

PECE – PROGRAMA DE EDUCAÇÃO CONTINUADA  
ESCOLA POLITÉCNICA DA USP

MBA EM ENGENHARIA FINANCEIRA

JAIR RODRIGUES DA SILVA JUNIOR

**PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA PARA UM ALM DE SEGURO DE  
VIDA**

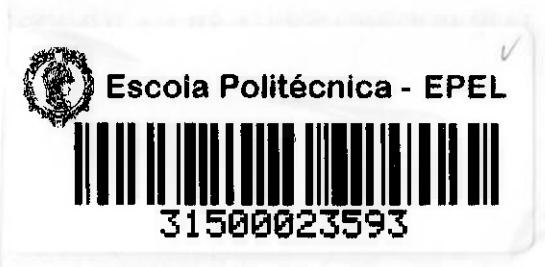
Monografia apresentada ao *MBA* em  
Engenharia Financeira.

Orientado por: Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle  
Costa

SÃO PAULO  
2014

MBA/EF  
2014  
5367

593



1. Programação estatística
2. Seguro de vida

2014 PM

{ 8715179 }

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus pela dádiva da vida.

Aos meus amados pais e avós por guiarem os meus primeiros passos rumo ao que sou.

À minha esposa Ana Carolina e ao meu filho Pedro José pelo amor, compreensão e apoio durante os momentos em que estive ausente por conta dos estudos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa, pelo valioso acompanhamento.

Ao professor Danilo Zucolli Figueiredo pelas preciosas dicas com o tema e em especial a ajuda com a programação em *Matlab*.

A todos os familiares e amigos pelo apoio e incentivo, em especial à minha irmã, Débora Rodrigues Barreto, pela disposição em auxiliar-me com a encadernação deste trabalho.

## RESUMO

Devido ao cenário de queda na taxa de juros vivenciado na economia brasileira nos últimos anos, tornou-se um desafio gerenciar de forma eficiente os ativos e passivos de uma entidade seguradora. A fim de oferecer uma solução a esse problema, este trabalho tem por objetivo apresentar, por meio de uma aplicação prática, a programação estocástica como alternativa para o Gerenciamento de Ativos e Passivos (A.L.M.) de uma carteira de seguro de vida individual.

**Palavras-chave:** Seguro de Vida. Programação Estocástica. Gerenciamento de Ativos e Passivos.

## **ABSTRACT**

Due to the scenario of decreasing in the interest rate experienced by the Brazilian economy during the last years, it has been a challenge to manage in an efficient way the assets and liabilities from an insurance company. In order to offer a solution for this issue, this study has as an objective to show, in a practical way, the stochastic programming as an alternative for the Asset and Liability Management (A.L.M.) from an individual insurance company portfolio.

**Keywords:** Life Insurance. Stochastic Programming. Asset and Liability Management.

## **LISTA DE FIGURAS**

Figura 1 - Evolução da taxa de juros .....	16
Figura 2 - Estrutura a Termo da Taxa de Juros Anual.....	17
Figura 3 - Exemplo numérico de cálculo de seguro de vida individual .....	27
Figura 4 - Distribuição da idade de ingresso da carteira de segurados.....	38
Figura 5 - Distribuição por Tempo de Plano da carteira de segurados.....	39
Figura 6 - Distribuição dos Capitais Segurados .....	40
Figura 7 - Projeção do passivo atuarial do plano .....	40
Figura 8 - Resumo do fluxo de caixa para os próximos cinco anos .....	43

## **LISTA DE ABREVIATURAS**

- ALM – *Asset and Liability Management* (Gerenciamento de Ativos e Passivos)  
ETTJ – Estrutura à Termo da Taxa de Juros  
IRB – Instituto de Resseguros do Brasil  
SUSEP – Superintendência de Seguros Privados  
VGBL – Vida Gerador de Benefícios Livre  
PPA = Prêmio Puro Anual  
PPAM = Prêmio Puro anual para a cobertura de Morte  
PPD = Prêmio Puro Anual para a cobertura de dote ou sobrevivência)  
VPR = Valor Presento do Risco  
RM = Reserva Matemática  
PCA = Prêmio Comercial Anual  
PE = Programação Estocástica  
PM = Programação Matemática  
PL = Programação Linear

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>12</b>
1.1    SEGURO DE VIDA INDIVIDUAL .....	14
1.2    SEGURO DE VIDA EM GRUPO.....	15
1.3    MUDANÇAS NO CENÁRIO ECONÔMICO.....	16
1.5    PROPOSTA DO ESTUDO .....	17
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>19</b>
<b>3. SEGURO DE VIDA INDIVIDUAL.....</b>	<b>21</b>
3.1    NOÇÕES FUNDAMENTAIS DO SEGURO EM GERAL.....	21
3.2    CONCEITO DO SEGURO DE VIDA .....	22
3.2    PRINCIPAIS TIPOS SEGUROS DE VIDA INDIVIDUAL .....	23
3.3    COMPOSIÇÃO DO PRÊMIO E RESERVA MATEMÁTICA PARA UM SEGURO DE VIDA INDIVIDUAL .....	24
3.4    PROJEÇÃO DO PASSIVO ATUARIAL DE UM SEGURO DE VIDA INDIVIDUAL .....	27
<b>4. ALM E PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA .....</b>	<b>30</b>
4.1 <i>Asset and Liability Management – A.L.M.</i> .....	30
4.2    MODELAGEM DO ATIVO .....	30
4.2.1    PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA .....	31
4.2.2    PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA.....	31
4.2.3    ALM PARA UM SEGURO DE VIDA INDIVIDUAL.....	33
4.2.3.1    RESTRIÇÕES DE BALANÇO .....	34
4.2.3.2    RESTRIÇÕES DE INVENTÁRIO .....	34
4.2.3.3    RESTRIÇÕES DE ALOCAÇÃO .....	36
4.2.3.4    RESTRIÇÕES DE LIQUIDEZ .....	36
<b>5. APLICAÇÃO PARA UMA CARTEIRA DE SEGURO DE VIDA INDIVIDUAL...37</b>	

5.1	DADOS DO PLANO.....	37
5.2	DADOS DA CARTEIRA.....	38
5.3	ALOCAÇÃO DA CARTEIRA DE ATIVOS .....	41
5.4	ALM COM PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA .....	42
5.5	RESULTADOS – ALOCAÇÃO ÓTIMA DOS ATIVOS .....	43
i.	Simulação 1 .....	44
ii.	Simulação 2 .....	44
iii.	Simulação 3.....	44
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>46</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>47</b>

## 1. INTRODUÇÃO

Antes de mais nada, convém fazer um apanhado histórico a respeito do seguro de vida, com foco específico no que ocorreu no Brasil.

A história do seguro de vida é repleta de curiosidades. Embora esta modalidade de seguro tenha se originado na Antiguidade, no Brasil demorou muito para ser comercializada, já que a prática era considerada imoral. O mesmo não ocorreu em outros países, em que essa forma de seguro é bem mais comum. Na Inglaterra, por exemplo, o seguro de vida já era tratado como ciência no século XVII, e a primeira apólice de seguro data de 1574. Na França, a primeira companhia foi autorizada a funcionar em 1787. Mas o seguro de vida tal como é concebido atualmente surgiu nos Estados Unidos da América, e teve como precursor Elizur Wright, considerado o “Pai do seguro de vida”.

Conforme Ferreira (1985), o seguro de vida no Brasil teve sua prática retardada, pois por muito tempo foi considerado como especulação imoral. O exemplo disso é que o Código Comercial Brasileiro, Lei nº 556, de 25 de junho de 1850, determinava em seu artigo 686 a proibição de seguro “sobre a vida de alguma pessoa livre”. Entretanto, permitia a realização de seguros sobre a vida de escravos por considerá-los como “coisas” e não “pessoas”.

Somente alguns anos depois esse ramo de seguro começou a se desenvolver no país, quando pelo ano de 1855 apareceu a “Companhia Tranquilidade”, a primeira sociedade fundada no Brasil para operar sobre a vida de pessoas livres.

Das sociedades brasileiras que ainda operam hoje, a “Sul América-Companhia Nacional de Seguros de Vida” é a mais antiga. Fundada em 13 de dezembro de 1895, emitiu sua primeira apólice no dia 18 do mesmo mês e ano. No ano seguinte, a “Equitativa dos Estados Unidos do Brasil Companhia de Seguros de Vida” iniciou suas operações.

Com a mudança do regime monárquico para república, o governo procurou aperfeiçoar o controle sobre este seguro. Em 1889 foi concedida pelo Decreto nº 10727 a autorização para a “Equitable Life Insurance” operar no país. Outros Decretos foram baixados sobre o funcionamento e regulamentação das sociedades seguradoras.

Em 10 de dezembro de 1901, já no governo do presidente Campos Salles, foi baixado o Decreto nº 4270 que passou a regulamentar o funcionamento das companhias de seguro de vida, marítimos e terrestres, nacionais e estrangeiras, sendo criada a Superintendência Geral dos Seguros, subordinada ao Ministério da Fazenda. Em 1 de janeiro de 1916, pela Lei 3071, passou o seguro de vida a ser expressamente consagrado pelo Código Civil Brasileiro.

A partir de 1931, com Dr. Getúlio Vargas na governança do país, o nosso mercado de seguros começou a tomar um grande impulso e a legislação de seguros passou por uma grande reforma, conforme segue:

- 14 de setembro de 1932 – o Decreto 21828 aprovou novo Regulamento de Seguros. Essa foi sua quarta alteração;
- 28 de junho de 1933 – o Decreto 22865 transferiu a Inspetoria de Seguros do Ministério da Fazenda para o do Trabalho, Indústria e Comércio.
- Em 14 de julho de 1934, pelo Decreto nº 24782, criou-se no Ministério do Trabalho, Indústria e Comércio o Departamento Nacional de Seguros Privados e Capitalização (DNSPC), em substituição à Inspetoria de Seguros. Esse tinha como objetivo atender às seguintes finalidades:
  - Fiscalizar as operações de seguros em geral;
  - Amparar os interesses e direitos do público, relativos às operações de seguros;
  - Promover o desenvolvimento das operações de seguros e, ainda, o espírito de previdência em relação às mesmas;
  - Estudar as questões técnicas e jurídicas referentes às operações de seguros e interessar-se junto ao Ministério do Trabalho, Indústria e Comércio pela adoção de todas as providências que julgar úteis e necessárias aos interesses gerais relacionados com tais operações; e
  - Zelar pelos interesses da Fazenda Nacional relacionados com as operações já citadas, auxiliando de modo direto a fiscalização e arrecadação dos impostos que recaiam especialmente sobre tais operações.
- Em 3 de abril de 1939 o Dr. Getúlio Vargas criou, pelo Decreto nº 1186, o Instituto de Resseguros do Brasil (IRB)<sup>1</sup>. Essa instituição foi criada com o objetivo de regular os resseguros no país e desenvolver as operações de seguros em geral. As sociedades ficaram obrigadas, desde então, a ressegurar no IRB as responsabilidades excedentes de suas retenções próprias.

No início da Segunda Grande Guerra, operavam em Seguros de Vida no Brasil apenas 8 (oito) companhias. Dessas, duas eram estrangeiras e entraram em liquidação após a declaração

---

<sup>1</sup> Privatizado no ano de 2013

da guerra, sendo suas carteiras transferidas para o Instituto de Previdência e Assistência dos Servidores do Estado (IPASE).

Em 1950, o Brasil tinha dez sociedades seguradoras do Ramo Vida, número que aumentou para quatorze em 1956.

Por meio do Decreto-lei nº 73 de 21 de dezembro de 1966 foi criada a SUSEP (Superintendência de Seguros Privados), que passou a regulamentar o setor a partir de então.

A partir da segunda metade do século XX, o Brasil viveu um período intenso de hiperinflação, o que prejudicou demasiadamente a atividade do seguro de vida no país. A partir do Plano Real em 1994, com o controle inflacionário, a atividade voltou a se desenvolver.

Atualmente, a atividade de seguro é regulamentada pela Superintendência de Seguros Privados (SUSEP), órgão responsável pelo controle e fiscalização dos mercados de seguros, previdência privada aberta, capitalização e resseguros.

A SUSEP tem por missão "regular, supervisionar e fomentar os mercados de seguros, resseguros, previdência complementar aberta, capitalização e corretagem, promovendo a inclusão securitária e previdenciária, bem como a qualidade no atendimento aos consumidores".<sup>2</sup>

De acordo os dados atuais divulgados no sítio da SUSEP<sup>3</sup>, até abril de 2014 tínhamos 70 seguradoras com prêmio para seguros de vida e um volume anual de 8,4 bilhões de reais.

## 1.1 SEGURO DE VIDA INDIVIDUAL

A principal característica de um seguro individual é o prazo de vigência, pois são contratos de **longo prazo**.

Esse tipo de seguro é estruturado sob o regime de capitalização, em que o prêmio de seguro é calculado de forma nivelada.

Prêmio é o valor que o segurado paga ao segurador para garantir a cobertura do risco.

O Prêmio calculado de forma nivelada consiste em se estabelecer um valor equivalente entre as prestações, das primeiras às últimas, sendo este valor atualizado apenas pela inflação, geralmente com ajustes anuais.

<sup>2</sup> Conforme informação obtida em 29/06/2014 às 12:21hs no sítio da Susep na internet: <http://www.susep.gov.br/menu/a-susep/apresentacao>.

<sup>3</sup> Conforme informação obtida em 29/06/2014 às 14:05hs no sítio da Susep na internet: <http://www2.susep.gov.br/menuestatistica/SES/principal.aspx>

Nos primeiros anos de vigência do seguro de vida, por ser mais jovem, a probabilidade de morte do segurado é menor, diferentemente do final do contrato em que essa probabilidade aumenta. Naturalmente, o valor esperado do risco é maior no final do que no início do contrato. O prêmio nivelado atua de forma a gerar um excedente no início que é armazenado na chamada Reserva Matemática, que visa formar uma reserva para a cobertura do período de maior risco no final do contrato.

Os prazos de vigência desse tipo de seguro são plurianuais, podendo até mesmo chegar a ser vitalício. Há também, em alguns casos, a opção de se contratar coberturas complementares, como invalidez, por exemplo.

Há também seguros que oferecem cobertura de sobrevivência, também conhecidos como DOTAIS. Nesse tipo de seguro, caso o segurado sobreviva a uma determinada idade, ele próprio recebe a Importância Segurada contratada, ao contrário da forma mais comum de seguro, em que ele indica um beneficiário que recebe a indenização em caso de sua morte. É bastante comum também encontrar ambas as coberturas no mesmo contrato de seguro, são os DOTAIS MISTOS, onde o segurado possui a cobertura de morte e a de sobrevivência.

## 1.2 SEGURO DE VIDA EM GRUPO

Os seguros de vida em grupo são contratos de curto prazo, geralmente de um ano, podendo ser renovado ao término da vigência. Também são conhecidos como coletivos. Essa modalidade de seguro é a mais comum no mercado brasileiro. Esses produtos têm como característica a cobertura para um grupo de pessoas sob um único contrato. Diferentemente do seguro de vida individual, o vida em grupo é estruturado sob o regime de repartição simples, em que os prêmios são geralmente fixados para o período de um ano. As coberturas mais comuns são morte por qualquer causa, morte accidental e invalidez.

Este trabalho será focado nos produtos individuais de seguro de vida estruturados no regime de Capitalização. De acordo com informações da extraídas<sup>4</sup> da SUSEP, o montante de Provisão Matemática de Benefícios à Conceder, ou simplesmente Reserva Matemática que as seguradoras haviam constituído em 30 de abril de 2014 para cobrir as obrigações futuras assumidas totalizavam 3,2 bilhões de reais (excluindo o VGBL).

---

<sup>4</sup> Conforme informação obtida em 29/06/2014 às 14:15hs no sítio da Susep na *internet*:  
<http://www2.susep.gov.br/menuestatistica/SES/principal.aspx>

### 1.3 MUDANÇAS NO CENÁRIO ECONÔMICO

O gráfico a seguir apresenta a evolução da taxa real de juros a partir de 1995. Essa taxa, utilizada como referência nessa análise, foi composta pela média anual da taxa Selic menos o IPCA entre os anos de 1995 e 2013<sup>5</sup>.



Figura 1 - Evolução da taxa de juros

Conforme pode-se observar na figura 1, a economia brasileira vive um cenário de queda na taxa de juros real nos últimos anos, principalmente a partir da crise financeira mundial de 2008.

Já a figura a seguir apresenta a projeção Estrutura a Termo da Taxa de Juros (ETTJ) do IPCA.

<sup>5</sup> Com base nos dados obtidos por meio de consulta em 26/06/2014 às 20:19hs no sítio:

<http://www.portalbrasil.net/ipca.htm> e consulta de 17/07/2014 às 20:20hs no sítio:

[http://www.cetip.com.br/astec/series\\_v05/paginas/web\\_v04\\_10\\_03\\_consulta.asp](http://www.cetip.com.br/astec/series_v05/paginas/web_v04_10_03_consulta.asp)

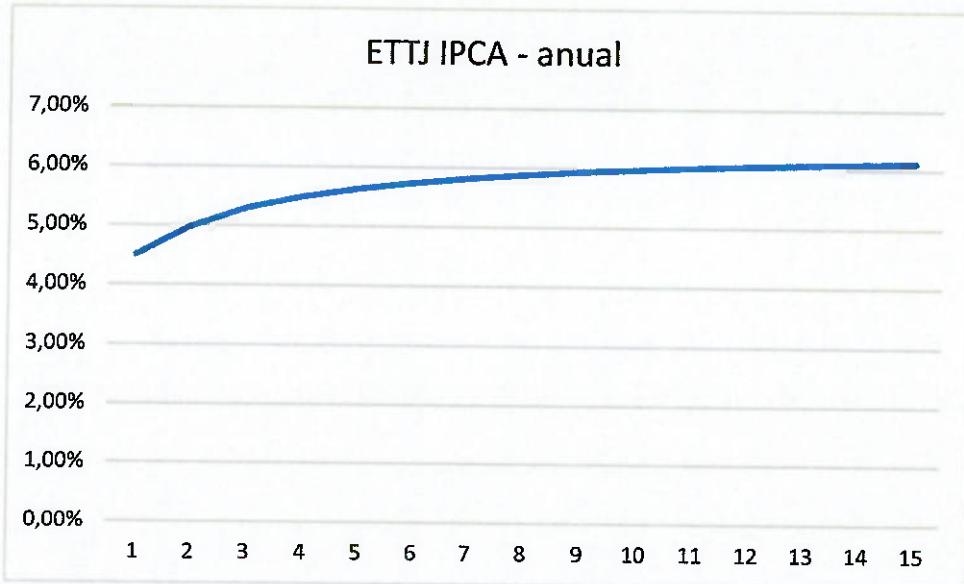


Figura 2 - Estrutura a Termo da Taxa de Juros Anual

Com base na Figura 2, verifica-se que, apesar dos recentes aumentos na taxa básica de juros, a projeção da ETTJ ainda indica taxas abaixo de 6% para os próximos anos.

### 1.5 PROPOSTA DO ESTUDO

A queda na taxa real de juros nos últimos anos e a projeção futura de juros, são indicativos de forte preocupação para as seguradoras que oferecem produtos semelhantes ao objeto de nosso estudo, que prevê uma taxa de juros anual mínima de 6% a.a. Isso representa um grande desafio para as áreas atuariais e de investimentos dessas companhias: administrar os ativos de forma que lastreiem de modo eficiente as obrigações assumidas.

Desta forma, o objetivo deste estudo é apresentar uma aplicação de gerenciamento de ALM de um seguro de vida individual por meio da **PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA**.

Escopo do estudo:

No capítulo 2 será apresentada uma breve revisão bibliográfica.

No capítulo 3, é demonstrado o funcionamento e conceitos gerais do seguro de vida individual, bem como a formulação matemática da composição do prêmio (preço) do seguro, reserva matemática necessária para cobrir as obrigações futuras da seguradora e todos os detalhes da projeção atuarial do passivo.

Já o capítulo 4 apresenta o ALM e programação estocástica.

No capítulo 5 são apresentados todos os detalhes do produto de seguro definido para a simulação prática do modelo de ALM proposto, bem como a carteira de segurados, os parâmetros da simulação e resultados;

Por fim, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Como pode-se observar, os artigos disponíveis no mundo acadêmico até então focam uma abordagem específica para fundos de pensão, que possui algumas características semelhantes aos produtos de seguro de vida individual de longo prazo. Além disso, alguns artigos foram dedicados aos modelos estocásticos para previsão de fatores de risco.

Kowewnberg (2001) apresenta um modelo VAR usando o log-retorno dos ativos de um mais a taxa de crescimento do salário dos participantes de um fundo de pensão como variáveis endógenas correlacionadas. Naquele modelo foi apresentada a modelagem por meio de passeio aleatório para obter a rentabilidade de determinados ativos, além do ruído gaussiano com média não-nula para outras classes de ativos como renda fixa, imóveis e ações.

O artigo de Minella (2003) apresenta a análise da política monetária para múltiplos períodos, e pode ser entendido como uma forma de adaptar um modelo VAR para a economia brasileira.

O modelo de VEC de Koiv, Pennanen e Ranne (2004) aplicado na Finlândia permite escolher as médias de longo prazo da taxa básica de juros, do *spread* de longo-curto da estrutura a termo, retorno de dividendos de ações e imóveis. Essa é uma alternativa quando os dados passados não são suficientes para representar o futuro da economia. Há também o modelo de Anderson, Hoffman e Rashe (1998) que descreve como relações de longo prazo e adequação de demanda por moeda, a relação de Fisher e o *spread* longo-curto da estrutura a termo da taxa de juros.

Dert (1998) utiliza um modelo de reversão à média e usa como variáveis endógenas o log-retorno das classes de ativos (ações, imóveis, renda fixa e caixa) além da inflação, do produto e dos salários de participantes de um fundo de pensão.

Valladão (2008) apresenta um modelo de ALM via programação estocástica Multi-Estágio e Bootstrap para determinar a alocação e medida de risco para um fundo de pensão. Esse trabalho apresenta em detalhes os conceitos de ALM e modelos de programação estocástica, além da proposta de um modelo para ALM de fundos de pensão.

De acordo com Figueiredo (2011), as principais técnicas empregadas em ALM são os modelos de média-variância, modelos de tempo discreto com múltiplos períodos, modelos de tempo contínuo de modelos de programação estocástica. Kouwenberg e Zenios (2006) apontam o fato de modelos com programação estocástica considerarem aspectos práticos relevantes em

sua formulação, como por exemplo, custos de transação, mercados incompletos e limites de alocação e liquidez como uma de suas principais vantagens.

Em seu trabalho, Figueiredo (2011) apresenta uma abordagem via programação estocástica multiestágio linear para a tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão estruturado na modalidade de benefício definido. Por meio de construção de árvores de cenários para o problema de programação estocástica, em que em cada nó da árvore representa uma possível realização do conjunto de variáveis econômicas e atuariais, são obtidas as soluções ótimas possibilitando determinar a alocação ótima inicial para os ativos.

O presente trabalho estudo apresenta os conceitos técnicos de seguros gerais, mais especificamente seguros de vida individual. O principal estudo utilizado como referência para o desenvolvimento do plano de seguro de vida individual, utilizado como modelo neste trabalho, foram os quatro volumes de Ferreira (1985).

Com relação ao modelo de ALM e programação estocástica, foram utilizados como referências principais, os estudos apresentados por Figueiredo (2011) e Valladão (2008), sendo que do primeiro foi extraído o modelo matemático criado para um fundo de pensão, adaptado para um seguro de vida individual.

### 3. SEGURO DE VIDA INDIVIDUAL

#### 3.1 NOÇÕES FUNDAMENTAIS DO SEGURO EM GERAL

Antes de entender o funcionamento de seguro de vida individual, faz-se necessário compreender o funcionamento básico dos seguros em geral.

Etimologicamente, conforme Ferreira (1985), a palavra **SEGURO** apresenta um sentido de algo livre, isento de perigo, garantido, acautelador. Também pode ser entendida como amparo ou garantia. Já no âmbito do conceito técnico do **SEGURO**, podemos interpretá-lo como sendo um “contrato aleatório em que uma das partes se obriga a indenizar a outra de um perigo ou prejuízo eventual, pessoal ou material” (FERREIRA, 1985).

Graças ao seguro, é possível reestabelecer o equilíbrio perturbado pela realização de um acontecimento fatal e certo como a morte de pessoas, ou incerto e possível, como a perda de um bem, por exemplo. Nos primórdios, o seguro era utilizado para garantir prejuízos causados pelos riscos marítimos, mas com o decorrer dos tempos e com a evolução da civilização, a abrangência do seguro estendeu-se a novos ramos e atualmente é possível oferecer garantias a diversas atividades. Por esse motivo, é difícil apresentar uma definição que abranja todos os riscos conhecidos e os ainda não conhecidos.

Dentre diversas definições clássicas do seguro, está a de Celso Affonso Garreta Prats, inserida em sua obra “Manual de Previdência Social e Acidentes de Trabalho”, publicado em São Paulo, Brasil, em 1971:

“**SEGURO** – que constitui, justamente, a previsão que tem por finalidade reparar ou compensar as consequências de eventos danosos, previamente selecionados, contra os quais se procurou garantir mediante o pagamento de quotas pagas pelo segurado”.

Ou ainda, a definição de Almicar Santos, em sua obra “Seguro – Doutrina, Legislação, Jurisprudência”, publicado no Rio de Janeiro, Brasil, em 1959:

“**SEGURO** – é a proteção econômica que o indivíduo busca para prevenir-se contra necessidades aleatórias”.

Quanto aos tipos de risco (será definido adiante) que atualmente são objetos de seguro, temos: vida, acidente, saúde, invalidez, desemprego, incêndio, transporte, marítimo, automóvel, responsabilidade civil, etc.

Definição dos principais termos técnicos utilizados em uma operação de seguro em geral:

- Risco – é um evento futuro, incerto e possível. Sua ocorrência independe da vontade do segurado ou da seguradora. Ex: roubo de carro em um seguro de automóvel ou morte em um seguro de vida;
- Objeto do seguro – é o bem segurado. Ex: automóvel, casa, residência, vida humana, etc.;
- Sinistro – é a ocorrência do risco. Quando um bem seguro exposto ao risco é atingido pelo evento previsto, caracteriza-se o sinistro;
- Segurado – “é a pessoa em relação a quem se assume a responsabilidade do risco”<sup>6</sup>. No caso de seguro de vida, o segurado é também o objeto segurado. No caso de um seguro de automóvel, o segurado é o responsável pelo objeto segurado, quem paga os prêmios (será definido adiante) à seguradora e quem receberá a indenização na ocorrência do sinistro;
- Beneficiário – é a pessoa indicada na proposta de seguro que receberá a indenização do seguro, caso ocorra o sinistro. Em um seguro de vida, por exemplo, o segurado pode indicar seu cônjuge como beneficiário e este receberá a indenização da seguradora caso o ocorra o sinistro;
- Segurador – é a pessoa jurídica que assume a responsabilidade pelo risco;
- Prêmio – é o valor que o segurado paga ao segurador para que este possa garantir a cobertura do risco;
- Importância Segurada ou Capital Segurado – é o montante que a sociedade seguradora irá indenizar ao beneficiário do seguro na ocorrência do sinistro.

### 3.2 CONCEITO DO SEGURO DE VIDA

Consta no Decreto-lei nº 2063, de 7 de março de 1940:

“SEGURO DE VIDA – entendemos como os que, com base na duração da vida humana, tenham por fim garantir aos segurados ou a terceiros o pagamento, dentro de determinado prazo e condições, de quantia certa, renda ou outro benefício.”

---

<sup>6</sup> “Estudo sobre o Seguro Vida”, de WEBER JOSÉR FERREIRA – M.I.B.A. Publicação do IRB 1956.

Já as “Noções Fundamentais de Seguros”<sup>7</sup> definem-no da seguinte forma:

“SEGURO DE VIDA – chama-se aquele em que a duração da vida humana serve de base para o cálculo do prêmio devido ao segurador para que este se obrigue a pagar ao beneficiário do seguro um capital ou uma renda determinada, por morte do segurado, ou no caso deste sobreviver a um determinado prazo convencionado”.

### 3.2 PRINCIPAIS TIPOS SEGUROS DE VIDA INDIVIDUAL

Conforme mencionado no item anterior, há várias modalidades de seguros. Dentro do seguro de vida também há diversas divisões, sendo agrupadas principalmente entre seguro de vida em grupo ou coletivo e seguros de vida individual (conforme mencionado no capítulo 1).

Este estudo não irá abordar o seguro de vida em grupo, pois são contratos de curto prazo. O enfoque deste trabalho é o seguro de vida individual, pois conforme mencionado anteriormente, por tratar contratos de longo prazo, existe a necessidade de um gerenciamento eficiente dos ativos que irão garantir as obrigações assumidas pela entidade seguradora.

Os principais tipos de seguro de vida individual e seguros de cobertura por sobrevivência são:

- Vida Inteira – garante aos beneficiários a indenização pela morte do segurado a qualquer época – cobertura vitalícia;
- Vida Temporário – garante aos beneficiários a indenização pela morte do segurado quando ocorrida dentro de um período pré-determinado;
- Sobrevivência ou Dotal – garante a indenização ao próprio segurado caso este sobreviva ao período contratado;
- Dotal Misto – é a combinação entre o Vida Temporário e o Dotal, ou seja, é garantido o capital segurado por morte aos beneficiários caso o evento ocorra durante o período contratado. Caso o segurado sobreviva a esse período, é garantido a ele mesmo o capital segurado por Dote (ou sobrevivência).

---

<sup>7</sup> Publicação nº 15 do IRB

### 3.3 COMPOSIÇÃO DO PRÊMIO E RESERVA MATEMÁTICA PARA UM SEGURO DE VIDA INDIVIDUAL

Um seguro de vida individual opera no regime financeiro de capitalização que considera o prêmio nivelado durante o período de vigência do contrato de seguro. Para entender a metodologia de cálculo do prêmio, faz-se necessário primeiramente o entendimento das tábua de mortalidade.

De acordo com Ferreira (1985), “a idade inicial de um grupo de pessoas” e o “número de pessoas componentes deste grupo” representam o ponto de partida para a formação de uma tábua de mortalidade. Com esses dados são iniciadas as observações da mortalidade de um determinado grupo, registrando-se as idades consecutivas, a quantidade de pessoas falecidas e de sobreviventes durante um ano, até a extinção total do grupo.

O símbolo  $l_x$  representa o número de pessoas que, pela tábua de mortalidade, atinge exatamente a idade  $x$  no prazo de um ano. Pela eliminação sucessiva, conclui-se que não resta nenhum sobrevivente do grupo inicial, uma vez  $l_x$  é função decrescente. A idade final da tábua é definida pela letra grega “ $w$ ” (ômega).

Portanto, temos que:

$$l_w = 0$$

e,

$$l_{w-1} \neq 0$$

Seja  $d_x$  igual ao número de pessoas mortas com idade  $x$ , podemos dizer que:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Seja  $p_x$  a probabilidade de uma pessoa de idade  $x$  sobreviver um ano, temos que:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

A probabilidade de uma pessoa de idade “ $x$ ” sobreviver por um período de dois anos é dada por:

$$2p_x = p_x \times p_{x+1}$$

$$2p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \times \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} = \frac{l_{x+2}}{l_x}$$

Logo, a probabilidade de uma de idade “ $x$ ” sobreviver a um período de “ $n$ ” anos é dada por:

$$np_x = p_x \times p_{x+1} \times p_{x+2} \times \dots \times p_{x+n-1}$$

$$np_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \times \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \times \dots \times \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Seja  $q_x$  a probabilidade de uma pessoa de idade  $x$  morrer dentro de um ano, antes de atingir a idade  $x + 1$ , temos que :

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

Por dedução, temos ainda:

$$\begin{aligned} d_x &= l_x \times q_x \\ q_x &= \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \\ q_x &= 1 - p_x \\ p_x &= 1 - q_x \end{aligned}$$

A probabilidade de uma pessoa de idade "x" falecer entre  $x + 1$  e  $x + 2$  é:

$$1|q_x = \frac{d_{x+1}}{l_x}$$

A probabilidade de uma pessoa de idade "x" falecer entre  $x + 2$  e  $x + 3$  é:

$$2|q_x = \frac{d_{x+2}}{l_x}$$

Logo, a probabilidade de uma pessoa de idade "x" falecer entre  $x + n$  e  $x + n + 1$  é:

$$n|q_x = \frac{d_{x+n}}{l_x}$$

O cálculo do prêmio para um seguro Dotal Misto com cobertura de morte para um segurado de idade "x" no início de vigência de um plano que possui contrato de "n" anos de duração e uma cobertura de sobrevivência (Dote) caso o segurado sobreviva  $x + n$  anos é dado por:

Prêmio Puro Anual (PPA) é o prêmio anual antes dos carregamentos (taxas de administração, despesas com comercialização, margem de lucro da seguradora, etc.). O PPA será a soma do PPAM (Prêmio Puro Anual para a cobertura de Morte) e do PPAD (Prêmio Puro Anual para o Dote ou Sobrevivência).

O valor do PPA será o resultado entre a divisão do Valor Presente do Risco (VPR) da seguradora sobre o valor presente das anuidades unitárias de pagamentos que deverão ser realizadas no início de cada ano pelo segurado.

Valor Presente do Risco Futuro (VPR) ou obrigações futuras da seguradora:

$i$  = taxa de juros anual (taxa mínima garantida pelo produto).

Dado que:

$$v = \left(\frac{1}{i}\right);$$

$CS_{morte}$  = Capital segurado por Morte;

$CS_{Dote}$  = Capital Segurado de Dote ou Sobrevivência; e

$t$  é o instante em anos de vigência do contrato de seguro, temos que:

$$VPR_{morte} = CS_{morte} \times \left[ v \times \frac{d_x}{l_x} + v^2 \times \frac{d_{x+1}}{l_x} + \dots + v^n \times \frac{d_{x+n-1}}{l_x} \right]$$

$$VPR_{morte} = CS_{morte} \times \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} t | q_x$$

$$VPR_{Dote} = CS_{Dote} \times v^n \times np_x$$

$\ddot{a}_{x:\overline{n}}$  = Valor presente das anuidades unitárias de pagamentos que deverão ser realizadas no início de cada ano pelo segurado (VPP) durante o período "n" de vigência do seguro

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}} = v^0 \times 0 p_x + v^1 \times 1 p_x + v^2 \times 2 p_x + \dots + v^{(n-1)} \times (n-1) p_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \times tp_x$$

Logo,

$$PPA = \frac{CS_{morte} \times \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} t | q_x + CS_{Dote} \times v^n \times np_x}{\sum_{t=0}^{n-1} v^t \times tp_x}$$

Sendo  $\alpha$  = percentual de carregamento, temos que o Prêmio Comercial Anual será dado por:

$$PCA = \frac{PPA}{(1 - \alpha)}$$

Por fim, a cada período a seguradora deverá constituir a Reserva Matemática (RM) para o período. Nesse estudo, calcularemos a RM por meio do método de recorrência anual, ou seja:

$$RM_t = \frac{(RM_{t-1} + PPA - CS_{morte} \times q_{x+t}) \times (1 + i) * (1 + inf)}{p_{x+t}}$$

Onde:

inf = Inflação no período

Apresenta-se a seguir, uma demonstração da aplicação da formulação acima. Suponhamos um contrato de seguro de vida individual com as seguintes características:

Idade de ingresso = 25 anos

Prazo de vigência do seguro = 20 anos

Capital Segurado de Morte = Dote = R\$ 36.000,00

Taxa de juros anual garantida ( $i$ ) = 6% a.a.

Inflação hipotética de 4,5% a.a.

A tabela a seguir apresenta a composição do PPA e Reserva Matemática para todo o período de vigência do contrato desse contrato ( $t$ ):

t	idade (x)	PPA Morte	Reserva Morte	PPA Sobr.	Reserva Sobr.	Reserva Total	PCA
0	25	54,18	9,38	902,97	1.001,49	1.010,87	1.367,35
1	26	56,61	20,20	943,60	2.157,32	2.177,52	1.428,88
2	27	59,16	33,09	986,07	3.486,32	3.519,41	1.493,18
3	28	61,82	47,85	1.030,44	5.009,53	5.057,38	1.560,38
4	29	64,61	65,21	1.076,81	6.750,27	6.815,48	1.630,59
5	30	67,51	84,51	1.125,26	8.734,74	8.819,25	1.703,97
6	31	70,55	105,94	1.175,90	10.991,98	11.097,92	1.780,65
7	32	73,73	129,18	1.228,82	13.554,46	13.683,64	1.860,78
8	33	77,04	152,08	1.284,11	16.458,91	16.610,99	1.944,51
9	34	80,51	173,74	1.341,90	19.745,99	19.919,74	2.032,01
10	35	84,13	193,66	1.402,28	23.460,90	23.654,57	2.123,46
11	36	87,92	210,64	1.465,39	27.654,27	27.864,91	2.219,01
12	37	91,88	223,21	1.531,33	32.382,65	32.605,85	2.318,87
13	38	96,01	229,62	1.600,24	37.709,21	37.938,83	2.423,22
14	39	100,33	228,55	1.672,25	43.704,13	43.932,69	2.532,26
15	40	104,85	216,93	1.747,50	50.446,66	50.663,59	2.646,21
16	41	109,56	191,90	1.826,14	58.025,01	58.216,92	2.765,29
17	42	114,49	150,11	1.908,32	66.537,86	66.687,97	2.889,73
18	43	119,65	87,66	1.994,19	76.095,58	76.183,24	3.019,77
19	44	125,03	0,00	2.083,93	83.082,97	83.082,97	3.155,66

Figura 3 - Exemplo numérico de cálculo de seguro de vida individual

### 3.4 PROJEÇÃO DO PASSIVO ATUARIAL DE UM SEGURO DE VIDA INDIVIDUAL

No item anterior foi apresentada a metodologia de composição de prêmio e reserva matemática para um seguro de vida individual para um segurado em um dado instante de tempo qualquer ( $t$ ). A seguir, será apresentada a formulação de como deve ser a evolução do fluxo de caixa de uma determinada carteira de segurados, onde será obtido o resultado total da carteira (receitas menos despesas) em cada período. Ou seja, com a formulação do item 3.3 é possível determinar a reserva matemática total em uma data-base qualquer que também pode ser compreendida com o montante de ativos disponíveis para investimentos naquela data. Neste item será tratada a evolução dessa reserva matemática e os fluxos (receitas e despesas) para os períodos (em anos) seguintes.

Seja  $\kappa$  o instante de tempo em anos da projeção, de forma que  $\kappa = 0, 1, 2, 3, \dots, n$  e  $\kappa = 0$  é o ano base ou início da projeção, sendo  $n$ , o prazo máximo de tempo de cobertura previsto no produto.

$l_\kappa$  representa o total de segurados ativos em cada instante  $\kappa$  da projeção.

$w$  é a taxa de cancelamento anual do segurado determinado com base na experiência da seguradora. A taxa de cancelamento irá determinar o número de segurados que serão cancelados em cada ano e consequentemente, a seguradora deverá restituir a reserva matemática constituída. Por simplificação, vamos considerar um produto que devolva cem por cento da reserva matemática no momento do cancelamento, entretanto, vale lembrar que de acordo com as características do produto, é permitido a seguradora cobrar uma taxa de saída do plano.

Dessa forma, a evolução dos segurados ou vidas expostas em cada instante de projeção será dada por:

Para  $\kappa=0$ , o total de vidas seguradas expostas ( $l_\kappa$ ) será correspondente ao total de segurados ativos no plano no instante inicial da projeção. Cada segurado (ou vida) individual será representado por  $m$  e  $z$  é o representa o número máximo (total) de segurados ativos no instante inicial  $\kappa = 0$ .

De forma que em  $\kappa = 0$ ,  $l_\kappa = z$

Para  $\kappa \geq 1$ , temos que:

$$\sum_{\kappa=1}^{n-1} \sum_{m=1}^z l_{m\kappa} = l_{\kappa-1m} \times (1 - q_{x\kappa m}) \times (1 - w)$$

A reserva matemática total da carteira em cada instante  $\kappa$  da projeção é dada por:

$$RM_\kappa = \sum_m^z RM_{t=k m} \times l_\kappa$$

O Prêmio Comercial Anual (PCA) total da carteira em cada instante  $\kappa$  da projeção é dada por:

$$PCA_\kappa = \sum_m^z PCA_{t=k m} \times l_\kappa$$

O valor da despesa de comissão total da carteira paga ao corretor e/ou agenciador do seguro em cada instante  $\kappa$  da projeção é dada por:

$$Comissão_\kappa = PCA_\kappa \times \% \text{ de comissão do produto}$$

A despesa de administração (DA) total da carteira é dada pela multiplicação do PCA pelo percentual de DA em cada instante  $\kappa$  da projeção, conforme segue:

$$DA_\kappa = PCA_\kappa \times \% DA$$

A despesa total com sinistros projetada para cada instante  $\kappa$  da projeção é dado por:

$$Sinistro_\kappa = \sum_m^z CS_{morte_{\kappa m}} \times q_{x_m} \times (1 - \frac{1}{2}w)$$

O total de resgates (reserva matemática paga ao segurado que cancela o plano) em cada instante  $\kappa$  da projeção é dado por:

$$Resgate_\kappa = \sum_m^z RM_{t=k_m} w \times (1 - q_{x_m})$$

O valor esperado total de pagamentos com as maturidades (capital segurado por sobrevivência pago ao segurado que atingiu com vida o término da vigência do contrato) em cada instante  $\kappa$  da projeção é dado por:

$$Maturidade_\kappa = \sum_m^z CS_{Dote_{t=n_m}} \times l_\kappa$$

Finalmente, o fluxo de caixa (receitas menos despesas) total projetado em cada instante  $\kappa$  é dado por:

$$Fluxo_\kappa = PCA_\kappa - DA_\kappa - Comissão_\kappa - Sinistro_\kappa - DA_\kappa - Resgate_\kappa - Maturidade_\kappa$$

## 4 ALM E PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA

### 4.1 Asset and Liability Management – A.L.M.

*Asset and Liability Management*, ou simplesmente ALM, pode ser interpretado, para uma sociedade seguradora, como a arte de planejar suas estratégias de investimentos do lado do ativo visando maximizar o resultado do passivo atuarial<sup>8</sup> assumido pela sociedade.

O ALM pode ter aspectos diferentes de acordo com o setor de atuação. Para efeitos deste estudo, conforme mencionado anteriormente, será tratado o ALM especificamente para um seguro de vida individual.

O gerenciamento de ativos e passivos pode ser executado de diversas formas. Atualmente, a metodologia mais comumente utilizada no mercado brasileiro é o ALM por *duration* (duração média). Nessa metodologia, os ativos são gerenciados de acordo com a *duration* de cada passivo que geralmente é agrupado pela sociedade seguradora conforme a taxa de juros garantida pelo plano e/ou seu indexador.

Já a técnica de ALM por programação estocástica, proposta deste estudo, é uma metodologia mais sofisticada e complexa que pode gerar resultados mais eficientes para as seguradoras, desde que bem aplicada. Essa técnica visa encontrar um portfólio ótimo dinâmico que pode se alterar ao longo do tempo.

Nos próximos itens serão apresentados os elementos necessários para o processo de ALM por programação estocástica.

### 4.2 MODELAGEM DO ATIVO

Para a modelagem do ativo da seguradora será adotada a metodologia apresentada por Figueiredo (2011) em sua dissertação de Mestrado, adaptando-a para uma carteira de seguro de vida individual. Para o completo entendimento de todas as passagens e deduções matemáticas da programação estocástica e geração da árvore de cenários, recomenda-se a análise da referida dissertação que apresenta em detalhes os conceitos e passagens matemáticas. Neste estudo, será transcrito o conteúdo mínimo necessário para adaptar a sua proposta a um seguro de vida individual.

---

<sup>8</sup> Obrigações assumidas com o segurado conforme as bases técnicas atuariais do plano de seguro contratado.

#### 4.2.1 PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

A Programação Matemática (P.M.) é utilizada para encontrar a melhor solução para um problema qualquer, dada uma função objetivo e as restrições determinadas. Um problema desse tipo pode ser escrito como:

$$\min f(x)$$

Sujeito a

$$x \in S$$

Sendo:

$x \in R^n$  = vetor de decisão que se deseja obter

$f(x)$  = função objetivo do problema, a qual se deseja minimizar (no exemplo acima)

$S$  = conjunto de soluções possíveis

A Programação Linear (P.L.) é um tipo de Programação Matemática no qual a função objetivo e as restrições são todas lineares. Esse tipo de programação geralmente é escrito como:

$$\min c'x$$

Sujeito a

$$Ax = b,$$

$$x \geq 0$$

Sendo:

$x \in R^n$  = a variável de decisão que se deseja encontrar

$c \in R^n$  = vetor de custos

$b \in R^n$  = vetor das restrições

$A$  = matriz de dimensão  $m \times n$

#### 4.2.2 PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA

Enquanto a Programação Matemática trata os problemas de forma a obter-se uma decisão ótima, a Programação Estocástica (P.E.) trata a tomada de decisão de um problema com a presença de incertezas. Em outras palavras, a Programação Estocástica pode ser entendida como uma Programação Matemática com parâmetros aleatórios.

Conforme apresentado por Figueiredo (2011) no item 2.2 de sua dissertação de Mestrado, um problema de programação estocástica multiestágio com restrições lineares que pode ser escrito na forma:

$$\min f(x_0) + E \left[ \min_{x_1 \in R_+^{n_1}} q_1(x_1, \omega_1) + \dots + E \left[ \min_{x_T \in R_+^{n_T}} q_T(x_T, \omega_T) \right] \dots \right],$$

Sujeito a

$$\begin{aligned} W_0 \cdot x_0 &= h_0, \\ T_t(\omega_t) \cdot x_{t-1} + W_t(\omega_t) \cdot x_t &= h_t(\omega_t), \quad t = 1, \dots, T, \\ x_0 &\in R_+^{n_0}, \end{aligned}$$

onde  $x$  é a variável de decisão do primeiro estágio e  $x_t$ , com  $t = 1, \dots, T$ , representa a variável de recurso do  $(t + 1)$  – ésimo estágio.

E a forma deterministicamente equivalente:

Seja o conjunto  $\Omega$  tal que  $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_N$ , com cada um dos conjuntos  $\Omega_T$  finitos,  $\Omega_T = \{\omega_{t,1}, \dots, \omega_{t,N}\}$ , com  $t = 1, \dots, T$ .

Um cenário será definido como um vetor  $(\omega_{1,i_1}, \dots, \omega_{T,i_T})$ , em que cada um de seus componentes  $\omega_{T,i_T} \in \Omega_T$  é dito um estado do instante  $t$ . De modo análogo, um vetor  $(\omega_{1,i_1}, \dots, \omega_{t,i_t})$ , composto por uma sequência de estados de instantes 1 até  $t$ , será chamado de cenário de instante  $t$ .

A probabilidade de ocorrência de  $\omega_{t,i}$ ,  $i$ -ésimo possível estado de instante  $t$ , será denotado por  $p_{t,i}$  e será tal que

$$p_{t,i} = P(\omega_t = \omega_{t,i}),$$

com

$$p_{t,i} \geq 0$$

e

$$\sum_{i=1}^{N_t} p_{t,i} = 1,$$

com  $t = 1, \dots, T$  e  $i = 1, \dots, N_T$  e onde  $\omega_t$  corresponde ao  $t$ -ésimo componente do vetor aleatório  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_t, \dots, \omega_T)$ .

Assim, na forma deterministicamente equivalente, o problema fica da seguinte maneira:

$$\min f(x_0) + \left[ \sum_{i_1=1}^{N_1} p_{1,i_1} q(x_{1,i_1}, \omega_{1,i_1}) \right] + \dots + \left[ \sum_{i_T=1}^{N_T} p_{T,i_T} q(x_{T,i_T}, \omega_{1,i_T}) \right],$$

*sujeito a*

$$\begin{aligned}
 W_0 \cdot x_0 &= h_0, \\
 T(\omega_{1,i_1}) \cdot x_0 + W(\omega_{1,i_1}) \cdot x_{1,i_1} &= h(\omega_{1,i_1}), \quad \forall \omega_{1,i_1} \in \Omega_1 \\
 T(\omega_{2,i_2}) \cdot x_{a(2,i_2)} + W(\omega_{2,i_2}) \cdot x_{2,i_2} &= h(\omega_{2,i_2}), \quad \forall \omega_{2,i_2} \in \Omega_2 \\
 &\vdots \\
 T(\omega_{T,i_T}) \cdot x_{a(T,i_T)} + W(\omega_{T,i_T}) \cdot x_{T,i_T} &= h(\omega_{T,i_T}), \quad \forall \omega_{T,i_T} \in \Omega_T
 \end{aligned}$$

e sujeito às restrições de sinal

$$\begin{aligned}
 x_0 &\in R_+^{no} \\
 x_{1,i_1} &\in R_+^{n_1}, i_1 = 1, \dots, N_1 \\
 &\vdots \\
 x_{T,i_T} &\in R_+^{n_T}, i_T = 1, \dots, N_T
 \end{aligned}$$

Onde  $x_{a(t,i_t)}$  denota a decisão tomada no estado antecessor ao estado  $\omega_{t,i_t}$ .

#### 4.2.3 ALM PARA UM SEGURO DE VIDA INDIVIDUAL

Com base no exposto anteriormente, nas próximas páginas será demonstrada uma adaptação para um seguro individual do estudo apresentado por Figueiredo (2011) em sua dissertação de Mestrado.

A gestão dos ativos que lastreiam as reservas matemáticas de uma seguradora pode ser definida como um problema de programação matemática uma vez que possui uma série de restrições e existe uma função objetivo a ser otimizada.

Quanto às restrições para a gestão dos ativos de uma seguradora, podemos destacar:

- Restrições de balanço;
- Restrições de inventário;
- Restrições de alocação; e
- Restrições de liquidez.

A formulação apresentada no item a seguir foi baseada nas notas de aula do curso de ALM com programação estocástica ministrado na BMF Bovespa no ano de 2010 em São Paulo – SP, ministrado pelo Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa.

#### 4.2.3.1 RESTRIÇÕES DE BALANÇO

Determina a evolução da riqueza dos ativos como por exemplo, a forma de se considerar o acúmulo do passivo - no início; no meio; ou no fim do período. No exemplo apresentado neste trabalho iremos tratar o acúmulo no final do período anual. Nesta restrição são definidos também os tratamentos com empréstimo, por exemplo. No último estágio não há decisão de compra, venda ou empréstimo, é o momento em que se define o superávit ou déficit em relação aos ativos.

Consideremos para  $0 < t < T$  os nós  $y \in A(t-1)$  e  $x \in B(t, y)$ . A equação de balanço é:

$$(1 + r_0(y))a_0(y) + e(x) - (1 + \rho + r_1(y, x))e(y) - Fluxo_{\kappa} - \sum_{i \in I} [(1 + \kappa)c_i(x) + (-1 + \kappa)v_i(x)] = a_0(x), \quad t = 1, \dots, T-1$$

De modo que as variáveis de decisão são:

$$c_i(x), v_i(x), i \in I, e(x)$$

Onde,

$a_i$  = valor alocado no ativo i

$c_i$  = valor comprado do ativo i

$v_i$  = valor vendido do ativo i

$r_i$  = retorno do ativo i

$e$  = valor tomado como empréstimo

$\rho$  = spread de taxa de empréstimo sobre juros

$\kappa$  = custo de transação por compra e venda

Já para o último estágio ( $T + 1$ ), conforme mencionado anteriormente, não há decisão de compra, venda ou empréstimo, temos a definição do superávit ou déficit em relação ao valor dos ativos rentabilizados.

#### 4.2.3.2 RESTRIÇÕES DE INVENTÁRIO

Nesta restrição, o valor investido no ativo em  $t$  será o valor do ativo em  $t - 1$  somado das compras e subtraído das vendas no intante  $t$ . Assim, se considerarmos os nós  $y \in A(t-1)$  e  $x \in B(t, y)$ , é possível encontrar a equação de inventário dos ativos, conforme segue:

$$a_i = (1 + r_i(y, x))a_i(y) + c_i(x) - v_i(x), i \in I, t = 1, \dots, T-1$$

Importante: o caixa não se aplica à equação acima

Restrição de inventário no 1º estágio:

$$a_i = a_i(0) + c_i - v_i, i \in I,$$

$$a_0 = a_0(0) - \sum_{i \in I} (c_i - v_i) - \kappa \sum_{i \in I} (c_i - v_i) + e$$

#### 4.2.3.3 RESTRIÇÕES DE ALOCAÇÃO

Deve-se ainda considerar a restrição do percentual máximo alocado a um determinado ativo, de acordo com a regulamentação do tipo de produto. Seja os ativos com essa restrição denotados por  $I_m \subset I$ . Para  $x \in A(t), t = 0, \dots, T$ , tem-se:

$$a_i(x) \leq \varphi_i \sum_{i \in I_0} a_i(x), \quad i \in I_m$$

Onde,

$\varphi_i$  = percentual máximo alocado no ativo  $i$

#### 4.2.3.4 RESTRIÇÕES DE LIQUIDEZ

Essa restrição é utilizada para evitar que um gestor compre ou venda mais títulos do que a capacidade do mercado. Nesse caso, temos para  $x \in A(t), t = 0, \dots, T$ :

$$\begin{aligned} c_i(x) &\leq \lambda_i, i \in I \\ v_i(x) &\leq \beta_i, i \in I \end{aligned}$$

## 5 APLICAÇÃO PARA UMA CARTEIRA DE SEGURO DE VIDA INDIVIDUAL

O objetivo deste capítulo é apresentar uma aplicação prática de um ALM com programação estocástica para uma carteira de seguro de vida individual.

### 5.1 DADOS DO PLANO

Para efeitos de simulação deste estudo, será considerado um plano de seguro de vida individual padrão com as seguintes características:

- Cobertura de Morte por um prazo de vinte anos, ou seja, caso ocorra o falecimento do segurado durante o período de vigência do contrato, os beneficiários por ele indicados irão receber o Capital Segurado contratado;
- Cobertura de sobrevivência ou Dote. Caso sobreviva o prazo de vigência do seguro (vinte anos), a seguradora irá garantir ao próprio segurado o capital contratado;
- O segurado pode cancelar o contrato de seguro a qualquer momento e nesse caso terá direito a cem por cento da Reserva Matemática constituída até o momento do cancelamento;
- Bases técnicas do Plano:
  - i. Tábua biométrica utilizada para as coberturas de sobrevivência e de mortalidade<sup>9</sup>: BR-EMSmt-v.2010-m<sup>10</sup>
  - ii. Taxa de juros: 6% a.a.
  - iii. Hipótese de cancelamento: 5% a.a.
  - iv. Inflação anual: 4,5% a.a.
  - v. Carregamento: 30 % do PCA, sendo 5% para as despesas de comissão dos corretores; 8% para despesas administrativas da seguradora (D.A.) e

<sup>9</sup> Por simplificação, será considerada neste estudo uma única tábua biométrica para ambas as coberturas (morte e sobrevivência), entretanto, em uma situação real é recomendável que a seguradora utilize tábuas que melhor aderem à sua experiência, podendo inclusive ser tábuas distintas para cada uma das coberturas, se for o caso.

<sup>10</sup> Tábua de mortalidade desenvolvida a partir da experiência do mercado segurador brasileiro, conforme aprovação da Susep por meio da CIRCULAR SUSEP Nº 402, de 18 de março de 2010. Os dados da tábua estão disponíveis no anexo B

17% de margem de lucro e de segurança para cobertura de eventuais desvios.

## 5.2 DADOS DA CARTEIRA

Para a composição da carteira hipotética utilizada nas simulações a seguir, foi considerada a distribuição de uma carteira real de um seguro de vida individual comercializado por uma seguradora no mercado brasileiro. Com base nessa carteira, foram escolhidas três das variáveis importantes, que são:

- Idade do segurado;
- Tempo de plano da data do levantamento; e
- Valores dos Capitais Segurados.

Com base da distribuição real das variáveis acima, foram gerados aleatoriamente mil segurados para nossas simulações, conforme apresentado a seguir.

- Distribuição da idade

No gráfico a seguir, o eixo horizontal representa a idade do segurado no ingresso do plano enquanto o eixo vertical indica a quantidade de segurados.

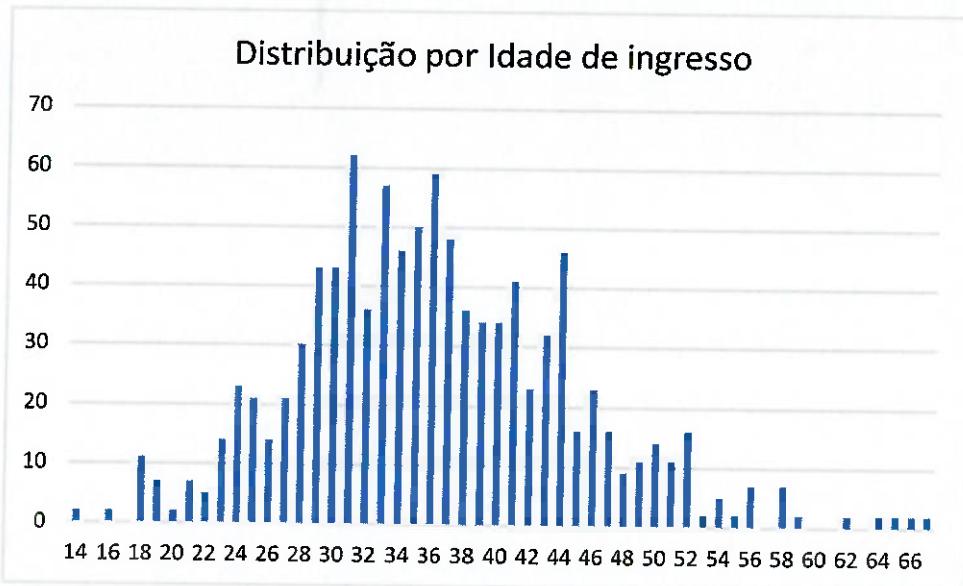
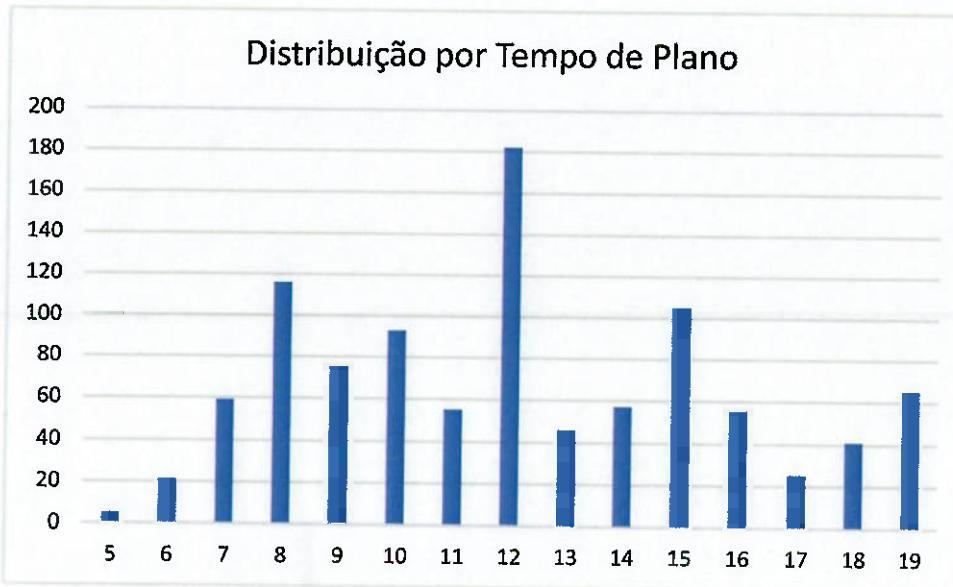


Figura 4 - Distribuição da idade de ingresso da carteira de segurados

- Distribuição de tempo de plano na data-base da projeção

No gráfico a seguir, o eixo horizontal representa o tempo de plano em anos enquanto o eixo vertical indica a quantidade de segurados nessa condição na data-base.



*Figura 5 - Distribuição por Tempo de Plano da carteira de segurados*

- Distribuição dos Capitais Segurados

No gráfico a seguir, o eixo horizontal representa o valor do Capital Segurado contratado enquanto o eixo vertical indica a quantidade de segurados nessa condição na data-base.



Figura 6 - Distribuição dos Capitais Segurados

Com base nessa distribuição, foram aplicadas as formulações apresentadas no item 3.3 para a composição do prêmio comercial anual (PCA) e da reserva matemática para cada um dos mil segurados. Dessa forma, o valor total do PCA da carteira é de R\$ 9.676.606,72 com uma Reserva Matemática total de R\$ 136.425.813,29

Em seguida, foram aplicadas as fórmulas apresentadas nos itens 3.4 de forma a obter o fluxo de caixa esperado do passivo atuarial do plano, conforme segue;

Tempo de projeção	# segurados	PCA	Reserva Total	Comissão	DA	Benefícios				Fluxo de Caixa
						Sinistros	Resgates	Maturidade		
0	1.000,00	9.676.606,52	136.425.813,29							
1	901,54	9.227.679,50	140.249.655,28	461.383,97	738.214,36	1.475.741,91	6.985.875,33	7.090.695,09	-7.524.231,17	
2	815,03	8.785.433,15	143.856.145,24	439.271,56	702.834,65	1.522.515,77	7.163.119,61	9.510.650,41	-10.552.958,96	
3	749,53	8.189.706,32	143.378.761,31	409.485,32	655.176,51	1.469.368,44	7.138.852,34	13.107.228,57	-14.590.404,84	
4	664,29	7.373.950,96	136.045.900,63	368.697,55	589.916,08	1.304.522,40	6.775.068,17	24.692.171,43	-26.356.424,67	
5	548,45	5.950.868,94	111.565.776,82	297.543,45	476.069,52	1.037.129,17	5.556.761,29	6.220.325,57	-7.636.960,05	
6	476,48	5.528.926,54	110.819.235,28	276.446,33	442.314,12	1.059.847,89	5.517.230,93	9.022.914,44	-10.789.827,17	
7	419,11	4.892.466,09	103.321.666,73	244.623,30	391.397,29	964.085,19	5.143.645,07	23.170.642,87	-25.021.927,63	
8	283,44	3.332.725,32	71.356.959,76	166.636,27	266.618,03	591.167,24	3.554.551,00	5.386.296,84	-6.632.544,06	
9	235,34	2.912.677,95	66.143.911,99	145.633,90	233.014,24	515.456,02	3.295.157,18	12.689.737,46	-13.966.320,85	
10	168,83	2.028.645,44	47.075.744,55	101.432,27	162.291,63	426.852,29	2.343.415,82	7.472.765,87	-8.478.112,45	
11	118,61	1.467.468,42	34.835.775,33	73.373,42	117.397,47	368.363,78	1.732.435,11	11.947.134,64	-12.771.236,00	
12	42,33	527.732,27	11.986.705,12	26.386,61	42.218,58	200.132,15	594.141,30	2.941.362,86	-3.276.509,24	
13	11,40	263.206,42	5.842.167,38	13.160,32	21.056,51	135.636,79	288.478,62	2.172.592,25	-2.367.718,07	
14	2,09	16.337,65	404.173,02	816,88	1.307,01	4.013,50	20.101,11	172.707,44	-182.608,29	
15										
16										
17										
18										
19										
20										

Figura 7 - Projeção do passivo atuarial do plano

Na tabela acima foi considerada uma projeção de 19 anos que é o período máximo de cobertura do plano utilizado para efeitos desta simulação. Observa-se na segunda coluna a evolução da quantidade de segurados esperados no final de cada ano da projeção, bem como a reserva matemática total projetada e o fluxo de receitas e despesas. Na última coluna, encontra-se o fluxo de caixa esperado para esse passivo. Esse fluxo, juntamente com a evolução da Reserva Matemática irão delinear as estratégias de investimentos para nossos ativos.

Observa-se ainda a completa extinção da carteira em 15 anos.

### 5.3 ALOCAÇÃO DA CARTEIRA DE ATIVOS

Os limites para alocação de recursos de ativos garantidores de reserva técnica ou matemática de uma sociedade seguradora estão estabelecidos na Resolução N° 3.308 do Banco Central do Brasil, de 31 de agosto de 2005. A regra completa com a alocação do máxima dos ativos está apresentada no anexo C deste estudo.

Assim, por simplificação, serão considerados para efeitos de simulação neste estudo apenas 2 ativos disponíveis para investimento, um que representa o caixa ( $i = 0$ ) e outro como sendo um ativo de risco ( $i = 1$ ). Não serão consideradas aplicações em imóveis. Quanto aos limites, será assumido neste estudo 90% para o caixa, considerando uma combinação entre aqueles títulos aos quais podem ser aplicados até 100% e aqueles em que há a limitação de 80% dos recursos aplicados. Já para a renda variável, será assumido o limite de 49%, ou seja, considerando que as aplicações atendam a todas as condições exigidas para se aplicar até esse limite.

## 5.4 ALM COM PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA

Conforme mencionado anteriormente, para simular um estudo de ALM com programação estocástica, será considerada a metodologia apresentada por Figueiredo (2011), adaptada para o segurado de vida individual desenvolvido conforme os itens 5.1 e 5.2 deste estudo.

O objetivo desta simulação será verificar a melhor alocação dos recursos constituídos na Reserva Matemática em  $t = 0$ . Conforme demonstrado no item 5.2, o total dessa reserva é de R\$ 136.425.813,29.

Para a programação do ALM cada estágio da árvore de cenários irá corresponder a um ano. Essa simulação conta com uma árvore de 6 estágios, sendo o instante  $t = 0$  o instante inicial e o instante final  $T = 5$ . Dessa forma, dado o passivo determinado no item 5.2, será determinada a alocação ótima dentre os ativos disponíveis conforme restrições definidas no item 5.4 para cobrir o fluxo do passivo nesse período, mais a Reserva Matemática necessária em  $T = 5$ .

Não foram consideradas restrições de liquidez, pois a periodicidade aplicada foi a anual.

Conforme já mencionado, por simplificação foram considerados apenas 2 ativos disponíveis para investimento, um que representa o caixa ( $i = 0$ ) e outro como sendo um ativo de risco ( $i = 1$ ).

Para determinar os parâmetros para a modelagem dos ativos, foram considerados os retornos anuais da taxa over do DI – Depósito Interfinanceiro<sup>11</sup> para ( $i = 0$ ) e do índice BOVESPA<sup>12</sup> para ( $i = 1$ ) a partir do ano de 2005 até o ano de 2013.

Com base nesses retornos históricos foi possível definir os seguintes retornos médios ( $\mu$ ) e matriz de covariância dos retornos ( $Q$ ) que serão os parâmetros desta simulação.

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,11 \\ 0,13 \end{bmatrix}$$

e a matriz de covariância

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_{0,0} & \sigma_{0,1} \\ \sigma_{1,0} & \sigma_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00089 & 0,00092 \\ 0,00092 & 0,1255 \end{bmatrix}$$

Sendo  $i = 0$  o caixa e  $i = 1$  o ativo de risco

Quanto aos custos de transação:

<sup>11</sup> [http://www.cetip.com.br/astec/series\\_v05/paginas/web\\_v04\\_10\\_03\\_consulta.asp](http://www.cetip.com.br/astec/series_v05/paginas/web_v04_10_03_consulta.asp)  
Conforme consulta do dia 17/07/2014 às 20:20h

<sup>12</sup> <http://www.bmfbovespa.com.br/indices/ResumoEvolucaoDiaria.aspx?Indice=Ibovespa&idioma=pt-br>  
Conforme consulta do dia 17/07/2014 às 20:29h

- Caixa – não foi considerado custo de transação;
- Ativos de risco - foi considerado um custo de 0,118%.<sup>13</sup>

Quanto aos parâmetros dos limites de alocação em cada ativo, serão considerados:

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 \\ 0,49 \end{bmatrix}$$

## 5.5 RESULTADOS – ALOCAÇÃO ÓTIMA DOS ATIVOS

O resultado da alocação ótima de ativos foi obtida por meio da geração de 200 árvores de cenários, conforme modelo apresentado por Figueiredo (2011) adaptado para um seguro de vida individual.

Resumidamente, a rentabilidade dos ativos deve no mínimo garantir o fluxo de caixa do passivo a seguir, mas a Reserva Matemática esperada em T=5 que é de R\$ 111.565.776,86.

Tempo de projeção	# segurados	Fluxo de Caixa
0	1.000,00	
1	901,54	<b>-7.524.231,17</b>
2	815,03	<b>-10.552.958,96</b>
3	749,53	<b>-14.590.404,84</b>
4	664,29	<b>-26.356.424,67</b>
5	548,45	<b>-7.636.960,05</b>

Figura 8 - Resumo do fluxo de caixa para os próximos cinco anos

Assim, dados os parâmetros anteriormente apresentados, foi gerada uma simulação conforme código em MATLAB apresentado no anexo A.

Resumidamente, a melhor alocação inicial dos ativos para cumprir com as obrigações futuras, conforme parâmetros acima definidos se dá por:

- Caixa: 51%
- Ativo de risco: 49%

<sup>13</sup> Estimativa baseada em um custo médio de 0,001 por transação mais 50 mil reais de custo fixo. Como há um limite máximo de alocação em renda variável de 49% (de acordo com a Resolução nº 3308 de 2005 do CMN) e a Reserva Matemática é de aproximadamente R\$ 136 MM, o custo fixo ficaria aproximadamente 0,0180% (50000/136000000\*0,49)

### i. Simulação 1

Com o objetivo de melhor compreender os resultados alcançados e possíveis impactos futuros, a seguir será apresentada uma simulação em que o retorno médio do ativo de risco seja igual ao caixa, ou seja:

Para:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,11 \\ 0,11 \end{bmatrix}$$

Verifica-se o resultado a seguir:

- Caixa: 89,97%
- Ativo de risco: 10,03%

### ii. Simulação 2

Nesta simulação, será apresentado o resultado com os retornos originais, entretanto, considerando uma volatilidade maior para o ativo de risco, ou seja:

Para:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,11 \\ 0,13 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_{0,0} & \sigma_{0,1} \\ \sigma_{1,0} & \sigma_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00089 & 0,00092 \\ 0,00092 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Verifica-se o resultado a seguir:

- Caixa: 51,67%
- Ativo de risco: 48,33%

### iii. Simulação 3

Por fim, nesta simulação será considerado um retorno maior para o ativo de risco, mantendo-se a matriz de covariância original:

Para:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,11 \\ 0,15 \end{bmatrix}$$

e a matriz de covariância

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_{0,0} & \sigma_{0,1} \\ \sigma_{1,0} & \sigma_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00089 & 0,00092 \\ 0,00092 & 0,1255 \end{bmatrix}$$

Verifica-se os seguintes resultados:

- Caixa: 51%
- Ativo de risco: 49%

## 6 CONCLUSÕES

Com base nos parâmetros apresentados no item 5.5, conclui-se que a alocação ideal no instante inicial é 51% no caixa e 49% nos ativos de risco, com base nos retornos médios e na matriz de covariância apresentada. Já com base na simulação nº 1, em que foram igualados os retornos médios de ambos os ativos, o resultado indicou a preferência do modelo ao caixa, isso se explica pelo fato de que a volatilidade do ativo de risco é muito superior ao caixa. Entretanto, na simulação nº 2, quando considerados novamente os retornos médios originais dos ativos, porém aumentando significativamente a volatilidade do ativo de risco, o resultado indicou uma redução no percentual a ser alocado no ativo de risco.

Assim, é possível concluir com base nos resultados apresentados que o modelo pode ser utilizado na prática como um importante instrumento de gestão de ativos e passivos para carteiras de seguro de vida individual.

## REFERÊNCIAS

- ALEXANDER, C. **Value-at-risk models - market risk analysis.** Chichester: John Wiley and Sons, 2008.
- BEALE, E. M. L. **On minimizing a convex function subject to linear inequalities.** J. Royal Statistical Society, Series B17, n. 2, p. 173-184, 1955.
- DORNY, C. N. **A Vector Space Approach to Models and Optimization.** New York: John Wiley and Sons, 1975.
- FERREIRA, Weber José. **Coleção Introdução à Ciência Atuarial.** 1.ed. Rio de Janeiro: Instituto de Resseguros do Brasil, 1985, volumes I, II, III e IV.
- FIGUEIREDO, Danilo Zucolli. **Tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão com plano de benefícios do tipo Benefício Definido: uma abordagem via programação estocástica multiestágio linear.** Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.
- HILLI, P. et al. **A stochastic programming model for asset liability management of a Finnish pension company,** 2007.
- HØYLAND, K.; WALLACE, S. W. **Generating scenario trees for multistage decision problems.** Management Science, 2001.
- KEEL, A.; MULLER, H. H. **Efficient Portfolios in the asset liability context.** ASTIN Bulletin, 1995.
- LINDEROTH, J.; SHAPIRO, A.; WRIGHT, S. **The empirical behavior of sampling methods for stochastic programming.** Annals of Operations Research, 2006.
- PRATS, C. A. GARRETA. **Manual de Previdência Social e Acidentes de Trabalho.** São Paulo, Brasil, em 1971.
- SANTOS, ALMICAR. **Seguro – Doutrina, Legislação, Jurisprudência.** Rio de Janeiro, Brasil, em 1959.
- SILVA, L.C. **Alocação ótima de ativos e derivativos em fundos de pensão via programação estocástica.** Tese (Doutorado) – Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.
- VALLADÃO, D.M. **Alocação ótima e medida de risco de um ALM para fundo de pensão via programação estocástica multi-estágio e bootstrap.** Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

ZENIOS, S.A., ZIEMBA, W.T. **Handbook of Asset and Liability Management.** 1. Ed.  
Amsterdam: Elsevier, 2006.

## **ANEXOS**

**Anexo A** – Código de programação em Matlab utilizado para as simulações.

**Anexo B** – Tábua de mortalidade BREMS.

**Anexo C** – Regra para alocação de ativos de uma seguradora.

## Anexo A - Código de programação em Matlab utilizado para as simulações.

Neste anexo será apresentado o código de programação com base no apresentado por Figueiredo (2011) adaptado para um seguro de vida individual, conforme parâmetros definidos neste estudo.

### Função que carrega os dados da simulação

```
function [a0,ma,k,S,T,mu,Q,rho,L0,I0,fp,fn] = loadProblemData_adaptado()

a0 = [136425813.29; 0]; % a0: alocação inicial = Reserva Matemática inicial
ma = [0.9; 0.49]; % ma: máxima alocação por classe de ativo
k = [0; 0.00118]; % k: custo de transação por classe de ativo

S = [1 2 2 2 2]; % S: estrutura da árvore de cenários
T = length(S); % T: número de estágios

mu = [0.11; 0.13]; % mu: retorno médio dos ativos
Q = [0.00089 0.00092; 0.00092 0.1255];
; % Q: matriz de covariância dos retornos

rho = 0.00; % rho: taxa de crescimento do passivo – não considerado neste %modelo, pois o passivo foi determinado
L0 = 185127395.33; % L0: Reserva Matemática no primeiro estágio
I0 = 7636960.05; % I0: último pagamento realizado antes do início da %simulação, conforme determinado no cálculo do passivo

fp = 1; % fp: ponderação a parcela positiva da função custo
fn = 2; % fn: ponderação da parcela negativa da função custo

end
```

## Função que cria os cenários

## Outras funções

```

function [Aeq,beq,A,b,c,lb,ub] = buildDeterministicEquivalentProgram(S,R,a0,ma,k,l,L,fp,fn)

[nr,nc] = size(R);
na = nr-1; % quantidade de ativos na simulação

% 1º estágio
Aeqi = eye(na,na); % alocação
Aeqi_aux1 = []; % compra
Aeqi_aux2 = []; % venda

Ai = -ma;

for i=2:na
    Aeqi_aux1 = [Aeqi_aux1 1+k(i)];
    Aeqi_aux2 = [Aeqi_aux2 k(i)-1];

    Ai = [Ai -ma];
end

Aeqi = [Aeqi [Aeqi_aux1; -eye(na-1,na-1)] [Aeqi_aux2; eye(na-1,na-1)]];

beqi = a0 + [l(1); zeros(na-1,1)];

Ai = Ai + eye(na,na);
Ai = [Ai zeros(na,2*(na-1))]; % restrição de máxima alocação

bi = [zeros(na,1)];
ub = [];

% Constrói as matrizes Aeq, beq, A, b e c do problema de programação linear
[Aeq,beq,A,b,c] = buildLPP(S,R,l,L,fp,fn,Aeqi,beqi,Ai,bi,na);

lb = zeros(size(c)); % vetor de limites inferiores de x

end

function [Aeq,beq,A,b,c] = buildLPP(S,R,l,L,fp,fn,Aeqi,beqi,Ai,bi,na);

% Inicialização das variáveis
bl1 = Aeqi;
bl3 = [1 -1];
bl4 = Ai;
Aeq = Aeqi; % matriz Aeq das restrições de igualdade do PPL
beq = beqi; % matriz beq das restrições de igualdade do PPL
[nr_Aeq,nc_Aeq] = size(Aeq);
c = zeros(nc_Aeq,1); % matriz c da função custo do PPL
A = Ai; % matriz A das restrições de desigualdade do PPL
b = bi; % matriz b das restrições de desigualdade do PPL
n = 1; % contador de nós

% Estrutura da árvore de cenários
T = length(S); % último estágio da árvore
N = S(1); % vetor linha em que a j-ésima coluna apresenta o número de nós do j-ésimo estágio
for t=2:T
    N = [N N(t-1)*S(t)];
end

% Percorre todos os estágios
for t=2:T
    % Percorre os nós de cada estágio
    for i=1:N(t)
        % Atualiza o contador de nós
        n=n+1;
        % Constrói a matriz bl2 referente ao nó atual
        if t<T
            bl2 = [-eye(na,na)-diag(R(1:na,n)) zeros(na,na-1) zeros(na,na-1)];
        else
            bl2 = [[-ones(1,na)-R(1:na,n)'] zeros(1,na-1) zeros(1,na-1)];
        end
        % variável auxiliar nb
        nb = R(na+1,n)-1;
        % atualiza as matrizes a, b e c
        if t<T
            % atualiza Aeq
        end
    end
end

```

```

[nr,nc] = size(Aeq);
Aeq_aux = [zeros(na,nb*(na+(na-1)+(na-1))) bl2 zeros(na,nc-(nb+1)*(na+(na-1)+(na-1)))] ;
Aeq = buildMatrixFromBlocks(Aeq,[],Aeq_aux,bl1);
% atualiza beq
beq_aux = [l(n);zeros(na-1,1)];
beq = [beq; beq_aux];
% atualiza c
c = [c; zeros(na+(na-1)+(na-1),1)];
% atualiza A
A = buildMatrixFromBlocks(A,[],[],bl4);
% atualiza b
b = [b; zeros(na,1)];
else
% atualiza Aeq
[nr,nc] = size(Aeq);
Aeq_aux = [zeros(1,nb*(na+(na-1)+(na-1))) bl2 zeros(1,nc-(nb+1)*(na+(na-1)+(na-1)))] ;
Aeq = buildMatrixFromBlocks(Aeq,[],Aeq_aux,bl3);
% atualiza beq
beq = [beq; l(n)-L];
% atualiza c
c = [c; fp; -fn];
% atualiza A
[nr,nc] = size(A);
A = [A zeros(nr,2)];
end
end
end
c = -(l/N(t))*c;
end

```

### Código utilizado para rodar a simulação

```
[a0,ma,k,S,T,mu,Q,rho,L0,l0,fp,fn] = loadProblemData_adaptado();
firstStagePort = [];

iters = 200;
while i<iters

    % Constrói a árvore de cenários
    [S,R,I,L] = buildScenarios_adaptado (S,T,mu,Q,rho,l0,L0);
    % Constrói o problema determinístico equivalente
    [Aeq,beq,A,b,c,lb,ub] = buildDeterministicEquivalentProgram(S,R,a0,ma,k,I,L,fp,fn);
    % Resolve o problema determinístico equivalente
    [xopt,fopt,exitflag,output,lambda] = linprog(c,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
    fopt = -fopt;

    if exitflag == 1

        % Calcula a alocação percentual do portfolio
        portAlloc = portfolioAllocation(xopt,S,R);
        firstStagePort = [firstStagePort [portAlloc(:,1)]];

        i = i+1;
    end
end

meanFirstStagePort(1) = mean(firstStagePort(1,:));
meanFirstStagePort(2) = mean(firstStagePort(2,:));
```

**Anexo B – Tábua de Mortalidade BR-EMS.**

**Mortalidade Masculina**

**BR-EMSmt-v.2010-m**

<b>Idade</b>	<b><math>q_x</math></b>
<b>0</b>	0,00274
<b>1</b>	0,00095
<b>2</b>	0,00048
<b>3</b>	0,00030
<b>4</b>	0,00022
<b>5</b>	0,00018
<b>6</b>	0,00016
<b>7</b>	0,00015
<b>8</b>	0,00015
<b>9</b>	0,00016
<b>10</b>	0,00018
<b>11</b>	0,00021
<b>12</b>	0,00026
<b>13</b>	0,00033
<b>14</b>	0,00042
<b>15</b>	0,00053
<b>16</b>	0,00065
<b>17</b>	0,00078
<b>18</b>	0,00090
<b>19</b>	0,00101
<b>20</b>	0,00110
<b>21</b>	0,00117
<b>22</b>	0,00122
<b>23</b>	0,00125
<b>24</b>	0,00127
<b>25</b>	0,00127
<b>26</b>	0,00127
<b>27</b>	0,00126
<b>28</b>	0,00126
<b>29</b>	0,00125
<b>30</b>	0,00126
<b>31</b>	0,00127
<b>32</b>	0,00129
<b>33</b>	0,00135
<b>34</b>	0,00142
<b>35</b>	0,00149
<b>36</b>	0,00157

37	0,00166
38	0,00176
39	0,00186
40	0,00198
41	0,00211
42	0,00225
43	0,00240
44	0,00256
45	0,00275
46	0,00295
47	0,00317
48	0,00341
49	0,00367
50	0,00396
51	0,00427
52	0,00462
53	0,00499
54	0,00541
55	0,00586
56	0,00635
57	0,00690
58	0,00749
59	0,00814
60	0,00886
61	0,00964
62	0,01049
63	0,01143
64	0,01246
65	0,01358
66	0,01481
67	0,01616
68	0,01763
69	0,01925
70	0,02102
71	0,02295
72	0,02508
73	0,02740
74	0,02994
75	0,03273
76	0,03578
77	0,03912
78	0,04278
79	0,04679

<b>80</b>	0,05118
<b>81</b>	0,05598
<b>82</b>	0,06125
<b>83</b>	0,06701
<b>84</b>	0,07332
<b>85</b>	0,08024
<b>86</b>	0,08781
<b>87</b>	0,09609
<b>88</b>	0,10517
<b>89</b>	0,11511
<b>90</b>	0,12600
<b>91</b>	0,13792
<b>92</b>	0,15098
<b>93</b>	0,16528
<b>94</b>	0,18093
<b>95</b>	0,19808
<b>96</b>	0,21686
<b>97</b>	0,23742
<b>98</b>	0,25994
<b>99</b>	0,28460
<b>100</b>	0,31161
<b>101</b>	0,34118
<b>102</b>	0,37357
<b>103</b>	0,40904
<b>104</b>	0,44788
<b>105</b>	0,49042
<b>106</b>	0,53700
<b>107</b>	0,58801
<b>108</b>	0,64387
<b>109</b>	0,70505
<b>110</b>	0,77204
<b>111</b>	0,84540
<b>112</b>	0,92575
<b>113</b>	1,00000
<b>114</b>	
<b>115</b>	
<b>116</b>	

**Anexo C – Regra para alocação de ativos de uma seguradora.**

De acordo com a Resolução Nº 3.308 do Banco Central do Brasil, de 31 de agosto de 2005, no segmento de renda fixa podem ser aplicados:

I - até 100% (cem por cento) dos recursos, se aplicados em:

- i. Títulos do Tesouro Nacional;
- ii. Títulos de emissão do Banco do Brasil;
- iii. Créditos de securitização do Tesouro Nacional;
- iv. Títulos dos estados e municípios objeto dos contratos firmados ao amparo da Lei 9.9496, de 11 de setembro de 1997, ou da Medida Provisória 2.185-35, de 24 de agosto de 2001; e
- v. Cotas de fundos de investimento, constituídos sob a forma de condomínio aberto, cujas carteiras estejam representadas exclusivamente pelos títulos referidos nas anos itens “i”, “ii”, ou “iii” acima, das quais a sociedade seguradora seja a única cotista , os recursos sociedades seguradoras podem alocar os ativos garantidores de suas reservas técnicas ou matemáticas em renda fixa, renda variável ou imóveis. Em renda fixa pode-se aplicar até 100% dimites, a companhia pode aplicar até

II – até 80% (oitenta por cento), se aplicados em:

- i. Certificados e recibos de depósito bancário;
- ii. Letras de câmbio e aceite de instituições financeiras;
- iii. Letras hipotecárias;
- iv. Letras e cédulas de crédito imobiliário;
- v. Cédulas de crédito bancário consideradas pela sociedade seguradora com base em classificação efetuada por agência classificadora de risco em funcionamento no País, como de baixo risco de crédito;
- vi. Certificados de cédulas de crédito bancário considerados pela sociedade seguradora como de baixo risco de crédito com base em classificação efetuada por agência classificadora de risco em funcionamento no País;
- vii. Debêntures de distribuição pública;
- viii. Cédulas de debêntures;
- ix. Notas promissórias emitidas por sociedades de ações, destinadas a oferta pública;
- x. Certificados de recebíveis imobiliário;

- xi. Contratos mercantis de compra e venda de produtos, mercadorias e/ou serviços para entrega ou prestação futura, bem como em títulos ou certificados representativos desses contratos;
- xii. Cotas de fundos de investimento constituídos sob a forma de condomínio aberto;
- xiii. Cotas de fundos de investimento em cotas de fundos de investimento constituídos sob a forma de condomínio aberto;
- xiv. Depósito de poupança;
- xv. Letras financeiras
- xvi. Depósito a Prazo com garantia especial proporcionada pelo Fundo Garantidor de Créditos (DPGE)

III – até 10% (dez por cento), se aplicados em:

- i. Cotas de fundos de investimento classificados como fundos de dívida externa, constituídos sob a forma de condomínio aberto;
- ii. Cotas de fundos de investimento em cotas de fundos de investimento classificados como fundos de dívida externa, constituídos sob a forma de condomínio aberto;
- iii. Cotas de fundos de investimento em direitos creditórios;
- iv. Cotas de fundos de investimento em cotas de fundos de investimento em direitos creditórios;
- v. Cotas de fundos de investimento classificados como fundos cambiais, constituídos sob a forma de condomínio aberto;
- vi. Cotas de fundos de investimento em cotas de fundos de investimento classificados como fundos cambiais, constituídos sob a forma de condomínio aberto.

IV – até 5% (cinco por cento), se aplicados em:

- i. Cédulas de produto rural com liquidação financeira;
- ii. Letras de crédito do agronegócio;
- iii. Certificados de direitos creditórios do agronegócio;
- iv. Certificados de recebíveis do agronegócio.

No segmento de renda variável, os recursos devem ser aplicados, limitados a 49% (quarenta e nove por cento) no conjunto de investimento, isolada ou cumulativamente:

I - até 49% (quarenta e nove por cento) em:

- i. Ações de emissão de companhias que, em função de adesão aos padrões de governança societária definidos - conforme anexo I do regulamento anexo à

- resolução 3.121, de 25 de setembro de 2003, e alterações posteriores - por bolsa de valores ou entidade mantenedora de mercado de balcão organizado credenciada na CVM, sejam admitidas à negociação em segmento especial por essa mantido nos moldes do Novo Mercado da Bolsa de Valores de São Paulo - Bovespa;
- ii. Bônus de subscrição de ações, recibos de subscrição de ações e certificados de depósitos de ações de emissão de companhias que atendam às condições da alínea 'a' deste inciso;
  - iii. Cotas de fundos de investimento classificados como fundos de ações, constituídos sob a forma de condomínio aberto, cujas carteiras estejam representadas exclusivamente por valores mobiliários referidos nos itens 'i' e 'ii' acima, ressalvadas as disponibilidades de caixa permitidas pela regulamentação em vigor;
  - iv. Cotas de fundos de investimento em cotas de fundos de investimento classificados como fundos de ações, constituídos sob a forma de condomínio aberto, cujas carteiras estejam representadas exclusivamente por cotas dos fundos de investimento referidos no item 'iii' acima, ressalvadas as disponibilidades de caixa permitidas pela regulamentação em vigor;
  - v. Cotas de fundos de investimento em cotas de fundos de investimento classificados como fundos referenciados em índices de ações do Nível 2 da Bovespa, constituídos sob a forma de condomínio aberto;
  - vi. cotas de fundos de investimento em cotas de fundos de investimento classificados como fundos referenciados em índices de ações da Bovespa, constituídos sob a forma de condomínio aberto;

**II - até 40% (quarenta por cento) em:**

- i. Ações de emissão de companhias que, em função de adesão aos padrões de governança societária definidos - conforme anexo II do regulamento anexo à resolução 3.121, de 2003, e alterações posteriores - por bolsa de valores ou entidade mantenedora de mercado de balcão organizado credenciada na CVM, sejam classificadas no Nível 2 da Bovespa;
- ii. Bônus de subscrição de ações, recibos de subscrição de ações e certificados de depósitos de ações de emissão de companhias que atendam às condições da alínea 'a' deste inciso;
- iii. Cotas de fundos de investimento classificados como fundos de ações, constituídos sob a forma de condomínio aberto, cujas carteiras estejam representadas exclusivamente por valores mobiliários referidos nas alíneas 'a' e 'b' deste inciso, ressalvadas as disponibilidades de caixa permitidas pela regulamentação em vigor;

- iv. Cotas de fundos de investimento em cotas de fundos de investimento classificados como fundos de ações, constituídos sob a forma de condomínio aberto, cujas carteiras estejam representadas exclusivamente por cotas dos fundos de investimento referidos na alínea 'c' deste inciso, ressalvadas as disponibilidades de caixa permitidas pela regulamentação em vigor;
- v. Cotas de fundos de investimento classificados como fundos referenciados em índices de ações do Nível 2 da Bovespa, constituídos sob a forma de condomínio aberto;
- vi. Cotas de fundos de investimento em cotas de fundos de investimento classificados como fundos referenciados em índices de ações do Nível 2 da Bovespa, constituídos sob a forma de condomínio aberto;

III - até 35% (trinta e cinco por cento) em:

- i. Ações de emissão de companhias que, em função de adesão aos padrões de governança societária definidos - conforme anexo III do regulamento anexo à resolução 3.121, de 2003, e alterações posteriores - por bolsa de valores ou entidade mantenedora de mercado de balcão organizado credenciada na CVM, sejam classificadas no Nível 1 da Bovespa ou admitidas à negociação em segmento especial por essa mantido nos moldes do Bovespa Mais;
- ii. Bônus de subscrição de ações, recibos de subscrição de ações e certificados de depósitos de ações de emissão de companhias que atendam às condições do item anterior;
- iii. Cotas de fundos de investimento classificados como fundos de ações, constituídos sob a forma de condomínio aberto, cujas carteiras estejam representadas exclusivamente por valores mobiliários referidos itens 'i' e 'ii' deste inciso, ressalvadas as disponibilidades de caixa permitidas pela regulamentação em vigor;;
- iv. Cotas de fundos de investimento em cotas de fundos de investimento classificados como fundos de ações, constituídos sob a forma de condomínio aberto, cujas carteiras estejam representadas exclusivamente por cotas dos fundos de investimento referidos no item 'iii', ressalvadas as disponibilidades de caixa permitidas pela regulamentação em vigor;
- v. Cotas de fundos de investimento classificados como fundos referenciados em índices de ações do Nível 1 da Bovespa ou do Bovespa Mais, constituídos sob a forma de condomínio aberto;
- vi. Cotas de fundos de investimento em cotas de fundos de investimento classificados como fundos referenciados em índices de ações do Nível 1 da Bovespa ou do Bovespa Mais, constituídos sob a forma de condomínio aberto;

IV - até 30% (trinta e cinco por cento) em:

- i. Ações, bônus de subscrição de ações, recibos de subscrição de ações e certificados de depósitos de ações de emissão de companhias abertas negociadas em bolsa de valores;
- ii. Cotas de fundos de investimento classificados como fundos de ações, constituídos sob a forma de condomínio aberto, cujas carteiras estejam representadas por valores mobiliários referidos no item 'i';
- iii. Cotas de fundos de investimento em cotas de fundos de investimento classificados como fundos de ações, constituídos sob a forma de condomínio aberto, cujas carteiras estejam representadas por cotas dos fundos de investimento referidos no item 'ii';
- iv. Cotas de fundos de investimento classificados como fundos referenciados em índices do mercado de ações, constituídos sob a forma de condomínio aberto;
- v. Cotas de fundos de investimento em cotas de fundos de investimento classificados como fundos referenciados em índices do mercado de ações, constituídos sob a forma de condomínio aberto;

V - até 15% (quinze por cento) em:

- i. Cotas de fundos de investimento classificados como fundos multimercado, constituídos sob a forma de condomínio aberto;
- ii. Cotas de fundos de investimento em cotas de fundos de investimento classificados como fundos multimercado, constituídos sob a forma de condomínio aberto;

VI - até 5% (cinco por cento) em ações, em bônus de subscrição de ações, em recibos de subscrição de ações e em certificados de depósitos de ações de companhia aberta admitidos à negociação em mercado de balcão organizado por entidade credenciada na CVM, quando referidos ativos não satisfizerem as condições previstas nos itens I a III, subitem 'i' e 'ii';

VII - até 3% (três por cento) em:

- i. Ações e debêntures de emissão de sociedades de propósito específico constituídas com a finalidade de viabilizar financiamento de projetos;
- ii. Cotas de fundos de investimento em empresas emergentes;
- iii. Cotas de fundos de investimento em participações;
- iv. Cotas de fundos de investimento classificados como fundos de ações, constituídos sob a forma de condomínio fechado;
- v. Cotas de fundos de investimento em cotas de fundos de investimento classificados como fundos de ações, constituídos sob a forma de condomínio fechado;

- vi. Cotas de fundos de investimento classificados como fundos referenciados em índices do mercado de ações, constituídos sob a forma de condomínio fechado;
- vii. Cotas de fundos de investimento em cotas de fundos de investimento classificados como fundos referenciados em índices do mercado de ações, constituídos sob a forma de condomínio fechado;

VIII - até 3% (três por cento) em:

- i. Certificados de depósito de valores mobiliários com lastro em ações de emissão de companhia aberta, ou de companhia que tenha características semelhantes às companhias abertas brasileiras, com sede no exterior (Brazilian Depositary Receipts - BDRs), classificados nos Níveis II e III definidos na regulamentação baixada pela CVM, cujos programas tenham sido registrados naquela autarquia;
- ii. Ações de emissão de companhias sediadas em países signatários do Mercosul - Mercado Comum do Sul ou em certificados de depósito dessas ações admitidos à negociação em bolsa de valores no País, observado o disposto na Resolução 1.968, de 30 de setembro de 1992;
- iii. debêntures com participação nos lucros cuja distribuição tenha sido registrada na CVM.

Já com relação a imóveis, consta no referido normativo que os recursos devem ser aplicados:

I – em imóveis urbanos, observados os limites especificados:

- i. Até 12% (doze por cento), durante 2005 e 2006;
- ii. Até 8% (oito por cento), a partir de 2007;
- iii. Até 10% (dez por cento) em cotas dos fundos de investimento imobiliário;