

# UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Escola de Engenharia de São Carlos  
Departamento de Engenharia Elétrica

---

Estudo do Sincronismo Mestre-Escravo em Circuitos Caóticos

*Fernanda Melo Jacques de Almeida*

---





# Estudo do Sincronismo Mestre-Escravo em Circuitos Caóticos

*Fernanda Melo Jacques de Almeida*

*Orientador: Luiz Gonçalves Neto*

Monografia final de conclusão de curso de graduação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos para obtenção do título de Engenheira de Computação.

Área de Concentração: Telecomunicações

**USP – São Carlos**  
**Junho de 2012**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

A447e

Almeida, Fernanda Melo Jacques de  
Estudo do sincronismo mestre-escravo em circuitos  
caóticos / Fernanda Melo Jacques de Almeida ; orientador  
Luiz Gonçalves Neto. -- São Carlos, 2012.

Monografia (Graduação em Engenharia de Computação com  
ênfase em Telecomunicações) -- Escola de Engenharia de  
São Carlos da Universidade de São Paulo, 2012.

1. Sincronismo. 2. Sistemas caóticos. 3. Partículas  
sobre mesa vibratória. I. Título.

# FOLHA DE APROVAÇÃO

Nome: Fernanda Melo Jacques de Almeida

Título: "Estudo do Sincronismo Mestre-Escravo em Circuitos Caóticos"

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado  
em 29/06/2012,  
com NOTA 9,0 (Nove, zero), pela comissão julgadora:

Prof. Associado Diógenes Pereira Gonzaga - SEL/EESC/USP

Prof. Dr. Rogério Andrade Flauzino - SEL/EESC/USP

Prof. Associado Evandro Luis Linturi Rodrigues  
Coordenador pela EESC/USP do  
Curso de Engenharia de Computação



## Resumo

Sinais caóticos são aperiódicos e apresentam uma sensível dependência às condições iniciais tornando a previsão do mesmo, em longo prazo, muito difícil de ser realizada. Esta sensibilidade e aperiodicidade leva a acreditar que o sincronismo de dois sinais caóticos não seja possível de ser implementado. Porém, na Literatura foi mostrado que este sincronismo é possível desde que os sistemas obedeçam a certas condições suficientes. A sincronização entre dois circuitos caóticos pode ser útil para a área de segurança em telecomunicações pelo fato de seus sinais apresentarem dificuldade de previsão e serem confundidos com ruído.

Este trabalho estuda a dinâmica de um sistema caótico: uma partícula que se choca verticalmente sobre uma mesa vibratória. O fenômeno físico da partícula é modelado por meio de um circuito eletrônico equivalente e, posteriormente, baseado na teoria da sincronização completa o sinal obtido é sincronizado expandido-se o circuito inicial.



## **Abstract**

Chaotic signals are aperiodic and have a sensitive dependence on its initial conditions, what makes its prediction very difficult. This sensitivity and aperiodicity leads to believe that the synchronization of two chaotic signals is not possible to be implemented. However, the Literature showed that if the systems fulfill certain necessary and sufficient conditions, this synchronization is possible. Synchronization between two chaotic circuits can be useful for the security in telecommunications area since their signals are at the same time difficult to predict and can be mistaken to noise.

This work studies the dynamics of a chaotic system: the Bouncing Ball. The physical phenomenon of the bouncing ball is modeled by an equivalent electronic circuit and thereafter based in the complete sync theory the sync signal is obtained by expanding the initial circuit.



## SUMÁRIO

<b>RESUMO</b> .....	<b>I</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>III</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	<b>VII</b>
<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>3</b>
1.1. INTRODUÇÃO AO CAOS .....	3
1.2. OBJETIVOS .....	4
1.3. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	4
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>5</b>
2.1. SISTEMAS CAÓTICOS.....	5
2.2. ATRATORES .....	6
2.2.1 <i>O Atrator de Lorenz</i> .....	6
2.3. BIFURCAÇÃO.....	7
2.4. COEFICIENTE DE LYAPUNOV .....	8
2.5. MAPA LOGÍSTICO.....	9
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>15</b>
3.1. PARTÍCULA SOBRE UMA MESA VIBRATÓRIA .....	15
3.2. MODELAGEM FÍSICA .....	17
3.3. NORMALIZAÇÃO .....	19
3.4. CIRCUITO ELETRÔNICO EQUIVALENTE .....	21
3.5. IMPLEMENTAÇÃO .....	26
3.6. RESULTADOS .....	27
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>33</b>
CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	33
4.1. SINCRONISMO .....	33

4.1.1 <i>Sincronismo de Pecora e Carroll</i> .....	34
4.2. IMPLEMENTAÇÃO.....	35
4.3. RESULTADOS .....	37
<b>CAPÍTULO 5 .....</b>	<b>39</b>
5.1. CONCLUSÃO.....	39
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>41</b>

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1:</b> Atrator de Lorenz $\rho = 28$ , $\sigma = 10$ , $\beta = 8/3$ [7].	7
<b>Figura 2:</b> Duas trajetórias em espaço de fase para um mesmo sistema.	8
<b>Figura 3:</b> Pontos do Mapa Logístico, para $r = 2,9$ , e (a) $x_0 = 0,25$ (b) $x_0 = 0,9$ [9].	10
<b>Figura 4:</b> Trajetórias do Mapa Logístico, para $r = 2,9$ , e (a) $x_0 = 0,25$ (b) $x_0 = 0,9$ ...	11
<b>Figura 5:</b> Pontos do Mapa Logístico, para $x_0 = 0,3$ , e (a) $r = 3,1$ (b) $r = 3,5$ (c) $r = 3,75$	12
<b>Figura 6:</b> Trajetórias do Mapa Logístico, para $x_0 = 0,3$ , e (a) $r = 3,1$ (b) $r = 3,5$ (c) $r = 3,75$	12
<b>Figura 7:</b> Diagrama de Bifurcação (a) $0 < r < 4$ e (b) $3,4 < r < 4$	13
<b>Figura 8:</b> Diagrama de Bifurcação e Coeficiente de Lyapunov.	13
<b>Figura 9:</b> Representação de uma partícula sobre uma mesa vibratória	16
<b>Figura 10:</b> Trajetória de uma partícula sobre uma mesa vibratória que cai a uma altura de (a) 0,40 metros (b) 0,39 metros	17
<b>Figura 11:</b> Forças aplicadas na partícula durante sua trajetória	18
<b>Figura 12:</b> Modelo eletrônico da partícula sobre uma mesa vibratória	21
<b>Figura 13:</b> Gráfico do comportamento de um diodo.	23
<b>Figura 14:</b> Modelo eletrônico da partícula sobre uma mesa vibratória com $R_f$ e $C_f$ para controle do coeficiente de restituição.	25
<b>Figura 15:</b> Circuito eletrônico para o modelo da partícula sobre uma mesa vibratória com seus respectivos valores de resistores e capacitores.	26
<b>Figura 16:</b> Foto da bancada com o circuito e equipamentos utilizados no laboratório de ótica para o projeto.	27
<b>Figura 17:</b> Posição e velocidade da partícula $\times$ tempo para $k = 0,75$ .	28
<b>Figura 18:</b> Saídas do Osciloscópio para $\alpha = 0,19$ (a) $VPOS \times VIN$ (b) Espaço de fase ..	29
<b>Figura 19:</b> Saídas do Osciloscópio para $\alpha = 0,46$ (a) $VPOS \times VIN$ (b) Espaço de fase ..	29

<b>Figura 20:</b> Saídas do Osciloscópio para $\alpha = 0,59$ <b>(a)</b> $VPOS \times VIN$ <b>(b)</b> Espaço de fase ..	30
<b>Figura 21:</b> Saídas do Osciloscópio para $\alpha = 0,75$ <b>(a)</b> $VPOS \times VIN$ <b>(b)</b> Espaço de fase ..	30
<b>Figura 22:</b> Diagrama de Blocos para o sincronismo mestre-escravo .....	35
<b>Figura 23:</b> Esquema do circuito montado para a sincronização mestre-escravo com malha de realimentação .....	36
<b>Figura 24:</b> Sinais obtidos pelo osciloscópio na sincronização <b>(a)</b> CH1 e CH2 separados <b>(b)</b> CH1 e CH2 sobrepostos. ....	37
<b>Figura 25:</b> Espaço de fase do mestre para uma entrada de áudio.....	38
<b>Figura 26:</b> Saída do osciloscópio para $VBmestre \times VBescravo$ . ....	38

# CAPÍTULO 1

## 1.1. Introdução ao Caos

A teoria do se baseia na imprevisibilidade de sistemas dinâmicos devido a grande sensibilidade ás condições iniciais desses sistemas. Partindo de duas condições iniciais extremamente próximas tem-se que as trajetórias percorridas por cada condição inicial se distanciam com o tempo.

Um dos primeiros cientistas que detectou o comportamento dos sistemas caóticos foi Edward Lorenz em 1960. Em uma simulação computacional que equacionava os movimentos das massas de ar, a fim de fazer alguma previsão meteorológica [1], Lorenz inseriu como entrada um dos números que alimentava os cálculos da máquina com algumas casas decimais a menos, e esperando que o resultado mudasse pouco, mas que mantivesse a forma geral. Porém, a alteração insignificante transformou completamente o padrão das massas de ar.

Com o tempo, cientistas concluíram que a mesma imprevisibilidade aparecia em outros fenômenos, como no ritmo dos batimentos cardíacos, nos movimentos das órbitas dos planetas ou nas cotações da Bolsa de Valores. Na década de 70, o matemático polonês Benoit Mandelbrot por meio de um trabalho sobre geometria [2] notou que as equações de Lorenz se semelhavam com as que ele próprio havia feito quando desenvolveu os fractais, figuras geradas a partir de fórmulas que retratam matematicamente a geometria da natureza, como o relevo do solo ou as ramificações de veias e artérias. Pesquisas mostraram equações idênticas aparecem em fenômenos caóticos que não estão diretamente relacionados, como afirmou o matemático Steven Strogatz. "As equações de Lorenz para o caos das massas de ar surgem também em experimentos com raio laser, e as mesmas fórmulas que regem certas soluções químicas se repetem quando estudamos o ritmo desordenado das gotas de uma torneira" [3].

Baseado na imprevisibilidade a longo prazo e sensibilidade ás condições iniciais, este trabalho estuda um sistema caótico: uma partícula que se choca sobre uma mesa vibratória. Para que um sistema seja caótico, este deve apresentar obrigatoriamente quatro características: sistema tem que ser dinâmico, determinístico, não linear e sensível ás

condições iniciais. Cada uma dessas características serão explicadas e analisadas no Capítulo 2.

## **1.2. Objetivos**

Objetivo da primeira etapa do trabalho é implementar um sistema eletrônico que possui um comportamento caótico. Na segunda etapa o objetivo é validar o sincronismo mestre-escravo entre dois circuitos caóticos.

## **1.3. Organização do Trabalho**

A monografia está dividida em cinco capítulos: o Capítulo 1 conceitua o termo caos e a sua presença na natureza; o Capítulo 2 fornece a base teórica que rege os sistemas caóticos; o Capítulo 3 explica o modelo físico e o circuito eletrônico que simula uma partícula sobre uma mesa vibratória, e os resultados obtidos a partir do osciloscópio; o Capítulo 4 introduz o conceito de sincronização de Pecora e Carroll, aplica esta sincronização para o circuito da partícula sobre uma mesa vibratória e verifica seus resultados; o Capítulo 5 apresenta a conclusão deste trabalho.

## CAPÍTULO 2

### Considerações Iniciais

Este capítulo tem por objetivo introduzir as características que classificam um sistema como caótico e explicar seu comportamento. Os principais conceitos a serem discutidos são: linearidade, atratores, bifurcação, coeficiente de Lyapunov e mapa logístico.

#### 2.1. Sistemas Caóticos

Um sistema linear obedece à propriedade da multiplicação por escalar:

$$F[\alpha \cdot x(t) + \beta \cdot y(t)] = \alpha \cdot F[x(t)] + \beta \cdot F[y(t)] \quad (2.1.1)$$

Já os sistemas não lineares não atendem à relação acima, ou seja,

$$F[\alpha \cdot x(t) + \beta \cdot y(t)] \neq \alpha \cdot F[x(t)] + \beta \cdot F[y(t)] \quad (2.1.2)$$

Um sistema dinâmico é um conceito matemático que descreve a dependência do tempo de um ponto num espaço geométrico. O pêndulo de relógio é um exemplo de sistema dinâmico, já que pode ser modelado por equações bem definidas que descrevem uma trajetória oscilante no tempo. Outros exemplos são: o fluxo turbulento de água em um tubo, o número de peixes de um lago a cada primavera, entre inúmeros outros.

A qualquer momento dado, um sistema dinâmico tem um estado composto por um conjunto de números reais que podem ser representados por um ponto num espaço de estado. Pequenas mudanças no estado do sistema criam pequenas alterações nos números. A regra de evolução do sistema dinâmico é uma regra fixa que descreve o que os estados futuros seguem a partir do estado atual. Essa regra é determinística, em outras palavras, para um dado intervalo de tempo apenas um único estado futuro decorre do estado atual. Assim, um sistema caótico pode ser dinâmico e determinístico, porém sua complexidade está na grande sensibilidade às condições iniciais, pois a trajetória de um sistema caótico iniciada em um determinado ponto diverge, em média exponencialmente, de outra trajetória iniciada em um ponto próximo, porém distinto do anterior.

Tradicionalmente o mais simples exemplo de um sistema determinístico não linear que possui um comportamento caótico é o Mapa Logístico. Nos próximos itens serão

introduzidos alguns conceitos necessários para o melhor entendimento da dinâmica do mesmo.

## 2.2. Atratores

Dá-se o nome de atrator para um estado ou um conjunto de estados para o qual uma variável, movendo-se de acordo com um sistema dinâmico, evolui no tempo – ou seja, estados suficientemente perto de um atrator tendem para este, mesmo que ligeiramente perturbados [5]. O atrator é uma região no espaço n-dimensional, podendo ser um ponto ou conjunto finito de pontos, uma curva, um plano, ou uma distribuição.

Os atratores são divididos em três tipos. O primeiro e mais simples de ser entendido é o atrator de ponto fixo. Suponha que um pêndulo sofreu uma perturbação e começou a oscilar, ele se manterá oscilando por um breve período de tempo e depois irá parar, devido à resistência do ar. Então seu estado de equilíbrio será sempre parado, logo o espaço de fase (posição x velocidade) será um ponto no gráfico. Esse sistema tem um atrator de ponto fixo. Essencialmente, qualquer sistema que tende a ser estável, e tem um único valor de equilíbrio terá um atrator de ponto fixo.

Voltando ao exemplo do pêndulo, desconsidere agora a resistência do ar. O espaço de fase desse novo sistema irá conter não um ponto, mas sim um conjunto de pontos que formarão um arco, pois o pêndulo ficará sempre oscilando, mesmo quando o tempo tender a infinito. Nesse caso, o atrator é um espaço de estados e é definido como atrator periódico.

Sistemas que não possuem periodicidade ou estabilidade podem possuir outro tipo de atrator, o atrator estranho, cujo espaço de estados não é fixo, nem oscilatório, nem aleatório, mas sim uma flutuação que nunca repete o mesmo estado, mas sempre se mantém em uma região limitada no espaço de fase.

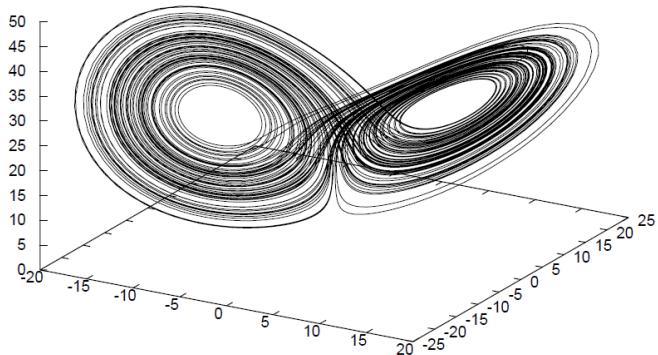
### 2.2.1 O Atrator de Lorenz

Em 1963, Lorenz propôs e estudou um sistema de três equações diferenciais de primeira ordem [1], que representa um simplificado modelo matemático para a convecção atmosférica no espaço tridimensional:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases}$$

onde  $\sigma$ ,  $\rho$ , e  $\beta$  são constantes positivas.

Lorenz observou que esse sistema determinístico pode ter uma dinâmica extremamente irregular: para uma grande extensão de parâmetros, a solução oscila irregularmente, nunca repetindo o mesmo estado, mas se mantendo sempre numa região limitada no plano de fase. Quando essas equações foram plotadas, Lorenz percebeu que a figura resultante não correspondia a órbitas ou planos, porém havia regiões onde existiam mais pontos formando até padrões, mas a figura e seus pontos eram caóticos [6]. O mais importante é que esse sistema é extremamente sensível às condições iniciais, ou seja, partindo de dois pontos bem próximos, com os mesmos parâmetros ( $\sigma$ ,  $\rho$ , e  $\beta$  fixos) os espaços de estados se distanciavam cada vez mais com o tempo. Este sistema caótico é considerado imprevisível a longo prazo, porém, ao mesmo tempo em que o sistema é caótico, este converge para um atrator, o atrator estranho.



**Figura 1:** Atrator de Lorenz  $\rho = 28$ ,  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  [7].

### 2.3. Bifurcação

Em muitos sistemas não-lineares, pequenas mudanças em certos parâmetros podem produzir modificações no comportamento do estado do sistema. Atratores podem desaparecer ou converter-se uns nos outros, ou novos atratores podem surgir. Diz-se que

esses sistemas são estruturalmente instáveis, e os pontos críticos de instabilidade são chamados pontos de bifurcação, pois são pontos na evolução do sistema que se ramifica em uma nova direção [8].

#### 2.4. Coeficiente de Lyapunov

O coeficiente de Lyapunov é um índice que mede a sensibilidade do sistema às condições iniciais, assim quanto maior o coeficiente de Lyapunov, mais sensível o sistema é.

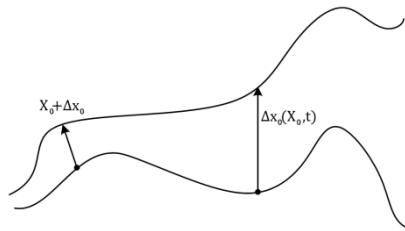


Figura 2: Duas trajetórias em espaço de fase para um mesmo sistema.

Considere dois pontos em um espaço pertencentes à mesma equação ou conjunto de equações,  $X_0$  e  $X_0 + \Delta x_0$  (Figura 2), cujo tempo é a variável paramétrica, cada ponto irá gerar sua própria trajetória no o espaço de fase, e a diferença entre as trajetórias é uma nova função  $\Delta x(X_0, t)$ . Em um sistema com atratores de ponto fixo ou atratores periódicos,  $\Delta x(X_0, t)$  diminui assintoticamente com o tempo. Se o sistema é caótico, a função  $\Delta x(X_0, t)$  irá se comportar de forma errática. O índice mede a taxa média exponencial de divergência de duas trajetórias inicialmente estreitas a partir da fórmula

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\Delta x(X_0, t)|}{|\Delta x_0|}$$

Coeficiente de Lyapunov negativo caracteriza sistemas dissipativos, quando as trajetórias são atraídas para um ponto fixo. Sistemas conservativos terão um coeficiente nulo, e sistemas que apresentam um comportamento caótico apresentarão coeficiente positivo, pois suas trajetórias se afastarão com o tempo.

## 2.5. Mapa Logístico

O mapa logístico é uma equação de recorrência de grau 2, frequentemente citado como um exemplo típico de um sistema com comportamento caótico e surge a partir de simples equações não-lineares dinâmicas. A equação básica do mapa é:

$$x_{n+1} = r \cdot x_n (1 - x_n)$$

Essa equação é não linear devido ao termo  $x_n^2$ . A variável independente  $n$  é geralmente interpretada como o tempo, "tempo discreto", no qual o sistema é medido em intervalos regulares, como todos os dias ou a cada segundo. A variável de estado  $x_n$  representa como o estado do sistema  $x$  muda em relação ao  $n$ ; por exemplo,  $x_0, x_1, x_2$ , respectivamente, descrevendo o sistema, por exemplo, à meia-noite, 1 da manhã, 2 da manhã e etc. O terceiro elemento da equação,  $r$ , descreve certas características "fixas" do sistema, e uma vez atribuído, o valor permanece constante durante o processo dinâmico.

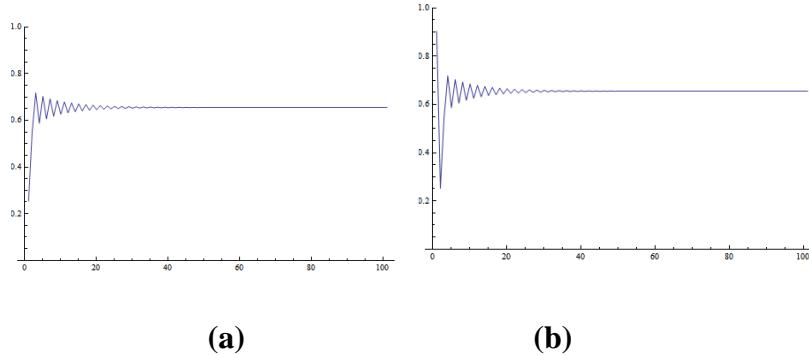
O processo é obviamente determinístico, pois dado um valor para  $r$  e uma condição inicial  $x_0$ , a equação logística determina todos os valores  $x_n$  subsequentes. Essa equação é resolvida como se fosse uma série numérica, é preciso ter sempre o valor anterior para calcular o próximo. O cálculo é iterativo e trivial. Porém pequenas divergências no cálculo como o número de casas decimais consideradas para os valores das variáveis podem produzir respostas bem diferentes para valores de  $n$  muito grande. Em um sistema caótico dinâmico, os processos derivados de um conjunto divergem umas das outras de forma exponencial, e depois de um tempo o erro torna-se tão grande que a equação dinâmica perde seu poder de predição.

O grau de precisão numérica, tanto na especificação da condição inicial quanto no cálculo, têm grande influência nos estudos científicos, interferindo muitas vezes nos resultados obtidos. O grande inconveniente é que as quantidades físicas são contínuas e representadas por números reais. A especificação dessas quantidades com precisão absoluta, exige um número com infinitas casas decimais. Entretanto, computadores não importam quão poderosos, são máquinas de estado necessariamente finitas.

Na equação logística o parâmetro  $r$  é chamado de parâmetro de controle, ele define se os valores de  $x_n$ , para  $n$  muito grande, irão se tornar periódicos ou caóticos. Suponha  $r = 2$ , depois de certas interações, independente do valor inicial  $x_0$ , descobre-se que  $x_n$

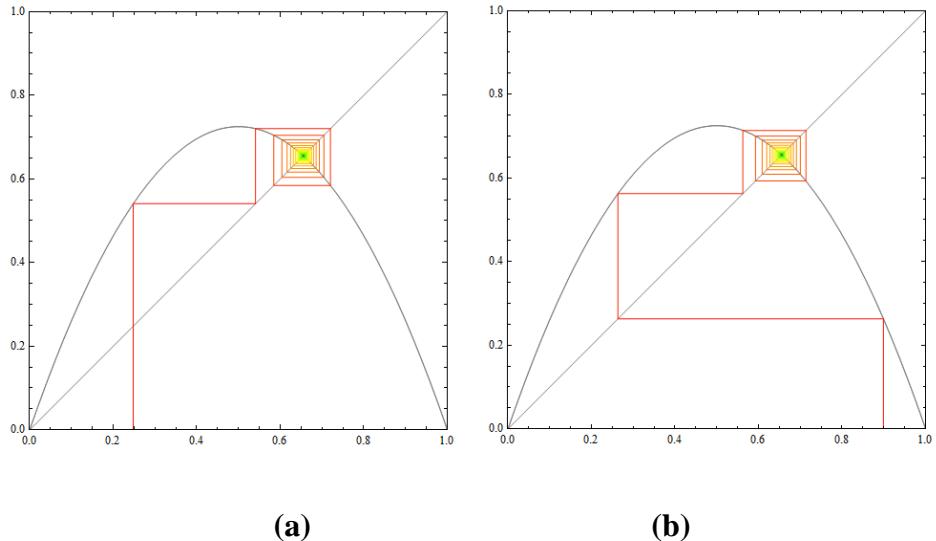
sempre acaba assumindo 0,5 quando  $n$  se torna grande; nas mesmas condições se  $r = 2,9$ ,  $x_n$  é igual a 0,65, e assim por diante. Este valor (ou grupo de valores) são os atratores, ou seja, valor para o qual o processo converge mesmo submetido a diferentes condições iniciais.

A Figura 3 mostra como o  $x_n$  converge para 0,65, quando  $r = 2,9$ , mesmo com de  $x_0$  diferentes.



**Figura 3:** Pontos do Mapa Logístico, para  $r = 2,9$ , e (a)  $x_0 = 0,25$  (b)  $x_0 = 0,9$  [9].

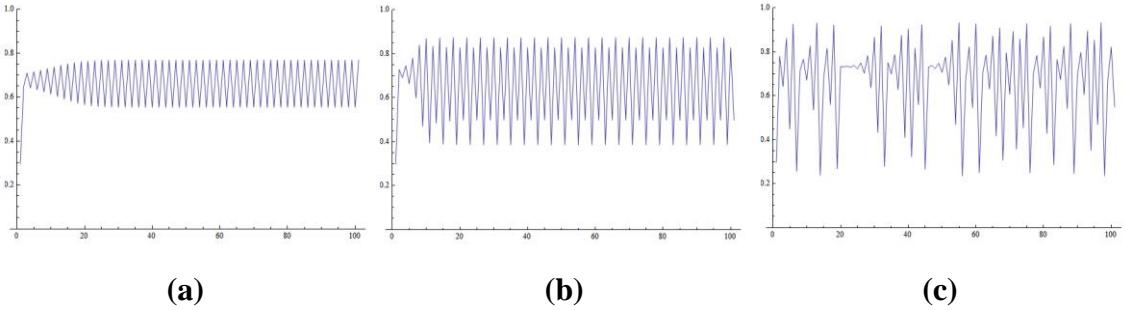
Os pontos do mapa logístico podem ser calculados por meio do seu gráfico, que é representado por uma parábola. Traçando uma reta na diagonal a partir da origem até o último ponto (1,1) tem-se uma linha de referência que irá mudar a direção a ser percorrida. O parâmetro de controle determina a amplitude da parábola. Começa-se no valor inicial  $x_0$  e move-se verticalmente até a parábola para obter  $x_1$ ; deste ponto retorna-se para o eixo horizontal até encontrar a linha de referência, e troca-se a trajetória para o eixo vertical novamente até a parábola, encontrando  $x_2$ , e assim sucessivamente, como representado na Figura 4.



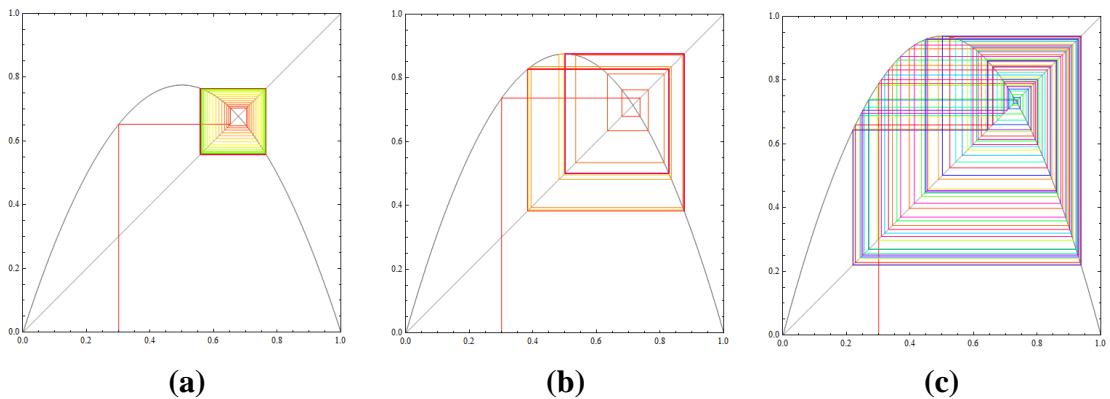
**Figura 4:** Trajetórias do Mapa Logístico, para  $r = 2, 9$ , e (a)  $x_0 = 0, 25$   
(b)  $x_0 = 0, 9$  [9].

Os atratores do mapa logístico mudam de acordo com o valor do parâmetro de controle, não só quantitativamente, mas também qualitativamente. Para  $r < 3$ ,  $x_n$  converge para um valor único, que aumenta gradualmente à medida que  $r$  aumenta. Quando  $r = 3$ , o atrator (de ponto fixo) torna-se instável, porém para valores maiores que 3,  $x_n$  se transforma em um ciclo de dois valores. Por exemplo, quando  $r = 3,1$ ,  $x_n = 0,56$ ,  $x_{n+1} = 0,76$ ,  $x_{n+2} = 0,56$ ,  $x_{n+3} = 0,76$ , e assim por diante, saltando entre dois valores constantes. Define-se então que o sistema possui período 2 (atrator periódico). Com um aumento ainda maior de  $r$ , o atrator muda para um ciclo de quatro valores, ou seja, período 4, depois período 8 e assim sucessivamente, até se tornar caótico, quando o sistema não possui mais ciclos de valores. A mudança no período do sistema é a bifurcação.

A Figura 5 mostra a evolução dos valores de  $x_n$ : pode-se perceber que o sistema oscila entre dois valores quando  $r = 3,1$  e oscila entre quatro valores para  $r = 3,5$ . Quando  $r = 3,75$  o sistema se torna caótico, não possuindo periodicidade alguma. Como complemento a Figura 6 representa as trajetórias do mapa para os mesmos parâmetros.



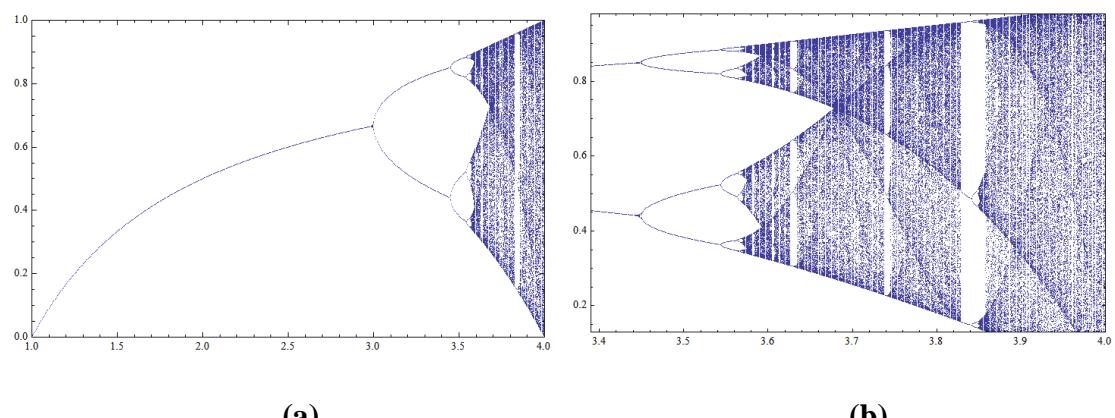
**Figura 5:** Pontos do Mapa Logístico, para  $x_0 = 0,3$ , e (a)  $r = 3,1$  (b)  $r = 3,5$  (c)  $r = 3,75$  [9].



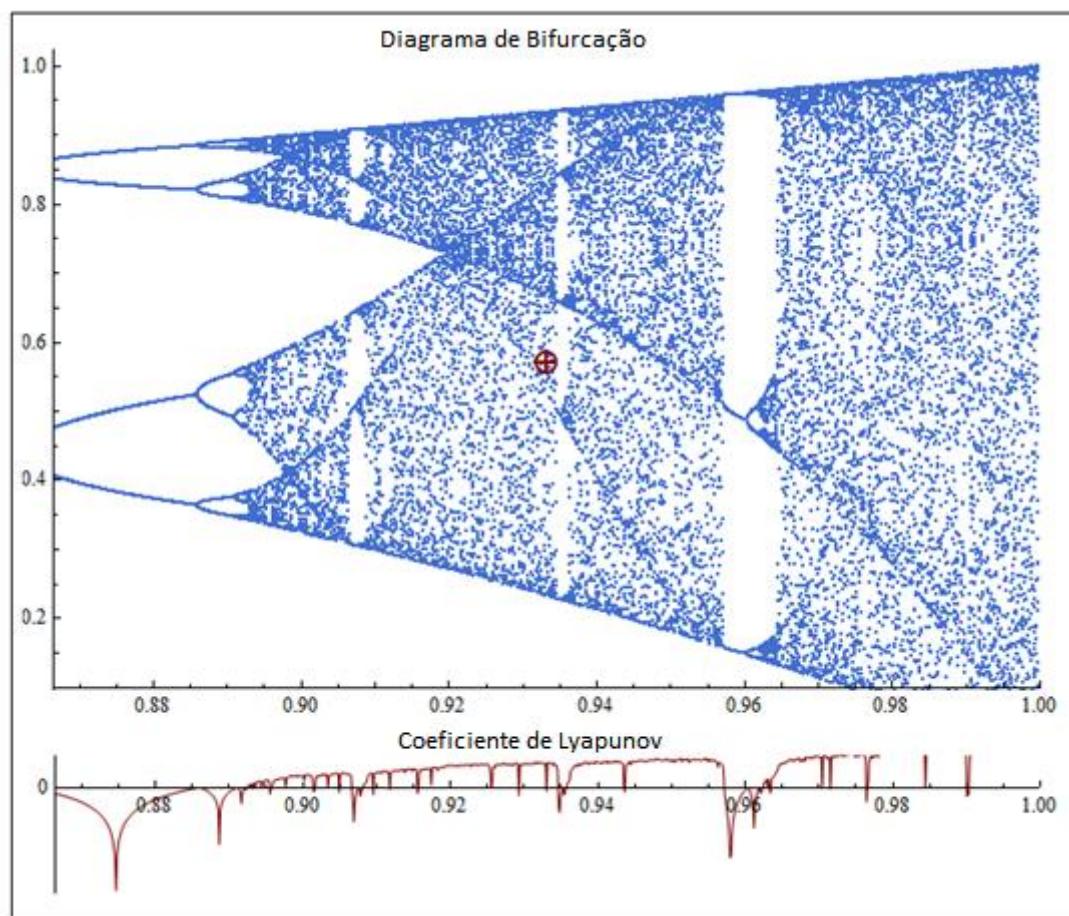
**Figura 6:** Trajetórias do Mapa Logístico, para  $x_0 = 0,3$ , e (a)  $r = 3,1$  (b)  $r = 3,5$  (c)  $r = 3,75$  [9].

O intervalo de  $r$  onde os ciclos são estáveis, decresce rapidamente à medida que o período do ciclo aumenta, o que leva a uma rápida acumulação dos ciclos com períodos maiores. De fato, observando esta sequência de dobramentos de períodos em experimentos numéricos, Feigenbaum [10] provou que o intervalo no qual um ciclo é estável decresce na razão geométrica de **4,669260**… [11]. Para muitos valores de  $r > 3,57$  o comportamento da equação logística é aperiódico, porém existem janelas que apresentam periodicidade 3, 6, 7, 14 e entre outros valores.

O diagrama de bifurcação é um gráfico que mostra a sequência de bifurcações ao longo do tempo no mapa logístico para valores de  $r$  entre 0 a 4. A partir desse gráfico, representado na Figura 7, é possível saber quantos períodos o sistema tem, de acordo com o valor de  $r$ , e quais os valores assumidos por  $x_n$  quando o sistema estiver estável, ou se o sistema possui alguma estabilidade. Junto com o gráfico do coeficiente de Lyapunov, Figura 8, é possível observar quando o sistema é caótico ( $\lambda > 0$ ) e quando é periódico.



**Figura 7:** Diagrama de Bifurcação (a)  $0 < r < 4$  e (b)  $3,4 < r < 4$  [9].



**Figura 8:** Diagrama de Bifurcação e Coeficiente de Lyapunov[9].



## CAPÍTULO 3

### Considerações Iniciais

Este capítulo descreve a primeira parte implementada do projeto: o modelo de um sistema que simula uma partícula em uma mesa vibratória. Primeiro será explicado como é o funcionamento desse sistema, equacionando seu comportamento físico e normalizando as equações.

A segunda parte mostrará o circuito eletrônico equivalente para o sistema da partícula sobre uma mesa vibratória, equacionando também esse sistema e fazendo uma analogia entre as equações do modelo físico e do modelo eletrônico.

Por fim, será relatado como foi implementado o circuito e serão mostrados alguns dos resultados obtidos.

#### 3.1. Partícula sobre uma Mesa Vibratória

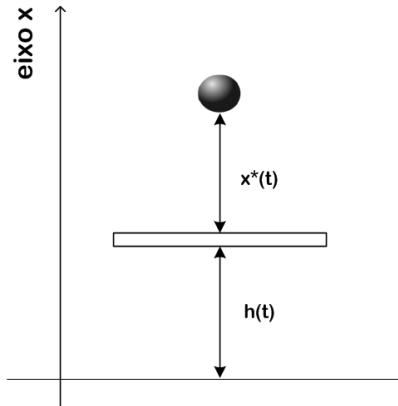
Muitos problemas dinâmicos não são resolvidos analiticamente. Sistemas dissipativos que contêm poucas variáveis dinâmicas e caracterizados por poucos parâmetros podem pertencer a essa classe de problemas. A principal razão dessa dificuldade está no fato em que esses sistemas, governados por equações diferenciais regulares podem se comportar de forma irregular com o tempo.

Um sistema dinâmico aparentemente simples que exibe o comportamento irregular, ou caótico, é o movimento de uma partícula em um mesa vibratória, também conhecida como “*The bouncing ball*” [12].

Introduzido primeiramente por Fermi [13], e posteriormente estudado teórica e experimentalmente por muitos outros [14], [15], a partícula em uma mesa vibratória é um sistema governado pelas equações de Newton, composto por uma variável e dois parâmetros. Tal sistema consiste em uma bola ou partícula que se choca verticalmente contra a superfície de uma mesa que oscila, também verticalmente.

Considere uma partícula de massa  $m$  que se movimenta no vácuo, se choca sob uma mesa, de massa infinita, como mostra a Figura 7. A mesa oscila harmonicamente no eixo X conforme a função  $h(t)$ , e consequentemente a partícula oscila, também no eixo X

acima da superfície da mesa, de acordo com a função  $X(t)$ . O choque da partícula com a mesa pode ser elástico, ou inelástico.

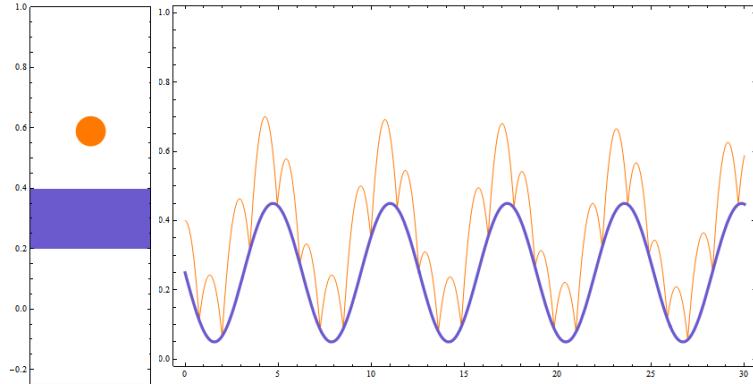


**Figura 9:** Representação de uma partícula sobre uma mesa vibratória

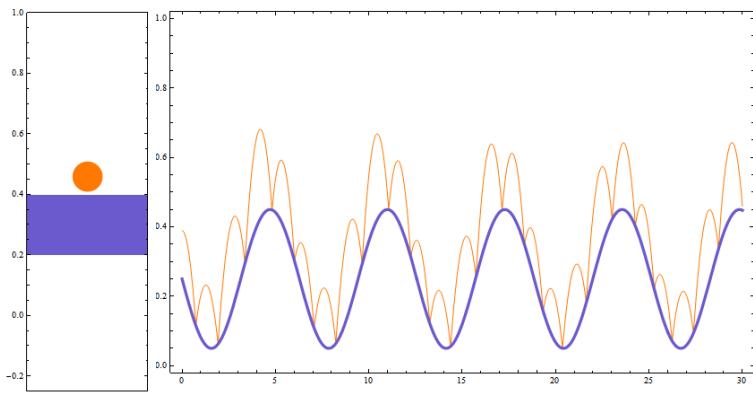
O sistema da partícula sobre uma mesa vibratória é um sistema dinâmico, pois seus estados dependem diretamente do tempo; é determinístico, pois o estado atual é determinado a partir do estado anterior; e é não linear, como será demonstrado nas equações que modelam o sistema. Porém, não se sabe a priori se o sistema é sensível às condições iniciais.

Para determinar se o sistema é sensível às condições iniciais aplica-se um pequeno teste: a partir de uma simulação computacional por meio do Software Wolfram Demonstration [16] define-se que a mesa vibra senoidalmente a uma frequência e amplitude fixa; a partícula cai sobre a mesa, a uma altura de 0,40 m (Figura 10a) e depois a uma altura de 0,39 m (Figura 10b). Observando a Figura 10 é possível perceber que até  $t = 7$  as trajetórias entre as duas simulações são bem próximas. Contudo, quanto maior o tempo  $t$  da simulação maior é a distância entre as trajetórias. Pode-se afirmar então que o sistema é sensível às condições iniciais, pois suas trajetórias divergem com o tempo.

O sistema da partícula sobre uma mesa vibratória é não linear, dinâmico, determinístico e sensível às condições iniciais. Assim conclui-se que esse sistema é um sistema que apresenta comportamento caótico.



(a)



(b)

**Figura 10:** Trajetória de uma partícula sobre uma mesa vibratória que cai a uma altura de (a) **0,40** metros (b) **0,39** metros [16].

### 3.2. Modelagem Física

Se o sistema for elástico tem-se que a energia cinética total deste se conserva, ou seja, é a mesma, antes e depois da colisão, assim para modelá-lo considera-se a força resultante como a somatória de forças que agem sob a partícula: o peso da partícula e a força que a mesa faz sobre ela somente no instante da colisão, como mostrado na Figura 11. Então, de acordo com a segunda lei de Newton tem-se:

$$\vec{F}_r = \vec{P} + \vec{F}_c \quad (3.2.1)$$

$$F_r = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (3.2.2)$$

$$P = -mg \quad (3.2.3)$$

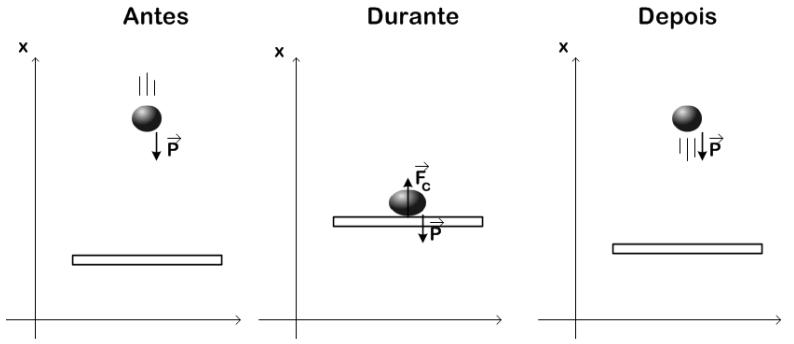


Figura 11: Forças aplicadas na partícula durante sua trajetória

A força  $F_c$  só é aplicada na partícula durante o choque, ou seja, durante um intervalo de tempo muito curto, logo esta força só existe quando a posição da partícula é a mesma da mesa; sua intensidade corresponde a  $\int F_c dt$ , sendo  $t$  o tempo de duração do choque, em termos matemáticos, se  $\Delta t = 0$ , então  $F_c = \infty$  quando  $x(t) = h(t)$ .

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + f(x^*) = -mg \quad (3.2.4)$$

$$x^* = x(t) - y(t) \quad (3.2.5)$$

$$f(x^*) = \begin{cases} +\infty \text{ para } x^* = 0 & [x(t) = y(t)] \\ 0 \text{ para } x^* > 0 & [x(t) > y(t)] \end{cases} \quad (3.2.6)$$

A partir das equações (3.2.4) e (3.2.5) chega-se a equação diferencial não homogênea que modela o sistema:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + F(x(t) - y(t)) = -mg \quad (3.2.7)$$

Há também o caso na qual o sistema considera os choques entre a partícula e a mesa como inelásticos, ou seja, há perda de energia cinética, ou ainda, quando há transferência de energia cinética para outras formas de energia, como sons. Nesse caso a

equação que modela o sistema continua a mesma, conforme a equação (3.2.7), porém introduz-se a relação do coeficiente de restituição  $k$ , que é a medida da elasticidade da colisão: razão entre a velocidade relativa de recessão e a velocidade relativa de aproximação.

$$k = \frac{|v_{particula_{final}} - v_{mesa_{final}}|}{|v_{particula_{inicial}} - v_{mesa_{inicial}}|} \quad (3.2.8)$$

Quando o sistema é elástico tem-se  $k = 1$ , e quando o sistema é totalmente inelástico  $k = 0$ .

### 3.3. Normalização

De acordo com a ABNT, Normalização é: “Atividade que estabelece, em relação a problemas existentes ou potenciais, prescrições destinadas à utilização comum e repetitiva, com vistas à obtenção do grau ótimo de ordem, em um dado contexto” [17].

Para uma melhor visualização da equação aplica-se a normalização do sistema a fim de melhorar o esquema lógico evitando duplicação desnecessária de dados, gerando relações menores e mais bem estruturadas.

Suponha um sistema análogo às equações (3.2.4), (3.2.5) e (3.2.6) com os seguintes parâmetros:

$$a \frac{d^2 z}{dt^2} + f(z^*) = -a \cdot b \quad (3.3.1)$$

$$z^* = z(t) - s(t) \quad (3.3.2)$$

$$f(z^*) = \begin{cases} +\infty \text{ para } z^* = 0 \\ 0 \text{ para } z^* > 0 \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Considere  $s(t)$  uma função senoidal simples:

$$s(t) = P_1 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \quad (3.3.4)$$

Aplicando a senoidal na equação tem-se:

$$a \frac{d^2 z}{dt^2} + f(z - P_1 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)) = -a \cdot b \quad (3.3.5)$$

A função  $f$  só modifica o sistema quando esta vai à zero, então:

$$z - P_1 \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t) = 0 \quad (3.3.6)$$

Ou ainda,

$$\frac{z}{P_1} = \operatorname{sen}(\omega \cdot t) \quad (3.3.7)$$

Considere  $y = z/P_1$ , e dividindo todos os fatores por ab:

$$\frac{P_1}{b} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{a \cdot b} f(y - \operatorname{sen}(\omega \cdot t)) = -1 \quad (3.3.8)$$

Com o objetivo de normalizar a equação aplica-se a substituição  $t = k\tau$ :

$$\frac{P_1}{b \cdot k^2} \frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{a \cdot b} f(y - \operatorname{sen}(\omega \cdot k \cdot \tau)) = -1 \quad (3.3.9)$$

Suponha agora  $k = \frac{P_1 \omega}{b}$ :

$$\frac{b}{P_1 \cdot \omega^2} \frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{a \cdot b} f\left(y - \operatorname{sen}\left(\frac{P_1 \omega^2}{b} \tau\right)\right) = -1 \quad (3.3.10)$$

Como o fator  $1/ab$   $f\left(y - \operatorname{sen}\left(\frac{P_1 \omega^2}{b} \tau\right)\right)$  ou é zero ou infinito, dispensa-se a constante  $1/ab$  que multiplica a função  $f$ .

Com a finalidade de deixar somente uma constante na equação, considere por fim  $\alpha = \frac{P_1 \omega^2}{b}$ , então chega-se a equação final e normalizada do sistema:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d^2y}{d\tau^2} + F(y - \operatorname{sen}(\alpha\tau)) = -1 \quad (3.3.11)$$

$$y^* = y - \operatorname{sen}(\alpha\tau) \quad (3.3.12)$$

$$f(y^*) = \begin{cases} +\infty & \text{para } y^* = 0 \\ 0 & \text{para } y^* > 0 \end{cases} \quad (3.3.13)$$

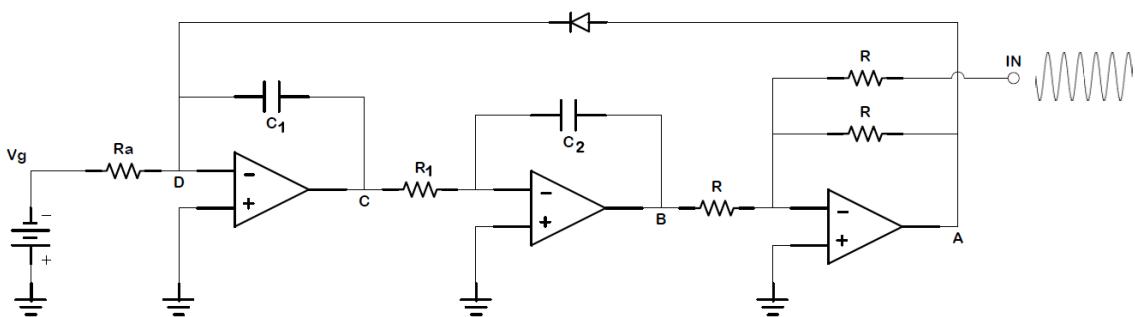
O conjunto de equações acima mostra que o sistema, para uma situação de choques elásticos, possui somente um parâmetro, o parâmetro  $\alpha$ . Analogamente, se considerar o sistema com choques inelásticos tem-se dois parâmetros:  $\alpha$  e o coeficiente de restituição  $k$ .

A grande maioria das equações diferenciais encontradas na prática não podem ser solucionadas analiticamente, porém a vantagem do sistema deste trabalho está no fato da não linearidade só aparecer durante o choque da partícula com a mesa, assim pode-se obter a solução algébrica da trajetória da partícula durante o voo, e posteriormente calcular para quais valores de tempo existe a colisão entre os dois corpos. Assim a grande dificuldade para encontrar o exato tempo em que ocorre o choque está em solucionar as equações algébricas transcendentais. Uma equação transcendente é uma equação que contém alguma função que não é redutível a uma fração entre polinômios, e cuja solução não pode ser expressa através de funções elementares [18].

De modo geral, uma equação transcendental não possui uma solução exata expressa por funções conhecidas, sendo necessário recorrer ao cálculo numérico para obter uma solução, o que não será mostrado nesse trabalho, pois o maior interesse aqui é a simulação do modelo físico por meio de circuitos. Caso o leitor esteja interessado na solução algébrica das equações do modelo, este pode recorrer à regra do trapézio [11].

### 3.4. Circuito Eletrônico Equivalente

A partir de elementos eletrônicos como capacitores, resistores, indutores, diodos e alguns amplificadores operacionais é possível fazer uma modelagem eletrônica para certos sistemas físicos através das relações entre tensão e corrente de cada componente. A Figura 12 mostra o circuito, proposto primeiramente em [11], que modela o fenômeno da partícula que se choca somente na vertical contra uma mesa vibratória.



**Figura 12:** Modelo eletrônico da partícula sobre uma mesa vibratória.

Para equacionar o circuito da figura acima aplica-se a primeira Lei de Kirchhoff no ponto D, e supondo os amplificadores operacionais ideias, tem-se um curto virtual entre a entrada inversora (-) e a não-inversora (+), então considera-se a tensão no ponto D igual a zero, logo:

$$I_{Ra} + I_{diodo} + I_{C \rightarrow D} = 0 \quad (3.4.1)$$

$$\frac{V_g}{Ra} + I_{diodo} + C_1 \frac{dV_c}{dt} = 0 \quad (3.4.2)$$

O segundo amplificador operacional é um integrador inversor, então:

$$\frac{V_c}{R_1} = -C_2 \frac{dV_B}{dt} \quad (3.4.3)$$

O terceiro amplificador operacional é um somador, assim:

$$V_A = -(V_B + V_{IN}) \quad (3.4.4)$$

Suponha que  $V_B = -V$ :

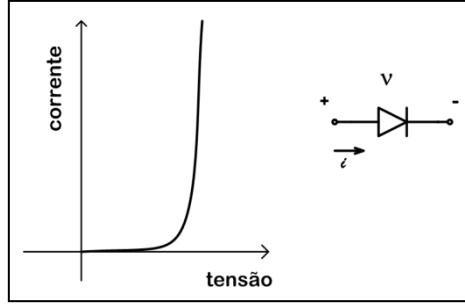
$$V_c = R_1 C_2 \frac{dV}{dt} \quad (3.4.5)$$

$$V_A = V - V_{IN} \quad (3.4.6)$$

$$R_1 C_1 C_2 \frac{d^2V}{dt^2} + I_{diodo} = -\frac{V_g}{Ra} \quad (3.4.7)$$

O diodo é o único componente passivo e não linear do circuito, que permite que a corrente flua somente em uma direção, dependendo da polaridade da tensão e da diferença de potencial entre seus terminais. A Figura 13 mostra como é o comportamento da corrente e sua equação é:

$$I_{diodo} = I_S \left( e^{\frac{V}{nV_T}} - 1 \right) \quad (3.4.8)$$



**Figura 13:** Gráfico do comportamento de um diodo.

onde,  $I_S$  = corrente de saturação, da ordem de  $10^{-15} A$ ;  $V_T$  = tensão térmica:

$$V_T = \frac{kT}{q}$$

$k$  = constante de Boltzmann =  $1,38 \cdot 10^{-23}$  joules/kelvin

$T$  = temperatura absoluta em kelvin =  $273 +$  temperatura em  $^{\circ}\text{C}$

$q$  = valor da carga do elétron =  $1,60 \cdot 10^{-19}$  coulomb

Na temperatura ambiente, a  $20^{\circ}\text{C}$ , o valor  $V_T = 25,2\text{mV}$ .

A constante  $n$  tem um valor entre 1 e 2, dependendo do material e da estrutura física do diodo. Diodos disponíveis como componentes discretos de dois terminais, como nesse caso, geralmente exibem  $n = 2$  [19].

Por último, tem-se  $v$  como a tensão positiva sobre o diodo, que no circuito equivale a  $V_A - V_D$ , entao  $v = V - V_{IN}$ .

$$I_{diodo} = I_S \left( e^{\frac{V - V_{IN}}{nV_T}} - 1 \right) \quad (3.4.9)$$

Como  $I_S$ ,  $n$  e  $V_T$  são valores constantes pode-se afirmar que a corrente do diodo é uma função dependente somente da relação entre as tensões  $V$  e  $V_{IN}$ :

$$I_{diodo} = F(V - V_{IN}) \quad (3.4.10)$$

Simplificando, a partir da equação e da FIGURA 4, a corrente do diodo é:

$$I_{diodo} = \begin{cases} +\infty \text{ para } V = V_{IN} \\ 0 \text{ para } V > V_{IN} \end{cases} \quad (3.4.11)$$

Assim chega-se às equações do circuito que modela o sistema da partícula sobre uma mesa vibratória:

$$R_1 C_1 C_2 \frac{d^2 V}{dt^2} + I_{diodo} = -\frac{V_g}{Ra} \quad (3.4.12)$$

$$I_{diodo} = F(V - V_{IN}) \quad (3.4.13)$$

$$I_{diodo} = \begin{cases} +\infty \text{ para } V = V_{IN} \\ 0 \text{ para } V > V_{IN} \end{cases} \quad (3.4.14)$$

Pode-se perceber a grande semelhança das equações (3.4.12) a (3.4.14) que modela o sistema eletrônico com as equações (3.2.4) a (3.2.6) que regem o modelo físico do sistema. Na queda livre o diodo está reverso, logo  $I_{diodo} = 0$ , então

$$R_1 C_1 C_2 \frac{d^2 V}{dt^2} = -\frac{V_g}{Ra} \quad (3.4.15)$$

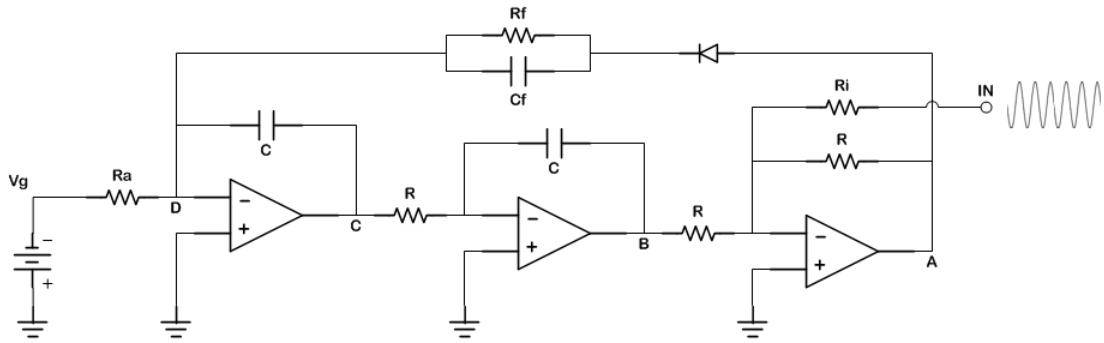
que é análogo a força peso na bola

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -g \quad (3.4.16)$$

A solução da equação (4.4.16) se obtém através do simples método de substituição e integração da igualdade, que irá gerar um conjunto de soluções parabólicas, sendo estas as possíveis trajetórias da partícula.

Quando o diodo conduz, este limita a trajetória parabólica gerando uma alta corrente que no exato instante inverte a tensão no capacitor  $C_1$  durante um período muito curto, alterando também a carga no capacitor  $C_2$ . Deste modo, a tensão  $V_c$  se inverte em relação à  $V_A$ . Tal fenômeno é análogo à inversão de velocidade durante um choque perfeitamente elástico entre a mesa e a bola.

Sem elementos dissipativos no loop de retorno (linha do diodo) o impacto e a queda livre da bola se repetem infinitamente, como se o coeficiente de restituição fosse igual a 1. Acrescentando-se uma resistência  $R_f$  em série com o diodo, limita-se a corrente  $I_{diodo}$ , que análogo a um aumento do tempo de contato entre a partícula e a mesa. Inserindo-se um capacitor em paralelo com a resistência  $R_f$  e em série com o diodo é obtém-se o efeito de aumento da dissipação de energia durante o impacto, consequentemente diminuindo o valor do coeficiente de restituição. A Figura 14 representa o circuito com o resistor e o capacitor acoplados para o controle do coeficiente de restituição.



**Figura 14:** Modelo eletrônico da partícula sobre uma mesa vibratória com  $R_f$  e  $C_f$  para controle do coeficiente de restituição.

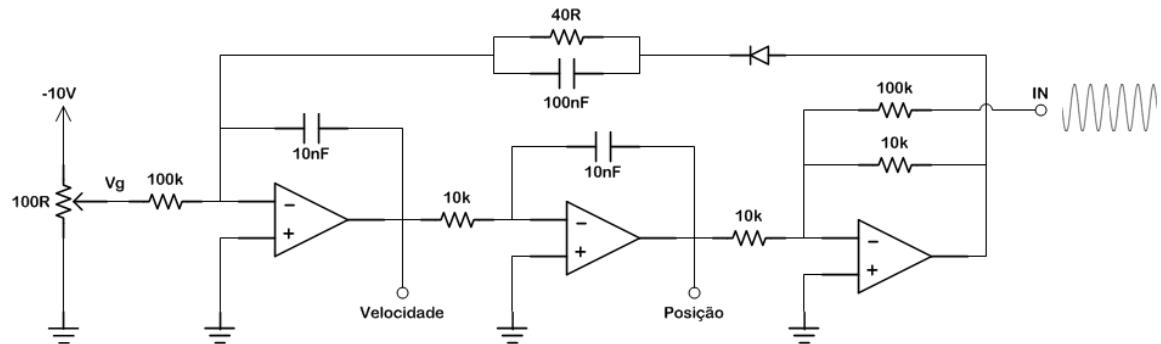
Na comparação do circuito com o modelo físico da partícula sobre a mesa vibratória pode-se considerar que as equações (3.2.4) a (3.2.6) são correspondentes às equações (3.4.12) a (3.4.14). Atribuindo na entrada do circuito uma tensão senoidal, tal que  $V_{IN} = A \cdot \text{sen}(\omega t)$ , tem-se a Tabela 1 que mostra a analogia entre os modelos.

**Tabela 1:** Tabela de parâmetros análogos para a equação normalizada, modelo físico e modelo eletrônico da partícula sobre a mesa vibratória.

	Equação Base Normalizada	Modelo Físico	Círcuito Eletrônico
Posição da partícula	$z$	$x$	$-V$
Velocidade da partícula	$\frac{dz}{dt}$	$\frac{dx}{dt}$	$-V_C = -R_2 C_2 \frac{dV}{dt}$
Massa	$a$	$m$	$C_1 R_2 C_2$
Gravidade	$b$	$g$	$\frac{V_g}{C_1 R_2 C_2 R_E}$
Força de choque	$f(z^*)$	$f(x^*)$	$I_{diodo}$
Posição da Mesa	$s(t) = P_1 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$	$h(t)$	$V_{IN} = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$
Parâmetro $\alpha$	$\frac{P_1 \omega^2}{b}$		$A \omega^2 \frac{C_1 R_2 C_2 R_E}{V_g}$
Constante elástica $k$		$\frac{\Delta v_{final}}{\Delta v_{inicial}}$	$\frac{\Delta V_{C_{final}}}{\Delta V_{C_{inicial}}}$

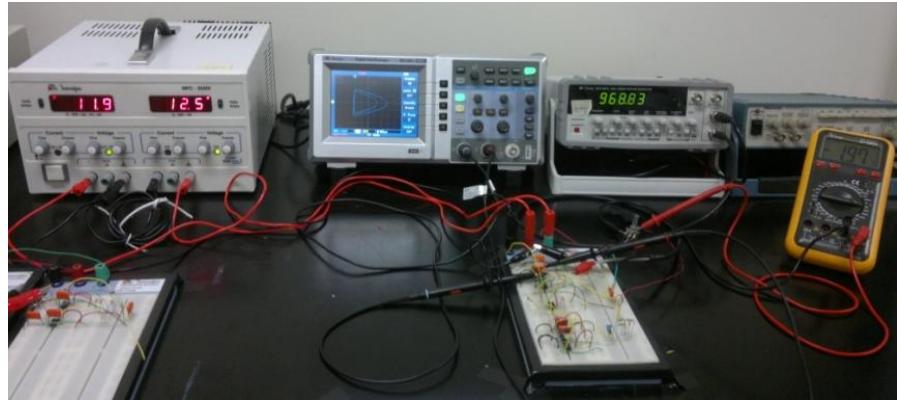
### 3.5. Implementação

Para este trabalho montou-se o circuito de acordo com a Figura 14 em um protoboard. Foram utilizados amplificadores operacionais da série 741 alimentados com uma tensão DC bipolar de  $\pm 10V$ . Outros componentes usados foram capacitores cerâmicos de  $10\mu F$  ( $C_1$  e  $C_2$ ) e  $100nF$  ( $C_F$ ), resistores de filme de carbono de valores  $10\Omega$ ,  $10k\Omega$  e  $100k\Omega$ , conforme apresentados na Figura 15, a resistência  $R_f$  de  $40\Omega$  foi montada utilizando-se quatro resistores de  $10\Omega$  em série. A tensão  $V_g$ , na qual simula a gravidade no modelo, foi regulada através de um potenciômetro de  $100\Omega$ , permitindo assim ajustar a tensão  $V_g$  entre aproximadamente  $-10V$  a  $0V$ . O diodo utilizado nesse circuito foi da série 2N4148.



**Figura 15:** Circuito eletrônico para o modelo da partícula sobre uma mesa vibratória com seus respectivos valores de resistores e capacitores.

As medições e visualização dos sinais foram obtidas através do osciloscópio, modelo MO-2061 Minipa®. Para o sinal de entrada do circuito utilizou-se um gerador de função da marca Minipa® 2MHz e para a alimentação do circuito utilizou-se uma fonte digital também da marca Minipa® modelo MPC-303DI. Todos os equipamentos do laboratório, assim como o circuito montado no protoboard são mostrados na Figura 16.



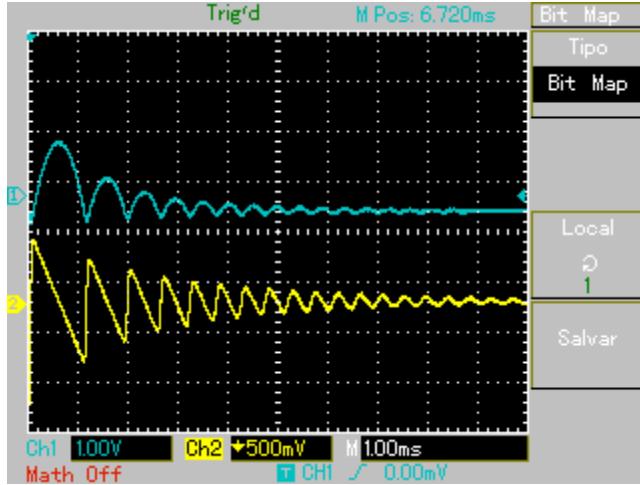
**Figura 16:** Foto da bancada com o circuito e equipamentos utilizados no laboratório de ótica para o projeto.

### 3.6. Resultados

A análise do modelo eletrônico baseou-se na observação das saídas correspondentes à posição, obtido através do CH1 e velocidade da partícula, obtido através do CH2. O osciloscópio permitia a visualização do espaço de fase através do gráfico: CH1xCH2. A partir dos gráficos de espaço de fase pôde-se observar quando o sistema era periódico e quando o sistema se comportava caoticamente.

A tensão de entrada do sistema representada pelo nó *IN* da Figura 15 é a posição da mesa; as saídas estão em  $V_B$ , como a posição da partícula e  $V_C$  representando a velocidade da partícula, porém com seu sinal invertido, ou seja,  $-V_C$ .

O primeiro teste para a validação do modelo eletrônico foi a utilização de uma onda quadrada de frequência 10,5Hz e amplitude 2,84V na entrada do circuito (posição da mesa), e assim através do osciloscópio observou-se a trajetória da partícula em função do tempo. A Figura 17 representa as tensões de posição da mesa e velocidade da partícula no tempo.



**Figura 17:** Posição e velocidade da partícula  $\times$  tempo para  $k = 0,75$ .

Na Figura 17 observa-se que a partícula é lançada para cima a partir da mesa com velocidade  $V$ , retornando no momento do choque com velocidade  $-V$ , após a colisão a partícula sobe com uma velocidade  $0,75V$ , e assim sucessivamente, a partir disso tem-se o coeficiente de restituição  $k = 0,75$ . Este coeficiente de restituição é obtido empiricamente através do resistir  $R_F$  e do capacitor  $C_F$ .

Considerando agora que a mesa vibra senoidalmente, de acordo com a função  $V_{IN} = A \cdot \text{sen}(\omega t)$ , a trajetória da partícula irá depender do parâmetro  $\alpha$ , segundo a Tabela 2 , onde  $\alpha = A \omega^2 \frac{C_1 R_2 C_2 R_E}{V_g}$ . Como os resistores e capacitores possuem seus valores fixos, os parâmetros independentes que podem variar são: frequência da senóide ( $\omega$ ), amplitude da senóide ( $A$ ) e a tensão  $V_G$  (variado através de um potenciômetro).

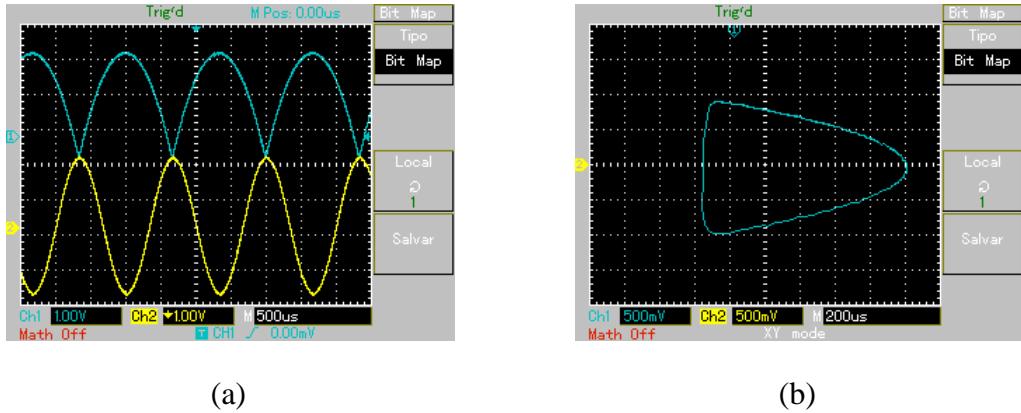
A tensão  $V_G$  do circuito representa a constante gravitacional no modelo físico. Com intuito de simular a dinâmica da partícula num sistema “real” a tensão  $V_G$  não foi variada durante os testes. O valor desta tensão foi obtido empiricamente e se manteve entre  $-1V$  e  $-2V$ .

Variando-se os dois parâmetros obtiveram-se resultados a partir osciloscópio que condizem com as equações do modelo. As figuras a seguir mostram os gráficos de posição e espaço de fase para os valores dos parâmetros expressos na Tabela 2:

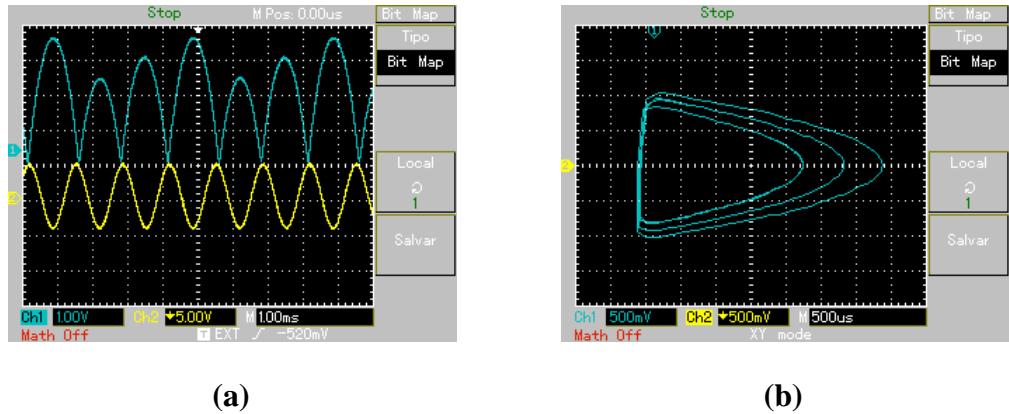
Tabela 2: Resultados obtidos através do osciloscópio de acordo com os valores de cada parâmetro.

Sinal	Frequência [Hz]	Amplitude [Volts]	$V_G$ [Volts]	$ \alpha $	Período	Figura
$Pos_{mesa} \times Pos_{bola}$	750,73	3,92	-1,68	0,19	1	18 (a)
$Vel_{bola} \times Pos_{bola}$	750,73	3,92	-1,68	0,19	1	18 (b)
$Pos_{mesa} \times Pos_{bola}$	750,73	9,5	-1,68	0,46	3	19 (a)
$Vel_{bola} \times Pos_{bola}$	750,73	9,5	-1,68	0,46	3	19 (b)
$Pos_{mesa} \times Pos_{bola}$	848,21	9,5	-1,68	0,59	5	20 (a)
$Vel_{bola} \times Pos_{bola}$	848,21	9,5	-1,68	0,59	5	20 (b)
$Pos_{mesa} \times Pos_{bola}$	961,08	9,5	-1,68	0,75	caos	21 (a)
$Vel_{bola} \times Pos_{bola}$	961,08	9,5	-1,68	0,75	caos	21 (b)

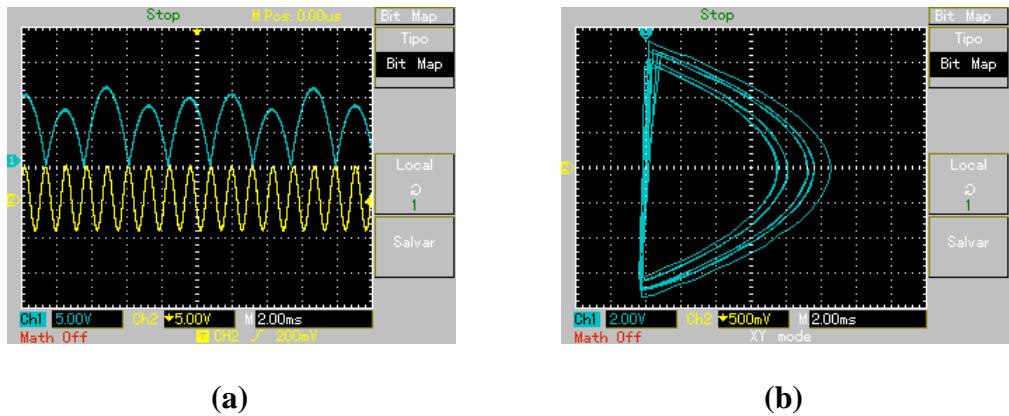
As figuras a seguir foram obtidas diretamente do osciloscópio, que gerava uma imagem em formato bitmap e salvava em um Pendrive “plugado” na saída USB.



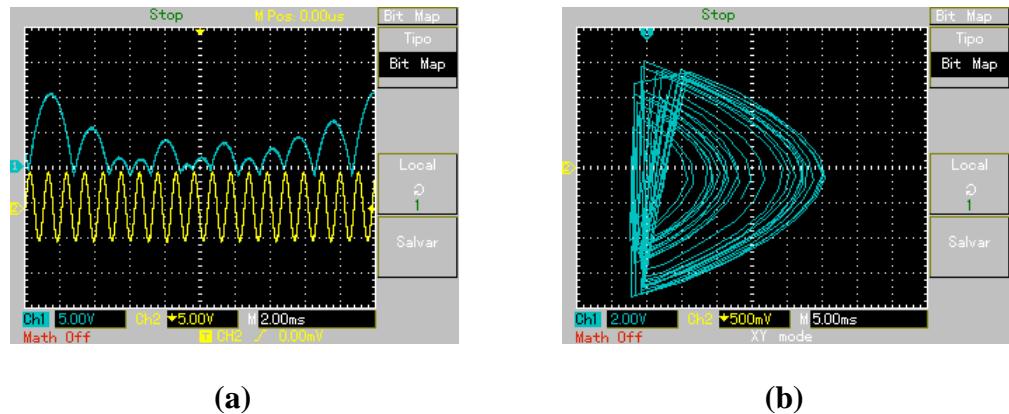
**Figura 18:** Saídas do Osciloscópio para  $\alpha = 0,19$  (a)  $V_{POS} \times V_{IN}$  (b) Espaço de fase



**Figura 19:** Saídas do Osciloscópio para  $\alpha = 0,46$  (a)  $V_{POS} \times V_{IN}$  (b) Espaço de fase



**Figura 20:** Saídas do Osciloscópio para  $\alpha = 0,59$  (a)  $V_{POS} \times V_{IN}$  (b) Espaço de fase



**Figura 21:** Saídas do Osciloscópio para  $\alpha = 0,75$  (a)  $V_{POS} \times V_{IN}$  (b) Espaço de fase

Analizando as figuras 18, 19 e 20 observa-se que as variações/aumento do parâmetro  $\alpha$  fazem surgir bifurcações com mudança de período no espaço de fase. A Figura 19, entretanto, mostra um caso em que o circuito possui um comportamento caótico.

Durante o experimento observou-se que para a maioria dos parâmetros  $\alpha$ , o circuito apresentava um comportamento caótico, ou seja, os estados em que o sistema possuía um período fixo eram poucos, mesmo variando seus parâmetros: amplitude, frequência; mas ainda assim diferentes períodos foram alcançados, como períodos 1, 2, 3, 4, 5, e 7. Normalmente o sistema se encontrava aperiódico antes de se tornar estável, com a mudança de algum parâmetro, este bifurcava, dobrando seu período e quando alterava mais um pouco um parâmetro o sistema voltava a ser caótico, mexendo em outros parâmetros achava-se outro estado estável, bifurcava e tornava-se caótico de novo e assim por diante. Para freqüências mais altas, a partir de 2kHz, pouquíssimos estados eram estáveis.

Observou-se também a presença do fenômeno de histerese no estado do sistema. Por exemplo, suponha que a certa amplitude  $A$ , o circuito estivesse estável com período 2, aumentando um pouco a amplitude sem alterar os demais parâmetros, o circuito torna-se caótico, para  $A + \Delta a$ . Quando a amplitude era diminuída para o valor anterior,  $A$ , o sistema não retornava ao estado de período 2, sendo necessário diminuir mais a amplitude,  $A - \Delta b$ , e voltar a aumentar até chegar ao valor  $A$ , para retornar ao estado inicial.

A partir dos resultados obtidos, pôde-se considerar o modelo satisfatório.



## CAPÍTULO 4

### Considerações Iniciais

Este capítulo descreve a segunda e última parte prática do trabalho: o sincronismo mestre-escravo entre dois circuitos iguais ao modelo de uma partícula sobre uma mesa vibratória visto no Capítulo anterior. Será introduzido a base teórica do sincronismo proposto por Pecora e Carroll e a implementação deste para uma entrada de áudio, bem como seus resultados.

#### 4.1. Sincronismo

A sincronização de sistemas caóticos é uma aplicação importante, por exemplo, na área de segurança em sistemas de comunicação, pois possibilita transformar a informação em um sinal de sequências pseudo-aleatórias e aperiódicas no percurso da linha de transmissão, sendo assim uma forma de proteção da linha.

A possibilidade de sincronismo é uma das características mais interessantes dos sistemas caóticos, pois, devido à sensibilidade às condições iniciais, dois sistemas caóticos idênticos e independentes, partindo de condições iniciais próximas, apresentam soluções que se distanciam e terminam gerando trajetórias não correlacionadas.

Para este trabalho será implementado a técnica do sincronismo proposto por Pecora e Caroll, que afirmaram que sistemas caóticos idênticos ou quase idênticos podem ser sincronizados [20]. Pecora e Carroll asseguraram que a partir de um sistema de comportamento caótico produz-se um subsistema igual ou parcialmente igual que trabalha de forma independente, porém é alimentado com um sinal do original. Sob algumas condições, este subsistema se comporta caoticamente, mas em completa sincronia com o sistema original. O comportamento como um todo é caótico, mas o acoplamento do subsistema é estável. Sua estabilidade garante que qualquer ruído ou perturbação seja amortecido e continue mantendo o ajuste do sinal de entrada [21].

### 4.1.1 Sincronismo de Pecora e Carroll

Para explicar o sincronismo mestre-escravo de Pecora e Carroll toma-se o sistema mestre uma função não linear, possivelmente caótico, representado por

$$\dot{u} = f(u) \quad (4.1.1)$$

Esse sistema é então dividido arbitrariamente em dois subsistemas  $v$  e  $w$  de forma que

$$u = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad (4.1.2)$$

e

$$\dot{v} = g(v; w) \quad (4.1.3)$$

$$\dot{w} = h(v; w) \quad (4.1.4)$$

Sendo  $v = (u_1, \dots, u_m)^T$ ,  $g = (f_1(u), \dots, f_m(u))^T$ ,  $w = (u_{m+1}, \dots, u_n)^T$  e  $h = (f_{m+1}(u), \dots, f_n(u))^T$ .

Em seguida, o subsistema  $w$  é copiado, identicamente, gerando o subsistema  $w'$ , chamado sistema escravo. Este último é então acrescentado ao sistema original gerando

$$\dot{v} = g(v; w) \quad (4.1.5)$$

$$\dot{w} = h(v; w) \quad (4.1.6)$$

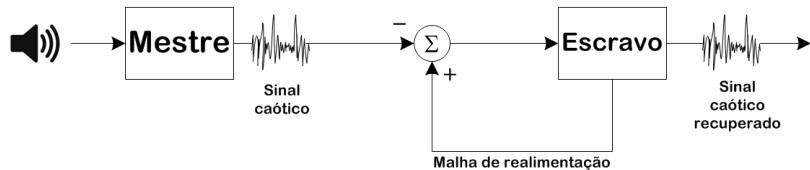
$$\dot{w}' = h(v; w') \quad (4.1.7)$$

Ao final, tem-se um sistema mestre composto por uma equação não linear autônoma e uma cópia idêntica de um subsistema do sistema mestre, o sistema *escravo*. Nessa estrutura, o subsistema escravo se comporta como se fosse outra equação, idêntico ao mestre, do qual algumas variáveis de estado foram substituídas pelas correspondentes do sistema mestre. Essas variáveis são a informação que é transmitida do mestre para o escravo. Essa forma de acoplamento mestre-escravo é chamada substituição completa [22].

Dependendo do sistema em questão e da escolha do subsistema, a substituição completa leva à sincronização do subsistema escravo com o subsistema correspondente do mestre. Por sincronização entende-se a diferença entre os estados correspondentes tender a zero quando o tempo tende ao infinito. Porém uma condição necessária para a sincronização é que pequenas perturbações fora do conjunto, como ruídos, devem ser amortecidas.

## 4.2. Implementação

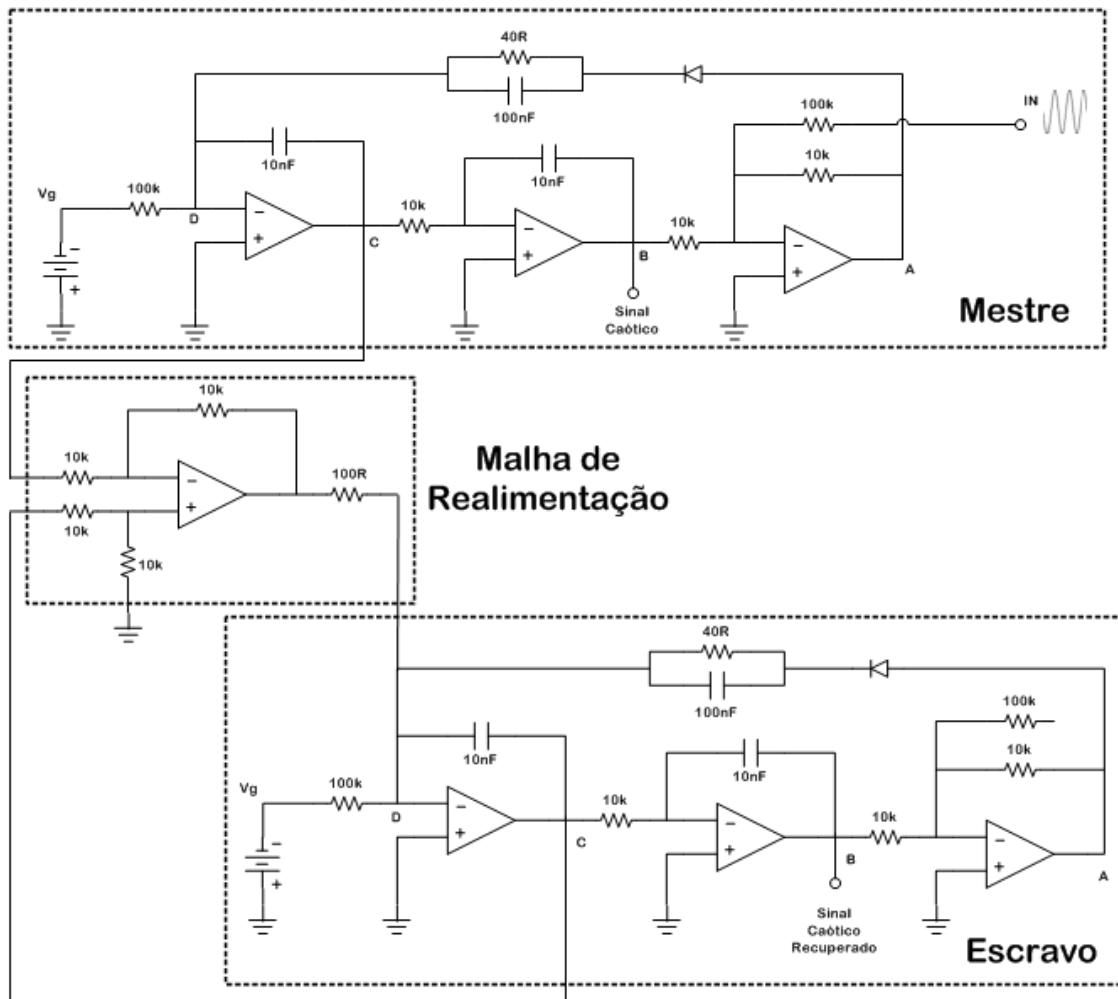
Com base na afirmação de Pecora e Caroll este trabalho implementa o sincronismo do modelo eletrônico da partícula que se choca horizontalmente sobre uma mesa vibratória. Foram montados dois circuitos idênticos de acordo com a Figura 15 que se conectam através de uma malha de realimentação a fim de reduzir a sensibilidade do sistema às perturbações externas, conforme mostrado no diagrama de blocos da Figura 22. Para simular a malha de realimentação foi utilizado um amplificador de diferenças descrito em [23].



**Figura 22:** Diagrama de Blocos para o sincronismo mestre-escravo

O sinal encolhido como entrada do circuito mestre foi um sinal de áudio qualquer, uma fala ou música. O circuito escravo irá receber somente esse sinal de áudio processado e caótico pelo circuito mestre, reproduzindo-o. É importante ressaltar que nesta configuração o circuito escravo não irá recuperar o sinal de áudio da entrada do mestre e sim reproduzir o sinal caótico gerado pelo mestre. A recuperação do sinal original é possível através de um circuito, descrito em [23], porém não será abordado neste trabalho.

O circuito final montado em protoboard está representado na Figura 23. Para o circuito escravo, não existe sinal de entrada  $V_{IN}$ , somente a saída da malha de realimentação no ponto  $D$ .



**Figura 23:** Esquema do circuito montado para a sincronização mestre-escravo com malha de realimentação.

Primeiramente montaram-se dois circuitos mestre independentes e introduziu-se um mesmo sinal senoidal na entrada. Foi possível observar que cada circuito gerava uma saída  $V_B$  diferente. Esse fato ocorreu devido à baixa precisão dos componentes e pelo fato do circuito ter sido implementado em um protoboard, sujeito a ruídos e vibrações externas.

Após esse teste inicial, tirou-se o sinal de entrada de um dos circuitos mestre e adicionaram-se as ligações da malha de realimentação, gerando um circuito escravo, como mostrado na Figura 23. Foi possível observar que com esta nova configuração a saída  $V_B$  do circuito escravo estava em completa sincronia com a saída  $V_B$  do mestre.

### 4.3. Resultados

O sinal escolhido para ser a entrada do circuito foi um sinal de áudio obtido através de um microfone (CI) posicionado junto a um alto-falante de um MP3Player, que tocavam músicas aleatórias. Para a análise, foram coletadas as saídas  $V_B$  (posição da partícula) nos dois canais do osciloscópio que correspondem ao sinal caótico do mestre (CH1) e ao sinal caótico recuperado pelo escravo (CH2), como indicado na Figura 23. A fim de verificar a possibilidade de ocorrência do regime de sincronismo completo, os sinais de saída dos circuitos foram sobrepostos. A Figura 24 mostra os sinais obtidos nos canais do osciloscópio.

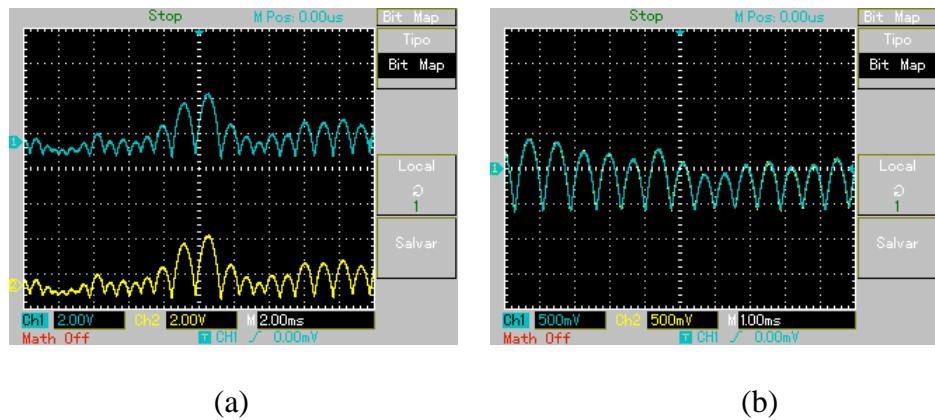
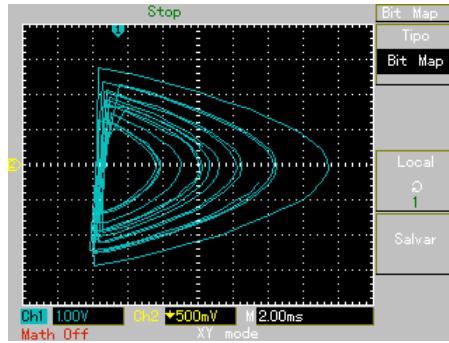


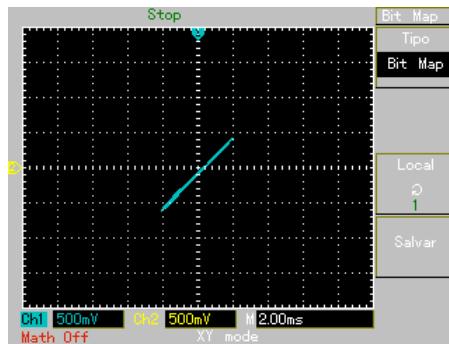
Figura 24: Sinais obtidos pelo osciloscópio na sincronização **(a)** CH1 e CH2 separados  
**(b)** CH1 e CH2 sobrepostos.

Durante a reprodução da música, sinais de frequências e amplitudes variadas eram repassados para a entrada do mestre, tais sinais nem sempre produziam saídas caóticas, porém como observado na primeira parte deste trabalho, a grande maioria das saídas transitavam em regiões caóticas. A Figura 25 é a captura do espaço de fase do mestre num instante que o sistema apresenta comportamento caótico.



**Figura 25:** Espaço de fase do mestre para uma entrada de áudio.

Como última análise coletou-se o gráfico que relaciona a saída do mestre e a saída do escravo para verificar se estavam em fase. Através da Figura 25, pôde-se se concluir que os sistemas foram sincronizados com sucesso.



**Figura 26:** Saída do osciloscópio para  $V_{B_{mestre}} \times V_{B_{escravo}}$ .

Mesmo quando um sinal aleatório era adicionado na entrada do mestre, o circuito não perdia seu sincronismo, independente da intensidade desse sinal.

## CAPÍTULO 5

### 5.1. Conclusão

Este trabalho teve por objetivo estudar e observar o comportamento de um sistema caótico e sua sincronização. A implementação do modelo eletrônico da partícula sobre uma mesa vibratória, no Capítulo 3, permitiu a observação e análise de um circuito caótico relativamente simples. Por meio dos sinais do circuito pôde-se concluir que o modelo eletrônico representou o modelo físico com sucesso. Assim foi possível observar a dinâmica do sistema, ou seja, quando este apresentava comportamento caótico, quando se tornava caótico e como estes estados transitavam entre si.

No Capítulo 4 foi proposta a sincronização mestre–escravo do circuito caótico baseado na teoria de Pecora e Carroll. Pôde-se considerar que os resultados mostraram que o sincronismo deste circuito foi implementado com sucesso. Mesmo utilizando componentes de baixa precisão e em um ambiente com ruídos e vibrações, os sinais se mantiveram em perfeita sincronia, comprovando que os sinais podem ser sincronizados mesmo se os canais de comunicação estiverem ruidosos ou não forem ideias. A sincronização de circuitos caóticos demonstra um grande potencial para área de segurança das comunicações podendo atuar, por exemplo, como uma forma de criptografia do canal de comunicação.

A grande vantagem desse trabalho foi a implementação física dos sistemas e não uma simples simulação computacional que normalmente trata sinais, componentes e o sistema em geral, como ideal. Assim foi possível observar como é o comportamento desses sistemas em uma situação real, com interferência de elementos externos.



## REFERÊNCIAS

- [1] Lorenz, Edward N., 1963: Deterministic Nonperiodic Flow
- [2] Mandelbrot , Benoit B., 1977: Fractals: Form, Chance and Dimension
- [3] Strogatz, Steven, 1994: Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering
- [4] Revista “Mundo Estranho”, matéria: “O que é a teoria do caos”, Jan 2010.
- [5] Attractor, Wikipedia: <http://en.wikipedia.org/wiki/Attractor>
- [6] Vivanco, Jerver E. M., (2009): Análise Da Dinâmica Não-Linear No Balanço Paramétrico De Uma Embarcação Pesqueira, Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2009.
- [7] Imagem de um Atrator de Lorenz: <http://www.mizuno.org/c/la/index.shtml>
- [8] Capra, Fritjof: The Web Of Life: A New Scientific Understanding of Living Systems New York: Anchor Books, 1996
- [9] Figuras obtidas através do software Wolfram Demonstrations CDF.
- [10] Mathematical Chaos and Strange Attractors, nov.1981
- [11] Gonçalves, L. N. (1990). Modelos eletrônicos do atrito seco, sistemas biestáveis e colisões inelásticas. Dissertação (Mestrado)-Instituto de Física e Química de São Carlos-Departamento de Física e Ciência dos Materiais, Universidade de São Paulo, 1990.
- [12] Zimmerman, R., Celaschi, S., Neto, L. G. (1991). The electronic bouncing ball. American Journal of Physics, v.60, n.4, pp. 370-375.
- [13] W.J. Duffin, Electricity and Magnetism. McGraw-Hill, Maidenhead, Berkshire, UK 1980, 3 edição.
- [14] E. W. Lee, in Encyclopedic Dictionary of Physics, edited by J. Thewlis. Pergamon, Oxford, UK 1961, Vol. 4, pp. 474-476
- [15] R. Stuart Mackey, Two starling demonstrations with a magnet. Am. J. Phys, 1960.
- [16] Ball Bouncing on a Moving Piston de Wolfram Demonstration CDF
- [17] Associação Brasileira de Normas Técnicas. Disponível em:  
[http://www.abnt.org.br/m2.asp?cod\\_pagina=963](http://www.abnt.org.br/m2.asp?cod_pagina=963)
- [18] Transcendental Function, Wikipedia:  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Transcendental\\_function](http://en.wikipedia.org/wiki/Transcendental_function)

- [19] Sedra e Smith, Microeletrônica, 4ed. PP.126.
- [20] Pecora, L. M., Carroll, T. L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, v. 64, n. 8, pp. 821-825.
- [21] Gonçalves, Cristhiane (2012). Verificação Do Sincronismo Do Acoplamento Elétrico Entre Circuitos Simulando O Comportamento De Um Sistema Mecânico Partícula Numa Caixa
- [22] Freitas, U. S.; Macau E. E. (2007). Sincronização de Sistemas Caóticos na Identificação de Sistemas
- [23] Pizolato, J. P. Jr.; Romero, M. A.; Neto, L .G. (2008). Chaotic Communication Based on the Particle-in-a-Box Electronic Circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems –I Regular Papers*, v.55, n. 4, pp. 1108-1115. 2007