

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

João Vitor Brentigani Torezan

**Condições de estabilidade do vácuo para o Modelo do
Dubleto Inerte**

São Carlos

2024

João Vitor Brentigani Torezan

Condições de estabilidade do vácuo para o Modelo do Dubleto Inerte

Trabalho de conclusão de curso
apresentado ao Programa de Graduação
em Física do Instituto de Física de São
Carlos, da Universidade de São Paulo,
para a obtenção do título de Bacharel em
Física.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Vitor de Souza
Filho

Versão original

São Carlos

2024

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

RESUMO

Torezan, J. **Condições de estabilidade do vácuo para o Modelo do Dubleto Inerte**. 2024. 20 p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

Embora tenha apresentado inúmeros sucessos, o Modelo Padrão da física de partículas mostrou-se incapaz de fornecer uma solução apropriada para o problema da matéria escura, especificamente no contexto das partículas massivas fracamente interagentes (WIMPs). Dessa forma, teorias além do Modelo Padrão tornam-se alvos promissores para se buscar por essas partículas. O Modelo do Dubleto Inerte é um modelo que, mesmo sendo simples, apresenta uma rica fenomenologia e que, em comparação com o Modelo Padrão, inclui um segundo dubleto escalar, uma simetria conservada de permutação Z_2 e quatro novas partículas escalares, das quais uma é candidata à matéria escura. Neste trabalho, foram-se analisadas as condições de estabilidade do vácuo para o Modelo do Dubleto Inerte. A análise feita se baseia na reparametrização do potencial escalar do modelo em uma forma quadrática de matriz, a qual, ao se aplicar uma condição de não-negatividade em grandes campos, está sujeita a copositividade matemática e, por consequência, a condições específicas. As condições de estabilidades do vácuo são derivadas em termos dos parâmetros de ordem quártica do potencial, delimitando um sólido aberto no espaço de parâmetros e recuperando resultados prévios na literatura. Por fim, esses vínculos decorrentes da existência do vácuo são componentes que devem ser considerada em estudos fenomenológicos e simulações referentes ao modelo, o que, por sua vez, aperfeiçoam os limites existentes das seção de choque da matéria escura e sua densidade de relíquia, além de restringir as massas das novas partículas. Adicionalmente, o método utilizado, baseado na copositividade, mostrou-se válido ao recuperar resultados já presentes na literatura, podendo ser expandido para calcular as condições de estabilidade do vácuo em outros modelos.

Palavras-chave: Física de partículas. Astrofísica. Matéria Escura. Estabilidade do Vácuo. Inert Doublet Model. Modelo do Dubleto Inerte.

1 INTRODUÇÃO

Uma das diretrizes primordiais da física é a busca pela explicação do universo e de seus elementos constituintes, principalmente em termos de primeiros princípios. A nível mais fundamental e microscópico, o Modelo Padrão da física de partículas (MP) é a teoria mais bem sucedida, categorizando toda a existência em partículas, como os férmions, que representa a matéria em si, e os bósons, que representam as interações fundamentais (força forte, força eletromagnética, força fraca), sendo, para tal, munido de simetrias matemáticas $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, mecanismos como mecanismo de Higgs e regras de Feynmann, e complementados por diversos experimentos. Todavia, mesmo assim o Modelo Padrão apresenta suas limitações, como, por exemplo, o problema da matéria escura.

Segundo dados astrofísicos e cosmológicos (1), cerca de 84% do conteúdo de matéria total do universo não é observada, podendo ser inferida através da dinâmica galáctica e efeitos gravitacionais. Essa parcela é denominada de matéria escura, em contraste com 16% restante de matéria visível e usual (bariônica). Há diversos candidatos para esse problema, sendo um deles, particularmente promissor, as partículas massivas fracamente interagentes (*Weakly Interacting Massive Particles* - WIMPs) (2). Para que uma partícula pertença a essa classe é preciso que seja: massiva; eletricamente neutra, de forma a não interagir eletromagneticamente e assim produzir luz; não-bariônica, uma vez que bárions não produzem a abundância de relíquia necessária; estável em escala cosmológica; e não-relativística (relíquias frias), de forma a produzir a formação de estruturas observadas no universo.

Dentre as partículas presentes no Modelo Padrão, nenhuma se adequa como uma candidata a WIMP, uma vez que as partículas não-bariônicas neutras são somente neutrinos e estes são relíquias quentes. Para que se encontre um candidato para matéria escura, além de possíveis soluções para outros problemas, deve-se estudar a física além do Modelo Padrão, como, por exemplo, o Modelo do Dupleto Inerte (*Inert Doublet Model* - IDM), que embora seja relativamente simples e considerado *ad hoc* (3), apresenta uma rica fenomenologia, com candidatos para a matéria escura. Entretanto, um modelo físico deve seguir certas condições para que

seja uma descrição válida da realidade, sendo uma dessas, especialmente importante para a quebra espontânea de simetria e consequente geração de massa, é a condição de existência de um vácuo verdadeiro e estável, isto é, um mínimo global da função do potencial do modelo, sendo o cálculo dessa condição para o Modelo do Dubleto Inerte o objetivo deste trabalho.

Este trabalho tem como referência *Introduction to elementary particles* do Griffiths (4) e *Modern particle physics* do Thomson (5) para todo o conteúdo relacionado ao Modelo Padrão, em específico para a quebra espontânea de simetria, com *Lie algebras in particle physics: from isospin to unified theories* de Georgi (6) e *A modern introduction to quantum field theory* do Maggiore (7) suplementando as noções dos grupos de simetria presentes. Para estudar matéria escura de forma geral e sob forma da abundância de relíquia de partículas, foi-se utilizado, respectivamente, *History of dark matter* de Bertone (2) e *An introduction to particle dark matter* do Profumo (8). Para definir e fundamentar o modelo do Dubleto Inerte, *Anatomy of the inert two-higgs-doublet model in the light of the lhc and non-lhc dark matter searches* do Belyaev (9), *Matéria escura e o modelo do dubleto inerte* de Luiz (10) e *Exploring the inert doublet model of dark matter with very high-energy gamma-rays observatories* de Justino (11). Por fim, o procedimento empregado é análogo ao utilizado em *Vacuum Stability Conditions from Copositivity Criteria* de Kannike (12). Outras referências também foram utilizadas, mas de forma minoritária.

1.1 Matéria Escura e abundância de relíquia

Dentro das várias possibilidades de origem de matéria escura, em particular para o caso de WIMPs, considera-se a origem como relíquias térmicas (8): essas partículas interagem em equilíbrio com as partículas do Modelo Padrão no universo primordial, com a taxa desse processo diminuindo conforme o universo se esfriava (expandia), até o momento em que a reação efetivamente para de ocorrer, com as partículas de matéria escura se desacoplando do banho térmico (*freeze-out*), mantendo seu número constante a partir deste instante. A razão entre a densidade de matéria escura e a densidade crítica do universo $\Omega_{ME} = \rho_{ME}/\rho_0$ é denominada de abundância de relíquia.

Para um processo de aniquilação de matéria escura ($ME + ME \leftrightarrow MP +$

MP), a taxa de ocorrência é dado por $\Gamma = \langle n \sigma v \rangle$, sendo n a densidade de partículas pelo volume, σ a seção de choque e v a velocidade relativa entre as partículas, e o *freeze-out* ocorre quando a taxa da reação se torna da ordem ou menor que a taxa de expansão do universo, a constante de Hubble H , ou, alternativamente, quando o tempo para que ocorra uma reação ($1/\Gamma$) seja da ordem ou maior que a idade do universo (tempo de Hubble $1/H$). Note que o principal responsável por tal evento é a densidade n , que decresce conforme o universo se expande e se esfria. Embora seja possível obter a ordem de grandeza dos termos considerando o *freeze-out* aproximado $\Gamma \sim H$, o cálculo verdadeiro deve envolver a evolução da densidade segundo a equação de Boltzmann (1.1). Ao considerar o fato de que a densidade de equilíbrio (não-relativística) n_{eq} seja derivada da mecânica estatística e decresça assintoticamente até zero, após tempo suficiente ter-se passado a variação da densidade de matéria escura se dá exclusivamente pela expansão do universo.

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = \langle \sigma v \rangle (n_{eq}^2 - n^2) \quad (1.1)$$

Ao considerar dados experimentais tanto na forma aproximada quanto na forma verdadeira do cálculo da abundância de relíquia, conclui-se que a seção de choque de aniquilação seja $\langle \sigma v \rangle \sim 3 \times 10^{-26} \text{cm}^3 \text{s}^{-1}$, que é na escala da ordem esperada por uma partícula interagindo através da força fraca, contribuindo com a hipótese de WIMPs de tal forma que tal fato é denominado de milagre das WIMPs. Nota-se que há um vínculo da presença de matéria escura no universo com a física de partículas através da seção de choque, uma vez os cálculos dessa são dados de acordo com as regras de Feynmann e, portanto, dependem da densidade lagrangeana e, logo, do potencial do modelo utilizado.

1.2 Quebra Espontânea de Simetria

A quebra espontânea de simetria sob a forma de mecanismo de Higgs é uma componente essencial do Modelo Padrão, sendo responsável pela quebra da simetria eletrofraca, geração das massas fermiônicas e dos bósons W^\pm e Z_0 . Ela está intimamente relacionada com o potencial escalar e com o estado de vácuo do mesmo, o que ressalta a importância de seus estudos.

Segundo a teoria quântica de campos, as partículas e seus campos associados são descritos pelas soluções das equações de Euler-Lagrange das densidades lagrangeanas associadas a cada spin (Klein-Gordon, Dirac, Proca). Ao se considerar a existência de uma invariância local de fase, análogo a invariância de gauge do eletromagnetismo e generalizando a invariância global de fase da mecânica quântica, é necessário incluir no lagrangeano de Dirac (férmions) termos do lagrangeano de Proca (bósons vetoriais) sem massa e termos de interação entre ambos tipos de partículas. O problema presente nesse processo se dá por tanto as massas fermiônicas quanto as dos bósons da interação fraca serem incompatíveis com a invariância local de fase. A solução dessa questão deriva da introdução de um potencial escalar e da quebra da simetria eletrofraca $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ na simetria eletromagnética $U(1)_{EM}$ pelo mecanismo de Higgs.

Todo o processo do mecanismo de Higgs decorre da implementação de um potencial referente a dubleto escalar de campos complexos. Por questões de clareza e simplicidade da explicação e ilustração do processo, utiliza-se do sistema de unidades naturais ($\hbar = c = 1$) e considera-se somente um campo complexo $\phi(x)$ (com dois graus de liberdade, referente a parte escalar e a parte imaginária) associado ao potencial dado por (1.2) e a densidade lagrangeana (1.3), invariante por $U(1)$ (invariante segundo $\phi \rightarrow \phi' = e^{iq\theta(x)}\phi$, $A \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\theta(x)$), em que $D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu$ é a derivada covariante, A_μ é o campo vetorial sem massa (também com dois graus de liberdade) necessário para a simetria e $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ seu termo cinético, com $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

$$V(\phi) = \mu^2(\phi^\dagger\phi) + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \quad (1.2)$$

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - V(\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.3)$$

Primeiro, encontra-se os estados de vácuo através de $\frac{dV}{d|\phi|} = 0$, o que implica a solução $|\phi_0| = 0$, $V(|\phi_0|) = 0$ para $\mu^2 \geq 0$ e $|\phi_0| = \nu/\sqrt{2}$, $V(|\phi_0|) = -\nu^4\lambda/4$ para $\mu^2 < 0$, com $\nu \equiv \sqrt{-\mu^2/\lambda}$ sendo o valor esperado do vácuo. Somente o segundo caso leva a quebra de simetria e, assim, é de interesse para o estudo.

Em seguida, no caso não-trivial, deve-se expandir ϕ em torno desse vácuo, podendo escolher $\phi = (1/\sqrt{2})(\nu + \eta(x) + i\zeta(x))$, obtendo $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \lambda \nu^2 \eta^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \zeta)(\partial^\mu \zeta) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}q^2 \nu^2 A_\mu A^\mu + q\nu A_\mu \partial^\mu \zeta - V_{interação}$. Embora agora o bóson vetorial apresente massa (termo quadrático em seu campo), há tanto o problema do grau de liberdade extra introduzido pelo novo modo massivo do campo vetorial e quanto o problema da aparente transformação de ζ em A_μ (acoplamento $A_\mu \partial^\mu \zeta$). A correção para tal é aplicar, antes da quebra de simetria, a transformação de gauge $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{q\nu} \partial_\mu \zeta$, $\phi \rightarrow \phi' = e^{-\frac{i\zeta}{\nu}} \phi \approx (1/\sqrt{2})(\nu + \eta)$ (aproximação em primeira ordem nos campos). Assim, após a quebra espontânea de simetria, nesse gauge denominado de gauge unitário (1.4), obtêm-se a densidade lagrangeana (1.5) que descreve o comportamento do campo escalar e do campo vetorial.

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu + \eta(x)) \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \lambda \nu^2 \eta^2 \\ & - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}q^2 \nu^2 A_\mu A^\mu \\ & + q^2 \nu A_\mu A^\mu \eta + \frac{1}{2}q^2 \eta^2 A_\mu A^\mu - \lambda \nu \eta^3 - \frac{1}{4}\lambda \eta^4 \end{aligned} \quad (1.5)$$

O processo demonstrado é ilustrativo para o caso real, em que se é considerado um dubleto de campos complexos escalares cujo análogo a $\eta(x)$ é o bóson de Higgs $h(x)$. Destaca-se a geração de massa de bósons através desse mecanismo, através da comparação dos termos quadráticos nos campos com os termos de massa nos lagrangeanos específicos para cada partícula (Klein-Gordon, Dirac, Proca). Embora não demonstrado nessa seção, o processo de geração de massas fermiônicas é semelhante, ocorrendo após a quebra da simetria no acoplamento entre férmions e campos escalares, necessário para que se tenha inicialmente a simetria de gauge. Por fim, tal procedimento evidencia a importância determinante do potencial escalar dentro de determinado modelo físico.

1.3 Modelo do Dubleto Inerte (IDM)

O Modelo do Dubleto Inerte (IDM) é uma extensão do Modelo Padrão, sendo um subtipo do modelo de dois higgs. Seu principal diferencial é a presença de dois dubletos de campos escalares complexos que estão sujeitos a uma simetria de permutação \mathcal{Z}_2 , isto é, sendo Φ_1 o dubleto original de Higgs presente no Modelo Padrão e Φ_2 o novo dubleto, o modelo é invariante pela transformação $\Phi_1 \rightarrow \Phi_1, \Phi_2 \rightarrow -\Phi_2$. Ainda, ele é do tipo que o acoplamento entre férmions e dubletos se dá unicamente pelo dubleto original Φ_1 , de forma tal que, em termos da densidade lagrangeana, a única distinção em relação ao Modelo Padrão se dá pela presença dos termos referentes ao segundo dubleto na seção escalar da densidade lagrangeana (1.6) e no seu potencial escalar (1.7). No caso, $D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2}ig_W\sigma^i W_\mu^i + \frac{1}{2}ig'B_\mu$ é a derivada covariante considerando a simetria $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, em que W_μ^i e B_μ são campos vetoriais que dão origem aos bósons eletrofracos através de combinações lineares, σ^i as matrizes de Pauli e g_W e g' constantes de acoplamento.

$$\mathcal{L}_{Escalar-IDM} = (D_\mu\Phi_1)^\dagger(D^\mu\Phi_1) + (D_\mu\Phi_2)^\dagger(D^\mu\Phi_2) - V_{IDM}(\Phi_1, \Phi_2) \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} V_{IDM}(\Phi_1, \Phi_2) = & \mu_1^2\Phi_1^\dagger\Phi_1 + \mu_2^2\Phi_2^\dagger\Phi_2 \\ & + \lambda_1\left(\Phi_1^\dagger\Phi_1\right)^2 + \lambda_2\left(\Phi_2^\dagger\Phi_2\right)^2 \\ & + \lambda_3\left(\Phi_1^\dagger\Phi_1\right)\left(\Phi_2^\dagger\Phi_2\right) + \lambda_4\left(\Phi_1^\dagger\Phi_2\right)\left(\Phi_2^\dagger\Phi_1\right) \\ & + \frac{\lambda_5}{2}\left[\left(\Phi_1^\dagger\Phi_2\right)^2 + \left(\Phi_2^\dagger\Phi_1\right)^2\right] \end{aligned} \quad (1.7)$$

Nota-se que o potencial do modelo é basicamente um polinômio com termos quadráticos e quárticos em função dos campos, sendo nulo na origem e crescendo ou decrescendo infinitamente no limite de grandes campos. Além disso, como imposto pela simetria \mathcal{Z}_2 definidora do modelo, é invariante segundo a troca de sinal $\Phi_2 \rightarrow -\Phi_2$. Em relação aos parâmetros, somente μ_1 e λ_1 são herdados do Modelo Padrão, com os demais introduzidos junto do segundo dubleto. Todos os parâmetros do potencial são necessariamente reais, de forma tal a evitar a quebra de simetria CP (9,10). Para o IDM, considera-se um estado de vácuo inerte, $\langle \Phi_1 \rangle = (1/\sqrt{2})\begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix}$, $\langle \Phi_2 \rangle = 0$, sendo o único estado que permita a quebra

espontânea da simetria eletrofraca, a conservação da simetria CP e da simetria de permutação (10), tal que os campos sejam expressos como expansões (1.8) em torno desse mínimo no gauge apropriado.

$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + h \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}H^\pm \\ H_0 + iA_0 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

No caso, as variáveis dos campos passaram a ser h , que representa o bóson de Higgs convencional, com a sua massa (1.9a) seguindo a mesma equação presente no Modelo Padrão; H^\pm , que representa duas partículas carregadas; e H_0 e A_0 , as partículas escalares neutras. Aplicando essas expansões (1.8) no potencial (1.7) e reconhecendo os termos quadráticos como sendo os termos de massa, pode-se deduzir as massas das partículas escalares do modelo (1.9). Como deseja-se uma candidata a WIMP, H^\pm não é possível, restando H_0 e A_0 , da qual escolhe-se, por convenção, H_0 como a verdadeira candidata, impondo $\lambda_5 \leq 0$ e $\lambda_4 + \lambda_5 \leq 0$ para que seja a partícula mais leve.

$$m_h^2 = 2\lambda_1\nu^2 = -2\mu_1^2 \quad (1.9a)$$

$$m_{H^\pm}^2 = \mu_2^2 + \nu^2 \frac{\lambda_3}{2} \quad (1.9b)$$

$$m_{H_0}^2 = \mu_2^2 + \nu^2 \frac{\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5}{2} \quad (1.9c)$$

$$m_{A_0}^2 = \mu_2^2 + \nu^2 \frac{\lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5}{2} \quad (1.9d)$$

Como o Modelo do Dubleto Inerte é um modelo de dois Higgs do tipo em que não se é permitido o acoplamento do segundo dubleto com os férmions, os termos de interação entre partículas escalares se resumem aos termos mistos de dubletos contidos no potencial (1.7), que geram a interação das novas partículas com o Higgs, e o termo cinético da densidade lagrangeana (1.6), que dão origem, através da derivada covariante, à interação com os bósons eletrofracos (γ , W^\pm e Z_0). Dessa forma, ao se expandir as expressões (10), nota-se que o candidato a matéria escura H_0 de fato está sujeito somente as forças fracas, não se acoplando com os fótons e, assim, não produzindo luz.

2 MÉTODOS

2.1 Manipulando o potencial

O vácuo estável é o estado de menor energia potencial de um sistema físico, isto é, é o mínimo global da função potencial que descreve o sistema. O potencial do Modelo do Dubleto Inerte, dado por (1.7), é do tipo polinomial, o que implica não possuir singularidades matemáticas, estar bem definido em todos os pontos e crescer ou decrescer indefinidamente conforme os campos tendem ao infinito positivo ou negativo. A existência do mínimo global ocorrerá somente quando a divergência do polinômio no limite de grandes campos for não-negativa. Portanto, para que o mínimo do potencial seja global e, assim, o vácuo seja estável, é necessário que o potencial seja positivo no limite de grandes campos, $\lim_{|\Phi_1|, |\Phi_2| \rightarrow \infty} V \geq 0$. Neste limite os termos quadráticos são desprezados em comparação com os termos quárticos, o que indica que, para a estabilidade do vácuo, podem assumir valores quaisquer, embora seja necessário $\mu_1^2 < 0$ por consistência com o Modelo Padrão para que exista o mecanismo de Higgs.

Uma das formas de se observar os efeitos que tal imposição acarreta ao potencial é através do critério de copositividade, em que, primeiro, o potencial deve ser posto em forma matricial (procedimento que também é utilizado em testes de derivada segunda, com a matriz hessiana). Para tal, reparametriza-se o potencial em termos de $\Phi_1^\dagger \Phi_1 \equiv h_1^2$, $\Phi_2^\dagger \Phi_2 \equiv h_2^2$ e $\Phi_1^\dagger \Phi_2 \equiv h_1 h_2 \rho e^{i\theta}$, e toma-se o limite de grandes campos (2.1).

$$V \xrightarrow[|\Phi_2| \rightarrow \infty]{|\Phi_1| \rightarrow \infty} \lambda_1 h_1^4 + \lambda_2 h_2^4 + \lambda_3 h_1^2 h_2^2 + \lambda_4 \rho^2 h_1^2 h_2^2 + \lambda_5 \rho^2 \cos(2\theta) h_1^2 h_2^2 \geq 0 \quad (2.1)$$

Deseja-se eliminar a dependência do potencial de ρ e de θ , uma vez que estes são relacionados ao produto interno entre dubletos, sendo, de certa forma, a dependência do caminho no espaço de campos tomado para o limite (θ representa a diferença de fase e ρ representa a projeção de um dubleto no outro). Para tal,

será minimizado o potencial em termo destes. Além disso, a estabilidade do vácuo nesse potencial minimizado implica a estabilidade do vácuo de forma geral. A minimização ocorre para $\cos(2\theta) = -1$ e para $\rho^2 = 0$, se $\lambda_4 - |\lambda_5| > 0$, ou $\rho^2 = 1$, caso $\lambda_4 - |\lambda_5| < 0$.

Por fim, observa-se que o potencial é uma forma biquadrática, isto é, pode ser posto de forma tal que seja um produto de vetores da norma quadrada dos campos por uma matriz dos parâmetros do modelo (2.2). Matematicamente, por conta da imposição de $V \geq 0$, essa matriz é, por definição, copositiva, o que acarreta em estar sujeita a certas condições específicas.

$$V \rightarrow \begin{pmatrix} h_1^2 & h_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \frac{1}{2}(\lambda_3 + \rho^2(\lambda_4 - |\lambda_5|)) \\ \frac{1}{2}(\lambda_3 + \rho^2(\lambda_4 - |\lambda_5|)) & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^2 \\ h_2^2 \end{pmatrix} \geq 0 \quad (2.2)$$

Note que a matriz da expressão (2.2) corresponde também a metade da matriz das derivadas segundas do potencial em função das normas quadradas dos campos, que é o termo de ordem dois da expansão da função, sendo positivo em um dado ponto para que este seja um mínimo local ou global. Embora semelhante nesse sentido, o teste de copositividade é distinto do teste da derivada segunda, uma vez que o primeiro adota somente vetores estritamente positivos, enquanto o segundo considera também vetores negativos e a matriz é calculada no ponto de vácuo. Uma forma de recuperar os mesmos resultados através desse outro método é calcular os termos quadrados da expansão no estado de vácuo e aplicando o limite de grandes campos, de forma tal que a norma quadrada dos campos domine sobre seu valor esperado no vácuo, obtendo, assim, a mesma expressão (2.2).

2.2 Copositividade

Definição: uma matriz A simétrica de ordem n é copositiva se sua forma quadrática $x^T A x \geq 0$ para todos vetores $x \geq 0$ (isto é, vetores $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tais que $x_i \geq 0$ para $i \in \mathbb{N}$) (12). A é copositiva se cada uma de suas submatrizes principais de ordem m tal que $1 \leq m \leq n$ é copositiva. Uma submatriz principal

de uma matriz A é obtida ao eliminar linhas e colunas de A de forma simétrica, isto é, linhas e colunas com o mesmo índice.

Foi-se provado um conjunto de afirmações referentes a uma matriz que equivalem com ela não ser copositiva (13). Invertendo-as de forma a indicar a copositividade, obtêm-se as seguintes afirmações referentes a uma matriz A simétrica e copositiva:

1. As submatrizes principais de A são copositivas.
2. Para qualquer $b \geq 0$ há um $x \geq 0$ tal que $Ax = \lambda b$, com $\lambda \geq 0$.
3. O determinante de A é não negativo ou ao menos um elemento da matriz adjunta é negativo;

Aplicando essas afirmações em matrizes de ordem especificadas, pode-se deduzir condições de copositividade em termos do elemento de matriz (13). Considerando a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ de ordem 2 e copositiva, sendo seu determinante $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = (\sqrt{a_{11}a_{22}} - a_{12})(\sqrt{a_{11}a_{22}} + a_{12})$ e sua adjunta $\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$. Da afirmação 1, com as submatrizes principais sendo somente os elementos diagonais, e da afirmação 2, utilizando de $x = b = (1, 0)$ e $x = b = (0, 1)$, deduz-se (2.3a) e (2.3b). Para utilizar a afirmação 3, primeiro nota-se que $a_{12} > 0$ cumpre a condição de algum elemento da adjunta ser negativo. Caso contrário ($a_{12} \leq 0$), é preciso que $\det(A) \geq 0$, e assim, ao considerar que por si só $\sqrt{a_{11}a_{22}} - a_{12}$ já é positivo, resta-se somente (2.3c), que é a condição suficiente para a terceira afirmação, já que também é automaticamente cumprida por $a_{12} > 0$.

$$a_{11} \geq 0 \tag{2.3a}$$

$$a_{22} \geq 0 \tag{2.3b}$$

$$a_{12} + \sqrt{a_{11}a_{22}} \geq 0 \tag{2.3c}$$

3 RESULTADOS

Ao aplicar as condições de copositividade de uma matriz simétrica de ordem 2 (2.3) no limite do potencial do IDM (2.2), considerando os possíveis valores de ρ que minimizem o potencial, obtêm-se as condições de estabilidade do vácuo (3.1). Note que na literatura (3,9–11) considera-se que ambas condições (3.1c) e (3.1d) precisam ser cumpridas ao mesmo tempo que $\lambda_4 - |\lambda_5| < 0$, uma vez que essa última escolha é suficiente para garantir um vácuo eletricamente neutro (9). É possível existir um vácuo neutro com $\lambda_4 - |\lambda_5| \geq 0$, porém seria necessário o ajuste de outros parâmetros, o que também implicaria na partícula escalar mais leve ser eletricamente carregada, não estando de acordo com a percepção de ser uma candidata a WIMP.

$$\lambda_1 \geq 0 \tag{3.1a}$$

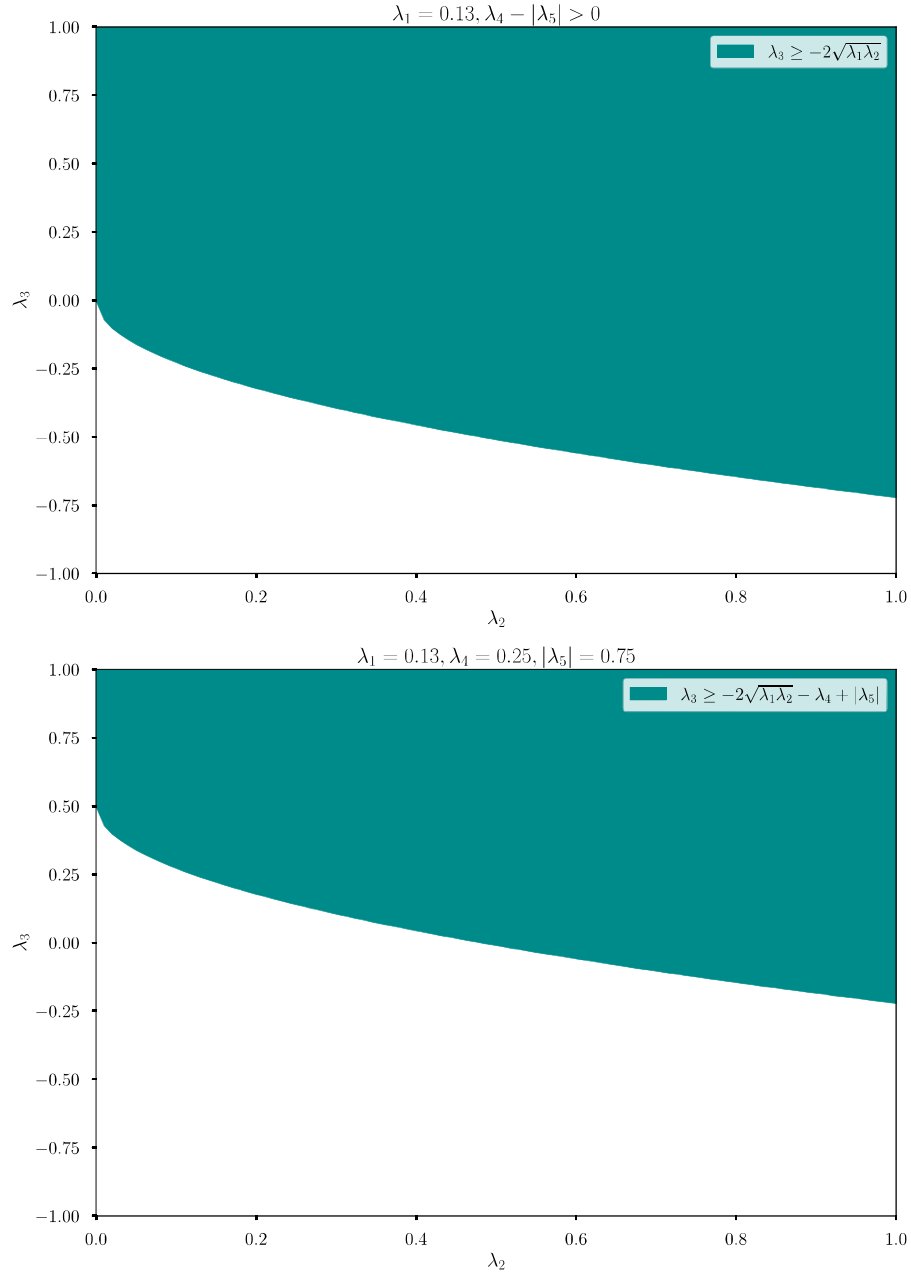
$$\lambda_2 \geq 0 \tag{3.1b}$$

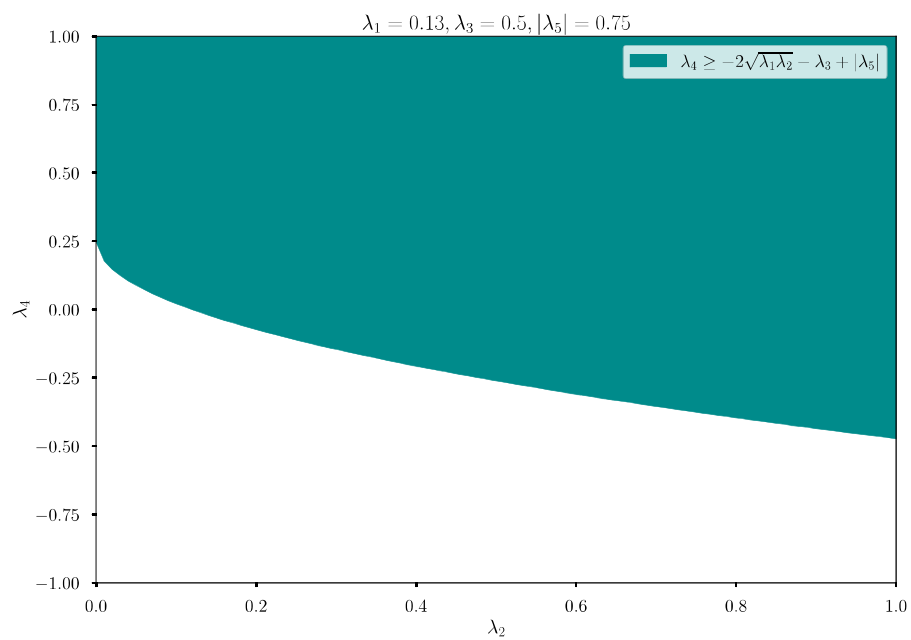
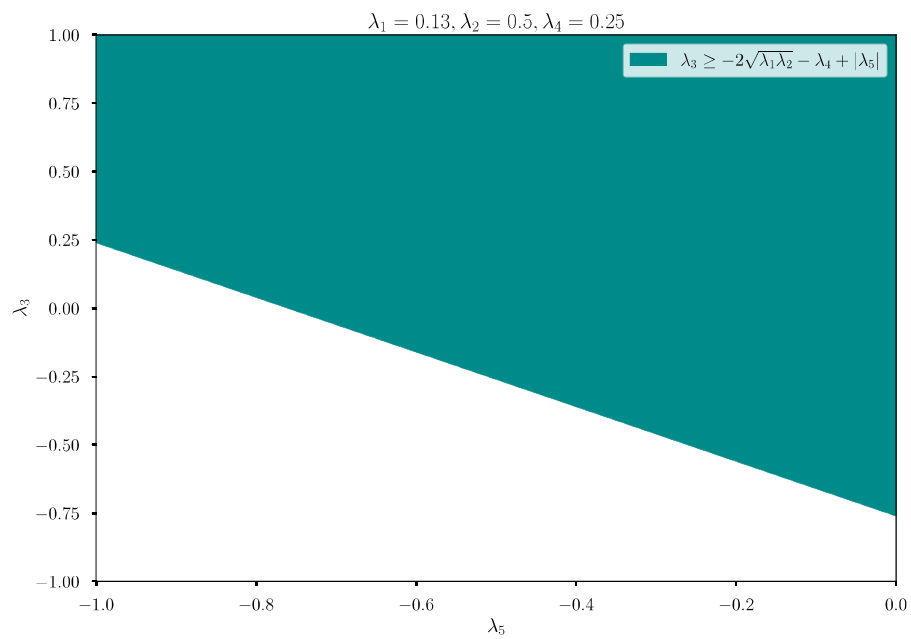
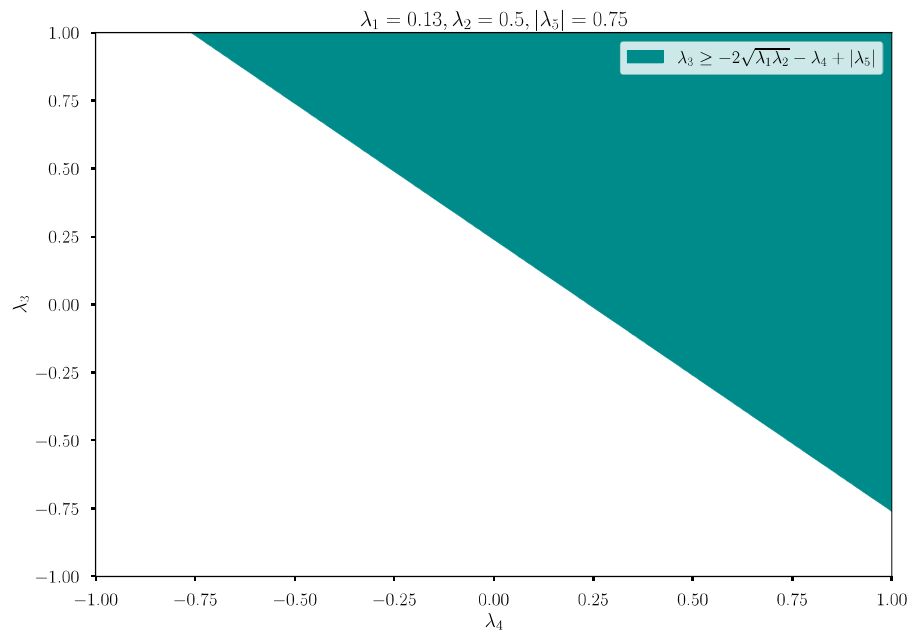
$$\lambda_3 + 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} \geq 0, \text{ se } \lambda_4 - |\lambda_5| \geq 0 \tag{3.1c}$$

$$\lambda_3 + \lambda_4 - |\lambda_5| + 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} \geq 0, \text{ se } \lambda_4 - |\lambda_5| < 0 \tag{3.1d}$$

Tais equações delimitam um polígono no espaço cinco-dimensional dos parâmetros de ordem quártica. Nas figuras 1 estão expostos secções arbitrárias desse polígono, em que somente dois parâmetros variam enquanto os demais são constantes, fixando-se $\lambda_1 = 0.13$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0.5$, $\lambda_4 = 0.25$ e $|\lambda_5| = 0.75$ (para o caso de $\lambda_4 - |\lambda_5| < 0$) caso não sejam as variáveis escolhidas. A área azulada corresponde ao espaço acessível permitido para o modelo para que exista a estabilidade do vácuo segundo as convenções adotadas, enquanto a área marrom representa o espaço de parâmetros permitidos pela estabilidade do vácuo porém que é contrário a condição de vácuo neutro, $\lambda_4 - |\lambda_5| < 0$. Ainda, por conta da convenção de H_0 ser o candidato a matéria escura, considera-se somente $\lambda_5 < 0$ nessas secções. Note que não há gráficos referentes a λ_1 como variável, uma vez que eles seriam efetivamente iguais aos gráficos em termos de λ_2 exceto pela escala, e também pois λ_1 poder

ser considerado como necessariamente constante em decorrência da equação (1.9a), com os valores definidos da massa do bóson de Higgs e do valor esperado do vácuo $m_h = 125.7 \pm 0.5 \text{ GeV}/c^2$ e $\nu = 246.22 \text{ GeV}/c^2(5)$ implicando $\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{m_h}{\nu} \right)^2 \approx 0.13$.





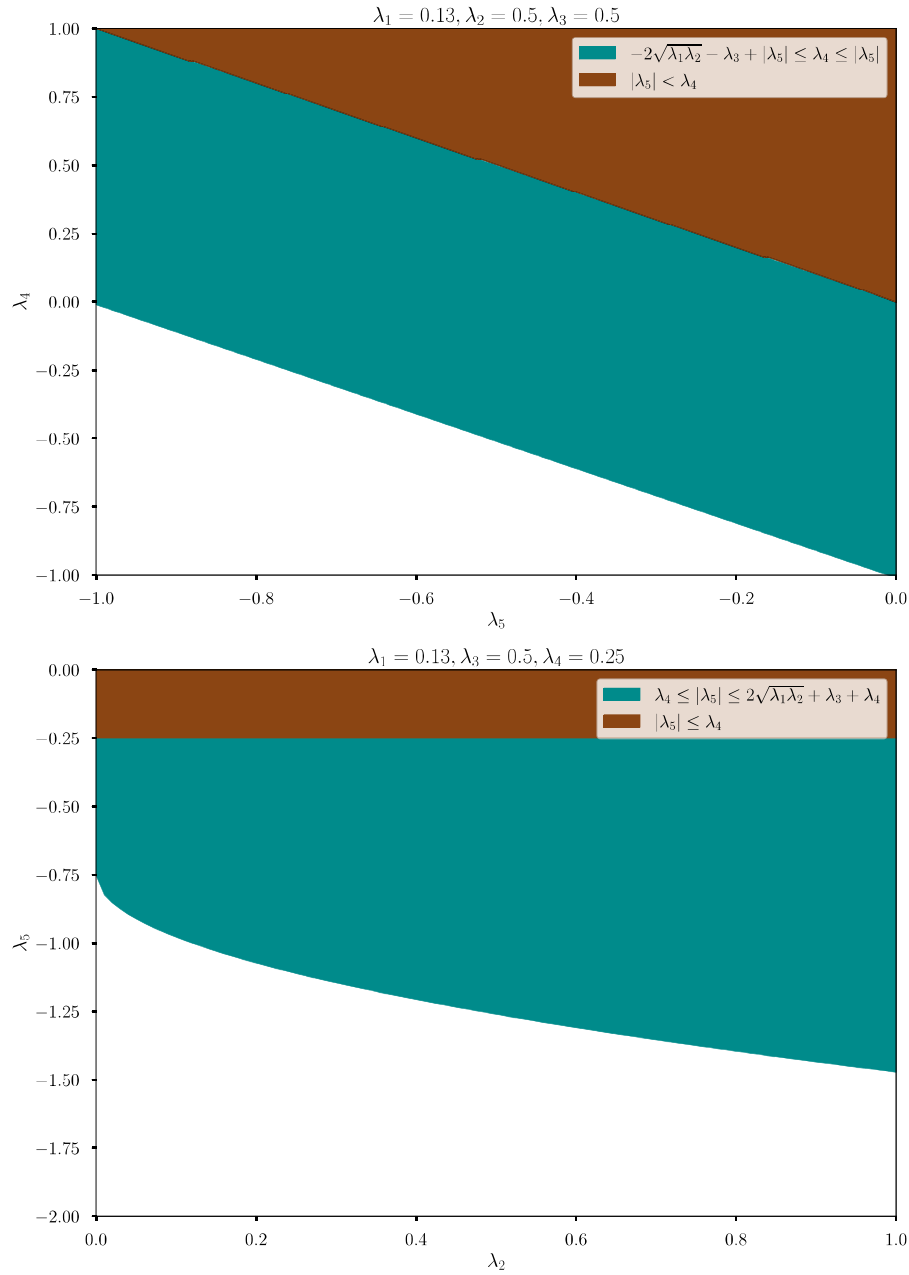


Figura 1 – Espaço de parâmetros permitidos para a estabilidade do vácuo do IDM.
Fonte: elaborado pelo autor.

Para que o Modelo do Dubleto Inerte apresente um significado físico e seja uma alternativa válida para o Modelo Padrão, é necessário que ele possua um estado de vácuo estável, um mínimo global de energia, sendo preciso obedecer as

condições (3.1) para tal. Note que essas condições são necessárias e suficientes para um estado de vácuo estável, porém não são completas para a existência do modelo como um todo, uma vez que seria preciso, além delas, condições referentes a perturbatividade e unitariedade e a concordância com os dados experimentais.

Por fim, outra importância da análise do espaço de parâmetros do potencial e sua consequente restrição se dá pelo cálculo da seção de choque depender de tais parâmetros através das regras de Feynmann, sendo que essa seção de choque apresenta caráter central na evolução da abundância de relíquia (1.1) no contexto do problema de matéria escura, sendo esse problema e sua possível solução contida no IDM uma das motivações do estudo deste modelo.

4 CONCLUSÃO

Dentro as várias teorias além do Modelo Padrão, o Modelo do Dubleto Inerte é um exemplo simples que consegue fornecer um candidato propício a matéria escura sob a forma de WIMPs, decorrente da adição de um segundo dubleto escalar junto da simetria de permutação, o que concede ao modelo uma fenomenologia rica. Neste trabalho, as condições de existência de um vácuo estável foram derivadas para o modelo, fornecendo desigualdades que delimitam um sólido aberto no espaço cinco-dimensional de parâmetros quárticos do potencial escalar, que se reduz a quatro dimensões ao considerar os valores numéricos da massa de Higgs e o valor esperado do vácuo. O vácuo estável, como condição necessária para que o modelo proposto seja minimamente viável e fisicamente significativo, acaba por restringir o espaço de parâmetros, o que, por sua, acaba alterando e restringindo a fenomenologia do modelo, em especial as massas das novas partículas introduzidas, e, por consequência, a massa da possível partícula de matéria escura, assim como a densidade de matéria escura no universo. Tais vínculos são componentes essenciais a serem considerados em análises e simulações posteriores acerca da fenomenologia do Modelo do Dubleto Inerte.

O método utilizado para deduzir as condições de estabilidade do vácuo é, fundamentalmente, a copositividade de matrizes. Tal método foi brevemente explicado de forma genérica e explorado de forma específica para uma matriz simétrica de ordem 2, que representa os parâmetros quárticos do potencial após uma conveniente interpretação deste como o produto de vetores não-negativos quaisquer por uma matriz, sendo tal forma biquadrática necessariamente não-negativa como a condição suficiente de existência do vácuo.

Adicionalmente, neste trabalho foi-se revisado noções relacionadas a matéria escura e a evolução de sua densidade segundo a equação de Boltzmann e também a quebra espontânea de simetria, como forma de evidenciar a necessidade de estudar tanto teorias além do Modelo Padrão quanto o estado de vácuo das mesmas e seu papel exercido dentro do modelo proposto.

REFERÊNCIAS

- 1 CIRELLI, M.; STRUMIA, A.; ZUPAN, J. **Dark Matter**. 2024. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2406.01705>.
- 2 BERTONE, G.; HOOPER, D. History of dark matter. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 90, p. 045002, Oct 2018. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.90.045002>.
- 3 HONOREZ, L. L. *et al.* The inert doublet model: an archetype for dark matter. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2007, n. 02, p. 028–028, fev. 2007. ISSN 1475-7516. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2007/02/028>.
- 4 GRIFFITHS, D. **Introduction to Elementary Particles**. New York, USA: John Wiley & Sons, 2008. ISBN 978-3-527-40601-2.
- 5 THOMSON, M. **Modern particle physics**. New York: Cambridge University Press, 2013. ISBN 978-1-107-03426-6.
- 6 GEORGI, H. **Lie Algebras in Particle Physics: From Isospin to Unified Theories**. Boca Raton, FL: CRC Press, 2000. ISBN 0-7382-0233-9.
- 7 MAGGIORE, M. **A Modern Introduction to Quantum Field Theory**. Oxford, UK: Oxford University Press, 2005. ISBN 9780198520733.
- 8 PROFUMO, S. **An Introduction to Particle Dark Matter**. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2017. ISBN 9781786340016.
- 9 BELYAEV, A. *et al.* Anatomy of the inert two-higgs-doublet model in the light of the lhc and non-lhc dark matter searches. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 97, n. 3, fev. 2018. ISSN 2470-0029. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.97.035011>.
- 10 LUIZ, V. V. F. Matéria escura e o modelo do dubleto inerte. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2017.
- 11 JUSTINO, L. R. **Exploring the inert doublet model of dark matter with very high-energy gamma-rays observatories**. 2024. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2024. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/76/76134/tde-12062024-114530/en.php>.

12 KANNIKE, K. Vacuum Stability Conditions From Copositivity Criteria. **Eur. Phys. J. C**, v. 72, p. 2093, 2012.

13 HADELER, K. On copositive matrices. **Linear Algebra and its Applications**, v. 49, p. 79–89, 1983. ISSN 0024-3795. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0024379583900952>.