

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

Lucas Aurélio Quitakava Ferreira da Silva

O Átomo de hidrogênio em d dimensões

**São Carlos
2024**

Lucas Aurélio Quitakava Ferreira da Silva

O Átomo de hidrogênio em d dimensões

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Diogo Rodrigues Boito

São Carlos

2024

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Resumo

O átomo de hidrogênio é um sistema fundamental na mecânica quântica, cuja simplicidade permite um tratamento teórico detalhado. Descrevê-lo por meio da mecânica quântica resultou em um grande avanço na compreensão do mundo microscópico. Na física contemporânea, é comum explorar problemas em diferentes números de dimensões para destacar características específicas desses universos e realçar o comportamento observado no mundo tridimensional. Na Teoria Quântica de Campos, em particular, é importante entender o comportamento com o número de dimensões no contexto da regularização dimensional. O presente trabalho tem como objetivo estudar o átomo de hidrogênio em duas dimensões espaciais, destacando o comportamento confinante peculiar desse sistema, contrastando-o com o caso tridimensional.

Palavras-chave: Átomo de hidrogênio. Equação de Schrödinger. Duas dimensões.

1 Introdução

O desenvolvimento da mecânica quântica, no início do século XX, revolucionou a compreensão da natureza em escalas microscópicas. Este novo paradigma começou em 1900, quando Max Planck introduziu a ideia da quantização de energia, sugerindo que a radiação de corpo negro era emitida em pacotes de energia chamados *quanta* [1]. Em 1905, Albert Einstein aplicou o conceito de quantização ao campo eletromagnético para explicar o efeito fotoelétrico, em que propôs que a luz era composta por partículas denominadas fótons [2]. Em 1913, Niels Bohr apresentou um modelo atômico em que os elétrons orbitavam o núcleo em níveis de energia quantizados, explicando a emissão ou absorção de luz como transições entre esses níveis [3]. Essas descobertas pioneiras, em conjunto com o aprimoramento das técnicas experimentais, mostraram que as leis da física clássica eram insuficientes para descrever o comportamento das partículas em escalas atômicas.

Para determinar uma base teórica sólida para estas novas descobertas, Werner Heisenberg e Erwin Schrödinger desenvolveram, de maneira independente, a formulação da dinâmica quântica. Em 1925, Heisenberg publicou uma abordagem matricial para descrever estruturas atômicas utilizando matrizes para representar grandezas físicas em sistemas atômicos [4]. Um ano depois, em 1926, Schrödinger propôs a mecânica ondulatória, descrevendo a dinâmica quântica por meio de uma equação de onda, que hoje leva o seu nome. A solução dessa equação diferencial para o problema de estados ligados resulta em um espectro discreto de energia e na função de onda do sistema considerado [5]. Apesar das abordagens parecerem distintas, Schrödinger mostrou que as duas formulações eram equivalentes.

O estudo do átomo de hidrogênio é um dos pilares fundamentais da mecânica quântica, pois a simplicidade deste sistema, composto por um próton e por um elétron, permite um tratamento teórico detalhado e serve como base para entender outras configurações de átomos mais complexos da tabela periódica. Logo, o estudo do hidrogênio em diferentes contextos é um rico campo de pesquisa.

Na física contemporânea é comum estudar teorias bem consolidadas em diferentes configurações espaço-temporais. A extensão do tratamento teórico para um número qualquer de dimensões permite que se ganhe entendimento sobre diversos problemas e esta ligada à técnica conhecida como regularização dimensional, método padrão em Teoria Quântica de Campos (TQC) [6]. Por exemplo, após o desenvolvimento da Eletrodinâmica Quântica (QED), Julian Schwinger, em 1962, mostrou que essa teoria torna-se confinante, em outras palavras, monopolos isolados não existiriam, porque seria necessário energia infinita para conseguir extrair uma única carga, no limite de uma única dimensão espacial [7], um comportamento que existe naturalmente em nosso universo usual, com três dimensões espaciais, no contexto da Cromodinâmica Quântica (QCD), a teoria responsável pelas interações fortes entre quarks, pois neste caso o potencial de interação cresce linearmente com a distância (para distâncias grandes).

Dessa forma, o presente trabalho é dedicado ao estudo do hidrogênio em $D = 2 + 1$ dimensões¹. Então, iniciamos com um caso $D = 3 + 1$ conhecido para testar o programa e o método numérico implementado. Assim, utilizamos o método das diferenças finitas para escrever um código em FORTRAN 90, com o intuito de resolver numericamente o caso tridimensional e comparar com as soluções analíticas conhecidas para verificar a consistência dos resultados do programa. Para o caso $D = 2 + 1$, o potencial será logarítmico, o que deixaria as partículas constituintes dos estados atômicos confinadas, ou seja, não seria possível separar o estado ligado próton-elétron por conta da interação crescer com a distância. Neste caso bidimensional, a solução do átomo de hidrogênio é bem menos estabelecida e há algum debate na literatura sobre os níveis de energia para $l = 0$. Logo, aplicamos o nosso método e comparamos com os resultados de Asturias e Aragón [8] e Reiser [9], além de levar em conta Morales [10], que propõe soluções analíticas.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: na seção 2 desenvolvemos a generalização do potencial coulombiano para d dimensões espaciais; na seção 3 apresentamos a equação de Schrödinger e a desenvolvemos para o caso $D = 3 + 1$; na seção 4 introduzimos a implementação numérica das soluções; na seção 5 apresentamos as soluções analíticas bem como a comparação com os resultados numéricos para o átomo de hidrogênio $D = 3 + 1$; na seção 6 utilizamos o método numérico para analisar o sistema em um universo $D = 2 + 1$ e compararemos com resultados existentes na literatura. Por fim, na seção 7 fechamos com uma conclusão acerca dos resultados obtidos neste trabalho.

2 Potencial Coulombiano em d dimensões

Supondo que a eletrodinâmica exista em qualquer espaço-tempo independente da dimensionalidade é possível construir a teoria do eletromagnetismo em d dimensões, entretanto precisamos fazer alguns ajustes para tornar a teoria consistente. O elemento d -dimensional de volume $d^d x$ em coorde-

¹Utilizamos a notação $D = d + 1$, em que d representa o número de dimensões espaciais

nadas cartesianas é dado por

$$d^d x = dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_d, \quad (1)$$

em que podemos generalizar para coordenadas esféricas separando em uma parte radial r e $d - 1$ partes angulares, que descrevem as direções. Logo, podemos reescrever a Eq. (1) da seguinte forma

$$d^d x = r^{d-1} dr d\Omega_d, \quad (2)$$

em que o termo r^{d-1} surge do fator jacobiano da transformação de coordenadas e $d\Omega_d$ é o elemento de ângulo sólido d -dimensional.

Consideramos que a essência da lei de Gauss fica inalterada: as linhas de fluxo do campo elétrico $\Phi_E^{(d)}$ através de uma superfície em d dimensões espaciais contêm a informação completa da carga cercada pela superfície, neste caso, precisamos utilizar hipersuperfícies. Assim, generalizamos o caso tridimensional considerando uma hiperesfera d -dimensional de raio r como uma superfície gaussiana cercado uma carga q na origem. Pela definição de fluxo temos que [11]

$$\Phi_E^{(d)} = |\mathbf{E}| r^{d-1} \int_S d\Omega_d = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (3)$$

Para calcular a integral sobre o ângulo sólido Ω_d que aparece na expressão anterior, vamos utilizar o argumento de que a integral gaussiana em d dimensões é

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} \right)^d = (\sqrt{\pi})^d, \quad (4)$$

em que podemos realizar a seguinte manipulação

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} \right)^d &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 e^{-x_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 e^{-x_2^2} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_d e^{-x_d^2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 \dots dx_d e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d^d x e^{-\sum_{i=1}^d x_i^2} = (\sqrt{\pi})^d. \end{aligned} \quad (5)$$

Expressando a Eq. (5) em coordenadas esféricas obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^d x e^{-\sum_{i=1}^d x_i^2} = \int_S d\Omega_d \int_0^\infty dr r^{d-1} e^{-r^2}, \quad (6)$$

utilizando a definição da função $\Gamma(z)$, dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty du u^{z-1} e^{-u}, \quad (7)$$

podemos fazer a substituição $u = r^2$, com $du = 2rdr$, no termo radial da Eq. (6) para ficar com uma estrutura semelhante a da equação anterior

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr r^{d-1} e^{-r^2} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty du u^{\frac{d}{2}-1} e^{-u} \\ &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Substituindo os resultados das Eqs. (5) e (8) na Eq. (6) temos

$$\int_S d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \quad (9)$$

Finalmente, utilizando a Eq. (9) na Eq. (3) e considerando que pela simetria superesférica o campo $\mathbf{E}$ aponta na direção radial, obtemos a expressão para o campo elétrico da carga puntiforme na origem

$$\mathbf{E} = q \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^{d-1}}, \quad (10)$$

que é a lei de Coulomb em d dimensões.

Dessa forma, como sabemos que o campo eletrostático obedece a relação $\mathbf{E} = -\nabla V$, podemos determinar o potencial elétrico do átomo de hidrogênio para uma dimensão d qualquer no sistema CGS, dado por

$$V(r) = \begin{cases} 2e^2 \frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{(d-2)/2}} \frac{r^{2-d}}{2-d}, & \text{se } d \neq 2; \\ e^2 \ln(r/a), & \text{se } d = 2. \end{cases} \quad (11)$$

em que a constante a estabelece uma referência arbitrária e define a escala do problema.

Logo, especificamente para o caso $d = 2$, o campo $\mathbf{E}$ cai com o inverso da distância, justificando a dependência com $\log(r)$ para o potencial, configurando um comportamento confinante, significando que precisaríamos fornecer energia infinita para conseguir ionizar o átomo de hidrogênio neste contexto hipotético bidimensional. Esse comportamento é análogo ao que acontece na QCD, pois temos que o potencial de interação entre quarks, $V_{q\bar{q}}(r)$, é dado aproximadamente (porque consideramos que as linhas de campo de cor formam um “tubo de fluxo”, em que o comportamento não exatamente linear) por [12]

$$V_{q\bar{q}}(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + \kappa r, \quad (12)$$

com o termo de potencial coulombiano somado com um termo de confinamento que cresce linearmente com a distância. Como resultado, temos que ao tentar separar dois quarks a energia de ligação cresceria infinitamente, exatamente o que ocorre para nosso modelo 2D do átomo de hidrogênio, entretanto, de forma muito mais lenta por conta do crescimento logarítmico.

3 A Equação de Schrödinger

A equação de Schrödinger é a base da mecânica quântica, pois descreve como o estado de um sistema físico evolui ao longo do tempo. Sua forma diferencial geral dependente do tempo é dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t), \quad (13)$$

em que $\hbar$ é a constante de Planck reduzida, m a massa da partícula, ∇^2 o operador laplaciano, $\psi(\mathbf{r},t)$ a função de onda e $V(\mathbf{r},t)$ o potencial da partícula. O lado direito da Eq. (13) descreve a evolução temporal da função de onda. No entanto, ao analisarmos sistemas estacionários, ou seja, o potencial $V(\mathbf{r})$ não depende do tempo e a energia total do sistema E é constante, a equação de Schrödinger assume a sua formulação independente do tempo, dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (14)$$

em que E é a energia total do sistema. Para resolver essa equação diferencial utilizamos o método da separação de variáveis, dividindo a solução em uma parte radial $R(r)$ – o foco principal deste trabalho – e outra parte angular $Y(\theta, \phi)$.

Considerando que o operador laplaciano tridimensional em coordenadas esféricas é

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (15)$$

e utilizando o potencial dado pela Eq. (11) para $d = 3$, chegamos na equação radial de Schrödinger em $D = 3 + 1$ dimensões, dada por

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} + \frac{e^2}{r} \right] R(r) = ER(r). \quad (16)$$

Fazendo a substituição de variável $u(r) = rR(r)$, a expressão toma a seguinte forma

$$-\frac{d^2}{dr^2}u(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}u(r) + 2\frac{me^2}{\hbar^2}\frac{u(r)}{r} = \frac{2mE}{\hbar^2}u(r). \quad (17)$$

Como trabalharemos com o problema numericamente, convém deixar a equação adimensional. Para isso, utilizamos o raio de Bohr, $a_B = \hbar^2/(me^2)$, e a energia de Rydberg, $E_R = e^2/(2a_B)$, como escalas típicas de comprimento e de energia do sistema, respectivamente. Logo, definindo as variáveis $\varepsilon = E/E_R$ e $\rho = r/a_B$, temos como resultado

$$-\frac{d^2}{d\rho^2}u(\rho) + \left[\frac{l(l+1)}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} \right] u(\rho) = \varepsilon u(\rho), \quad (18)$$

Tabela 1: Primeiras soluções analíticas radiais para o átomo de hidrogênio, adaptadas do livro do Griffiths [13], acompanhadas de suas respectivas energias (utilizando a Energia de Rydberg [14] como parâmetro). Fonte: Elaborada pelo autor.

Função radial $u_{n\ell}(\rho)$	Energia E_n^{teo} (eV)
$u_{10}(\rho) = 2\rho e^{-\rho}$	$E_1^{\text{teo}} = -13.605693122994(26)$
$u_{20}(\rho) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho \left(1 - \frac{1}{2}\rho\right) e^{-\frac{\rho}{2}}$	$E_2^{\text{teo}} = -3.4014232807485(65)$
$u_{21}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{24}}\rho^2 e^{-\frac{\rho}{2}}$	
$u_{30}(\rho) = \frac{2}{\sqrt{27}}\rho \left(1 - \frac{2}{3}\rho + \frac{2}{27}\rho^2\right) e^{-\frac{\rho}{3}}$	
$u_{31}(r) = -\frac{8}{27\sqrt{6}}\rho^2 \left(1 - \frac{1}{6}\rho\right) e^{-\frac{\rho}{3}}$	$E_3^{\text{teo}} = -1.5117436803327(29)$
$u_{32}(r) = \frac{4}{81\sqrt{30}}\rho^3 e^{-\frac{\rho}{3}}$	

que é a equação de Schrödinger adimensional para o átomo de hidrogênio tridimensional, em que aplicaremos o método numérico para obter soluções e comparar com os resultados analíticos, apresentados na Tabela 1.

4 Método Numérico

Para resolver o problema em questão empregamos o método das diferenças finitas, em que trabalharemos considerando uma caixa finita de raio L . Discretizamos o espaço contínuo em uma malha de N pontos com um espaçamento mínimo h entre os pontos da rede. A partir dessa discretização, conseguimos aproximar as derivadas presentes na equação de Schrödinger utilizando expansões em séries de Taylor. A solução física é obtida no limite $h \rightarrow 0$ e $L \rightarrow \infty$, mas para h bastante pequeno e L suficientemente grande, esperamos obter resultados com boa precisão.

Dada uma função $f(r)$ definida em um ponto r da malha, suas expansões em Taylor para os pontos $r + h$ e $r - h$ são, respectivamente, dadas por

$$f(r + h) = f(r) + h \frac{df(r)}{dr} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 f(r)}{dr^3} + \mathcal{O}(h^4), \quad (19)$$

$$f(r - h) = f(r) - h \frac{df(r)}{dr} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 f(r)}{dr^3} + \mathcal{O}(h^4). \quad (20)$$

Em posse dessas relações, podemos aproximar as derivadas numericamente. Subtraindo a Eq. (19) da Eq. (20), temos a seguinte fórmula para derivada numérica de primeira ordem

$$\frac{du_i}{dr} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad (21)$$

além disso, somando as mesmas equações, também obtemos uma relação para a segunda derivada numérica

$$\frac{d^2 u_i}{dr^2} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}. \quad (22)$$

Aplicando as aproximações apresentadas pelas Eqs. (21) e (22), a equação de Schrödinger, a princípio uma equação diferencial, pode ser expressa como um sistema de equações lineares. Os termos que envolvem derivadas transformam-se em uma expressão que liga os valores da função $u(r)$ nos pontos $r - h$, r e $r + h$ da rede, permitindo o problema tomar o seguinte formato matricial

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} H_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & H_2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & H_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & H_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad (23)$$

em que H_i representa o elemento da diagonal principal associado ao potencial efetivo no ponto r_i , o que depende da dimensão d considerada, e ε corresponde às autoenergias dos sistema. Utilizamos duas condições de contorno: $u_0 = 0$ e $u_L = 0$. Observamos que a Eq. (23) é um problema de autovalores, em que se tem uma matriz tridiagonal e simétrica. Para resolvê-lo, utilizamos a subrotina *dsterm* da biblioteca LAPACK em FORTRAN, desenvolvida especificamente para lidar com este tipo de problema.

5 Átomo de Hidrogênio 3D

Agora, podemos implementar o algoritmo na equação de Schrödinger e obter as soluções numéricas para o átomo de hidrogênio em $D = 3 + 1$ dimensões. Substituindo a Eq. (22) na Eq. (18) obtemos

$$-\frac{u_{i+1}}{h^2} - \frac{u_{i-1}}{h^2} + \left[\frac{\ell(\ell+1)}{\rho_i^2} - \frac{2}{\rho_i} + \frac{2}{h^2} \right] u_i = \varepsilon u_i, \quad (24)$$

neste caso, os elementos da diagonal principal do problema representado pela Eq. (23) são dados por

$$H_i = \frac{h^2 \ell(\ell+1)}{\rho_i^2} - \frac{2h^2}{\rho_i} + 2. \quad (25)$$

Inicialmente, vamos utilizar $N = 35999$ pontos fixos e variar o tamanho L da caixa, alterando, consequentemente, o valor de h , e analisar as energias obtidas numericamente, E_n^{num} , para o estado n com base no módulo da diferença deste valor obtido com o valor esperado, E_n^{teo} . Definimos esse erro como

$$\Delta E_n = |E_n^{\text{num}} - E_n^{\text{teo}}|, \quad (26)$$

Tabela 2: Valores do tamanho da caixa L e do valor do passo h para $N = 35999$ fixo acompanhados de alguns resultados para os erros ΔE_n das 3 primeiras autoenergias. Fonte: Elaborada pelo autor.

$L (a_B)$	$h (\times 10^{-4} a_B)$	ΔE_1 (eV)	ΔE_2 (eV)	ΔE_3 (eV)
20	5,556	$1,05 \times 10^{-6}$	$1,47 \times 10^{-4}$	$4,32 \times 10^{-2}$
30	8,334	$2,36 \times 10^{-6}$	$1,41 \times 10^{-8}$	$7,47 \times 10^{-4}$
40	11,112	$4,20 \times 10^{-6}$	$8,67 \times 10^{-8}$	$6,03 \times 10^{-6}$
50	13,890	$6,56 \times 10^{-6}$	$1,37 \times 10^{-7}$	$2,61 \times 10^{-8}$

cujos resultados para alguns valores representativos de L e h encontram-se nas três últimas colunas da Tabela 2.

Ao observar as 3 últimas colunas, notamos como o tamanho da caixa e o valor do passo h influenciam nos resultados das autoenergias. Por exemplo, o caso $n = 2$ deixa evidente essa dependência, pois ao aumentar o tamanho da caixa de $20 a_B$ para $30 a_B$ temos uma melhora muito significativa, quatro casas a mais de precisão, da autoenergia encontrada, apesar do aumento do valor de h correspondente. Contudo, ao passar para $L = 50 a_B$, o valor piora, pois o espaçamento de rede agora é consideravelmente maior. Essa dependência pronunciada com L é mais esperada e nítida para estados com n maior, já que a função de onda nesses casos é mais sensível ao tamanho da caixa. Assim, para $n = 1$ essa sensibilidade é menor, pois a função de onda decai rapidamente após o pico inicial. Logo, expandir a caixa além de $L = 20 a_B$, sem diminuir o valor de h , compromete a precisão dos resultados, então $L = 20 a_B$ já é suficientemente grande para esse estado. Podemos confirmar essa relação entre os parâmetros estudando o comportamento das soluções numéricas e analíticas mostrado na Figura 1.

Observamos claramente como a Figura 1a é bem mais parecida com a Figura 1d do que com a Figura 1b ou 1c, destacando como o tamanho da caixa finita impacta na solução numérica. Esse efeito decorre diretamente das condições de contorno aplicadas, em que a função de onda vai a zero para a borda da caixa, o que diminui a precisão da aproximação numérica dependendo do estado que desejamos trabalhar, como a Figura 1 deixa claro para os estados de $n = 3$. De modo geral, estados mais excitados possuem funções de onda mais estendidas no espaço, exigindo um L maior para que as soluções concordem com o resultado analítico.

5.1 Comparação das soluções

Para fazer uma análise quantitativa, podemos subtrair a solução analítica da solução numérica, conforme mostra a Figura 2. Notamos que para o estado de onda s ($n = 1, \ell = 0$) usar $L = 20 a_B$ retorna um bom resultado, conforme exibido pela Figura 2a, pois essa subtração das soluções é quase nula, porque analisando o eixo vertical temos uma escala de 10^{-7} , o que configura uma discordância bem pequena.

Em contrapartida, para estado $n = 3, \ell = 0$, por exemplo, não se tem uma resposta satisfatória

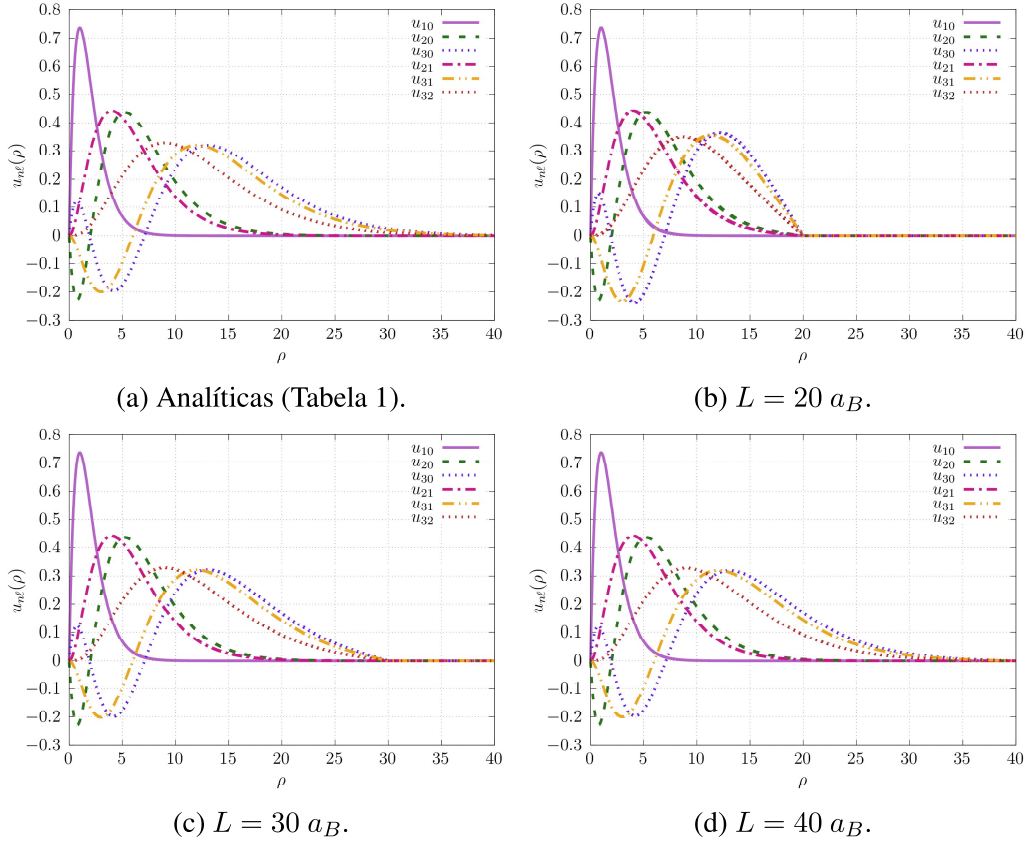


Figura 1: Comportamento de algumas das primeiras soluções radiais $u_{n\ell}(\rho)$ analíticas e numéricas com base no raio L da caixa para 35999 pontos. As Figuras (b), (c) e (d) mostram claramente que para estados com $n = 3$ é fundamental que $L > 35a_B$. Fonte: Elaborada pelo autor.

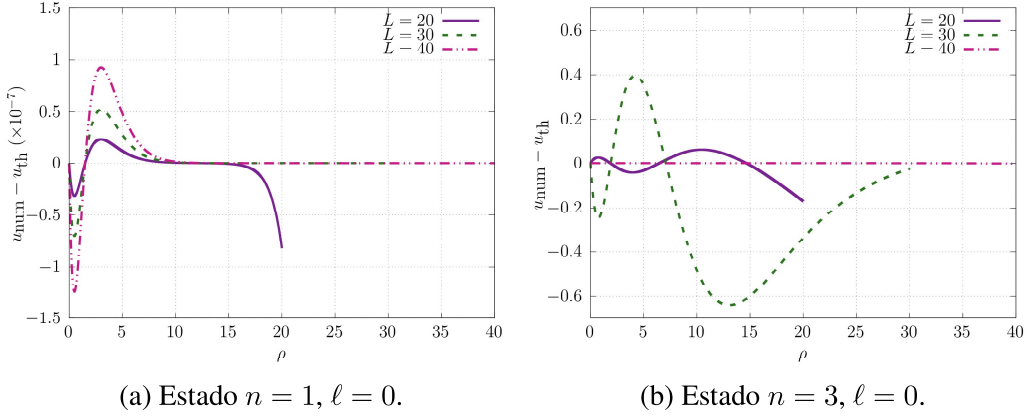


Figura 2: Comparação subtraindo o resultado da solução analítica u_{th} da solução numérica u_{num} . Fonte: Elaborada pelo autor.

para $L = 20 a_B$ ou $L = 30 a_B$, porque o comportamento da subtração das soluções apresenta uma discrepância considerável, como apresentado na Figura 2b. Isso reforça o fato da dependência do tamanho da caixa, pois percebemos que o resultado melhora muito quando o tamanho é $L = 40 a_B$. Enfim, com base nestes dois casos, conseguimos realçar o que foi previsto pela análise qualitativa: o

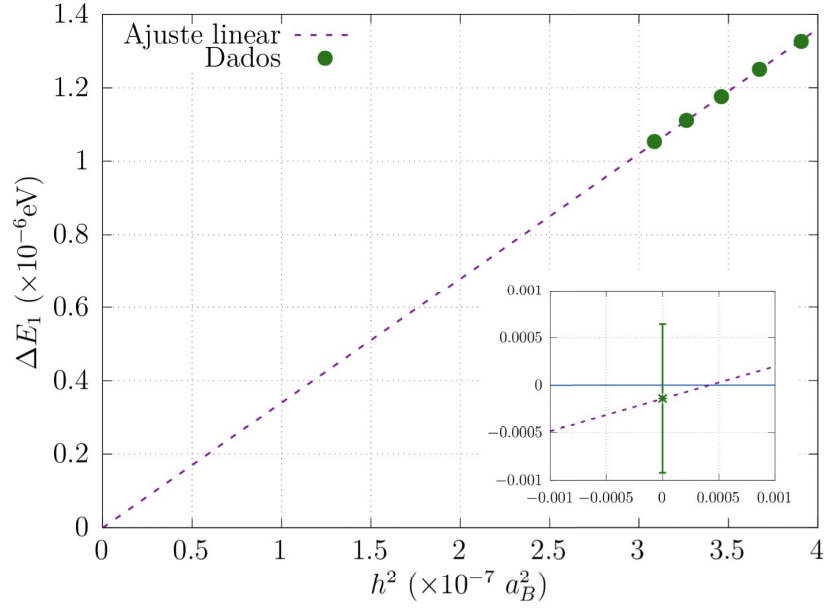


Figura 3: Extrapolação para o contínuo do estado de onda s , mantendo $L = 20 a_B$ fixo e variando o tamanho do espaçamento de rede h no intervalo $[1, 6669 \times 10^{-3}; 5, 5559 \times 10^{-4}] a_B$, correspondendo a 11999 até 35999 pontos. Fonte: Elaborada pelo autor.

tamanho da caixa interfere na qualidade da solução numérica quando comparada à solução analítica. Além disso, mesmo com o número de pontos fixo em 35999, L é crucial para estados com n alto, enquanto o tamanho de h é mais importante para n baixo (desde que L seja suficientemente grande) os resultados ainda se mostram coerentes conforme o espaçamento de rede h aumenta. Entretanto, vale comentar que esperamos um resultado menos preciso conforme h cresce, por isso é importante fazer escolhas apropriadas.

5.2 Extrapolação para contínuo

Após obter as soluções numéricas, analisamos o efeito do espaçamento h da malha. Sabemos que, no limite em que $h \rightarrow 0$ e $L \rightarrow \infty$, a solução numérica deve convergir para a solução exata do problema contínuo. Assim, um passo importante na análise é a extrapolação dos resultados obtidos visando estimar o valor da energia no limite do contínuo. Coletamos dados para diferentes valores de h , mantendo L fixo, mas suficientemente grande (segundo o que mostramos na seção anterior), pois qualquer que seja o estado, se ele não for muito excitado, ele será pouco sensível ao valor do tamanho da caixa L .

Esse processo nos permite refinar a precisão da energia calculada e identificar possíveis erros numéricos associados à discretização. Então, para realizar a extrapolação para o estado de onda s , analisamos o erro ΔE_1 — definido pela Eq. (26) — em função do valor de h^2 e percebemos um nítido comportamento linear conforme apresentado na Figura 3. Logo, podemos realizar uma linearização

Tabela 3: Comparação entre as energias dos níveis n com $\ell = 0$ do átomo de hidrogênio obtidas pelo método da extrapolação para o contínuo, E_n^{ext} , e os valores experimentais, E_n^{exp} , [14] por meio do erro relativo, δE_{rel} . Os valores entre parênteses são os erros das medidas. Fonte: Elaborada pelo autor.

n	E_n^{ext} (eV)	E_n^{exp} (eV)	δE_n^{rel}
1	-13,60569312314(79)	-13,605693122994(26)	$1,07 \times 10^{-10}$
2	-3,40142324442(39)	-3,4014232807485(65)	$1,07 \times 10^{-8}$
3	-1,51174322797(13)	-1,5117436803327(29)	$2,99 \times 10^{-7}$

dos pontos utilizando o método dos mínimos quadrados, por meio da equação de reta, dada por

$$\begin{aligned} \Delta E_1(h^2) &= ah^2 + b \\ [E_1^{\text{num}} - E_1^{\text{teo}}](h^2) &= ah^2 + b, \end{aligned} \quad (27)$$

o que nos retorna os coeficientes $a = 0,340138(68) \text{ eV}/a_b^2$ e $b = -0,00014(79) \text{ eV}$. Podemos somar E_1^{teo} dos dois lados da Eq. (27) e obter

$$E_1^{\text{num}} = ah^2 + b + E_1^{\text{teo}}, \quad (28)$$

em que temos a relação linear entre os valores numéricos obtidos e um novo coeficiente linear que é a nossa energia extrapolada $E_1^{\text{ext}} = b + E_1^{\text{teo}}$. Por fim, conseguimos fazer a comparação com valores experimentais tabelados com auxílio do erro relativo, que é dado por

$$\delta E_n^{\text{rel}} = \frac{E_n^{\text{ext}} - E_n^{\text{exp}}}{E_n^{\text{exp}}}. \quad (29)$$

Os resultados para $n = 1$ aparecem na segunda linha da Tabela 3. Aplicando este mesmo método de extrapolação para o contínuo em outros níveis de energia, com $L = 30 a_B$ para $n = 2$ e $L = 45 a_B$ para $n = 3$, completamos as duas últimas linhas da Tabela 3.

Neste caso, vale destacar que a energia não depende do número quântico ℓ . Isso ocorre porque o átomo de hidrogênio em $d = 3$ corresponde a um problema de força central de dois corpos interagindo por um potencial que cai com $1/r$. Esse tipo de interação possui uma simetria especial que permite a conservação do vetor de Runge–Lenz [15], que mantém a mesma direção e magnitude para uma força que cai com o quadrado da distância. Por conta da conservação dessa quantidade no sistema surge uma degenerescência nos níveis de energia, ou seja, órbitas com diferentes valores de ℓ possuindo a mesma energia.

Analisando a Tabela 3, conseguimos notar uma melhora do resultado para o estado fundamental, apresentados na segunda linha, em relação às medidas feitas separadamente, que antes tinham uma precisão de 5 casas decimais e, com a extrapolação, passa a ter uma precisão de 9 casas decimais, o que é um ganho notável de precisão, reproduzindo, portanto, impressionantes 11 algarismos signifi-

cativos do resultado analítico. Em contrapartida, para os estados mais excitados não obtemos tantas casas de precisão como para o estado fundamental, o que já era esperado, pois esses estados são mais sensíveis a L finito do que $n = 1$. Ainda assim, conseguimos ter uma boa aproximação com os valores esperados, conforme o erro relativo aponta. Apesar do erro aumentar a medida que a excitação do estado cresce, ainda se trata de um erro pequeno, e reproduzimos 6 algarismos significativos para o estado $n = 3$ e $\ell = 0$ conforme mostra a última linha.

6 Átomo de Hidrogênio 2D

Passamos agora ao tratamento do átomo de hidrogênio em 2 dimensões espaciais. Como já discutimos, a principal diferença está no comportamento do potencial de Coulomb, que é dado pela Eq. (11) e que agora é, portanto

$$V(r) = e^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right). \quad (30)$$

Considerando que o laplaciano em duas dimensões, em coordenadas polares, é dado por

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad (31)$$

obtemos a equação de Schrödinger em $D = 2 + 1$ dimensões, que é dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \psi(\mathbf{r}) + e^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}). \quad (32)$$

Por conta da simetria radial do potencial, temos uma solução separável em coordenadas polares da seguinte forma

$$\psi_{n\ell}(\mathbf{r}) = R_{n\ell} \frac{e^{i\ell\phi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (33)$$

o que nos permite expressar a equação radial como [8]

$$\frac{1}{\tilde{\rho}} \left[\frac{d}{d\tilde{\rho}} \left(\tilde{\rho} \frac{dR(\tilde{\rho})}{d\tilde{\rho}} \right) - \frac{\ell^2}{\tilde{\rho}^2} R(\tilde{\rho}) - \ln(\tilde{\rho}) R(\tilde{\rho}) + \gamma R(\tilde{\rho}) \right] = 0, \quad (34)$$

em que $\tilde{\rho} = \sqrt{\beta} r$ é adimensional, onde definimos $\beta = \hbar^2/2me^2$, e $\gamma = E/e^2$ também é adimensional. Então, a constante de escala do argumento do logaritmo da Eq. (32) é $a = 1/\sqrt{\beta}$. Essa escolha de parâmetros do problema em $D = 2 + 1$ corresponde a de Asturias e Aragón [8], que é a referência principal para esta parte do trabalho, com a qual compararemos os nossos resultados. Além disso, também compararemos com os valores apresentados anteriormente por Reiser [9].

Agora, para poder repetir o que foi realizado para o caso $D = 3 + 1$ e aplicar o método numérico, realizamos uma nova substituição de variável para obter uma função $v(\tilde{\rho})$ análoga à função $u(\rho)$ que fizemos para o caso tridimensional, porque queremos utilizar as mesmas condições de contorno.

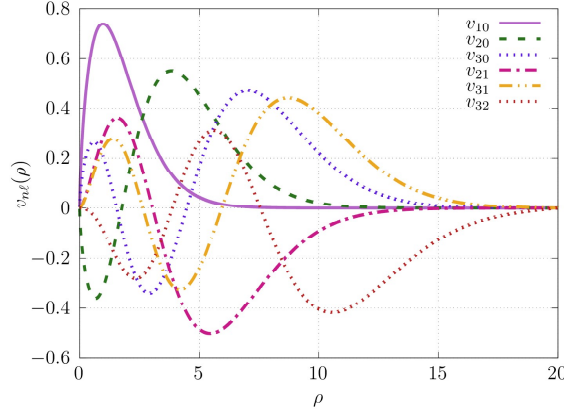


Figura 4: Soluções numéricas para alguns estados em 2 dimensões mantendo $N = 35999$ pontos e $L = 20 \beta^{-1/2}$ fixos. Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 4: Autoenergias para alguns estados no contexto bidimensional. Fonte: Elaborada pelo autor

n	ℓ	$\gamma_{n\ell}$
1	0	0,65196235
1	1	1,38618616
1	2	1,84437205
1	3	2,15784685

Então, definimos $R(\tilde{\rho}) = v(\tilde{\rho})\tilde{\rho}^{-1/2}$ o que retorna a seguinte expressão

$$-\frac{d^2 v(\tilde{\rho})}{d\tilde{\rho}^2} + \left[\frac{\ell^2}{\tilde{\rho}^2} - \frac{1}{4\tilde{\rho}^2} + \ln(\tilde{\rho}) \right] v(\tilde{\rho}) = \gamma v(\tilde{\rho}). \quad (35)$$

Assim, substituindo a Eq. (22) na Eq. (35) para poder implementar o algoritmo e obter as soluções numéricas para o problema, obtemos

$$-\frac{v_{i+1}}{h^2} - \frac{v_{i-1}}{h^2} + \left[\frac{\ell^2}{\tilde{\rho}_i^2} - \frac{1}{4\tilde{\rho}_i^2} + \frac{2}{h^2} + \ln(\tilde{\rho}_i) \right] v_i = \gamma v_i, \quad (36)$$

em que os elementos da diagonal representados na Eq. (23) agora correspondem à

$$H_i = \frac{h^2 \ell^2}{\tilde{\rho}_i^2} - \frac{h^2}{4\tilde{\rho}_i^2} + h^2 \ln(\tilde{\rho}_i) + 2. \quad (37)$$

Rodando o programa para $N = 35999$ pontos e $L = 20 \beta^{-1/2}$ conseguimos observar o comportamento das funções de onda como mostra a Figura 4. Com isso, também podemos apresentar algumas autoenergias $\gamma_{n\ell}$ obtidas para alguns dos estados, conforme mostra a Tabela 4.

Notamos algo interessante que surge para o caso $d = 2$: a energia passa a depender também de ℓ , contrariamente ao caso tridimensional usual em que as energias dependiam apenas de n . Além disso,

Tabela 5: Comparação dos valores para as autoenergias γ_{nl} do átomo de hidrogênio, Eq. (36), obtidos por nós e das Refs. [8] e [9] para $\ell = 0, 1$.

n	Este trabalho	$\ell = 0$		Este trabalho	$\ell = 1$	
		Ref. [8]	Ref. [9]		Ref. [8]	Ref. [9]
1	0,651962	0,52664(3)	0,727(3)	1,386186	1,38621(2)	1,38617(3)
2	1,700796	1,66134(2)	1,7278(2)	2,009475	2,00951(2)	2,00972(2)
3	2,200569	2,17724(1)	2,2192(3)	2,394341	2,39437(1)	2,3960(2)
4	2,532077	2,51533(1)	2,55047(2)	2,673124	2,6727(1)	2,67882(4)
5	2,783295	2,776(1)	2,804(2)			

a restrição $\ell < n$ deixa de existir nesse universo hipotético em duas dimensões espaciais, permitindo novos estados que seriam proibidos no caso $d = 3$. Essa diferença ocorre porque a interação atual é descrita por um potencial logarítmico, que não conserva o vetor de Runge–Lenz. Então, existe uma quebra da simetria associada à degenerescência nos níveis de energia. Portanto, temos uma estrutura de energia diferente da que encontramos para o caso tridimensional.

Quanto ao espectro de energia, a diferença está no fato de não haver um limite superior para a energia de ligação dos estados em $d = 2$, o que configura um comportamento confinante. O estado fundamental apresenta uma energia positiva, que vai crescendo com saltos grandes até o infinito. Os infinitos níveis de energia não se adensam tanto, como no caso de $D = 3 + 1$ em que todos têm $E < 0$. Na QCD, essa ideia está relacionada com a impossibilidade de observar quarks isolados, porque qualquer excitação acarreta um aumento na energia de ligação, o que significa que para arrancar um quark do sistema precisaríamos fornecer uma quantidade de energia infinita. Assim, nesse mundo hipotético em 2 dimensões espaciais os átomos seriam estados confinados e não seria possível ionizar um átomo, o que claramente levaria a um universo radicalmente diferente do nosso.

6.1 Comparação com os resultados da literatura

Em uma primeira análise, com o intuito de validar a precisão e consistência do nosso método, comparamos os valores obtidos pelo programa para uma caixa de tamanho $L = 20 \beta^{-1/2}$ e $N = 35999$ pontos fixos com os valores apresentados por Asturias e Aragón de modo direto, colocando os resultados lado a lado, como está esquematizado nas Tabelas 5 e 6. Os valores dos parâmetros L e N foram escolhidos com o fim de maximizar a precisão e conciliar o poder computacional disponível.

Ao examinar os dados, observamos que nosso programa dispõe de resultados consistentes para estados com $\ell = 1, 2, 3$, em que todos os valores coincidem pelo menos até a terceira casa decimal com os apresentado pela referência principal [8], com a qual as soluções analíticas propostas por Morales [10] concordam. No entanto, para $\ell = 0$, os resultados diferem significativamente. Nos estados com $n = 1, 2$, apenas o primeiro algarismo significativo coincide. Já para os estados com

Tabela 6: Comparação dos valores para as autoenergias γ_{nl} do átomo de hidrogênio, Eq. (36), obtidos por nós e das Refs. [8] e [9] para $\ell = 2, 3$.

n	$\ell = 2$			$\ell = 3$		
	Este trabalho	Ref. [8]	Ref. [9]	Este trabalho	Ref. [8]	Ref. [9]
1	1,844372	1,84440(4)	1,84437(2)	2,157847	2,15785(1)	2,15787(4)
2	2,275862	2,27645(3)	2,27602(5)	2,488122	2,48812(1)	2,4882(3)
3	2,580117	2,58021(3)	2,5811(4)			

$n = 3, 4$ conseguimos concordar com os resultados em 1 casa decimal. Por fim, $n = 5$ apresenta a maior consistência entre os resultados, para o caso de $\ell = 0$, com 2 casas decimais.

A Ref. [8] já apontava que os resultados deles não batiam bem com os de Reiser [9]. Aqui, concordamos muito bem com Asturias e Aragón para diversos casos, exceto para $\ell = 0$. Como os resultados de Morales coincidem com os de Asturias e Aragón, os resultados de [9], bem como os nossos para $\ell = 0$ estão errados. Portanto, percebemos que para estados mais excitados nosso método oferece resultados condizentes com os valores obtidos na literatura, principalmente para $\ell \geq 1$. Agora, prosseguimos com o estudo utilizando o método da extrapolação para analisar os resultados.

6.2 Extrapolação para o contínuo

Agora, analisamos o efeito do espaçamento h da malha para o contexto bidimensional. Lembrando que trabalharemos no limite em que $h \rightarrow 0$. Logo, repetindo o que foi feito anteriormente para o átomo $D = 3 + 1$, realizaremos a extrapolação dos resultados obtidos para diferentes valores de h , mantendo L fixo e suficientemente grande, que tem como fim determinar o valor da energia no limite do contínuo. Isso nos permite refinar a precisão da energia calculada e identificar possíveis erros numéricos associados à discretização.

Para fazer o procedimento, vamos trabalhar com o estado $n = 1$ e $\ell = 0$, porque é o que apresenta maior divergência com relação à Ref. [8], como exposto na Tabela 5 e assim podemos investigar se a divergência está relacionada a algum efeito residual de espaçamento finito. Deste modo, analisamos os pontos N partindo de 15999 até 35999, e coletamos h^2 em função da energia γ_{nl} . Neste caso, não se nota um comportamento linear conforme mostra a Figura 5. Então, utilizaremos a estratégia de fazer diferentes ajustes e determinar um valor médio das medidas. Tomaremos os 4 e 8 primeiros pontos que parecem mais lineares entre si e faremos um ajuste com a equação de reta

$$\gamma_{10}(h^2) = a_{\ell}^{(\text{np})} h^2 + b_{\ell}^{(\text{np})}, \quad (38)$$

em que (np) corresponde ao número de pontos utilizados na linearização. Além disso, utilizaremos todos os pontos para considerar a curvatura que eles descrevem e fazer um ajuste quadrático que

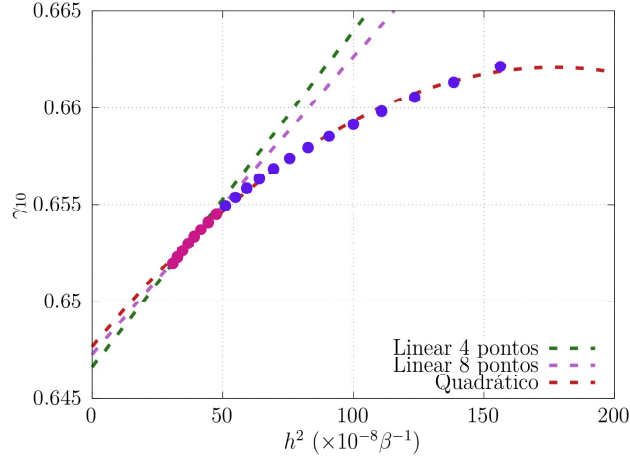


Figura 5: Extrapolação para o contínuo do estado $n = 1$ e $\ell = 0$, mantendo $L = 20 \beta^{-1/2}$ fixo e variando o tamanho do espaçamento de rede h no intervalo $[1, 2502 \times 10^{-3}; 5, 5559 \times 10^{-4}] \beta^{-1/2}$, correspondendo a 15999 até 35999 pontos. Os primeiros 8 pontos possuem cor diferente porque são os utilizados para o ajuste linear. Fonte: Elaborada pelo autor.

seguirá a seguinte relação

$$\gamma_{10}(h^2) = a_q(h^2)^2 + b_q h^2 + c_q. \quad (39)$$

Ao fazer as extrapolações, temos os seguintes valores $b_\ell^{(4)} = 0,646624(97)$; $b_\ell^{(8)} = 0,64731(14)$; $c_q = 0,64768(19)$; o que nos permite calcular a média ponderada pela incerteza, que resulta em $\bar{\gamma}_{10} = 0,646971(74)$, que embora seja menor, ainda está muito distante do valor da Ref. [8] que é $\gamma_{10}^{\text{Ref.8}} = 0,52664(3)$, conforme apresentado Tabela 5.

6.3 Detalhando o caso $\ell = 0$

Com objetivo de refinar esta análise, é desejável estudar valores ainda menores de h . Para isso, foi necessário rodar o programa em outro computador, a fim de aumentar o poder computacional. Assim, fazemos com que o número de pontos N fique maior, o que permite diminuir muito mais o tamanho do espaçamento de rede h e analisar o que muda nos resultados, que se apresentam na Figura 6. Utilizando os mesmos ajustes anteriores, conseguimos obter $\bar{\gamma}_{10} = 0,635617(20)$ o que nos sugere uma aproximação dos resultados apresentados para $\ell = 0$ tendem a se aproximar com os de Asturias e Aragón conforme deixamos o h cada vez menor. De qualquer forma, não conseguimos nos aproximar de um comportamento linear que nos desse um valor menos duvidoso para γ . Podemos também aplicar a extrapolação para os outros estados n , conforme apresentado na Tabela 7 em um intervalo com h menor e observar a sutil tendência nos resultados diminuírem.

Por fim, como última análise vale a pena dizer que não é para todos os estados que quanto menor conseguirmos fazer h melhor o resultado será, pois ao executar o programa para outros estados, por exemplo, $n = 2$ e $\ell = 3$, conseguimos notar um comportamento linear, que é comum aos outros estados do hidrogênio bidimensional para $\ell \neq 0$, quando variamos o número de pontos entre 11999

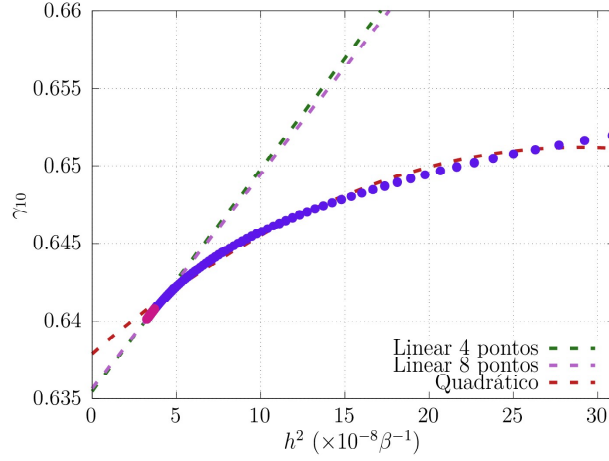
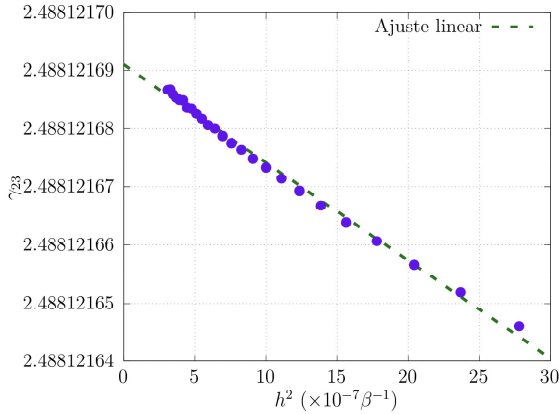


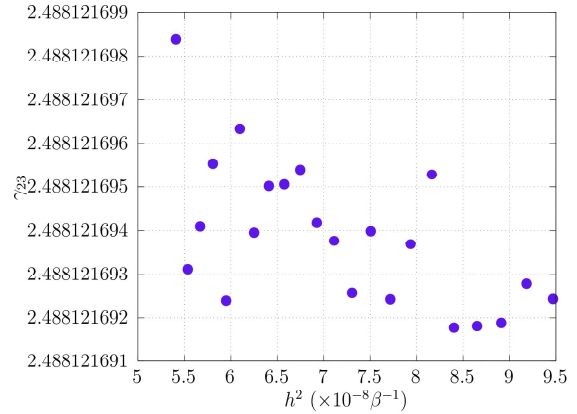
Figura 6: Extrapolação para o contínuo do estado $n = 1$ e $\ell = 0$ utilizando valores muito menores de h . Note a enorme diferença na escala horizontal com relação à Figura 5. Mantemos $L = 20 \beta^{-1/2}$ fixo e variamos o tamanho do espaçamento de rede h no intervalo $[5, 5559 \times 10^{-4}; 1, 8018 \times 10^{-4}] \beta^{-1/2}$, correspondendo a 35999 até 110999 pontos. Os primeiros 8 pontos possuem cor diferente porque são os utilizados para o ajuste linear. Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 7: Resultados de $\bar{\gamma}_{nl}$ para $\ell = 0$ pelo método da extrapolação para o contínuo. Os resultados foram coletados para h no intervalo $[3, 0770 \times 10^{-4}; 2, 3256 \times 10^{-4}] \beta^{-1/2}$, indo de 64999 até 85999 pontos. Fonte: Elaborada pelo autor.

n	Novo	Antigo	Ref. [8]
2	1,6960022(79)	1,700796	1,66134(2)
3	2,1976872(48)	2,200569	2,17724(1)
4	2,5300212(38)	2,532077	2,51533(1)
5	2,7816291(27)	2,783295	2,776(1)



(a) $N = [11999, 35999]$.



(b) $N = [64999, 85999]$.

Figura 7: Comportamento do estado $n = 2$ e $\ell = 3$ para $L = 20 \beta^{-1/2}$ com base no tamanho de h . Fonte: Elaborada pelo autor.

a 35999 como mostra a Figura 7a. Contudo, quando fazemos a variação de 64999 a 85999 pontos,

percebemos um comportamento “aleatório” da relação de h^2 com γ , representado na Figura 7b. Isso decorre do fato do computador possuir precisão finita para representar os números. Quando h fica muito pequeno ele fica mais suscetível aos erros de arredondamento, exacerbando o erro de precisão natural da máquina, o que introduz um ruído. Por exemplo, para o caso apresentado na Figura 7a temos como o resultado da extrapolação $\gamma_{23} = 2,48812169100(18)$, apresentando uma precisão grande, maior do que a das referências da Tabela 6. Logo, talvez não faça sentido reduzirmos h cada vez mais com o intuito de conseguir um número ainda mais preciso. Assim, é importante escolher os parâmetros de maneira adequada para conseguir bons resultados com base no estado de interesse.

7 Conclusões

O objetivo deste trabalho foi estudar o átomo de hidrogênio em um número de dimensões espaciais diferentes das 3 dimensões usuais. Especificamente, trabalhamos com o caso $D = 2 + 1$.

Em um primeiro momento, analisamos o caso $D = 3 + 1$ com um método numérico, que posteriormente seria aplicado no caso 2D, de diferentes maneiras: com base no tamanho de L finito, no valor do espaçamento de rede h , bem como na extrapolação do mesmo para o contínuo variando h e depois fazendo um ajuste para ver o que ocorre em $h \rightarrow 0$. Os dados da abordagem numérica coincidiram com as soluções analíticas, e o método da extrapolação para o contínuo permitiu recuperar impressionantes 11 algarismos significativos da energia analítica do estado fundamental do hidrogênio 3D.

Ao passar para o caso $D = 2 + 1$, comparamos nossos resultados com os existentes na literatura. A maioria dos resultados coincidiu com a Ref. [8], que com base na Ref. [10] é a correta. De modo geral, nossos resultados concordam com Asturias e Aragón para $\ell \geq 1$. Contudo, notamos maior discrepância nos estados com $\ell = 0$, mas nossa análise sugere que os dados tendem a se aproximar mais dos valores obtidos por Asturias e Aragón, pois conforme conseguimos reduzir o valor de h , os valores de γ também foram diminuindo. Não conseguimos estabelecer um valor devido a limitações computacionais.

Dessa forma, baseado nos resultados obtidos, conseguimos discutir o átomo de hidrogênio em um universo bidimensional, onde ele possui um comportamento confinante — não é possível arrancar um elétron do próton neste contexto pois seria necessária uma quantidade de energia infinita — o que é qualitativamente análogo ao que ocorre para os quarks confinados nos hádrons na QCD no nosso universo usual 3D. Com base no que conseguimos estudar, neste universo bidimensional hipotético, a química toda apresentaria um comportamento completamente diferente do observado no contexto tridimensional usual.

Referências

- [1] PLANCK, M. Zur theorie des gesetzes der energieverteilung im normalspektrum. *Berlin*, p. 237–

245, 1900.

- [2] EINSTEIN, A. Über einem die erzeugung und verwandlung des liches betreffenden heuristischen gesichtspunkt. *Annalen der Physik*, v. 4, 1905.
- [3] BOHR, N. On the constitution of atoms and molecules. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 26, n. 151, p. 1–25, 1913.
- [4] HEISENBERG, W. *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*. [S.l.]: Springer, 1985.
- [5] SCHRÖDINGER, E. Quantisierung als eigenwertproblem. *Annalen der physik*, WILEY-VCH Verlag Leipzig, v. 385, n. 13, p. 437–490, 1926.
- [6] PESKIN, M. E. *An introduction to quantum field theory*. [S.l.]: CRC press, 2018.
- [7] SCHWINGER, J. Gauge invariance and mass. ii. *Physical Review*, v. 128, n. 5, p. 2425 – 2429, 1962.
- [8] ASTURIAS, F. J.; ARAGÓN, S. R. The hydrogenic atom and the periodic table of the elements in two spatial dimensions. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 53, n. 9, p. 893–899, 1985.
- [9] REISER, P. In: DEWDNEY, A. K. (Ed.). *Symposium on Two-Dimensional Science and Technology*. London, Canada: University of Western Ontario, 1981.
- [10] MORALES, D. A. Analytical formulas for the eigenvalues and eigenfunctions of a d-dimensional hydrogen atom with a potential defined by gauss' law. *International Journal of Quantum Chemistry*, v. 57, n. 1, p. 7–15, 1996.
- [11] BOITO, D. et al. On maxwell's electrodynamics in two spatial dimensions. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 42, p. e20190323, 2020.
- [12] THOMSON, M. *Modern particle physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.
- [13] GRIFFITHS, D. *Introduction to Quantum Mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. ISBN 9781107179868.
- [14] NAVAS, S. et al. Review of particle physics. *Phys. Rev. D*, v. 110, n. 3, p. 030001, 2024.
- [15] BÖHM, A. *Quantum mechanics: foundations and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.