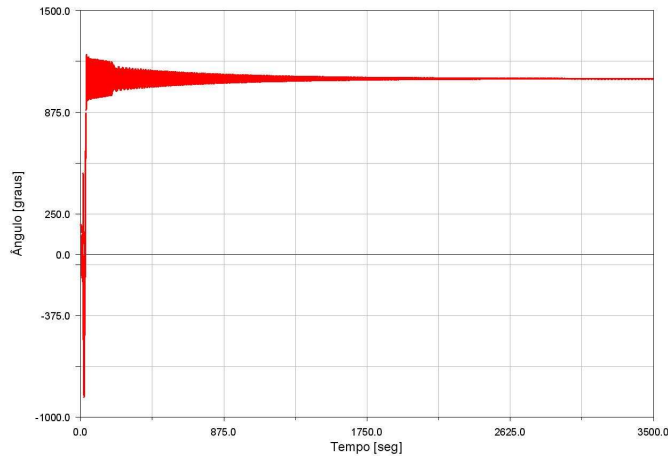


(a) Gráfico de  $\theta-t$

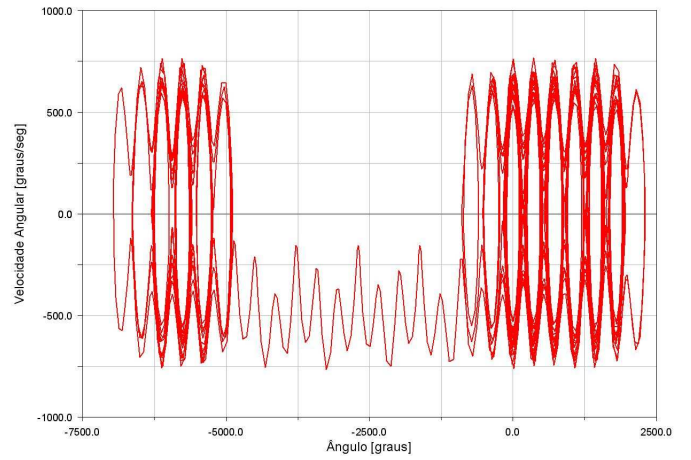


(b) Diagrama de fase

Figura 53: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 180^\circ$  e  $\beta = 0,0001 \text{ Nms/rad}$



(a) Gráfico de  $\theta-t$



(b) Diagrama de fase

Figura 54: Gráfico de  $\theta-t$  e o diagrama de fase para o pêndulo excitado com  $\theta = 180^\circ$  e  $\beta = 0,00001 \text{ Nms/rad}$

Para esses dois últimos casos, era de se esperar que o sistema agisse de maneira diferente, uma vez que, sem amortecimento o sistema teve um comportamento diferenciado.

Para valores altos de  $\beta$ , é natural que o pêndulo tenda a atingir o ponto de equilíbrio estável depois de transcorrido um tempo, como visto para os outros casos. Isso acontece, particularmente, para  $\beta = 0,1; 0,01$  e  $0,001$  quando  $\theta_{\text{inicial}} = 135^\circ$  e  $\beta = 0,1$  e  $0,01$  quando  $\theta_{\text{inicial}} = 180^\circ$ , sendo que, quanto menor o amortecimento, mais o sistema demora para atingir o equilíbrio.

Já nos outros casos, há um comportamento diferente dos estudados até então. O sistema passa por um grande período de regime de transição até atingir o estado oscilatório permanente. Uma grande quantidade de amplitudes de oscilações diferentes pode ser facilmente vista notando que, no diagrama de fase, existem muitos caminhos fechados, assim como há a presença de ondulações, indicando regimes rotacionais. Portanto, concluímos que o pêndulo passa por um período de transição, oscilando e rotacionando alternadamente, até atingir o regime que manterá até o final da simulação: oscilatório (caminho fechado mais "espesso" do diagrama de fase).

## 7 Conclusão

Para amplitudes iniciais menores do que  $90^\circ$ , o pêndulo tem dois tipos de comportamento diferentes: perde energia até atingir o equilíbrio estável ou entra em regime oscilatório permanente com amplitude oscilando em volta da sua amplitude inicial. Já para  $\theta_{\text{inicial}} = 135^\circ$  e  $180^\circ$ , o pêndulo, após passar por um longo período de transição, atinge o regime rotacional permanente.

No caso em que existe força de arrasto, o valor do coeficiente de amortecimento é muito importante para especificar a posição final do sistema. No caso em que  $\beta$  é alto o suficiente, o pêndulo tende ao equilíbrio estável após pouco tempo de simulação. Isso acontece, por exemplo, para todos os casos em que  $\beta = 0, 1$  e  $0,01$ . Além disso, quanto menor o valor de  $\beta$ , mais o sistema demora para alcançar o equilíbrio.

Já para valores diferentes de resistência do ar, o pêndulo tem outro comportamento e este varia com a amplitude inicial do sistema. Conforme diminuimos os valores de  $\beta$ , era de se esperar que o sistema se aproximasse mais do caso não amortecido. De fato, é o que ocorre, uma vez que o sistema tende, após um período de simulação, a atingir o regime oscilatório permanente, que é o que acontece para o caso não amortecido.

Para os casos em que a amplitude inicial é muito alta e o amortecimento é pequeno, o pêndulo passa por um período de transição antes de atingir um regime oscilatório, que é o mesmo que acontece para o caso não amortecido, exceto que, neste caso, o sistema tende a um regime rotacional permanente em vez de oscilatório.

Vale ressaltar que estamos analisando um caso específico de configuração do sistema, ou seja, valores particulares para o tamanho da haste, da massa e da excitação no suporte. Caso variássemos tais configurações, o sistema poderia vir a se comportar de maneira diferente da estudada.

Além disso, as simulações foram feitas para valores discretizados de  $\theta$  e  $\beta$  e, com isso, não foi encontrado os pontos em que ocorre mudança no comportamento do sistema, mas sim os intervalos em que isso acontece. O encontro dos pontos específicos ou de intervalos mais curtos foi deixado como um estudo mais aprofundado a ser realizado.

## Bibliografia

- Symon, R.K. Symon, *Mecânica*, cap. 9, Ed. Campus, 2a ed., 1988.
- Vinicius, Andrade, V.S. (2003), *Análise da dinâmica caótica de pêndulos com excitação paramétrica do suporte*, São Carlos, 2003, Dissertação de Mestrado - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- D. W. Jordan e P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, An introduction for Scientists and Engineers, 4a ed., 2007.
- MSC. Adams/View Userguide.