

JOÃO PEDRO K. WANDALSEN

**CONSTRUÇÃO E COMPARAÇÃO DE PORTFÓLIOS
OTIMIZADOS: UMA ANÁLISE EMPÍRICA ENTRE
HRP, MPT E EMH NO MERCADO BRASILEIRO DE
AÇÕES.**

Trabalho de Formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do diploma de Engenheiro de
Produção

SÃO PAULO
2025

JOÃO PEDRO K. WANDALSEN

**CONSTRUÇÃO E COMPARAÇÃO DE PORTFÓLIOS
OTIMIZADOS: UMA ANÁLISE EMPÍRICA ENTRE
HRP, MPT E EMH NO MERCADO BRASILEIRO DE
AÇÕES.**

Trabalho de Formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do diploma de Engenheiro de
Produção

Orientador:

João Marcelo Leal Gomes Leite

SÃO PAULO
2025

FICHA CATALOGRÁFICA

Wandalsen, João Pedro Kian

Construção e Comparação de Portfólios Otimizados: Uma Análise Empírica entre HRP, MPT e EMH no Mercado Brasileiro de Ações./ J.P. K. Wandalsen. SÃO PAULO, 2025.

105 p.

Monografia (Graduação em Engenharia de Produção) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Produção.

1. Métodos de Otimização de Portfólio #1. 2. Mercado de Açãoário Brasileiro #2. 3. Modelos Matemáticos #3. I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Produção. II. t.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo pela sólida formação acadêmica, pelo ambiente de excelência e pela oportunidade de desenvolver este trabalho em um contexto tão enriquecedor.

RESUMO

A construção de portfólios de investimento desempenha papel central no processo de tomada de decisão financeira, seja em instituições, empresas ou entre investidores individuais. Em um ambiente marcado por incerteza, ampla diversidade de ativos e forte assimetria de informações, métodos quantitativos de alocação tornam-se fundamentais para equilibrar risco e retorno de forma sistemática e replicável.

Este trabalho investiga o desempenho comparativo de três abordagens de otimização de portfólio aplicadas ao mercado acionário brasileiro: Paridade de Risco Hierárquica (HRP), Teoria Moderna de Portfólio (MPT) e Hipótese de Mercados Eficientes (EMH), esta última representada pelo Portfólio de Mercado e pela estratégia ingênua de pesos iguais (EW). A análise foi conduzida sobre todas as ações que compuseram o índice IBrX 100 entre 2002 e 2025, totalizando 313 ativos, de modo a eliminar o viés de sobrevivência e refletir a dinâmica real de entradas e saídas do índice ao longo do tempo.

Foram implementadas simulações fora da amostra com janelas rolantes de cinco anos para estimação dos parâmetros, empregando retornos totais e métricas abrangentes de risco e desempenho. Os modelos MPT e HRP foram implementados em Python com apoio da biblioteca PyPortfolioOpt, enquanto os modelos associados à EMH seguiram suas definições teóricas tradicionais.

Os resultados empíricos mostram que o HRP supera sistematicamente os demais modelos em termos de retorno absoluto, métricas de risco: volatilidade e drawdown máximo e métricas de retorno ajustado ao risco: Sharpe e Sortino, além de apresentar a evolução mais estável da alocação ao longo do período. O modelo MPT demonstrou forte sensibilidade a erros de estimação e elevada concentração de alocação em poucos ativos. Já a estratégia ingênua (EW) apresentou desempenho robusto e competitivo, apesar de possuir um modelo simples de alocação. Embora esses resultados contrastem com parte da literatura correlata, tal divergência é passível de explicação pelas especificidades metodológicas adotadas neste estudo.

Palavras-chave: Modelos de Otimização de Portfólio, Mercado Acionário Brasileiro, Modelos Matemáticos

ABSTRACT

The construction of investment portfolios plays a central role in financial decision-making across institutions, corporations, and individual investors. In an environment marked by uncertainty, a wide variety of assets, and significant information asymmetry, quantitative allocation methods become essential for systematically and consistently balancing risk and return.

This study evaluates the comparative performance of three portfolio optimization approaches applied to the Brazilian equity market: Hierarchical Risk Parity (HRP), Modern Portfolio Theory (MPT), and the Efficient Market Hypothesis (EMH), the latter represented by both the Market Portfolio and the naive equal-weight strategy (EW). The analysis covers all stocks that were part of the IBrX 100 index between 2002 and 2025, totaling 313 assets, thereby eliminating survivorship bias and reflecting the real dynamics of entries and exits from the index over time.

Out-of-sample simulations were conducted using five-year rolling windows for parameter estimation, incorporating total returns (including dividends) and a broad set of risk and performance metrics. The MPT and HRP models were implemented in Python using the PyPortfolioOpt library, while the EMH-based models followed their traditional theoretical definitions.

Empirical results indicate that HRP systematically outperforms other models in terms of absolute return, risk metrics (volatility and maximum drawdown), and risk-adjusted return metrics (Sharpe and Sortino ratios), while also presenting the most stable allocation evolution over the period. The MPT model demonstrated strong sensitivity to estimation errors and high concentration in few assets. Meanwhile, the naïve strategy (EW) delivered robust and competitive performance despite its simple allocation model. Although these findings contrast with parts of the related literature, such divergence can be explained by the methodological specificities adopted in this study.

Key-words: Portfolio Optimization Models, Brazilian Equity Market, Mathematical Models

LISTA DE FIGURAS

1	Fronteira Eficiente de Portfólios	23
2	Fronteira Eficiente de Portfólios com o Índice Sharpe	24
3	Comparação de Dendrograma do Método HRP (a) vs. a Árvore do MPT (b)	34
4	Exemplo de Dendrograma Após Aplicação do Algoritmo de Clusterização Hierárquica	37
5	Matrizes de Correlação de Ativos Antes (a) e Depois (b) da Quasi-Diagonalization	38
6	Exemplo de Iteração da Etapa de Recursive Bisection do HRP	41
7	Comparação de Janelas Expansivas versus Janelas Rolantes	50
8	Esquema de Janelas Temporais para Simulação Out-of-Sample	61
9	Simulação de Investimento de R\$1 em PETR4 em 01/jan/2002	62
10	Distribuição dos Retornos Anualizados de 313 Ações Presentes no Universo Analisado	63
11	Alocação por Ativo no Portfólio - MPT	69
12	Volatilidade Anualizada em Janelas Rolantes de 60 dias	70
13	Drawdown Máximo dos Métodos de Otimização	71
14	Retorno Acumulado dos Métodos de Otimização	72

LISTA DE TABELAS

1	Métodos de Otimização de Portfólio Empregados	18
2	Comparação da Composição do IBrX 100 em jan/2002 com mai/2025. Ações que permanecem na composição em verde	49
3	Resumo da Comparação de Trabalhos sobre Otimização de Portfólio Aplicados no Cenário Brasileiro	52
4	Ações Presentes na Composição do IBrX 100 desde 2002 até 2025 .	57
5	Universo de Ações que Compuseram o IBrX 100 de 2002 até 2025 .	62
6	Quantidade de Ações Considerada em cada Janela	64
7	Dados de Alocação por Modelo e por Janela de Otimização	68
8	Métricas de Risco por Método de Otimização	70
9	Métricas de Retorno por Método de Otimização	71
10	Retorno por Ano por Método de Otimização	73
11	Alfa de Jensen sobre o IBrX 100 por Ano por Método de Otimização .	74
12	Métricas de Risco ajustado ao Retorno por Método de Otimização .	75
13	Comparação de Resultados com Trabalhos Acadêmicos Selecionados	76
14	Alocação Completa do Método HRP por Janela de Otimização . . .	87
15	Alocação Completa do Método MPT por Janela de Otimização . . .	96

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

B3	Brasil, Bolsa, Balcão (Bolsa de valores brasileira)
CDI	Certificado de Depósito Interbancário
DEA	Data Envelopment Analysis (Análise Envoltória de Dados)
ETF	Exchange-Traded Fund (Fundo Negociado em Bolsa)
EMH	Efficient-market Hypothesis (Hipótese do Mercado Eficiente)
EW	Equally-weighted (Portfólio com pesos iguais)
FII	Fundo de Investimento Imobiliário
HRP	Hierarchical Risk Parity (Paridade de Risco Hierárquica)
IBOV	Índice Ibovespa
IBrx 100	Índice Brasil 100
IV	Inverse Volatility (Portfólio com pesos inversamente proporcionais a volatilidade)
IVP	Inverse Variance Portfolio (Alocação de Variância Inversa)
MODM	Modelo Multi-Objetivo para Tomada de Decisão
MPT	Modern Portfolio Theory (Teoria Moderna de Portfólio)
MD	Maximum Diversification (Portfólio com diversificação máxima)
MDE	Maximum Decorrelation (Portfólio com descorrelação máxima)
MV	Minimum Variance (Portfólio de variância mínima)
Naive	Ingênuo (Portfólio agnóstico, sem otimização)
RP	Risk Parity (Portfólio de paridade de risco)
S&P500	Standard & Poor's 500 (Índice das 500 maiores ações listadas)

SUMÁRIO

1	Introdução	11
1.1	Problemática e Relevância do Projeto	11
1.2	Objetivos	13
1.3	Delimitações	14
1.4	Estrutura do Trabalho	14
2	Fundamentação Teórica	16
2.1	Métodos e Otimização de Portfólio	16
2.2	Teoria Moderna de Portfólio	18
2.2.1	Premissas e Suposições	19
2.2.2	Conceitos e Variáveis	19
2.2.3	Formulação	21
2.2.4	Solução	22
2.2.5	Forma Canônica	24
2.3	Hipótese de Mercados Eficientes	25
2.3.1	Contexto Histórico e Formulação Geral	25
2.3.2	Definição Formal e Modelo Teórico	26
2.3.3	As Três Formas de Eficiência	28
2.3.4	Implicações para a Gestão de Portfólio	31
2.4	Paridade de Risco Hierárquica	33
2.4.1	Fundamentos Matemáticos e Lógica do Método	33
2.4.2	Etapas do Algoritmo HRP	35
2.4.3	Comparação da Estrutura Conceitual do HRP com o MPT	42

2.5	Indicadores de Risco e Desempenho	42
2.5.1	Medidas de Risco	44
2.5.2	Medidas de Retorno	45
2.5.3	Medidas de Retorno Ajustado ao Risco	46
2.6	Viés de Sobrevivência	47
2.7	Janelas de Treinamento e Otimização em Backtests	49
2.8	Literatura de Otimização de Portfólio no Brasil	51
3	Metodologia	55
3.1	IBRX 100	55
3.2	Mitigação do Viés de Sobrevivência	56
3.3	Universo de Ativos Brasileiros Analisado	56
3.4	Janelas Backtest Definidas	60
3.5	Base de Retornos Históricos	61
3.6	Implementação Computacional dos Modelos de Otimização	64
4	Resultados	66
4.1	Análise de Dados	66
4.1.1	Alocação por Método	66
4.1.2	Métricas de Risco	69
4.1.3	Métricas de Retorno	71
4.1.4	Métricas de Retorno Ajustado ao Risco	74
4.2	Discussão dos Resultados	75
4.3	Comparação com a Literatura	76
5	Conclusões	78
5.1	Limitações do Trabalho	78

5.2	Estudos Futuros	79
6	Apêndice	81
6.1	Código utilizado em Python para os métodos MPT e HRP	81
6.2	Alocação Completa HRP por Janela	85
6.3	Alocação Completa MPT por Janela	94
	Referências	103

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho de formatura surgiu como uma forma de unir os aprendizados da graduação em Engenharia de Produção às aplicações do mercado financeiro, área na qual o autor teve contato direto durante o estágio.

1.1 Problemática e Relevância do Projeto

A maioria das pessoas, empresas ou instituições possui um portfólio de ativos, seja ativos reais como casa, carro etc. mas também ativos financeiros como títulos do governo, ações de empresas etc. O resultado dessa soma de ativos, é o que pode ser chamado de portfólio de ativos. As análises deste trabalho estão limitadas a ativos financeiros, logo, ao portfólio de investimentos.

Essa combinação de ativos que compõe o portfólio é muitas vezes razão de decisões não feitas em conjunto, mas circunstanciais do momento. Tendo isso em vista, é possível enxergar a situação como um problema, de forma que a totalidade dos ativos financeiros da carteira não está otimizada para atender as demandas do investidor, seja quais forem elas.

Assim, a alocação de recursos entre diferentes ativos financeiros configura-se como uma das decisões centrais no processo de investimento. Em um ambiente marcado por incertezas e ampla variedade de instrumentos disponíveis no mercado, investidores precisam tomar decisões que conciliem seus objetivos de retorno com os riscos que estão dispostos a assumir. Essa tarefa se torna particularmente complexa à medida que cresce o número de ativos possíveis se investir.

O tratamento formal desse problema permite que a tomada de decisão seja guiada por critérios quantitativos claros e replicáveis, deixando se ser uma série de decisões não correlatas e circunstanciais. Esse enfoque é particularmente relevante em ambientes

institucionais, como fundos de investimento, seguradoras e gestores de patrimônio, mas também pode ser aplicado a investidores comuns.

A otimização de portfólios configura-se assim como um dos pilares fundamentais da teoria moderna de finanças e da gestão de investimentos. O estudo dessa área de finanças começou quando, em 1952, o economista americano Harry Markowitz publicou um artigo cunhando o termo Teoria de Otimização de Portfólio (MARKOWITZ, 1952). Desde então, a busca por métodos que permitam alocar ativos de forma eficiente tem sido objeto de intensa pesquisa acadêmica e desenvolvimento prático. A importância desse campo reside na sua capacidade de sistematizar decisões complexas de alocação, balanceando retorno e risco de maneira quantitativa. Em um cenário no qual investidores enfrentam uma ampla gama de ativos e incertezas, os modelos de otimização oferecem uma estrutura teórica rigorosa para apoiar a tomada de decisão racional.

Com o avanço tecnológico e a disponibilidade crescente de dados, novas abordagens e refinamentos têm sido continuamente propostos para superar limitações dos modelos clássicos. Esses desenvolvimentos respondem a críticas e limitações observadas em aplicações empíricas da teoria tradicional, como a instabilidade das estimativas de retorno e covariância, a sensibilidade do modelo a pequenas alterações nos dados e a dificuldade de captura de eventos extremos.

A crescente sofisticação dos mercados financeiros e o surgimento de novas classes de ativos, incluindo Fundo de Índice (Exchange-traded Funds - ETFs), ativos alternativos, derivativos e commodities, por exemplo, demandam métodos robustos que suportem toda a variedade encontrada no universo de investimentos hoje. Além disso, a diversidade de perfis de investidores, que variam em horizonte de tempo, tolerância a risco e objetivos específicos, torna essencial a existência de modelos adaptáveis que levem em conta os objetivos e restrições de cada um. Nesse sentido, a avaliação comparativa de diferentes métodos de otimização ganha relevância prática ao indicar quais abordagens são mais robustas e eficazes em contextos distintos.

Outro fator que justifica o aprofundamento nesse tema é a abrangência do tópico de investimento. Seja um investidor pessoa física, empresa ou instituição, a maior parte das entidades possui alguma demanda por investimento. A questão de como e no que investir, portanto, é uma questão universal. Dessa forma, a busca pela melhor forma de construir um portfólio de investimento é uma demanda geral.

Por fim, ao tratar de um tema que está na interseção entre teoria financeira, estatística, ciência de dados e engenharia de decisão, o estudo da otimização de portfólios oferece uma oportunidade de aplicação integrada de conhecimentos técnicos adquiridos ao longo da formação em Engenharia de Produção. Além disso, trata-se de uma área de alto impacto econômico e social, uma vez que decisões de alocação de portfólio afetam diretamente todas as pessoas que possuem investimento (individual, previdência etc.).

O tema proposto possui forte conexão com diversas áreas do currículo do curso de Engenharia de Produção, especialmente no que se refere à aplicação de métodos quantitativos de apoio à decisão, à modelagem matemática de problemas complexos e à análise econômica e financeira. A avaliação de métodos de otimização de portfólios exige uma abordagem integrada que envolve conhecimentos de estatística, pesquisa operacional, finanças, ciência de dados e engenharia econômica, sendo todos eles componentes estruturantes da formação do engenheiro de produção.

1.2 Objetivos

Tendo em vista a relevância do tema apresentado, este trabalho tem como objetivo central comparar o desempenho de três abordagens distintas de alocação de portfólio no mercado de ações brasileiro: a Paridade de Risco Hierárquica (HRP) (PRADO, 2016), a Teoria Moderna de Portfólio (MPT) (MARKOWITZ, 1952) e a alocação passiva derivada da Hipótese de Mercados Eficientes (EMH) (FAMA, 1970). A proposta é avaliar, sob uma perspectiva empírica, se o modelo mais recente e estatisticamente robusto, o HRP, oferece vantagens relevantes frente às abordagens consagradas da literatura financeira tradicional (MPT e EMH), especialmente em termos de desempenho ajustado ao risco. As estratégias serão aplicadas no ambiente de ações brasileiro ao longo de um extenso período histórico, com rebalanceamentos periódicos, garantindo avaliação fora da amostra e controle rigoroso do viés de sobrevivência, de modo a refletir com maior fidelidade a performance de cada método de otimização.

Busca-se, com isso, entender como distintos modelos de alocação de ativos se comportam diante das particularidades do cenário nacional, comparando-os entre si a fim de encontrar o modelo que apresente os melhores resultados levando em conta as métricas de risco e retorno definidas.

1.3 Delimitações

O trabalho contextualizará os três métodos analisados. Em seguida, aprofundará os métodos selecionados, entendendo o seu funcionamento e aplicando-os no contexto brasileiro de investimentos. Na sequência, será feita uma comparação dos resultados obtidos, realçando as vantagens e desvantagens de cada abordagem feita. Por fim, o trabalho é concluído ao apresentar o melhor modelo de otimização dada as circunstâncias delimitadas.

Para a comparação de métodos foram selecionados três formas distintas de otimização de portfólio: a Teoria de Otimização de Portfólio (Modern Portfolio Theory (MPT)) de Harry Markowitz (MARKOWITZ, 1952), a Hipótese de Mercados Eficientes (Efficient-market Hypothesis (EMH)) de Eugene Fama (FAMA, 1970) e o Paridade de Riscos Hierárquica (Hierarchical Risk Parity (HRP)) de Marcos López de Prado (PRADO, 2016). Não será proposto analisar modelos ainda em fase de "construção" ou apresentar modelos inéditos.

Os métodos referentes aos modelos de otimização de portfólio foram amplamente divulgados através de artigos acadêmicos.

Em relação aos dados de ativos financeiros, o trabalho se limitará a ações brasileiras pertencentes ao índice IBrX 100 (Índice Brasil 100) entre 2002 até 2025, o que resulta em 313 ações, incluindo aquelas que por qualquer ventura tenham sido deslistadas (que não existem mais) ao longo do tempo.

Por fim, os dados como composição do IBrX 100, preços e outros eventos corporativos das ações foram retirados do Bloomberg Terminal.

1.4 Estrutura do Trabalho

Este Trabalho de Formatura está estruturado de forma que as etapas do processo de sua elaboração estão descritas em uma sequência lógica. Ao todo, o trabalho está dividido em cinco capítulos.

1. Introdução (Capítulo 1): apresentação do Trabalho de Formatura, bem como o contexto de seu desenvolvimento. Ademais, é definido o problema, o objetivo central a ser alcançado e as delimitações do projeto.

2. Fundamentação Teórica (Capítulo 2): nesse capítulo é contextualizado a história do desenvolvimento da área de pesquisa de otimização de portfólios de investimentos. Em seguida, são abordados e descritos os métodos de otimização, os quais serão posteriormente colocados em prática e comparados. Além disso, é feita uma explicação das métricas de risco e retorno. Ademais, é feito uma descrição do viés de sobrevivência e sua importância para testes no passado e também a literatura sobre modelos de otimização com janelas fora da amostra. Por fim, um resumo dos trabalhos acadêmicos similares a este também é apresentado, com enfoque nos trabalhos que compararam os mesmos três métodos deste trabalho.
3. Metodologia (Capítulo 3): descrição do índice IBrX 100 e do universo de ativos analisado e construção da base de retornos histórica. Também é definido o método de janelas rolantes aplicado e como o trabalho mitigará o impacto do viés de sobrevivência. Por fim, é apresentada a metodologia de implementação dos testes históricos, a fim de comparar os métodos de otimização de portfólio.
4. Resultados (Capítulo 4): a partir da metodologia descrita acima, são apresentados os resultados dos problemas de otimização: alocação, métricas de risco, métricas de retorno e métricas de retorno ajustado ao risco. Em seguida, é realizada a discussão dos resultados, buscando entender conforme a Fundamentação Teórica o encontrado. Por fim, os resultados deste trabalho são comparados com os outros trabalhos acadêmicos de referência.
5. Conclusões (Capítulo 5): apresentação das conclusões obtidas no trabalho, além das possíveis limitações e perspectivas de estudos futuros.
6. Apêndice (Capítulo 6): inclusão do código em Python utilizado para os métodos de otimização HRP e MPT. Também são mostradas as tabelas de alocação completa por janela do HRP e MPT.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo aborda o resumo dos três métodos de otimização que o trabalho se propõe a analisar na seção 2.1, em seguida, são descritos a Teoria Moderna de Portfólio, a Hipótese de Mercado Eficiente e a Paridade de Risco Hierárquica, nas seções 2.2, 2.3 e 2.4, respectivamente. Ademais, são explicadas as métricas de risco e retorno usadas para medição de portfólios de investimento na seção 2.5. Também é introduzido o conceito de viés de sobrevivência na seção 2.6, importante para a garantir a veracidade dos testes históricos. Na seção seguinte, 2.7, são discutidas as formas de selecionar dados históricos para backtests. Por fim, são compilados artigos acadêmicos de natureza similar a deste trabalho na seção 2.8, a fim de entender o que já foi feito na área estudada e os principais achados.

2.1 Métodos e Otimização de Portfólio

O problema de alocação de ativos é uma das questões centrais da teoria financeira moderna, tendo sido formalizado matematicamente a partir da segunda metade do século XX, com a publicação da Teoria Moderna de Portfólio (MARKOWITZ, 1952). Desde então, diferentes abordagens têm sido propostas com o objetivo de determinar a composição ótima de um portfólio de investimentos, levando em consideração fatores como risco, retorno, previsibilidade dos preços e estrutura estatística das séries de ativos. A presente seção apresenta, em ordem cronológica, o desenvolvimento histórico dos principais métodos de alocação de portfólio utilizados neste trabalho: a Teoria Moderna de Portfólio (MPT) de Harry Markowitz, a Hipótese de Mercados Eficientes (EMH) associado a Eugene Fama e um modelo mais recente, a Paridade de Risco Hierárquica (HRP) desenvolvido por Marcos López de Prado.

O primeiro grande avanço nesse campo foi realizado por Harry Markowitz, com a formulação da Teoria Moderna de Portfólio, publicada em 1952. O modelo propõe que

o investidor racional deve selecionar portfólios com base na maximização do retorno esperado para um dado nível de risco, mensurado pela variância dos retornos. Essa abordagem introduziu o conceito de fronteira eficiente e estabeleceu as bases para a teoria da diversificação e da otimização de carteiras. No entanto, a MPT depende da estimação precisa de parâmetros como o vetor de retornos esperados, que usualmente costuma ser feito com base em retornos históricos (MARKOWITZ, 1952).

Nas décadas seguintes (1960-1970), outros avanços teóricos consolidaram a ideia de que os preços dos ativos financeiros seguem um comportamento de passeio aleatório (Random walk) (SAMUELSON, 1965). Argumenta-se que, em mercados eficientes, os preços incorporam toda a informação disponível, de modo que as variações futuras de preços só podem ser causadas por novas informações, que são por definição, imprevisíveis. A partir dessa teoria, Eugene Fama elaborou a Hipótese de Mercados Eficientes (EMH), que propõe que o mercado incorpora a todo momento todas as informações disponíveis, de forma que um investidor não é capaz de, sistematicamente obter retornos acima do mercado (FAMA, 1970). Embora não constitua um modelo de alocação de portfólio em si, o EMH sustenta a estratégia de investimento passiva, de forma a seguir o mercado, ou seja, não tenta otimizar a alocação com base em qualquer pressuposto preditivo.

A partir dos anos 2000, novas críticas foram direcionadas à MPT, especialmente no que se refere à instabilidade dos pesos gerados por sua formulação matemática e à sensibilidade da alocação frente a erros de estimação dos parâmetros. Nesse contexto, surgiram os modelos de Paridade de Risco (Risk Parity), que propõem distribuir o risco, e não o capital, entre os ativos da carteira. Nessa linha de pensamento, todos os ativos da carteira de investimento contribuem de forma igual para o risco total da mesma, (QIAN, 2005).

Partindo desse arcabouço conceitual, Marcos López de Prado propôs em 2016 a Paridade de Risco Hierárquica (HRP) (PRADO, 2016), uma generalização do modelo de Risk Parity de Edward Qian (QIAN, 2005). O HRP utiliza uma estrutura hierárquica baseada na matriz de correlação dos ativos para realizar a alocação por meio de uma estratégia de bisseção recursiva. Ao evitar a inversão da matriz de covariância e dispensar a estimação de retornos esperados, o HRP se apresenta como uma abordagem computacionalmente eficiente e estatisticamente robusta, adequada para universos de ativos extensos ou com forte multicolinearidade.

A Tabela 1 resume os métodos de otimização de portfólio comparados:

Tabela 1: Métodos de Otimização de Portfólio Empregados

Método de Otimização	Ano de Desenvolvimento	Artigo(s) Referência
Teoria Moderna de Portfólio (<i>Modern Portfolio Theory</i>)	1952	(MARKOWITZ, 1952) (MARKOWITZ, 1959)
Hipótese de Mercado Eficiente (<i>Efficient Market Hypothesis</i>)	1970	(FAMA, 1970) (FAMA, 1965)
Paridade de Risco Hierárquica (<i>Hierarchical Risk Parity</i>)	2016	(PRADO, 2016) (PRADO, 2018)

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.2 Teoria Moderna de Portfólio

Harry Markowitz, em seu artigo *Portfolio Selection* (MARKOWITZ, 1952), publicado em 1952 no *Journal of Finance* descreve a sua teoria que explica a forma de otimização de um portfólio de investimentos. Em um posterior livro, publicado em 1959, chamado *Portfolio Selection: Efficient Diversification* (MARKOWITZ, 1959) o mesmo aprofunda sua Teoria Moderna de Portfólio. Em 1990, o americano foi premiado com um Nobel em economia por suas obras que deram início a essa área de pesquisa econômica de extrema relevância desde então (PRESS...,).

Até a publicação da teoria do economista americano, os investidores entendiam que a construção de portfólio de investimentos de forma diversificada oferece uma proteção. Como ensina o provérbio popular: "Não coloque todos os ovos na mesma cesta". No entanto, apesar da ideia geral de diversificação já estar enraizada na mente de investidores, não havia uma formulação matemática que explicasse como e quanto alocar recursos financeiros em diferentes ativos.

Markowitz foi pioneiro na área, no sentido que passou a avaliar o risco de um portfólio não como a soma dos riscos individuais de cada ativo que o compõem, mas como a covariância de risco entre pares de ativos. Assim, a ênfase é dada a contribuição de risco que cada ativo da para o portfólio, em contraponto com as características de cada um apenas (MARKOWITZ, 1952).

2.2.1 Premissas e Suposições

O autor inicia seu artigo com algumas premissas para a construção da sua teoria: um investidor busca maximizar o retorno de seus investimentos e a variância deve ser entendida como algo prejudicial, uma vez que confere imprevisibilidade aos retornos. Isto é, o investidor é avesso ao risco, na medida em que prefere mais retorno a menos retorno para um mesmo nível de risco (MARKOWITZ, 1952).

Outra suposição é que apesar da dita variância dos retornos esperados seja incerta, é possível estimá-la, seja por retornos históricos ou pela natureza do ativo financeiro. A distribuição dos retornos é conhecida, assume-se a normalidade (MARKOWITZ, 1952).

2.2.2 Conceitos e Variáveis

Para entender o problema de otimização, deve-se entender as variáveis contidas nele.

- Taxa de Retorno

A taxa de retorno é razão na qual dinheiro é ganho ou perdido de um investimento qualquer. O dinheiro investido pode ser chamado de capital. O resultado é usualmente expresso na forma de porcentagem (BODIE; KANE; MARCUS, 2013).

A forma aritmética de calcular a taxa de retorno r_t de um investimento entre o tempo t e $t - 1$, sendo P_t o preço de um ativo financeiro qualquer no momento t e P_{t-1} o preço do mesmo ativo no momento $t - 1$. Assim, a forma de calcular o retorno do ativo fica:

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (2.1)$$

- Retorno Esperado

O conceito de retorno esperado é aquilo que espera-se de retorno futuro de algum investimento. Como qualquer outra previsão, o retorno não é garantido. Pode-se estimá-lo com base em retornos históricos do mesmo ativo, por exemplo (BODIE; KANE; MARCUS, 2013).

O retorno esperado de um ativo, denotado por $\mathbb{E}[R]$ ou μ , é a média ponderada dos possíveis retornos futuros, considerando suas respectivas probabilidades de ocorrência. Em um modelo discreto, se os retornos possíveis são r_1, r_2, \dots, r_n com probabilidades associadas p_1, p_2, \dots, p_n , o retorno esperado é dado por:

$$E[R] = \mu = \sum_{i=1}^N p_i r_i \quad (2.2)$$

- **Variância e Desvio Padrão**

A variância, quando aplicada no contexto de otimização de portfólios, trata-se da medida do grau de dispersão dos retornos em torno do seu valor esperado. Esse conceito, juntamente com o desvio-padrão, está associado ao risco do investimento, uma vez que há um menor grau de certeza acerca do retorno esperado (GRUENBERG, 2015).

A variância denotada por $\text{Var}(R)$ ou σ^2 , é calculada como:

$$\text{Var}(R) = \sum_{i=1}^n p_i (r_i - E[R])^2 \quad (2.3)$$

O desvio-padrão, por sua vez, é a raiz quadrada da variância, representado por σ :

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(R)} \quad (2.4)$$

- **Covariância**

A covariância, sempre tratada em relação a dois ativos, mede a tendência conjunta dos retornos de dois ativos em relação aos seus valores esperados. Em uma situação em que os retornos se movem na mesma direção, a covariância é dita positiva, no contrário, é negativa (MARKOWITZ, 1952).

A covariância, σ_{ij} para os ativos i e j pode ser definida como:

$$\sigma_{ij} = E[(R_i - E[R_i])(R_j - E[R_j])] \quad (2.5)$$

- **Correlação**

O coeficiente de correlação, também sempre medido entre dois ativos, é uma

média padronizada da covariância, variando entre -1 e 1 (BODIE; KANE; MARCUS, 2013). A correlação, ρ_{ij} entre os ativos i e j é dada por:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (2.6)$$

2.2.3 Formulação

A Teoria Moderna de Portfólio parte da definição de que cada ativo possui um retorno esperado, denotado por μ_i , e que os retornos dos ativos apresentam variância e covariância entre si, representadas, respectivamente, por σ_i e σ_{ij} (MARKOWITZ, 1952). Denotando-se por x_i a fração de recursos alocada no ativo i , o retorno esperado do portfólio, $E[R_p]$, pode ser calculado como a combinação linear dos retornos esperados dos ativos:

$$E[R_p] = \sum_{i=1}^N x_i \mu_i \quad (2.7)$$

O risco do portfólio, como um todo, mensurado pela variância dos retornos dos ativos, é dado pela fórmula:

$$Var(R_p) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} \quad (2.8)$$

Considerando a premissa de minimização de risco, explicada na subseção 2.2.1, o investidor busca minimizar a variância (risco) para um nível de retorno qualquer desejado (MARKOWITZ, 1952). A formulação matemática desse problema pode ser descrita como:

$$\min Var(R_p) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} \quad (2.9)$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^N x_i \mu_i = E_p \quad (2.10)$$

e

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad (2.11)$$

e

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \quad (2.12)$$

A restrição 2.10 é colocada com objetivo de assegurar que o portfólio atinja o retorno alvo E_p , definido de forma arbitrária.

A restrição 2.11 garante que a totalidade das frações de recursos alocadas totalizem 100%, ou seja, que não haja sobras ou sobreallocações.

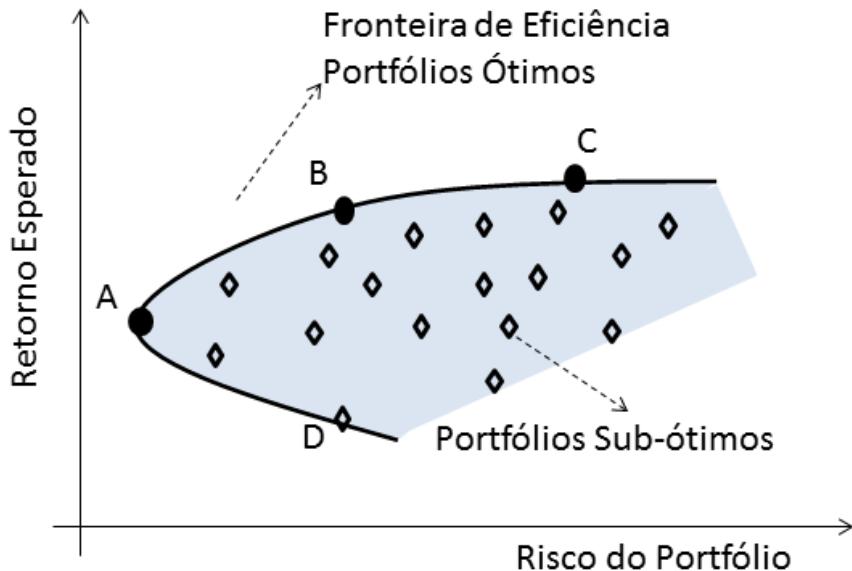
A restrição 2.12 é a de que não haja alocações em algum ativo menor que zero, isto é, não é possível ficar exposto negativamente a algum ativo. . No entanto, em um situação real, é possível ficar "vendido" em algum ativo, de forma a se beneficiar do desempenho negativo do mesmo. Isso pode ser feito através de o empréstimo de um ativo de algum outro participante do mercado e vendê-lo, ficando assim exposto a performance dele (BODIE; KANE; MARCUS, 2013). No entanto, deve ser ressaltado que Markowitz não abriu para essa possibilidade no momento de criação da MPT (MARKOWITZ, 1952).

2.2.4 Solução

A solução do problema definido na subseção 2.2.3 leva à identificação da chamada pelo economista de fronteira eficiente (MARKOWITZ, 1952). A Figura 1 ilustra a solução do problema. O eixo das abscissas quantifica o risco, já o das ordenadas, quantifica o retorno esperado dos portfólios. Os portfólios possíveis estão na região escura. A fronteira eficiente, por sua vez, é composta por todos os portfólios que satisfazem o menor nível de risco para o melhor retorno possível.

A fronteira eficiente, portanto, define o conjunto de escolhas racionais disponíveis. Portfólios que não estejam nessa linha podem ser ditos ineficientes, uma vez que há uma combinação melhor de ativos que oferecem um menor nível de risco para um retorno esperado igual ou maior (MARKOWITZ, 1952).

Figura 1: Fronteira Eficiente de Portfólios



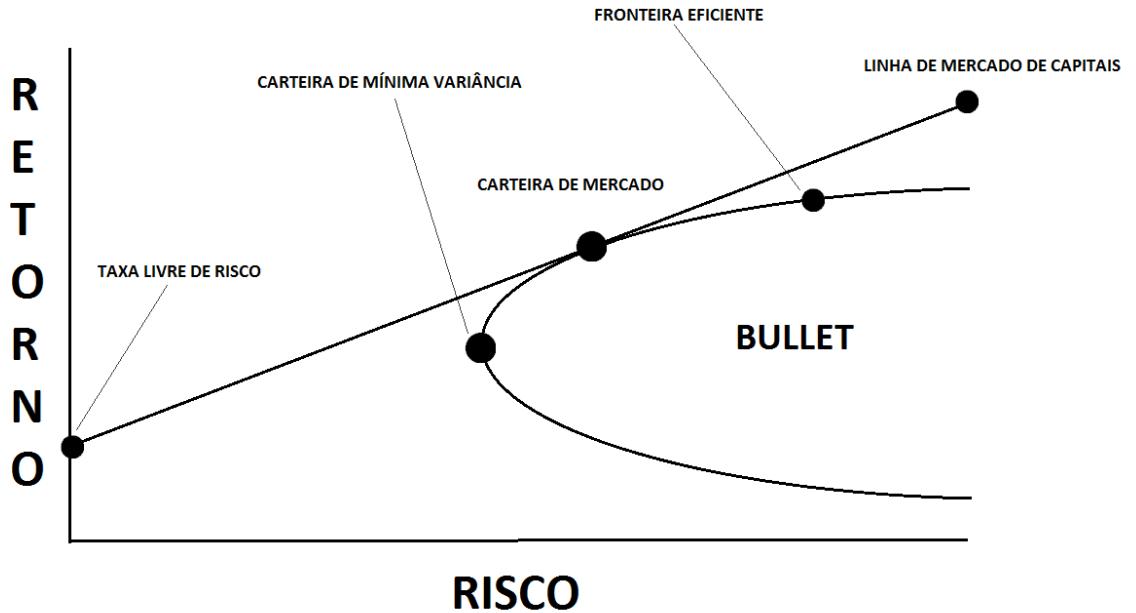
Fonte: (FATIMA; CORTES; COSTA, 2019).

Além disso, ao traçar uma reta entre os pontos (1) taxa livre de risco e (2) tangente do ponto com a fronteira eficiente, é encontrado o portfólio com o melhor índice Sharpe possível, apontado na Figura 2 como Carteira de Mercado. O cálculo dessa métrica de retorno ajustado ao risco será explicado na subseção 2.5.

A taxa livre de risco é, resumidamente, o retorno que qualquer investidor obteria ao aplicar seus recursos em um ativo totalmente isento de risco, tanto de crédito quanto de mercado. Esse ativo hipotético garantiria retorno certo, independente de qualquer condição econômica, política ou institucional (FAMA, 2002). Na subseção 2.5, a explicação é aprofundada. Em relação ao índice Sharpe, ele é uma medida de retorno ajustado ao risco, ele indica qual o melhor portfólio em termos de risco e retorno dentre aqueles da fronteira eficiente (SHARPE, 1994). O cálculo da métrica pode ser vista na subseção 2.5.3.

A ilustração da fronteira eficiente levando em conta o portfólio com o Sharpe mais alto pode ser vista na Figura 2.

Figura 2: Fronteira Eficiente de Portfólios com o Índice Sharpe



Fonte: (MORAIS, 2021).

2.2.5 Forma Canônica

A formulação canônica pode ser representada por:

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w} \quad (2.13)$$

sujeito a

$$\mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} = E_p \quad (2.14)$$

$$\mathbf{e}^\top \mathbf{w} = 1 \quad (2.15)$$

onde \mathbf{w} é o vetor de pesos do portfólio, Σ é a matriz de covariância dos ativos, $\boldsymbol{\mu}$ é o vetor de retornos esperados, e E_p é o retorno esperado da carteira.

Essa abordagem exige, como condição necessária, que a matriz Σ seja positiva definida, de modo que sua inversa Σ^{-1} exista e seja estável numericamente. A alocação final depende tanto da estimativa dos retornos esperados quanto da inversão da matriz de covariância, o que pode ser sensível a erros de estimativa e flutuações nos dados de

entrada (PRADO, 2016).

2.3 Hipótese de Mercados Eficientes

2.3.1 Contexto Histórico e Formulação Geral

A Hipótese de Mercados Eficientes (Efficient Market Hypothesis – EMH) constitui uma das construções teóricas mais influentes da moderna teoria das finanças. Sua formulação mais consolidada foi apresentada por Eugene F. Fama no artigo *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*, publicado em 1970 no *Journal of Finance* (FAMA, 1970).

A gênese da EMH pode ser situada no contexto da década de 1960, quando pesquisadores começaram a observar que as séries temporais de preços de ativos apresentavam comportamento que se assemelhava ao de um passeio aleatório (random walk). Esses estudos indicavam que as variações nos preços de ativos eram, em grande medida, imprevisíveis, e que a informação contida em preços passados não permitia antecipar com precisão as variações futuras. Ou seja, se todos os agentes do mercado utilizam a informação disponível de forma racional e instantânea, então os preços já incorporam toda a informação pública conhecida, de modo que as variações futuras de preços só podem ser causadas por novas informações, que são por definição imprevisíveis (SAMUELSON, 1965).

A contribuição de Fama consistiu em sistematizar esse conjunto de evidências e formular um modelo teórico unificado capaz de explicar o comportamento dos preços sob a suposição de que os mercados operam de forma competitiva e informacionalmente eficiente. Sua abordagem não se limitou a descrever o comportamento empírico das séries de preços, mas também propôs um arcabouço conceitual e metodológico para a análise da eficiência informacional dos mercados de capitais (FAMA, 1970).

A eficiência de um mercado está diretamente relacionada à sua capacidade de incorporar novas informações aos preços dos ativos de forma rápida e racional. Dessa forma, um mercado é considerado eficiente quando os preços refletem integralmente todas as informações disponíveis no momento, tornando qualquer tentativa de prever os preços futuros, infrutífera em termos de geração de retornos econômicos superiores ao equilíbrio de mercado (FAMA, 1970).

A formulação de Fama também se notabilizou por organizar o conceito de eficiência em três níveis distintos, a depender do conjunto de informações considerado: forma fraca, forma semi-forte e forma forte. Essa tipologia permitiu o desenvolvimento de uma ampla agenda empírica voltada à verificação do grau de eficiência dos mercados em diferentes contextos, períodos históricos e classes de ativos, tornando a EMH uma hipótese testável, ainda que com reconhecidas limitações metodológicas (FAMA, 1991)

No campo das finanças acadêmicas, a EMH passou a servir como base para o desenvolvimento de modelos de precificação de ativos, teoria da alocação de portfólio e políticas de investimento. A hipótese desempenhou papel crucial na consolidação da abordagem racional e quantitativa da teoria dos mercados financeiros, em contraposição a visões mais comportamentais ou informacionalmente restritivas (FAMA, 1991)

2.3.2 Definição Formal e Modelo Teórico

A formalização da Hipótese de Mercados Eficientes (EMH) está fundamentada na ideia de que os preços dos ativos financeiros se ajustam de maneira instantânea e completa à incorporação de novas informações. Essa eficiência informacional implica que os preços atuais são as melhores estimativas para os preços futuros, condicionadas ao conjunto de informações disponíveis no momento da observação (FAMA, 1970).

Do ponto de vista estatístico, essa condição pode ser expressa por meio do conceito de jogo justo (fair game), segundo o qual os preços dos ativos seguem um processo estocástico no qual os desvios em relação ao valor esperado são puramente aleatórios. Em termos formais, essa hipótese é expressa da seguinte maneira:

$$\mathbb{E}[P_{t+1} | \Phi_t] = P_t \quad (2.16)$$

onde:

- P_{t+1} representa o preço do ativo no período seguinte.
- Φ_t é o conjunto de todas as informações disponíveis até o tempo t .
- $\mathbb{E}[\cdot]$ denota o operador de esperança condicional.

Essa expressão afirma que o preço esperado do ativo no instante seguinte, dado o conhecimento disponível até o tempo t_i , é igual ao seu preço atual. Em outras palavras,

não existe prêmio esperado disponível por meio de estratégias de previsão baseadas na informação disponível. Ou seja, qualquer diferença entre o preço realizado e o esperado será atribuída a choques aleatórios, isto é, a novas informações imprevisíveis (FAMA, 1970).

Uma formulação alternativa, mais frequentemente utilizada na análise de retornos, define a eficiência como:

$$\mathbb{E}[R_{t+1} | \Phi_t] = R^* \quad (2.17)$$

em que:

- R_{t+1} é o retorno do ativo no período subsequente;
- R^* é o retorno de equilíbrio, ou retorno exigido, compatível com o risco sistemático do ativo;
- Φ_t permanece sendo o conjunto de informações conhecidas até o instante t .

Nessa formulação, a hipótese afirma que o retorno esperado condicional ao conjunto informacional disponível é igual ao retorno de equilíbrio, e que não existem retornos anormais esperados sistemáticos. Isso significa que qualquer retorno excedente ao retorno de equilíbrio somente poderá ser explicado por risco não diversificável, e não por informação previamente disponível (FAMA, 1970).

Em termos probabilísticos, o comportamento dos preços é compatível com um processo de passeio aleatório (random walk) (SAMUELSON, 1965), em que:

$$P_{t+1} = P_t + \varepsilon_{t+1} \quad (2.18)$$

com $\varepsilon_{t+1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, representando um choque de informação novo, não correlacionado com variáveis observadas até o tempo t .

A partir dessas formulações, conclui-se que os preços dos ativos são, em média, corretos, no sentido de que incorporam toda a informação relevante disponível até o momento. A imprevisibilidade das variações de preços torna inviável, sob a EMH, qualquer estratégia sistemática de previsão que resulte em lucros ajustados ao risco superiores ao retorno de equilíbrio do mercado (FAMA, 1970).

2.3.3 As Três Formas de Eficiência

A formulação da Hipótese de Mercados Eficientes buscou categorizar a eficiência informacional em três níveis distintos, a depender do conjunto de informações que se assume refletido nos preços dos ativos. Essa tipologia tornou a hipótese mais operacionalizável, permitindo a realização de testes empíricos direcionados a cada uma das formas. As três formas são: eficiência fraca, eficiência semi-forte e eficiência forte (FAMA, 1970).

1. Forma fraca (weak-form)

Na forma fraca, assume-se que os preços dos ativos financeiros refletem toda a informação contida em seus próprios históricos de preços e volumes de negociação. Isso significa que estratégias que se baseiam unicamente em séries passadas de preços ou outras informações passadas, comuns a estratégias como análise técnica, não seriam capazes de gerar retornos anormais consistentes ao longo do tempo.

Formalmente, essa hipótese implica que as variações futuras de preços são estatisticamente independentes das variações passadas, ou seja, os preços seguem um passeio aleatório. Em termos de retorno:

$$\mathbb{E}[R_{t+1} | R_t, R_{t-1}, \dots] = R^* \quad (2.19)$$

onde R_{t+1} é o retorno do ativo no período seguinte, e R^* representa o retorno de equilíbrio. Assim, nenhuma informação contida em retornos históricos melhora a previsão dos retornos futuros.

Embora existam anomalias documentadas, a maior parte dos mercados apresenta comportamento compatível com um alto grau de eficiência informacional. Em particular, estratégias de investimento baseadas em análise técnica e fundamentalista, embora populares, não são consistentemente eficazes para gerar retornos ajustados ao risco superiores ao mercado, sobretudo quando se consideram custos de transação, riscos não observados e vieses estatísticos (MALKIEL, 2003).

Essas evidências dialogam diretamente com a forma fraca da Hipótese de Mercados Eficientes, segundo a qual toda a informação contida no histórico de preços passados já está refletida nos preços atuais dos ativos. Sendo assim, estratégias

que tentam prever movimentos futuros com base em padrões gráficos ou séries temporais (análise técnica) seriam, em princípio, ineficazes. Esse ponto é ainda mais reforçado ao apresentar evidências empíricas de que os retornos baseados em regras técnicas de compra e venda tendem a desaparecer ao longo do tempo ou a se anular após custos operacionais (MALKIEL, 2003).

2. Eficiência em sua forma semi-forte

Na forma semi-forte, a hipótese é ampliada para considerar que os preços dos ativos incorporam toda a informação pública disponível, além dos próprios dados históricos. Isso inclui, por exemplo, demonstrações financeiras, notícias macroeconômicas, anúncios corporativos, políticas governamentais, entre outros dados amplamente acessíveis aos agentes do mercado (FAMA, 1970).

Sendo assim, mesmo o uso de métodos de análise fundamentalista, isto é, aqueles que buscam avaliar o valor intrínseco de ativos com base em informações contábeis e econômicas, não seria capaz de gerar retornos sistematicamente superiores ao mercado.

Em termos formais, isso equivale a:

$$\mathbb{E}[R_{t+1} | \Phi_t^{\text{pública}}] = R^* \quad (2.20)$$

em que $\Phi_t^{\text{pública}}$ representa o conjunto de informações públicas disponíveis no tempo t . Sob essa forma de eficiência, o mercado é suficientemente rápido e racional ao incorporar qualquer nova informação pública aos preços dos ativos.

Em relação à forma semi-forte da EMH, a literatura do tema é mais moderada, no sentido de que há . De um lado há aqueles que acreditam que os mercados se ajustam de forma eficiente à divulgação de novas informações e reconhecem a existência de anomalias empíricas que colocam em dúvida a plena validade dessa forma de eficiência. Efeitos como o fator valor, o efeito tamanho, o momento de curto prazo e a reversão de longo prazo são exemplos de padrões estatísticos identificados na literatura que sugerem previsibilidade baseada em variáveis públicas. No entanto, argumenta-se que muitas dessas aparentes ineficiências são instáveis ao longo do tempo, desaparecem após ajustes por risco ou custos de transação, ou decorrem de vieses metodológicos (MALKIEL, 2003).

De outro lado, em oposição à forma semi-forte da EMH, também há provas de que estratégias de investimento baseadas em informações públicas, como múltiplos

fundamentalistas, podem gerar retornos anormais persistentes. Os retornos não são explicados por maior exposição ao risco, mas sim por padrões comportamentais de extração excessiva por parte dos investidores, sugerindo que os preços não refletem eficientemente toda a informação disponível (LAKONISHOK; SHLEIFER; VISHNY, 1994).

3. Eficiência em sua forma forte

A forma forte da eficiência representa uma proposição mais restritiva. Nessa versão, assume-se que os preços dos ativos refletem toda a informação existente, incluindo não apenas dados públicos, mas também informações privadas ou confidenciais que ainda não foram divulgadas ao mercado (FAMA, 1970).

Se essa forma de eficiência for válida, então mesmo investidores com acesso a informações privilegiadas, isto é, detentores de informações não disponíveis para todos os participantes do mercado, não seriam capazes de obter retornos anormais de forma sistemática, pois essas informações já estariam precificadas.

A condição formal é:

$$\mathbb{E}[R_{t+1} | \Phi_t^{\text{total}}] = R^* \quad (2.21)$$

em que Φ_t^{total} representa o conjunto completo de informações disponíveis no tempo t , tanto públicas quanto privadas. Na prática, essa hipótese é difícil de ser sustentada empiricamente, especialmente pelo fato de negociar títulos mobiliários com informações privilegiadas ser ilegal e assim, a estratégia não tem como ser testada e comparada, conforme a lei da Comissão de Valores Mobiliários do Estados Unidos (INSIDER..., 2015) e a Comissão de Valores Mobiliários do Brasil (RESOLUCAO..., 2022).

Em um artigo posterior, o próprio autor revisa criticamente o corpo de evidências acumulado desde a formulação original da Hipótese de Mercados Eficientes e reconhece que a forma forte da EMH é particularmente difícil de sustentar empiricamente. Os estudos sobre o uso de informação privilegiada revelam que certos agentes podem sim obter retornos anormais com base em informações não públicas, feito por insiders corporativos e outros participantes com acesso diferenciado, indicando que a disseminação da informação no mercado é imperfeita e sujeita a restrições legais, institucionais e operacionais (FAMA, 1991).

2.3.4 Implicações para a Gestão de Portfólio

A Hipótese de Mercados Eficientes possui implicações diretas e profundas sobre a maneira como os investidores devem abordar a construção e gestão de portfólios. Ao afirmar que os preços dos ativos já refletem toda a informação disponível, conforme explicado na subseção 2.3.3, a EMH elimina a possibilidade de exploração sistemática de “ineficiências” de mercado por meio de estratégias ativas. Como consequência, as decisões de investimento devem priorizar a diversificação, o controle de custos operacionais e o alinhamento com o retorno de mercado, ao invés da busca por retornos superiores ao benchmark de referência por meio da seleção ativa de ativos ou do tempo de mercado. (FAMA, 1970).

A EMH, especialmente em suas formas semi-forte e forte, desafia a eficácia das estratégias tradicionais de análise fundamentalista e análise técnica. Isso porque, sob a hipótese de que os preços já incorporam toda a informação pública (ou mesmo privada), qualquer tentativa de identificar ativos “subvalorizados” ou “sobrevalorizados” está fadada ao fracasso, em expectativa (FAMA, 1970).

A alocação passiva de portfólio encontra respaldo teórico robusto quando considerada à luz da Hipótese de Mercados Eficientes. Se os mercados forem suficientemente eficientes, a maior parte dos investidores deveria adotar uma abordagem passiva. Mesmo em um ambiente onde alguns agentes possuem habilidades superiores ou acesso a informação diferenciada, o custo associado à gestão ativa tende a superar os benefícios esperados para a maioria dos participantes. Nesse contexto, o investidor racional, sem vantagem informacional clara, deve preferir a gestão passiva, pois ela captura o retorno médio do mercado com menor custo e menor exposição a ruídos estatísticos. Essa conclusão reforça o argumento de que a alocação passiva não é apenas uma alternativa operacionalmente conveniente, mas uma consequência lógica da estrutura informacional dos mercados (GÂRLEANU; PEDERSEN, 2022).

Diante desse cenário, a gestão passiva de portfólios surge como a estratégia mais alinhada com os princípios da EMH. A gestão passiva busca replicar o desempenho do mercado através de carteiras indexadas a benchmarks amplos e diversificados, minimizando custos de transação, taxas de administração e risco de seleção de ativos (GÂRLEANU; PEDERSEN, 2022).

- Portfólio de Mercado

Um dos portfólios considerados eficientes sob a EMH é o portfólio de mercado, ou seja, todos os ativos pertencentes àquele mercado ponderados pelo seu valor. Sua composição reflete os valores de mercado relativos de todos os ativos disponíveis. Em sua formulação ideal, ele é representado por:

$$w_i^{\text{mercado}} = \frac{M_i}{\sum_{j=1}^N M_j} \quad (2.22)$$

em que M_i é o valor de mercado do ativo i , e w_i^{mercado} é o peso desse ativo no portfólio de mercado. Na prática, esse portfólio pode ser replicado por meio de fundos de índice ou ETFs que acompanham índices como o S&P 500 (Standard & Poor's 500) nos Estados Unidos, o IBrX 100 (Índice Brasil 100) no Brasil ou o IBOV (índice Ibovespa), por exemplo.

- Portfólio EW (naive)

Uma outra estratégia também associada ao EMH é o Portfólio com pesos iguais (Equally-Weighted - EW), também chamado de naive. Ao contrário do portfólio de mercado descrito acima, este portfólio não pondera os pesos dos ativos pelo tamanho deles, como fazem os índices de ações, por exemplo. No EW, é dado o mesmo peso para todos os ativos do portfólio (GELMINI; UBERTI, 2024). O peso de cada ativo é então apenas função da quantidade de ativos do portfólio:

$$w_i^{\text{EW}} = \frac{1}{N} \quad (2.23)$$

onde N é o número de ativos do portfólio e w_i^{EW} o peso de cada ativo (GELMINI; UBERTI, 2024).

A adoção de uma estratégia passiva implica aceitar que o desempenho do mercado é, em média, o melhor resultado disponível em termos ajustados ao risco. Isso não significa que retornos acima da média não possam ocorrer, mas sim que não há evidência consistente de que tais resultados possam ser obtidos de forma previsível e sistemática (GÂRLEANU; PEDERSEN, 2022).

2.4 Paridade de Risco Hierárquica

2.4.1 Fundamentos Matemáticos e Lógica do Método

A abordagem conhecida como Paridade de Risco Hierárquica (Hierarchical Risk Parity - HRP), proposta por López de Prado, constitui uma alternativa robusta e conceitualmente inovadora à tradicional alocação baseada em otimização quadrática. Diferentemente dos métodos clássicos, como o MPT, descrito na seção 2.2, o HRP é fundamentado em princípios da teoria dos grafos e da aprendizagem de máquina (PRADO, 2016).

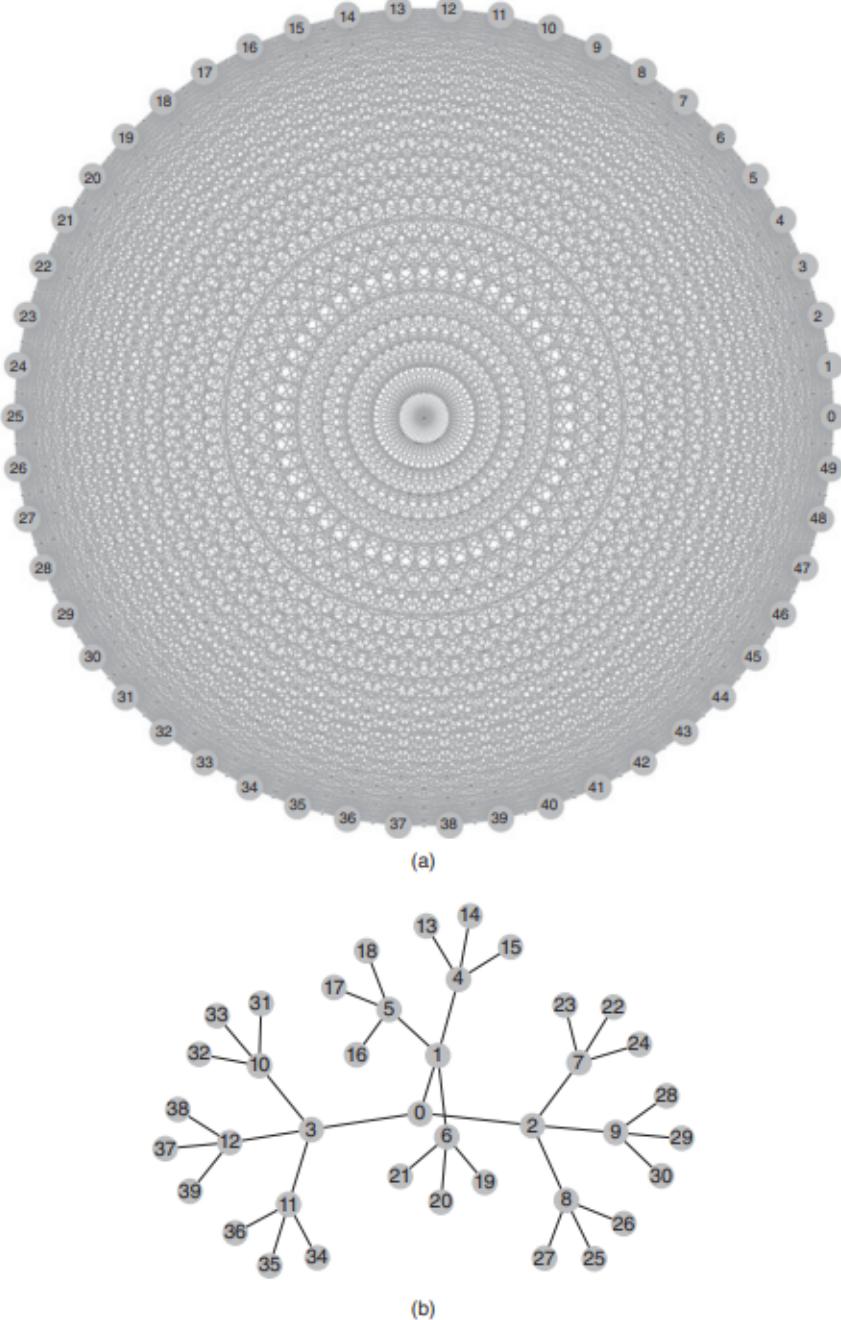
A motivação central para o desenvolvimento do HRP reside na constatação de que os métodos tradicionais enfrentam instabilidades numéricas graves quando aplicados a matrizes de covariância mal condicionadas. Tais matrizes ocorrem com frequência em mercados financeiros devido à presença de ativos altamente correlacionados, o que torna a inversão da matriz uma operação sensível a pequenos erros de estimativa. Este fenômeno, conhecido como Markowitz's curse (Maldição de Markowitz), leva a soluções pouco robustas e altamente concentradas, mesmo quando pequenas perturbações afetam os parâmetros de entrada (PRADO, 2016; PRADO, 2018).

A nomeada Maldição de Markowitz é o paradoxo estatístico onde a busca por diversificação, através da adição de ativos correlacionados, acaba por destruir a confiabilidade do portfólio em vez de protegê-lo. Isso ocorre porque o aumento da correlação entre os ativos eleva o "número de condição" da matriz de covariância, tornando a operação de inversão matricial instável. O resultado prático é que a solução ótima torna-se tão sensível e errática que, pode ser inferior em termos de performance para alocações ingênuas naive (EW) (PRADO, 2018).

Em contraste com essa abordagem, o HRP propõe um mecanismo de alocação baseado em uma estrutura hierárquica de similaridade entre os ativos (clusters), refletida por sua matriz de correlação. A técnica emprega algoritmos de clusterização para agrupar ativos similares e distribui os pesos da carteira de forma a respeitar essa estrutura hierárquica. Essa organização topológica é representada pelo dendograma, o que reduz a complexidade do problema e assegura uma distribuição de pesos mais estável e interpretável, quando comparado com o MPT, que estrutura na forma de árvore ou dendrograma, sempre tendo uma relação hierárquica, que se prova menos estável conforme aumenta a quantidade de nós (PRADO, 2018). Essa comparação pode ser

vista na Figura 3.

Figura 3: Comparação de Dendrograma do Método HRP (a) vs. a Árvore do MPT (b)



Fonte: (PRADO, 2018).

2.4.2 Etapas do Algoritmo HRP

O algoritmo HRP é composto por três etapas principais, cada uma com papel específico na transformação da matriz de covariância em uma estrutura hierárquica e na consequente determinação dos pesos de alocação. São elas: Tree Clustering (Clusterização Hierárquica), Quasi-diagonalization (Quasi-diagonalização da matriz de covariância) e Recursive Bisection (Bisseção Recursiva) para distribuição de pesos. A seguir, detalham-se os procedimentos e fundamentos de cada uma dessas etapas.

1. Primeira Etapa: Tree Clustering (Clusterização Hierárquica)

A primeira etapa do método de Paridade de Risco Hierárquica consiste em construir uma estrutura hierárquica que represente a similaridade entre os ativos, substituindo o grafo completo na matriz de covariâncias por uma árvore de ligações (dendrograma). Essa etapa é motivada pelo fato de que a matriz de correlações, quando interpretada como um grafo totalmente conectado, permite realocações arbitrárias entre todos os ativos, amplificando erros de estimativa e levando à instabilidade típica de otimizadores quadráticos. A construção de uma árvore hierárquica reduz o número de conexões relevantes e organiza os ativos de maneira mais robusta e economicamente intuitiva (PRADO, 2016).

(a) Cálculo da Matriz de Correlações

Dado um conjunto de retornos X de dimensão $T \times N$, incia-se pela obtenção da matriz de correlação ρ , onde cada elemento é calculado como:

$$\rho_{i,j} = \rho(X_i, X_j) \quad (2.24)$$

A matriz da equação 2.24 serve como base para toda a estrutura hierárquica (VYAS, 2023).

(b) Conversão de Correlação em Distância

Para aplicar técnicas de clustering, converte-se a matriz de correlação (equação 2.24) entre dois ativos i e j em uma distância métrica válida:

$$D_{i,j} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \rho_{i,j})} \quad (2.25)$$

Essa métrica satisfaz as propriedades de não negatividade, coincidência, simetria e desigualdade triangular, garantindo que os ativos sejam posi-

cionados em um espaço no qual pares altamente correlacionados estejam próximos (PRADO, 2016).

(c) Distância Entre Vetores de Distâncias

A etapa seguinte calcula uma segunda métrica, agora entre colunas completas da matriz de distâncias. Essa “distância de distâncias” compara perfis integrais de relacionamento:

$$\tilde{D}_{i,j} = \sqrt{\sum_{n=1}^N (d_{n,i} - d_{n,j})^2} \quad (2.26)$$

Essa diferença entre o $D_{i,j}$ e o $\tilde{D}_{i,j}$ é que o segundo (equação 2.26) indica a proximidade em semelhança dos dois ativos i e j com o resto dos ativos considerados, enquanto o primeiro (equação 2.25), mostra apenas a distância de correlação entre os dois ativos, sem considerar o restante.

(d) Formação dos Clusters por Ligação Hierárquica

Com a matriz \tilde{D} , aplica-se um algoritmo de clusterização hierárquica chamado Linkage Clustering. O HRP utiliza o single linkage clustering, no qual a distância entre dois clusters é definida pela distância entre os elementos dos clusters mais próximos de si (VYAS, 2023). Assim é procedido recursivamente:

(I) Identifica-se o par de itens mais próximo:

$$(i^*, j^*) = \arg \min_{i \neq j} \tilde{D}_{i,j} \quad (2.27)$$

(II) Forma-se um cluster inicial:

$$u[1] = (i^*, j^*) \quad (2.28)$$

(III) Atualiza-se a distância entre esse novo cluster e cada item individual, usando:

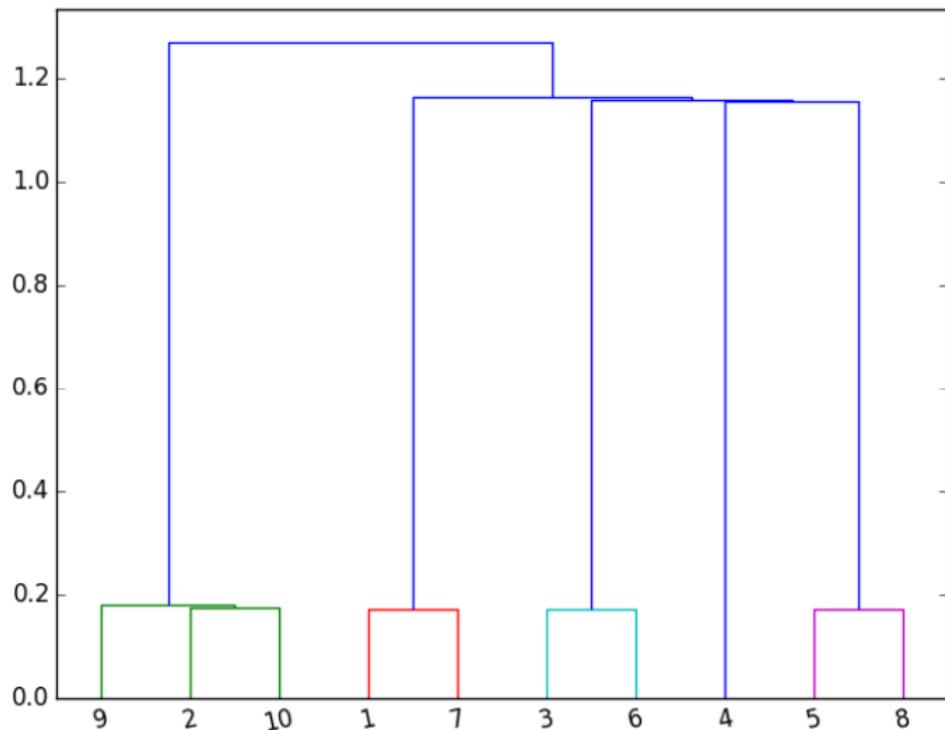
$$\dot{D}_{k,u[1]} = \min_{j \in u[1]} \tilde{D}_{k,j} \quad (2.29)$$

(IV) Substitui-se o par fundido por um único nó na matriz de distâncias.

(V) Repete-se o procedimento até que todos os ativos estejam conectados por $N - 1$ fusões, gerando assim, um dendrograma, como pode ser visto na

Figura 4.

Figura 4: Exemplo de Dendrograma Após Aplicação do Algoritmo de Clusterização Hierárquica



Fonte: (PRADO, 2016).

2. Segunda etapa: Quasi-Diagonalization (Quasi-diagonalização da matriz de covariância)

Após a construção da estrutura hierárquica na primeira etapa, o método de Paridade de Risco Hierárquica aplica uma reorganização da matriz de covariâncias (ou de correlação) com o objetivo de aproximá-la de uma forma quase diagonal. Esse processo é chamado de Quasi-Diagonalization e consiste em ordenar as linhas e colunas da matriz segundo a hierarquia revelada pelo dendrograma. Ao fazer isso, ativos que pertencem ao mesmo cluster aparecem próximos na matriz, formando blocos que representam grupos de investimentos altamente correlacionados (PRADO, 2016).

Deve ser reforçado que esta segunda etapa não altera os valores da matriz de correlação, apenas reordena as linhas e colunas conforme a ordem definida na etapa anterior de Clusterização.

(a) Lista Ordenada a partir do Dendrograma

A segunda etapa começa ao percorrer o dendrograma formado no Hierarchical Tree Clustering e extrair os ativos na ordem em que aparecem ao “desfazer” a árvore de baixo para cima. Esse processo segue a estrutura de fusões obtidas na etapa anterior.

O procedimento consiste em percorrer recursivamente as ligações armazenadas na matriz de linkage, substituindo cada cluster por seus elementos até restar somente uma lista ordenada contendo os ativos originais.

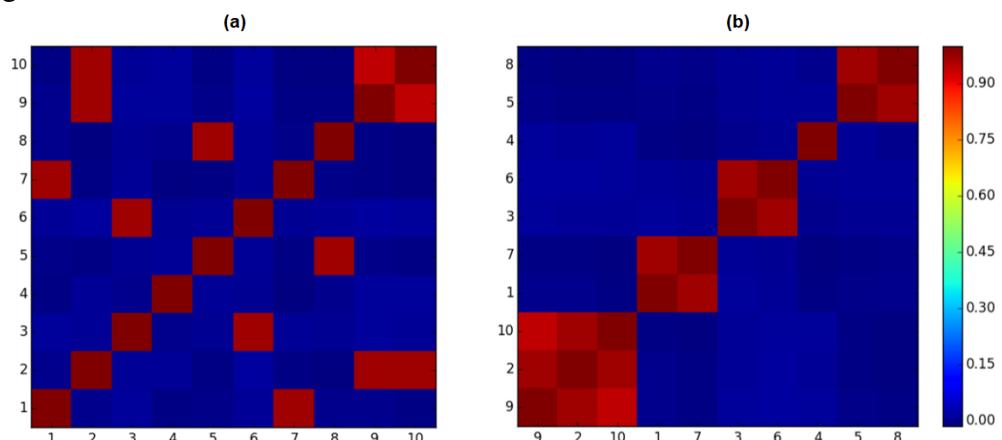
Em termos de representação lógica, o procedimento obtém uma ordenação onde cada elemento é um ativo individual e cuja ordem reflete a hierarquia resultante da clusterização da primeira etapa (PRADO, 2016):

$$[i_1, i_2, i_3, \dots, i_N] \quad (2.30)$$

(b) Reordenação da Matriz de Covariâncias

Com a lista ordenada de ativos, reescreve-se a matriz de covariâncias apenas rearranjando suas linhas e colunas, como pode ser visto no exemplo da Figura 5.

Figura 5: Matrizes de Correlação de Ativos Antes (a) e Depois (b) da Quasi-Diagonalização



Adaptado de: (PRADO, 2016).

O resultado é o agrupamento de ativos similares, formando "blocos". Grupos menos correlacionados aparecem mais distantes, enquanto grupos mais correlacionados, mais perto (VYAS, 2023).

3. Terceira etapa: Recursive Bisection (Bisseção Recursiva)

A terceira e última etapa do método de HRP é chamada de Recursive Bisection, sendo responsável por transformar a estrutura hierárquica e a matriz quasi-diagonalizada em uma alocação final de pesos. Ela combina dois princípios:

- alocação bottom-up (baixo para cima), usando variâncias de clusters calculadas com pesos de variância inversa;
- divisão top-down (cima para baixo), distribuindo o capital entre os blocos consecutivos criados pela quasi-diagonalização.

Essa etapa é o núcleo matemático do HRP, pois define a forma como o risco é distribuído entre os clusters e, dentro deles, entre seus ativos individuais (PRADO, 2016).

- (a) A terceira etapa do algoritmo começa com uma lista contendo todos os ativos i ordenados pela Quasi-Diagonalization definida como L_0 . Essa etapa não interfere na alocação final, apenas define o estado inicial (0) de pesos w para a divisão de pesos recursiva (PRADO, 2016).

$$L = L_0 = i_1, i_2, \dots, i_N \quad (2.31)$$

onde

$$w_n = 1 \text{ para todos os ativos } n \quad (2.32)$$

As seguintes iterações alteram a lista para L_1 para a primeira, L_2 para a segunda e assim por diante.

- (b) Critério de Parada

Enquanto existir qualquer subconjunto L_i com mais de um ativo, o algoritmo continua a dividir esse subconjunto em duas partes (PRADO, 2016). O processo encerra quando todos os subconjuntos forem unitários, conforme a equação 2.33.

$$\text{Se } |L_i| = 1 \text{ para todos os } L_i, \text{ o algoritmo termina} \quad (2.33)$$

- (c) Divisão de Cada Subconjunto em Duas Metades

Para cada subconjunto L_i com mais de um elemento, divide-se a lista ao meio, conforme a lista $L_i^{(1)}$ e $L_i^{(2)}$:

$$L_i^{(1)} = L_i[1 : \text{int}(|L_i|/2)] \quad (2.34)$$

$$L_i^{(2)} = L_i[\text{int}(|L_i|/2) + 1 : |L_i|] \quad (2.35)$$

Essa divisão só funciona porque a Quasi-Diagonalisation garantiu que ativos similares estejam próximos, fazendo com que cada bissecção represente subconjuntos de ativos correlacionados entre si (PRADO, 2016).

(d) Cálculo da Variância de Cada Subconjunto

Para cada um dos subconjuntos formados, calcula-se a variância agregada usando uma alocação de variância inversa (Inverse Variance Portfolio - IVP) dentro do subconjunto.

Primeiro calcula-se o vetor de pesos IVP:

$$\tilde{w}_i^{(j)} = \frac{\text{diag}(V_i^{(j)})^{-1}}{\text{tr}(\text{diag}(V_i^{(j)})^{-1})} \quad (2.36)$$

onde

- $V_i^{(j)}$ é a submatriz de covariâncias contendo apenas os ativos do subconjunto,
- $j = 1, 2$ representa cada uma das metades.

A variância agregada do cluster $(\tilde{V}_i^{(j)})$ é assim, dada por:

$$\tilde{V}_i^{(j)} = (\tilde{w}_i^{(j)})' V_i^{(j)} \tilde{w}_i^{(j)} \quad (2.37)$$

(e) Fator de Divisão Entre os Dois Subconjuntos

O capital é dividido entre os dois clusters proporcionalmente às variâncias agregadas de cada um. O fator de alocação é:

$$\alpha_i = 1 - \frac{\tilde{V}_i^{(1)}}{\tilde{V}_i^{(1)} + \tilde{V}_i^{(2)}} \quad (2.38)$$

Assim, o subconjunto $L_i^{(1)}$ recebe α_i e o subconjunto complementar, $L_i^{(2)}$, recebe $1 - \alpha_i$. Essa alocação top-down, isto é, dos clusters para os ativos

individuais, é a robustez do HRP, os ativos com mais variância dentro dos clusters recebem menos peso (PRADO, 2016).

(f) Reescalonamento Recursivo dos Pesos

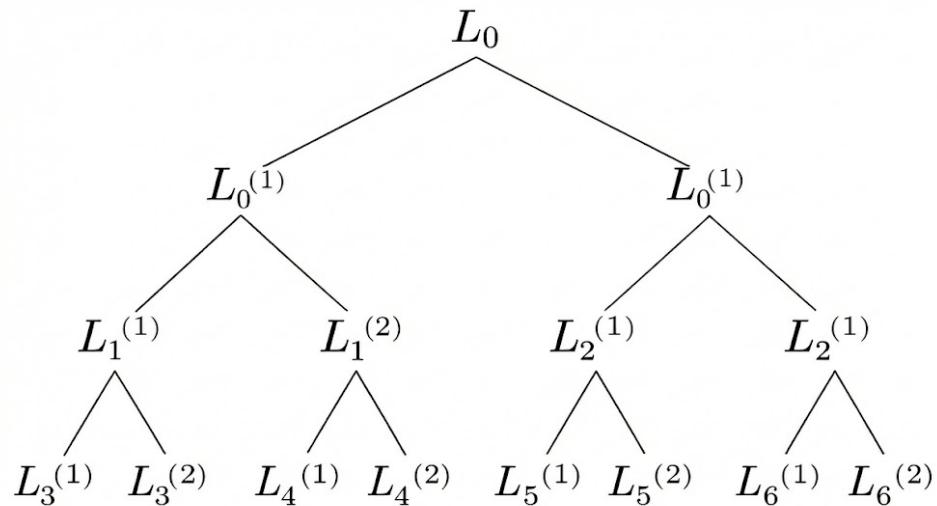
O peso de cada ativo dentro de cada subconjunto é multiplicado pelo fator correspondente:

$$w_n = w_n \cdot \alpha_i \quad \text{se } n \in L_i^{(1)} \quad (2.39)$$

$$w_n = w_n \cdot (1 - \alpha_i) \quad \text{se } n \in L_i^{(2)} \quad (2.40)$$

Isso é repetido para todos os níveis da árvore, sempre de maneira recursiva, até que cada elemento seja um subconjunto unitário. Isto é, o algoritmo retorna recursivamente para o passo (b) (Critério de Parada) de forma a checar se o Critério foi cumprido, e caso negativo, é feita uma nova iteração. A Figura 6 exemplifica o algoritmo da desta etapa. Caso os subconjuntos $L_3^{(1)}, L_3^{(2)}, L_4^{(1)}$ etc. (listas do último nível) forem compostos por apenas um ativo, o critério de parada é acionado e chega-se nos pesos finais.

Figura 6: Exemplo de Iteração da Etapa de Recursive Bisection do HRP



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.4.3 Comparação da Estrutura Conceitual do HRP com o MPT

Embora ambos os modelos sejam voltados para a construção de carteiras com base na análise da matriz de covariância dos ativos, suas estruturas matemáticas e premissas operacionais seguem caminhos distintos.

Na formulação clássica da MPT, conforme visto na seção 2.2, o problema de alocação de portfólio é modelado como uma otimização quadrática sujeita a restrições lineares. O objetivo é encontrar a alocação ótima de pesos que minimize a variância da carteira para um dado nível de retorno esperado, ou, alternativamente, que maximize o retorno esperado para um dado nível de risco (MARKOWITZ, 1952).

Ao analisar a forma canônica do MPT, apresentado na subseção 2.2.5, e compará-la com a estrutura do HRP, que segue uma lógica de construção de portfólio baseada em uma estrutura hierárquica extraída da matriz de correlação entre os ativos (PRADO, 2016).

A principal diferença conceitual entre os métodos reside no fato de que o HRP não exige a inversão da matriz de covariância. Além disso, a alocação de ativos no HRP é determinada de forma recursiva e hierárquica, o que o torna aplicável em contextos onde tais expectativas são incertas ou não disponíveis (PRADO, 2016).

Enquanto a MPT opera em um espaço vetorial completo, no qual todos os ativos são tratados como potenciais substitutos entre si, o HRP impõe uma estrutura topológica restrita, na qual os ativos são agrupados com base em similaridade estatística. Essa abordagem reflete, em certa medida, decisões práticas de alocação observadas em gestores de portfólio que estruturam suas carteiras por classes de ativos, setores ou regiões geográficas (PRADO, 2018).

Por fim, cabe destacar que, embora ambas as metodologias partam da mesma base informacional, a matriz de covariância, elas utilizam estratégias matemáticas distintas para resolver o problema da alocação, sendo, portanto, metodologicamente complementares e comparáveis em contextos analíticos diversos.

2.5 Indicadores de Risco e Desempenho

A análise do desempenho de portfólios de investimento exige mais do que a simples observação de seus retornos absolutos. Embora o retorno seja, à primeira vista, a

variável de maior interesse para qualquer investidor, ele não é suficiente para avaliar a qualidade de uma estratégia de alocação de ativos. Diferentes portfólios podem apresentar retornos semelhantes, mas com níveis de risco substancialmente distintos. Assim, a avaliação baseada exclusivamente em retorno pode induzir à escolha de alternativas excessivamente voláteis, com elevada exposição a perdas, ou inconsistentes ao longo do tempo.

Nesse contexto, surge a necessidade de avaliar a performance de um portfólio através de medidas que consigam capturar o risco retorno tomado por ele. Essa abordagem permite a comparação de estratégias distintas.

As subseções a seguir apresentam os principais indicadores utilizados na literatura e na prática, a fim de comparar os diferentes métodos de otimização do trabalho de forma quantitativa e replicável. São discutidas, inicialmente, duas medidas de risco: volatilidade e drawdown máximo, seguidas por métricas de desempenho ajustado ao nível de risco, que são os índices Sharpe e Sortino.

Para tratar das métricas de retorno ajustado ao risco, deve-se entender o conceito de taxa livre de risco. Teoricamente, a taxa livre de risco representa um retorno que qualquer investidor obteria ao aplicar seus recursos em um ativo totalmente isento de risco, tanto de crédito quanto de mercado. Esse ativo hipotético garantiria retorno certo, independente de qualquer condição econômica, política ou institucional (FAMA, 2002).

O papel da taxa livre de risco em finanças é estabelecer uma referência mínima de remuneração. Qualquer ativo que prometa um retorno superior a essa taxa deve necessariamente incorporar algum grau de risco. A lógica subjacente é de que nenhum investidor racional aceitaria investir em um ativo mais arriscado se o retorno esperado não exceder, de forma significativa, sendo esta subjetiva a cada investidor, a taxa livre de risco.

Sob olhar prático, não existe um ativo que não tenha grau de risco nenhum. No entanto, é usualmente considerado como ativos livres de risco o título público de menor prazo possível. No caso dos Estados Unidos, por exemplo, é comumente utilizado o Treasury Bill de 3 meses. Já no Brasil, é o Certificado de Depósito Interbancário (CDI), um título público federal pós-fixado atrelado à taxa Selic diária (CERTIFICADO...,). Embora nenhum desses ativos seja isento de risco, uma vez que governos já deram calote em dívidas, como a Argentina em 2001 (GUZMAN, 2020), por exemplo.

2.5.1 Medidas de Risco

- Volatilidade

A volatilidade é uma medida estatística da dispersão dos retornos em torno de sua média. Em termos formais, ela corresponde ao desvio-padrão da série de retornos e é uma das formas mais tradicionais de quantificar o risco, seja de um ativo por si só ou um portfólio (GRUENBERG, 2015).

Seja, R_t o retorno do portfólio no período t e \bar{R} o retorno médio ao longo de T períodos, a volatilidade σ é dada por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2} \quad (2.41)$$

A ideia por trás da medida é que maiores oscilações ao redor da média refletem maior incerteza, logo, maior risco.

A volatilidade pode ser anualizada de forma a mostrar um equivalente anual. Como a volatilidade cresce com a raiz do tempo, utiliza-se a relação $\sigma_{anual} = \sigma \times \sqrt{N}$. Sendo, σ é a volatilidade calculada na frequência dos dados e N é o número de períodos dessa frequência existentes em um ano (por exemplo, 252 para retornos diários ou aproximadamente 52 para retornos semanais) (GRUENBERG, 2015).

- Drawdown Máximo

Outra medida amplamente utilizada na avaliação do risco de portfólios é o drawdown máximo, que busca capturar perdas acumuladas em relação ao pico mais recente de valor (GRUENBERG, 2015).

Diferentemente da volatilidade, que considera a variabilidade dos retornos de forma agregada, o drawdown foca nas perdas observadas ao longo do tempo, sendo especialmente útil para avaliar a resiliência de estratégias de investimento durante períodos adversos .

Seja V_t o valor do portfólio no tempo t , V_{pico} o valor máximo (pico) de V no intervalo definido, o drawdown em t é definido como a perda percentual desde o último pico:

$$\text{Drawdown}_t = \frac{V_t - V_{\text{pico}}}{V_{\text{pico}}} \quad (2.42)$$

O drawdown máximo é então o menor valor dessa série no horizonte da análise (menor pelo fato da medida ser sempre menor ou igual a zero).

$$\text{Max Drawdown} = \min_t(\text{Drawdown}_t) \quad (2.43)$$

2.5.2 Medidas de Retorno

- Retorno

A medida de retorno, conforme já abordada na subseção 2.44, leva em consideração a razão na qual dinheiro é ganho ou perdido de um investimento qualquer (BODIE; KANE; MARCUS, 2013).

A forma aritmética de calcular a taxa de retorno r_t de um investimento entre o tempo t e $t - 1$, sendo P_t o preço de um ativo financeiro qualquer no momento t e P_{t-1} o preço do mesmo ativo no momento $t - 1$. Assim, a forma de calcular o retorno do ativo fica:

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (2.44)$$

O retorno pode ser mostrado na forma absoulta (calculado entre o intervalo final e inicial), mas também pode ser anualizado, por exemplo, de forma a mostrar a taxa de ganhos ou perdas por ano (BODIE; KANE; MARCUS, 2013).

- Alfa de Jensen

O Alfa de Jensen é uma métrica central em avaliação de desempenho e representa o retorno excedente obtido por um portfólio em relação ao retorno esperado segundo um benchmark ou modelo de referência. Em sua formulação original, foi proposto o alfa como uma medida de habilidade do gestor ou estratégia de gerar retorno acima do previsto pelo risco sistemático do portfólio (JENSEN, 1968).

Em sua forma simplificada, amplamente utilizada em estudos de otimização de portfólios, o alpha é definido como o excesso de retorno do portfólio em relação ao retorno do mercado. Nessa abordagem direta, calcula-se apenas a diferença

entre o retorno observado do portfólio R_p e o retorno do benchmark $R_{benchmark}$, conforme a expressão:

$$\alpha = R_p - R_{benchmark} \quad (2.45)$$

Essa formulação captura a noção fundamental de desempenho relativo, permitindo avaliar se uma estratégia consegue gerar valor além do que seria obtido com uma exposição passiva ao mercado. Essa interpretação se mantém consistente com o entendimento moderno de eficiência e retorno ajustado ao risco discutido em finanças (FAMA, 1970).

2.5.3 Medidas de Retorno Ajustado ao Risco

- Sharpe

O Índice de Sharpe, proposto por William F. Sharpe, é uma das métricas mais conhecidas para avaliação do desempenho ajustado ao risco de portfólios, mas que também pode ser usado para ativos de maneira individual. Ele relaciona o excesso de retorno do portfólio em relação a uma taxa livre de risco com a volatilidade de seus retornos (SHARPE, 1994). O índice é definido como:

$$\text{Índice Sharpe} = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p} \quad (2.46)$$

sendo R_p representando o retorno do portfólio, R_f é a taxa livre de risco e σ_p o desvio-padrão dos retornos do portfólio. O índice Sharpe mede, portanto, quanto retorno adicional o investidor obteve por unidade de risco total assumido (SHARPE, 1994).

Um valor mais elevado indica melhor relação risco-retorno. No entanto, o uso da volatilidade como medida de risco implica tratar de maneira simétrica os desvios positivos e negativos, o que pode não refletir com precisão o comportamento desejado por investidores mais avessos a perdas.

- Sortino

Tendo em vista essa característica do índice Sharpe, o índice Sortino, desenvolvido por Frank A. Sortino modifica o do Sharpe, na medida em que altera o desvio

padrão para o desvio padrão dos retornos negativos (SEN, 2022). A fórmula para o cálculo é:

$$\text{Índice Sortino} = \frac{R_p - R_f}{\sigma_D} \quad (2.47)$$

Sendo σ_D o desvio-padrão dos retornos negativos, também chamado de downside deviation, calculado apenas com os retornos R_t que forem inferiores a T :

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{1}{T'} \sum_{t=1}^{T'} \min(R_t - T, 0)^2} \quad (2.48)$$

O índice de Sortino, ao penalizar apenas os desvios abaixo dessa meta, oferece a ótica de que o risco é apenas negativo quando o retorno associado a ele também é. Assim, um ativo que tenha bastante volatilidade mas que sempre tenha retorno positivo possui um alto índice Sortino, mas não um alto índice Sharpe.

2.6 Viés de Sobrevivência

O viés de sobrevivência (survivorship bias) consiste em um erro sistemático de viés de seleção que ocorre quando a análise empírica é conduzida com base apenas nas unidades que persistiram até o final do período observado, excluindo aquelas que foram descontinuadas, encerradas ou desapareceram do conjunto original. Isto é, a amostra ao final do período é diferente da amostra do começo ou meio. Em outras palavras, trata-se da omissão de elementos que "não sobreviveram", o que pode distorcer a amostra e comprometer a validade estatística dos resultados obtidos (VERBEEK, 2007).

Esse viés é relevante na área de finanças, especialmente quando se trata de backtests ou modelagem de algoritmos, em que é comum a construção de bases de dados históricas para avaliar o desempenho de ativos e estratégias. Se, por exemplo, uma carteira for simulada com base apenas ativos que existem até o presente momento, ignore-se o desempenho, muitas vezes negativo, dos outros ativos que foram excluídos da amostra. O resultado tende a ser uma superestimação do retorno médio, além de uma subestimação do drawdown (ELTON; GRUBER; BLAKE, 1996).

Na literatura de finanças, foi investigado impacto do viés de sobrevivência em amostras de mutual funds (fundos de investimento norte-americanos). Eles demonstram que

o encerramento de fundos está frequentemente associado a desempenhos insatisfatórios e que a exclusão desses fundos das bases de dados leva à superestimação sistemática dos retornos médios e à subestimação do risco. Além disso, apontam que o viés pode afetar a relação estatística entre desempenho e características dos fundos, produzindo correlações espúrias que distorcem a interpretação dos resultados. A principal contribuição do estudo é mostrar que a inclusão dos fundos extintos ou incorporados altera substancialmente as estimativas de retorno e de risco, evidenciando a necessidade de controlar esse viés em qualquer análise histórica de performance financeira (ELTON; GRUBER; BLAKE, 1996).

Um outro exemplo disso são os índices de ações como o IBrX 100, o IBOV ou o S&P 500. Eles são alterados ao longo do tempo, de forma que ações de empresas que deixaram de existir também "saem" da composição dos índices. Rebalanceamentos ocorrem em intervalos de tempo determinados e conforme suas regras definidas, exemplo do IBrX 100 (ÍNDICE..., 2025). Logo, a composição do índice hoje, não é a mesma de 2002, por exemplo, como pode-se ver na Tabela 2. Das 100 ações presentes no IBrx 100 em 2002, apenas 25 estão presentes em 2025.

Tabela 2: Comparação da Composição do IBrX 100 em jan/2002 com mai/2025. Ações que permanecem na composição em verde

2002				2025			
ABEV3	CNFB4	ISAE4	TDBH3	ABEV3	CSMG3	ISAE4	RECV3
ACES3	CPLE3	ITSA4	TDBH4	ALOS3	CSNA3	ITSA4	RENT3
ACES4	CPLE6	ITUB4	TIMS3	AMBP3	CURY3	ITUB4	SANB1
AMBV3	CRTP5	KLBN4	TLCP4	ASAI3	CVCB3	KLBN1	SBSP3
ARCZ6	CRUZ3	LAME4	TMAR3	AURE3	CXSE3	LREN3	SLCE3
BBAS3	CSNA3	LIGH3	TMAR5	AZZA3	CYRE3	LWSA3	SMFT3
BBAS4	CSPC4	MAGS5	TMAR6	B3SA3	DIRR3	MGLU3	SMT03
BBDC3	CSTB4	NETC4	TMCP3	BBAS3	ECOR3	MOTV3	STBP3
BBDC4	CTNM4	OIBR4	TMCP4	BBDC3	EGIE3	MOVI3	SUZB3
BDLL4	DURA4	PCAR4	TNCP3	BBDC4	ELET3	MRFG3	TAEE1
BELG4	EBTP3	PETR3	TNCP4	BBSE3	ELET6	MRVE3	TEND3
BOBR4	EBTP4	PETR4	TNEP3	BEEF3	EMBR3	MULT3	TIMS3
BRAP3	EGIE3	PLDN4	TNEP4	BPAC1	ENEV3	NTCO3	TOTS3
BRAP4	ELET3	PRGA4	TNLP3	BRAP4	ENGI1	ONCO3	UGPA3
BRDT4	ELET6	PTIP4	TNLP4	BRAV3	EQTL3	PCAR3	USIM5
BRKM5	ELPL5	RPSA4	TSEP4	BRFS3	EZTC3	PETR3	VALE3
BRTP3	EMAE4	SBSP3	UBBR1	BRKM5	FLRY3	PETR4	VAMO3
BRTP4	EMBR3	SDIA4	UBBR4	CEAB3	GGBR4	PETZ3	VBBR3
CESP3	EMBR4	SUZA4	UGPA4	CMIG4	GGPS3	POMO4	VIVA3
CESP5	ETER3	SUZB5	UNIP6	CMIN3	GMAT3	PRI03	VIVT3
CGAS5	FFTL4	SZPQ4	USIM5	COGN3	GOAU4	PSSA3	WEGE3
CLSC4	GGBR4	TBLE6	VALE3	CPFE3	HAPV3	RADL3	YDUQ3
CMET4	GOAU4	TCOC3	VALE5	CPLE3	HYPE3	RAIL3	
CMIG3	INEP4	TCOC4	VCPA4	CPLE6	IGTI1	RAIZ4	
CMIG4	ISAE3	TCSL4	VIVO3	CSAN3	IRBR3	RDOR3	

Fonte: IBrX 100. Adaptada pelo autor.

A implicação prática do viés de sobrevivência é clara: a análise baseada apenas em ativos que "chegaram ao fim do período" não representa fielmente o universo original de investimentos, violando a representatividade da amostra. Assim, sua mitigação é essencial para garantir robustez empírica em estudos históricos e comparações de estratégias de alocação de portfólio.

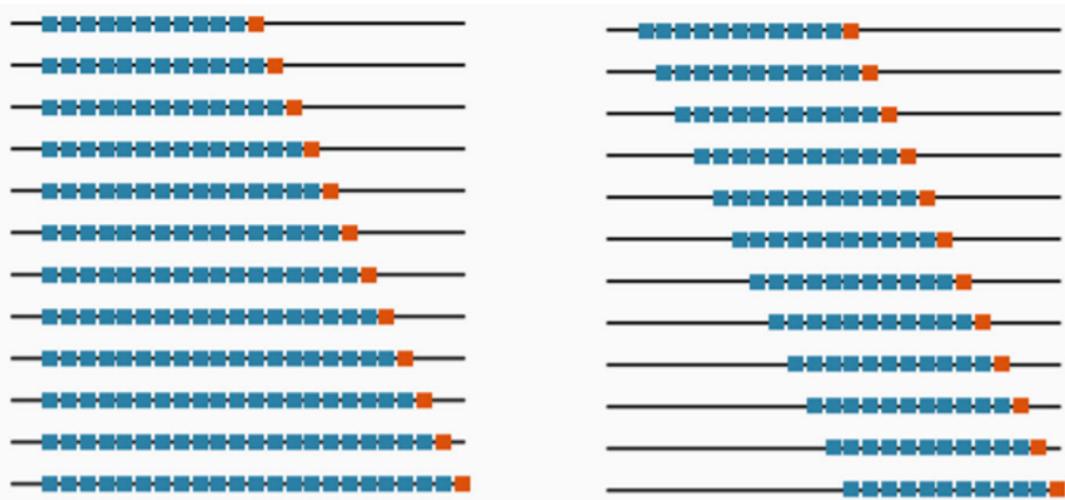
2.7 Janelas de Treinamento e Otimização em Backtests

A avaliação de desempenho de métodos de alocação de portfólio exige uma separação clara entre os dados utilizados para estimar os parâmetros da estratégia e aqueles utilizados para testar seu desempenho. Essa separação é comumente referida como avaliação out-of-sample (fora da amostra) e tem como principal objetivo simular condições reais de tomada de decisão. Em um contexto prático, a estratégia não terá acesso

aos dados futuros, os quais busca prever, por isso, qualquer avaliação baseada em dados in-sample (dentro da amostra) pode resultar em viés por sobreajuste, superestimando a eficácia do método (HEWAMALAGE; ACKERMANN; BERGMEIR, 2023).

A avaliação out-of-sample é usualmente implementada por meio de um esquema de janelas temporais sucessivas, em que os parâmetros dos métodos de alocação são estimados com base em uma amostra de dados históricos (janela de treinamento), e os pesos resultantes são aplicados em um período subsequente (janela de teste). Esse procedimento é repetido ao longo do tempo, com diferentes formas de atualização do conjunto de dados de treinamento.

Figura 7: Comparação de Janelas Expansivas versus Janelas Rolantes



Fonte: (HEWAMALAGE; ACKERMANN; BERGMEIR, 2023).

Duas abordagens principais são utilizadas na literatura para estruturar janelas temporais em simulações out-of-sample: as janelas expansivas e as janelas rolantes. No primeiro caso, a janela de treinamento cresce com o tempo, incorporando progressivamente todas as novas observações disponíveis. Isso proporciona uma base de dados cada vez mais ampla para estimativa dos parâmetros, o que pode contribuir para maior estabilidade estatística, mas também implica maior inércia na resposta do modelo a mudanças estruturais no mercado.

Por outro lado, no esquema de janelas rolantes, o tamanho da janela de treinamento permanece fixo, e os dados mais antigos são descartados à medida que novas observações são incorporadas. Essa abordagem favorece uma maior reatividade às condições recentes do mercado, reduzindo o risco de sobreajuste a padrões históricos ultra-

passados, mas pode resultar em maior variabilidade nas estimativas dos parâmetros, especialmente em janelas curtas (HEWAMALAGE; ACKERMANN; BERGMEIR, 2023).

A literatura recente destaca ainda que o uso de janelas rolantes, quando combinado com estimativas tradicionais de média e variância dos ativos, pode introduzir vieses sistemáticos na avaliação de performance. É demonstrado a presença de autocorrelação serial nos retornos e a reutilização de dados em janelas consecutivas distorcem a estimação de métricas de risco retorno, como o Índice Sharpe, fora da amostra, criando uma percepção inflada de desempenho. Esse viés decorre do fato de que os retornos out-of-sample de uma janela frequentemente não são estatisticamente independentes daqueles da janela anterior, especialmente em ativos com forte estrutura temporal (PASKARAMOORTHY; ZYL; GEBBIE, 2025).

Dessa forma, além de garantir a separação temporal entre treino e teste, é importante considerar o grau de sobreposição entre janelas, o tamanho da amostra utilizada para estimação e a estabilidade estatística dos parâmetros.

Tanto janelas expansivas quanto rolantes são, portanto, ferramentas válidas e largamente utilizadas, mas sua escolha deve estar alinhada à hipótese de estabilidade dos dados e à finalidade do estudo. Em ambientes de baixa previsibilidade e mudanças de regime, as janelas rolantes tendem a oferecer diagnósticos mais realistas e conservadores sobre a eficácia das estratégias (HEWAMALAGE; ACKERMANN; BERGMEIR, 2023).

2.8 Literatura de Otimização de Portfólio no Brasil

Tendo em vista a proposta apresentada, foi realizada uma pesquisa na literatura acadêmica disponível que realiza a aplicação e comparação de métodos de otimização de portfólio para o cenário brasileiro.

Na busca por trabalhos acadêmicos realizados que contenham o escopo descrito, delimitou-se a trabalhos de cunho acadêmico, isto é, associados a instituições de ensino e que sigam as normas de publicação coerentes com o ambiente. Ademais, limitou-se a trabalhos que tivessem aplicação de pelo menos um dos métodos presentes neste trabalho, conforme especificados pela Tabela 1.

Tendo em vista o escopo delimitado, os trabalhos estão descritos na Tabela 3:

Tabela 3: Resumo da Comparaçāo de Trabalhos sobre Otimizaçāo de Portfólio Aplicados no Cenário Brasileiro

Autor(es) / Instituição / Citação	Período de Análise	Ativos / Universo	Métodos de Otimização	Critério de Desempenho	Principais Resultados
Reis, Sobreira, Trucíos, Asrilhant UFRJ, UNICAMP (REIS et al., 2023)	2000–2022	25 ações brasileiras (B3).	EW, MV, RP, MD, MDE, IV, HRP.	Retorno, Sharpe, Sortino e medidas de risco.	Considerando apenas o HRP, MV e EW, o HRP obteve resultado superiores de retorno, Sharpe e Sortino.
Braga, Oliveira e Silva UFRJ (BRAGA et al., 2023)	2015–2023	6 commodities (B3).	Naive, MPT, HRP.	Retorno, Sharpe, Max Drawdown, CVaR, Beta.	MPT superou tanto o HRP quanto o Naive em termos de retorno e Sharpe.
Silva UFU (SILVA, 2022)	2016–2021	Ações do IBrX100 (B3).	MPT, MV, DEA, combinação de métodos.	Retorno, Teste de Mann–Whitney.	Portfólios MPT+DEA de curto prazo obtiveram os melhores resultados.
Duarte Mackenzie (DUARTE, 2019)	2009–2017	Ações do Ibovespa (B3).	MPT, HRP, Algoritmo K-medoides.	Retorno, Sharpe, Volatilidade, Drawdown.	Algoritmos k-medoides demonstra resultados superiores ao MPT, que por sua vez, é superior ao HRP.
Caressato UNESP (CARESSATO, 2017)	2016–2017	Ações do IBrX100 (B3) 1 LTN 3 moedas.	MPT, MODM, EW.	Retorno, Desvio-padrão.	Não há uma conclusão clara da melhor forma de otimização.
Souza UFRGS (SOUZA, 2015)	2008–2014	7 índices setoriais da bolsa brasileira (B3).	EW, RP, MV	Retorno, Sharpe Desvio Padrão, Máx Drawdown.	RP esteve em linha com os outros métodos de otimização de EW e MV.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao analisar a literatura recente sobre otimização de portfólios no Brasil, conforme a Tabela 3, nota-se que apenas dois trabalhos aplicam simultaneamente os três métodos centrais avaliados neste trabalho: a Teoria Moderna de Portfólio (MPT), a Paridade de Risco Hierárquica (HRP) e alocação naive (EW), derivada da Hipótese de Mercados Eficientes (EMH). Entre os estudos identificados, apenas (REIS et al., 2023) e (BRAGA et al., 2023) realizam comparações diretas entre essas três abordagens, tornando-os particularmente relevantes para fins de contraste metodológico e empírico. Dessa forma, a discussão a seguir se concentrará exclusivamente nesses dois trabalhos, pois são os únicos que permitem uma comparação equivalente e relativa entre os modelos utilizados neste trabalho.

No estudo de (REIS et al., 2023), embora diversos outros métodos também sejam avaliados, a análise aqui se restringe aos resultados referentes ao HRP, MPT e naive (EW). Considerando as métricas de retorno absoluto e retorno ajustado ao risco (Sharpe e Sortino), os autores encontram que o HRP apresentou desempenho superior ao MPT (no estudo, descrito como MV), que por sua vez superou o portfólio naive (EW), tanto em janelas rolantes de 5 e 10 anos, consideradas no estudo. Por outro lado, ao observar as métricas exclusivamente de risco, o estudo mostra que o MPT apresentou menor volatilidade que o HRP, e ambos superaram o naive. Importante destacar que, embora o trabalho realize uma avaliação fora da amostra, com janelas rolantes de dois tamanhos diferentes, não há controle para viés de sobrevivência, pois o conjunto de ativos utilizados não é reconstruído ao longo do tempo para refletir entradas e saídas do mercado, sendo um aspecto que pode superestimar o desempenho dos métodos analisados (REIS et al., 2023).

Já o estudo de (BRAGA et al., 2023) também compara diretamente MPT, HRP e naive em um universo de commodities negociadas na B3. Diferentemente do estudo anterior, o trabalho não deixa explícito se os testes foram conduzidos fora da amostra, o que limita a inferência sobre estabilidade temporal dos resultados. Além disso, não há qualquer forma de mitigação do viés de sobrevivência, pois o universo de ativos é tratado como fixo ao longo de todo o período analisado, podendo impactar significativamente medidas de risco e retorno. Em relação aos resultados, os autores encontram que, nas métricas de retorno absoluto e retorno ajustado ao risco, a MPT apresenta o melhor desempenho, seguida por HRP e depois pelo naive. Contudo, sob a ótica de medidas de risco (como volatilidade e drawdown), a hierarquia se inverte parcialmente: o HRP apresenta menor risco que o MPT, e ambos superam o naive, sugerindo que, mesmo em

um universo de commodities, a estrutura hierárquica contribui para uma distribuição mais estável da variância (BRAGA et al., 2023).

3 METODOLOGIA

Este capítulo aborda o Índice Brasil 100, que serve como base para a construção da base de ativos em que será aplicada os métodos na seção 3.1. Em seguida, é mostrado como é mitigado o viés de sobrevivência quando se trata de um índice que não é imutável na seção 3.2. Ademais, é mostrada a construção da base de ativos e algumas características das 313 ações que a compõem na seção 3.3. Também é definido o método de janelas para teste out-of-sample (fora da amostra) e as suas justificativas na seção 3.4. Seguidamente, é mostrada a construção da base de retornos dos ativos em cada janela rolante, que é base para a otimização, na seção 3.5. Por último, é explicado como os métodos foram implementados computacionalmente na seção 3.6.

3.1 IBrX 100

O escopo do trabalho é a aplicação dos métodos no cenário brasileiro de ações. Para isso, optou-se pelo Índice Brasil 100. Ele é um índice que busca agregar em torno de 100 ações em sua composição, a seleção é feita através de critérios de tamanho da ação e liquidez (ÍNDICE..., 2025). O índice é rebalanceado quadrimestralmente (janeiro/maio/setembro), de forma a refletir as ações que estão em seu filtro de "regras".

Deve-se atentar que por conta do rebalanceamento do índice, que também ocorre em outros como o Ibovespa ou o S&P 500, a composição dele não é estanque de forma que ações de empresas que deixaram de existir, por exemplo, "saem" da composição dos índices, e empresas novas que listem suas ações e atendam os critérios do índice, são adicionadas. Logo, a composição do índice em 2025 não é a mesma de 2002, por exemplo, como pode-se ver na Tabela 2 na seção 2.6 .

3.2 Mitigação do Viés de Sobrevidência

Uma limitação recorrente em estudos empíricos que analisam a performance de estratégias de alocação de portfólio é o viés de sobrevidência, explicado na seção 2.6. Esse viés ocorre quando a amostra de ativos final é diferente daquela de ao longo do teste. Aplicando o viés para o caso do backtest de modelos de otimização no mercado de ações, ignorando aquelas que foram excluídas do mercado por motivo de falência, fusão, reestruturação ou baixa liquidez, por exemplo.

Para mitigar esse viés, este trabalho opta por construir a base de retornos a partir de uma abordagem abrangente, incluindo todas as ações que compuseram o IBrX 100 em qualquer uma das revisões quadrimestrais entre 2002 e 2025. Essa abordagem resulta em uma amostra de 313 ativos distintos, refletindo fielmente a dinâmica de entrada e saída dos ativos do índice ao longo do tempo. Dessa forma, não apenas os ativos que “sobreviveram” até o final do período são considerados, mas também aqueles que foram descontinuados, absorvidos por outras companhias ou deixaram de atender aos critérios de elegibilidade do índice.

Esse procedimento metodológico confere maior robustez aos resultados obtidos, pois assegura que os portfólios simulados refletem a totalidade do universo de investimento disponível em cada janela temporal de teste, evitando vieses artificiais que comprometeriam a análise out-of-sample. Além disso, aproxima a construção da base de dados da realidade enfrentada por investidores institucionais, que ao longo do tempo precisam lidar com ativos que deixam de ser negociados ou são substituídos em seus benchmarks de referência.

3.3 Universo de Ativos Brasileiros Analisado

Em seguida, se faz necessário coletar os componentes do IBrX 100. Porém, como explicado acima, a composição do índice não é estática. Caso fossem consideradas apenas as 100 ações que o constituem hoje e fosse aplicado o backtest com essa base, seria um caso de viés de sobrevidência claro. Por isso, foram consideradas todas as ações que pertenceram ao índice para a análise.

Assim, para obter a amostra completa, foi coletado via Bloomberg Terminal a composição do índice quadrimestralmente (janeiro, maio e setembro) desde 2002, a

data mais antiga que é possível consultar do índice. Dessa forma, foram reunidas todas as composições do IBrX 100 desde janeiro de 2002 até setembro de 2025. Na sequência, foram removidas as repetições das ações que apareciam mais de uma vez, a ação PETR4, por exemplo, aparece no índice desde janeiro de 2002 até setembro de 2025. Além disso, para as ações que deixaram de existir ao longo do período analisado, foi identificada a data em que isso ocorreu.

Na Tabela 4 estão identificadas as 313 ações que em algum momento formaram o IBrX 100 desde 2002 até 2025. A Tabela 4 está dividida em nove colunas, as três primeiras fazem referência ao mesmo ativo, as três seguintes de um segundo ativo e as últimas três, de um terceiro ativo.

Tabela 4: Ações Presentes na Composição do IBrX 100 desde 2002 até 2025

Ticker	Inclusão	Término	Ticker	Inclusão	Término	Ticker	Inclusão	Término
PETR4	28/12/2001	Ativa	PETR3	28/12/2001	Ativa	ABEV3	28/12/2001	Ativa
ITUB4	28/12/2001	Ativa	TNLP4	28/12/2001	05/04/2012	BBDC4	28/12/2001	Ativa
VALE5	28/12/2001	24/11/2017	ELET3	28/12/2001	Ativa	EMBR4	28/12/2001	02/06/2006
BRTP4	28/12/2001	16/11/2009	ITSA4	28/12/2001	Ativa	OIBR4	28/12/2001	Ativa
BBAS4	28/12/2001	06/09/2002	UBBR1	28/12/2001	30/03/2009	CMIG4	28/12/2001	Ativa
BBDC3	28/12/2001	Ativa	VIVO4	28/12/2001	03/06/2011	TMAR5	28/12/2001	05/04/2012
PCAR4	28/12/2001	28/02/2020	ELET6	28/12/2001	Ativa	CPL6	28/12/2001	Ativa
EBTP4	28/12/2001	20/01/2015	AMBV3	28/12/2001	08/11/2013	TNLP3	28/12/2001	05/04/2012
GGBR4	28/12/2001	Ativa	VCPA4	28/12/2001	11/08/2009	NETC4	28/12/2001	27/01/2015
TCOC4	28/12/2001	30/03/2006	CSNA3	28/12/2001	Ativa	VIVT4	28/12/2001	20/11/2020
BRTP3	28/12/2001	16/11/2009	CRUZ3	28/12/2001	30/11/2015	BRDT4	28/12/2001	04/02/2003
CRTP5	28/12/2001	30/03/2006	TMCP4	28/12/2001	04/09/2009	VALE3	28/12/2001	Ativa
TCSL4	28/12/2001	02/08/2011	USIM5	28/12/2001	Ativa	CSTB4	28/12/2001	10/11/2005
SUZA4	28/12/2001	04/08/2004	TNEP4	28/12/2001	08/10/2004	CMET4	28/12/2001	03/05/2006
CESP5	28/12/2001	25/03/2022	EBTP3	28/12/2001	15/01/2015	KLBN4	28/12/2001	Ativa
VIVT3	28/12/2001	Ativa	TBLE6	28/12/2001	08/08/2005	BRAP4	28/12/2001	Ativa
ELPL5	28/12/2001	20/12/2010	EMBR3	28/12/2001	Ativa	BRKM5	28/12/2001	Ativa
SDIA4	28/12/2001	21/09/2009	ISAE4	28/12/2001	Ativa	GOAU4	28/12/2001	Ativa
GETI4	28/12/2001	30/12/2015	CTNM4	28/12/2001	Ativa	SUZB5	28/12/2001	09/11/2017
SBSP3	28/12/2001	Ativa	PTIP4	28/12/2001	22/01/2008	TCOC3	28/12/2001	30/03/2006

Ticker	Inclusão	Término	Ticker	Inclusão	Término	Ticker	Inclusão	Término
FFTL4	28/12/2001	23/12/2011	BELG4	28/12/2001	10/11/2005	TMCP3	28/12/2001	03/09/2009
DURA4	28/12/2001	07/10/2009	CPL3	28/12/2001	Ativa	ACES4	28/12/2001	24/04/2008
CMIG3	28/12/2001	Ativa	UBBR4	28/12/2001	30/03/2009	TLCP4	28/12/2001	30/03/2006
UGPA4	28/12/2001	16/08/2011	RPSA4	28/12/2001	29/06/2006	UNIP6	28/12/2001	Ativa
BBAS3	28/12/2001	Ativa	CGAS5	28/12/2001	Ativa	EGIE3	28/12/2001	Ativa
TSEP4	28/12/2001	30/03/2006	TNCP4	28/12/2001	21/12/2012	EMAE4	28/12/2001	Ativa
BOBR4	28/12/2001	Ativa	TNEP3	28/12/2001	07/10/2004	LIGH3	28/12/2001	21/02/2006
TIMS3	28/12/2001	Ativa	CLSC4	28/12/2001	Ativa	LAME4	28/12/2001	21/01/2022
VIVO3	28/12/2001	07/06/2011	CESP3	28/12/2001	25/03/2022	CNFB4	28/12/2001	11/05/2012
TMAR3	28/12/2001	05/04/2012	BRAP3	28/12/2001	Ativa	TMAR6	28/12/2001	09/03/2012
ISAE3	28/12/2001	Ativa	PLDN4	28/12/2001	02/06/2006	CSPC4	28/12/2001	23/03/2005
TNCP3	28/12/2001	04/01/2013	TLCP3	28/12/2001	30/03/2006	MAGS5	28/12/2001	01/04/2008
INEP4	28/12/2001	Ativa	TDBH4	28/12/2001	29/08/2006	ACES3	28/12/2001	15/04/2008
TDBH3	28/12/2001	25/08/2006	ARCZ6	28/12/2001	17/11/2009	POMO4	28/12/2001	Ativa
CPCA4	28/12/2001	19/02/2004	COCE5	28/12/2001	Ativa	TASA4	28/12/2001	Ativa
LAME3	28/12/2001	21/01/2022	ETER3	28/12/2001	Ativa	SZPQ4	02/04/2002	11/01/2011
CPSL3	28/12/2001	10/10/2007	MSAN4	28/12/2001	05/10/2004	MSAN3	28/12/2001	29/09/2004
RAPT4	28/12/2001	Ativa	PMAM4	28/12/2001	29/04/2010	TPRC6	28/12/2001	06/07/2005
OIBR3	28/12/2001	Ativa	SAPR4	03/05/2002	Ativa	MOTV3	02/01/2002	Ativa
ARCE3	28/12/2001	18/06/2007	ALLL1	24/03/2005	21/10/2010	TAMM4	04/02/2003	18/07/2012
CESP6	31/07/2006	25/03/2022	CYRE3	07/01/2005	Ativa	CSAN3	18/11/2005	Ativa
LREN3	04/02/2002	Ativa	AMER3	30/03/2005	Ativa	GOLL5	24/06/2004	Ativa
NATU3	26/05/2004	Ativa	WEGE4	28/12/2001	01/06/2007	BRFS3	28/12/2001	Ativa
CPFE3	29/09/2004	Ativa	ELPL4	31/08/2006	24/11/2017	RENT3	23/05/2005	Ativa
ENBR3	13/07/2005	21/08/2023	PSSA3	22/11/2004	Ativa	GFSA3	17/02/2006	Ativa
DASA3	19/11/2004	Ativa	BNCA3	28/10/2005	08/04/2010	GGBR3	28/12/2001	Ativa
RSID3	28/12/2001	Ativa	ARTR3	15/07/2005	31/05/2016	CSMG3	02/08/2006	Ativa
VVAX1	02/08/2006	13/07/2007	TOTS3	03/09/2006	Ativa	EQTL1	31/03/2006	04/04/2008
UOLL4	15/12/2005	18/01/2012	GUAR3	28/12/2001	Ativa	CTAX4	26/08/2005	20/04/2016
CPNY3	02/03/2006	26/11/2008	SLED4	28/12/2001	04/10/2023	MYPK4	28/12/2001	25/02/2008
GRND3	29/10/2004	Ativa	LIGT3	22/02/2006	Ativa	WEGE3	28/12/2001	Ativa
MMXM3	24/07/2006	19/05/2021	USIM3	28/12/2001	Ativa	GVTT3	15/02/2007	10/05/2010
LUPA3	05/12/2006	Ativa	PDGR3	25/01/2007	Ativa	JBSS3	28/03/2007	06/06/2025

Ticker	Inclusão	Término	Ticker	Inclusão	Término	Ticker	Inclusão	Término
POSI3	12/11/2006	Ativa	SMTO3	02/09/2007	Ativa	TCSA3	31/01/2007	Ativa
PDTC3	28/12/2001	Ativa	SYNE3	08/09/2007	Ativa	PINE4	30/03/2007	Ativa
CCIM3	30/01/2007	01/10/2012	KSSA3	10/09/2006	11/02/2010	TESA3	22/11/2006	08/07/2021
BEES3	18/01/2002	Ativa	B3SA3	20/08/2008	Ativa	RDCD3	07/12/2007	17/10/2012
BRSR6	24/07/2007	Ativa	SLCE3	14/06/2007	Ativa	MRVE3	20/07/2007	Ativa
MAGG3	01/07/2002	22/01/2019	LOGN3	20/06/2007	Ativa	AGIN3	25/04/2007	11/02/2010
TEND3	10/11/2007	Ativa	KEPL3	28/12/2001	Ativa	FHER3	04/11/2007	Ativa
UGPA3	28/12/2001	Ativa	CIEL3	29/06/2009	22/08/2024	SANB1	10/07/2009	Ativa
BRML3	04/05/2007	06/01/2023	BRPR3	03/08/2010	19/10/2023	CTIP3	28/10/2009	29/03/2017
HYPE3	18/04/2008	Ativa	OGXP3	13/06/2008	10/01/2019	HGTX3	28/12/2001	17/09/2021
FIBR3	08/12/2009	03/01/2019	AEDU3	03/12/2007	03/07/2014	MULT3	26/07/2007	Ativa
RADL3	22/03/2002	Ativa	ALLL3	29/06/2004	31/03/2015	AMIL3	26/10/2007	08/05/2013
DXCO3	20/09/2007	Ativa	ENEV3	13/12/2007	Ativa	ODPV3	12/01/2006	Ativa
ECOR3	04/01/2010	Ativa	MPLU3	02/05/2010	22/04/2019	IGTA3	02/06/2007	19/11/2021
SULA1	10/04/2007	23/12/2022	MYPK3	28/12/2001	Ativa	EVEN3	30/03/2007	Ativa
PRI03	25/10/2010	Ativa	EZTC3	21/06/2007	Ativa	ENAT3	02/09/2011	31/07/2024
BISA3	23/10/2006	02/01/2015	PRML3	28/07/2008	30/04/2018	MGLU3	05/02/2011	Ativa
NEXP3	26/10/2007	Ativa	OSXB3	22/03/2010	Ativa	09270	25/05/2012	23/12/2013
COGN3	20/07/2007	Ativa	YDUQ3	07/11/2008	Ativa	QUAL3	29/06/2011	Ativa
EQTL3	04/07/2008	Ativa	MILS3	16/04/2010	Ativa	BEEF3	19/07/2007	Ativa
BBSE3	29/04/2013	Ativa	KLBN1	23/01/2014	Ativa	SMLS3	29/04/2013	04/06/2021
MDIA3	18/10/2006	Ativa	VVAR1	16/12/2013	23/11/2018	VLID3	27/04/2006	Ativa
TAEE1	27/10/2006	Ativa	RLOG3	10/03/2014	05/03/2021	RAIL3	04/01/2015	Ativa
FLRY3	17/12/2009	Ativa	SUZB3	10/11/2017	Ativa	CVCB3	12/09/2013	Ativa
ENGI1	11/06/2009	Ativa	CRFB3	20/07/2017	30/05/2025	SAPR1	22/11/2017	Ativa
TIET1	28/12/2001	26/03/2021	LINX3	02/08/2013	25/06/2021	ELPL3	17/02/2003	26/11/2019
ALUP1	24/04/2013	Ativa	AZZA3	02/02/2011	Ativa	SEER3	29/10/2013	Ativa
ALSC3	29/01/2010	05/08/2019	WIZC3	06/05/2015	Ativa	MOVI3	02/08/2017	Ativa
AZUL4	11/04/2017	Ativa	VBBR3	15/12/2017	Ativa	IRBR3	31/07/2017	Ativa
BHIA3	15/08/2003	Ativa	LOGG3	21/12/2018	Ativa	GNDI3	23/04/2018	10/02/2022
BPAC1	16/02/2017	Ativa	HAPV3	25/04/2018	Ativa	NTCO3	26/05/2004	Ativa
BIDI1	30/04/2018	17/06/2022	LCAM3	23/04/2012	01/07/2022	RDOR3	12/10/2020	Ativa
ASA13	01/03/2021	Ativa	ALOS3	02/03/2011	Ativa	CMIN3	18/02/2021	Ativa

Ticker	Inclusão	Término	Ticker	Inclusão	Término	Ticker	Inclusão	Término
STBP3	22/08/2016	Ativa	SMFT3	14/07/2021	Ativa	BRAV3	12/11/2020	Ativa
RECV3	05/05/2021	Ativa	IGTI1	22/11/2021	Ativa	RAIZ4	05/08/2021	Ativa
VIVA3	10/10/2019	Ativa	AURE3	28/12/2001	Ativa	VAMO3	29/01/2021	Ativa
SOMA3	31/07/2020	30/07/2024	GMAT3	13/10/2020	Ativa	DIRR3	19/11/2009	Ativa
LWSA3	02/06/2020	Ativa	ALPA4	28/12/2001	Ativa	PETZ3	09/11/2020	Ativa
PCAR3	12/11/2002	Ativa	CXSE3	29/04/2021	Ativa	GGPS3	26/04/2021	Ativa
AMBP3	13/07/2020	Ativa	CURY3	21/09/2020	Ativa	AMOB3	16/12/2024	Ativa
RIPI4	28/12/2001	22/01/2008	FESA4	28/12/2001	Ativa	SALM4	28/12/2001	06/04/2005
GETI3	28/12/2001	29/12/2015	CTAX3	29/08/2005	Ativa	ALLL4	02/07/2002	20/10/2010
PMAM3	28/12/2001	Ativa	PRTX3	12/03/2010	17/08/2012	VIVR3	06/05/2007	Ativa
TERI3	13/08/2010	23/09/2016	RUMO3	04/01/2015	10/03/2017	LEVE3	28/12/2001	Ativa
TUPY3	28/12/2001	Ativa	BPAN4	16/11/2007	Ativa	CASH3	05/11/2020	Ativa
AMAR3	19/10/2007	Ativa	CBAV3	15/07/2021	Ativa	ACGU3	20/07/2007	12/08/2010
JHSF3	04/11/2007	Ativa	ABYA3	27/07/2006	11/02/2010	PLAS3	02/03/2006	Ativa
ANIM3	28/10/2013	Ativa	NEOE3	07/01/2019	Ativa	SBFG3	17/04/2019	Ativa
MEAL3	03/09/2011	Ativa	BDLL4	28/12/2001	Ativa	MNDL4	03/01/2004	27/02/2012
DAYC4	28/06/2007	22/08/2016	BIDI4	05/11/2018	17/06/2022	ONCO3	08/10/2021	Ativa
CEAB3	28/10/2019	Ativa	CSUD3	05/02/2006	Ativa	RPMG3	28/12/2001	Ativa
SIMH3	22/04/2010	Ativa						

Fonte: IBrX 100. Adaptada pelo autor.

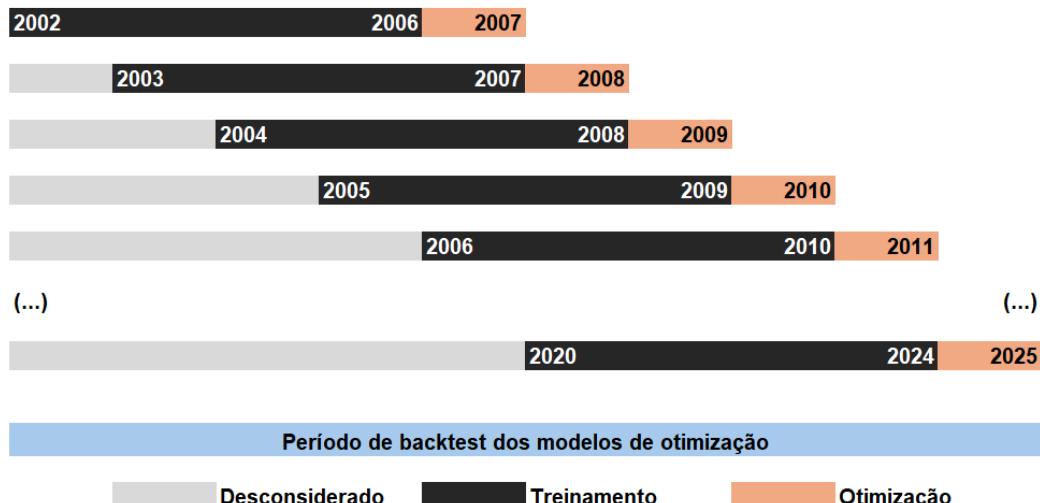
3.4 Janelas Backtest Definidas

Conforme a literatura mostra na seção 2.7, o uso de janelas rolantes tende a oferecer uma avaliação mais realista em contextos de elevada instabilidade temporal ou mudança de regime, enquanto janelas expansivas são mais indicadas quando há estabilidade estrutural nos dados.

Considerando as características voláteis do mercado brasileiro de investimentos, especialmente quando comparado com economias desenvolvidas, optou-se pela estratégia de janelas rolantes. Selecionou-se um período de treinamento, isto é, período em que os modelos tem acesso aos dados, de cinco anos. Dessa forma, apesar do início temporal dos dados do Universo de Ativos na seção 3.3 começar em 2002, o

primeiro ano de otimização dos modelos será em 2007 (2002 + 5). Assim, a partir de 2007, a janela de treinamento passa a ser rolante, com comprimento fixo de cinco anos, de forma a capturar mudanças na estrutura de risco-retorno dos ativos e aumentar a aderência às condições de mercado mais recentes.

Figura 8: Esquema de Janelas Temporais para Simulação Out-of-Sample



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 8 ilustra a forma de janelas rolantes utilizada neste trabalho, destacando as janelas de dados desconsideradas (período inicial de queima), as janelas de treinamento (em preto) e as janelas de otimização e aplicação out-of-sample (em laranja). A Figura 8 não exemplifica como foi estruturado os períodos de otimização de 2012 até 2024, no entanto, foi seguida a mesma lógica para estes anos, de cinco anos prévios de janela de treinamento para o ano de otimização.

Portanto, o período total dos dados de treinamento estende-se de 2002 até 2024. E o período de otimização estende-se de 2007 até 2025. Deve ser ressaltado que os dados de 2025 tem limite em outubro.

3.5 Base de Retornos Históricos

Com o universo dos ativos definido na seção 3.3 e a forma de janelas rolantes também estabelecido na seção 3.4, o passo seguinte foi a produção da base de retornos históricos de cada ação. Das 313 ações que compõem o conjunto, 176 ainda são listadas em outubro de 2025, como pode-se ver na Tabela 5.

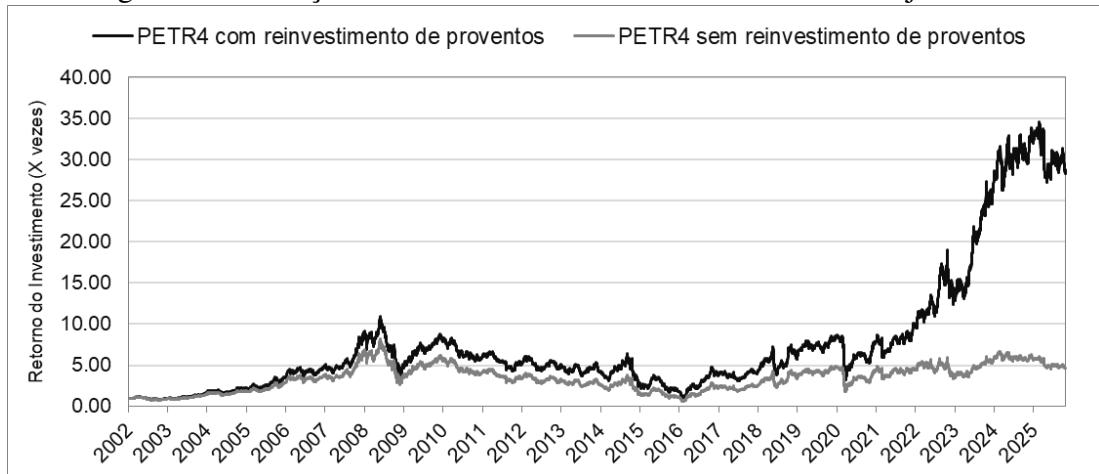
Tabela 5: Universo de Ações que Compuseram o IBrX 100 de 2002 até 2025

	Quantidade	Porcentagem
Acções Listadas em Out/25	176	56.2%
Ações Deslistadas	137	43.8%
Total	313	100.0%

Fonte: IBrX 100. Adaptada pelo autor.

Como cada ação possui um intervalo em que está "ativa", foram retirados os preços de cada uma considerando esse período de atividade. Ademais, também foram retirados todos os proventos pagos por cada uma delas, tais como dividendos ou juros sobre capital próprio. Não considerar estes pagamentos no retorno do ativo é incorreto, uma vez que um acionista da empresa é remunerado com eles, apesar do preço da ação não ser impactado positivamente.

Figura 9: Simulação de Investimento de R\$1 em PETR4 em 01/jan/2002



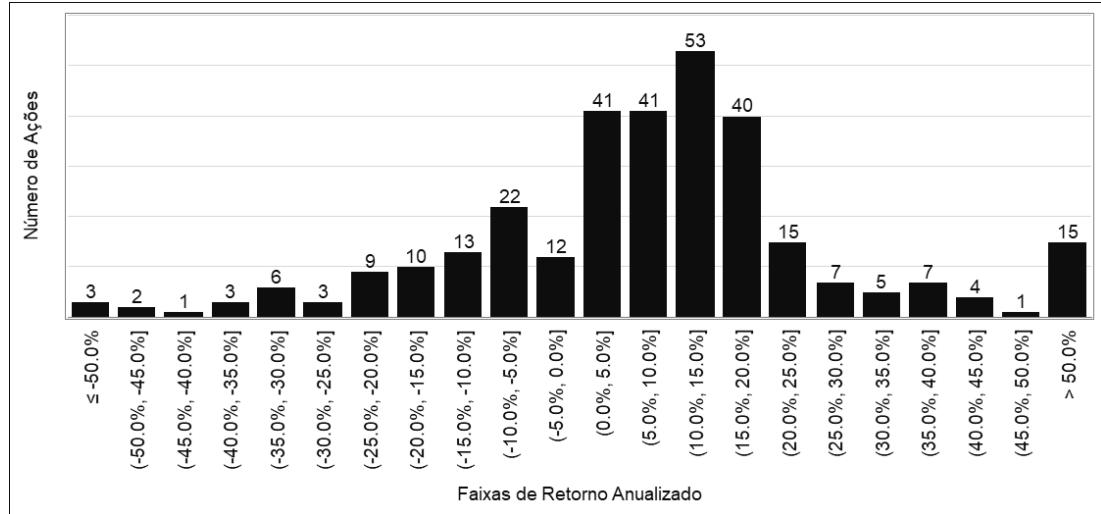
Fonte: Bloomberg Terminal. Adaptada pelo autor.

$$RetornoTotal(d0) = variaodepreco(d0) + proventos(d0) \quad (3.1)$$

Seguindo a lógica acima, foi calculada o retorno total de cada ação no período, observando que cada ação tem o seu período inicial e final, conforme a Tabela 4.

Na Figura 10 é mostrado um histograma dos retornos anualizados de cada ação.

Figura 10: Distribuição dos Retornos Anualizados de 313 Ações Presentes no Universo Analisado



Fonte: Bloomberg Terminal. Adaptada pelo autor.

Tendo em vista as janelas propostas, os ativos "ativos" nas janelas propostas de acordo com a Figura 8 foram organizados. Ou seja, para um ativo estar presente na 2a janela (2003-2007 de treinamento e 2008 de otimização), por exemplo, ele precisa ter dados de retorno de antes de 01/01/2003 e ter retornos depois de 31/12/2008. A quantidade de ações considerada em cada janela pode ser vista na Tabela 6.

Tabela 6: Quantidade de Ações Considerada em cada Janela

Ínicio Janela de Treinamento	Fim Janela de Treinamento	Período de Otimização	Quantidade de Ações na Janela
2002	2006	2007	114
2003	2007	2008	120
2004	2008	2009	117
2005	2009	2010	116
2006	2010	2011	122
2007	2011	2012	133
2008	2012	2013	153
2009	2013	2014	156
2010	2014	2015	162
2011	2015	2016	163
2012	2016	2017	165
2013	2017	2018	162
2014	2018	2019	168
2015	2019	2020	164
2016	2020	2021	164
2017	2021	2022	157
2018	2022	2023	158
2019	2023	2024	156
2020	2024	2025*	158

*2025 considera-se até o final de outubro.

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.6 Implementação Computacional dos Modelos de Otimização

Os métodos de otimização de portfólio MPT e HRP foram implementados em linguagem Python, com o objetivo de garantir flexibilidade, reproduzibilidade e integração com o conjunto de dados históricos do mercado acionário brasileiro. A principal biblioteca utilizada foi a PyPortfolioOpt, uma ferramenta amplamente empregada na literatura aplicada para modelagem, otimização e análise de carteiras financeiras (MARTIN, 2021).

A biblioteca em questão recursos para a aplicação de modelos de alocação de ativos, incluindo a Teoria Moderna de Portfólio (MPT), a Paridade de Risco Hierárquica (HRP) entre outros.

A implementação computacional seguiu o esquema de janelas temporais descrito

anteriormente, com ciclos de otimização fora da amostra (out-of-sample). Para cada janela de treinamento, os parâmetros relevantes, como a matriz de covariância e os retornos esperados, foram estimados com base nos dados disponíveis até aquele ponto. Em seguida, o modelo era otimizado e os pesos resultantes eram aplicados sobre os retornos futuros na janela de teste.

Deve ser ressaltado que durante o intervalo de tempo da janela de otimização, os pesos dos ativos é estático. Apenas há mudança quando muda o ano e assim a janela de treinamento também muda, resultando em diferentes pesos para cada ativo, segundo cada um dos modelos.

No caso das duas formas de alocação associadas à Hipótese de Mercados Eficientes (EMH), o Portfólio de Mercado e a naive (Equally-weighted - EW) a implementação foi direta 2.3.4. No caso do Portfólio de Mercado, pode ser considerado o próprio índice IBrX 100, uma vez que ele já aloca considerando a proporção do valor do ativo no portfólio, conforme mostra a seção 3.1.

Em relação ao naive, deve-se atribuir pesos iguais a todos os ativos disponíveis em cada janela, conforme a subseção 2.3.4. Nesse caso, foi atribuído o mesmo peso para todos os componentes do IBrX 100, considerando o rebalanceamento do próprio índice quadrimestralmente.

Por fim, todo o código-fonte foi modularizado de modo a permitir a replicação dos testes com diferentes parâmetros, janelas e configurações de portfólio, garantindo transparência e adaptabilidade para estudos futuros. O código pode ser consultado na seção 6.1.

4 RESULTADOS

Este capítulo está divido nas seções 4.1, dentro da qual, os resultados dos métodos de otimização estão divididos em Métricas de Risco, Retorno, Retorno Ajustado pelo Risco e Alocação por Método nas subseções 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4 e 4.1.1, respectivamente. Em seguida, são os resultados mais profundamente discutidos na seção 4.2. Por fim, na seção 4.3 os resultados obtidos são comparados com os da literatura acadêmica.

4.1 Análise de Dados

4.1.1 Alocação por Método

Em relação a alocação dos métodos em cada ativo por janela, é bastante variado, conforme visto na Tabela 7.

O MPT, por sua característica de grafo em árvore, conforme apresentado na Figura 3, leva a soluções bastante concentradas de alocação, uma média de 14,2 ações por janela, que tem em média 147,8 ações. Esse fenômeno já foi documentado na literatura e nomeado de Maldição de Markowitz, descrita na subseção 2.4.1. Ou seja, o MPT, por conta de sua construção de opta por alocar, em média, em menos de 10% dos ativos disponíveis por janela. Além dessa concentração da quantidade de ativos, há também uma concentração em poucos ativos dentro da carteira. O peso de alocação do ativo com maior representatividade no portfólio é de 22,63%.

Já em relação ao HRP, a sua característica de Tree Clustering e alocação inversamente proporcional a variância, conforme definido na subseção 2.4.2, garante que os pesos sejam melhor distribuídos, dessa forma, um ativo não é priorizado 100% sobre o outro. Essa metodologia do algoritmo o leva a alocar em praticamente todos os ativos disponíveis. Assim, a média de ativos alocados ficou em 147,7 ativos por janela. Apesar da amplitude do número de ativos alocados, a distribuição não é igual, a alocação

no maior ativo é em média 8,43% do portfólio em cada janela.

Por último, é mostrado a alocação do método naive, conforme a definição do método, na seção 2.3.4, é designado um peso igual para todos os ativos possíveis por janela. Assim, todas os ativos tem a mesma representatividade no portfólio.

A alocação completa por janela dos dois métodos HRP e MPT podem ser vistos nas Tabelas 14 e 15 nas seções 6.2 e 6.3.

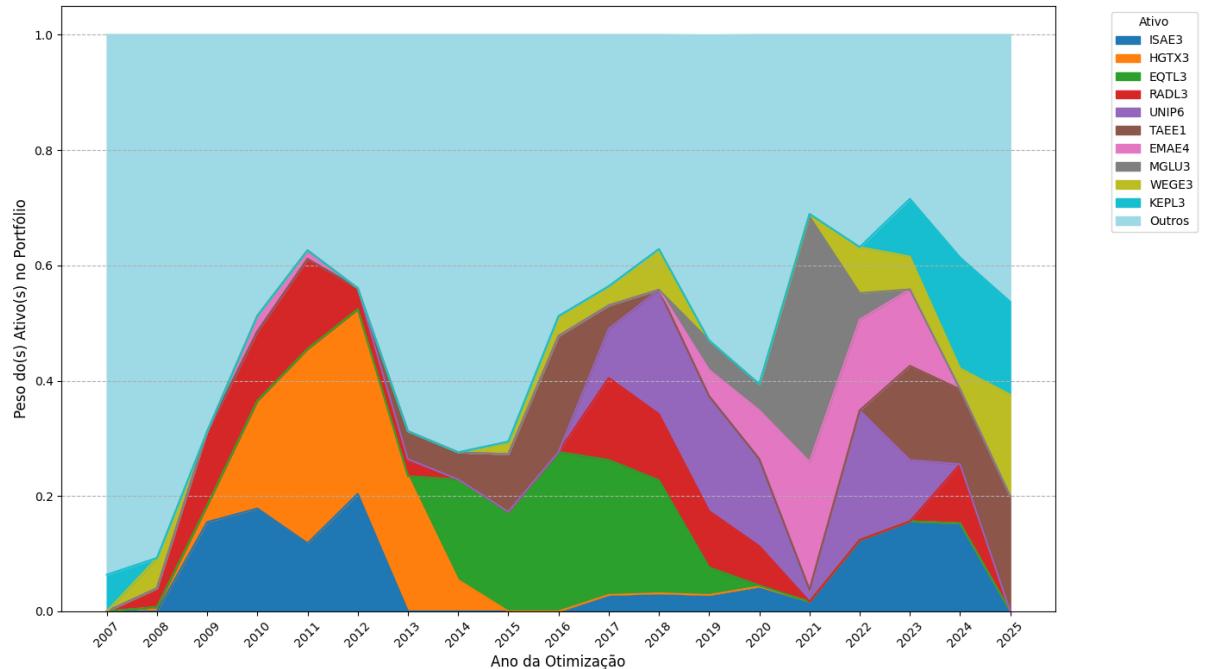
Tabela 7: Dados de Alocação por Modelo e por Janela de Otimização

Ano	MPT					HRP					Naive (EW)		
	# Ativos Alocados	Média Alocação	Mediana Alocação	Mínima Alocação	Máxima Alocação	# Ativos Alocados	Média Alocação	Mediana Alocação	Mínima Alocação	Máxima Alocação	# Ativos Alocados	Média Alocação	Mediana Alocação
2007	16	6.25%	5.33%	0.24%	16.29%	114	0.88%	0.65%	0.07%	6.86%	114	0.88%	0.88%
2008	22	4.55%	3.31%	0.20%	24.16%	120	0.83%	0.56%	0.10%	7.25%	120	0.83%	0.83%
2009	15	6.67%	6.28%	0.39%	16.92%	117	0.85%	0.59%	0.16%	12.98%	117	0.85%	0.85%
2010	16	6.25%	5.49%	0.15%	18.67%	116	0.86%	0.59%	0.17%	3.04%	116	0.86%	0.86%
2011	12	8.33%	5.90%	0.70%	33.69%	122	0.82%	0.63%	0.14%	3.38%	122	0.82%	0.82%
2012	11	9.09%	6.28%	1.00%	32.01%	133	0.75%	0.53%	0.11%	4.67%	133	0.75%	0.75%
2013	14	7.14%	5.08%	0.34%	23.45%	153	0.65%	0.53%	0.08%	2.98%	153	0.65%	0.65%
2014	24	4.17%	3.27%	0.16%	17.47%	156	0.64%	0.46%	0.06%	2.64%	156	0.64%	0.64%
2015	16	6.25%	5.36%	0.12%	17.29%	162	0.62%	0.14%	0.02%	64.36%	162	0.62%	0.62%
2016	9	11.11%	10.31%	1.10%	27.66%	162	0.62%	0.37%	0.06%	18.16%	163	0.61%	0.61%
2017	13	7.69%	5.21%	1.54%	23.42%	164	0.61%	0.38%	0.04%	5.76%	165	0.61%	0.61%
2018	14	7.14%	5.21%	0.58%	21.56%	162	0.62%	0.37%	0.03%	4.49%	162	0.62%	0.62%
2019	15	6.66%	5.11%	0.55%	19.94%	168	0.60%	0.36%	0.03%	4.01%	168	0.60%	0.60%
2020	17	5.88%	4.53%	0.20%	17.01%	164	0.61%	0.43%	0.04%	2.78%	164	0.61%	0.61%
2021	12	8.33%	2.31%	0.44%	42.51%	164	0.61%	0.37%	0.03%	3.22%	164	0.61%	0.61%
2022	12	8.33%	7.94%	0.38%	22.48%	157	0.64%	0.37%	0.05%	3.01%	157	0.64%	0.64%
2023	12	8.33%	9.42%	0.72%	16.33%	158	0.63%	0.39%	0.07%	3.16%	158	0.63%	0.63%
2024	11	9.09%	9.69%	0.69%	19.25%	156	0.64%	0.38%	0.03%	3.65%	156	0.64%	0.64%
2025	9	11.11%	9.67%	3.45%	19.94%	158	0.63%	0.39%	0.05%	3.85%	158	0.63%	0.63%
Média	14.2	7.49%	6.09%	0.68%	22.63%	147.7	0.69%	0.45%	0.07%	8.43%	147.8	0.69%	0.69%

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 11 mostra a evolução da alocação para os maiores ativos ao longo das janelas de otimização para o MPT. No caso do HRP, como são alocados em muitos ativos, a representação gráfica não pode ser exibida da mesma maneira.

Figura 11: Alocação por Ativo no Portfólio - MPT



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.1.2 Métricas de Risco

O resultado em relação aos parâmetros de risco pode ser visto na Tabela 8.

O Modelo que apresentou menor volatilidade e menor drawdown máximo, definidas na subseção 2.5.1 foi o modelo HRP.

Em termos de volatilidade apenas, o segundo melhor método foi o MPT, seguido do naive (EW) e por último, o Portfólio de Mercado.

Sobre o drawdown máximo, o segundo melhor método foi o naive (EW), seguido do Portfólio de Mercado e por último, o MPT.

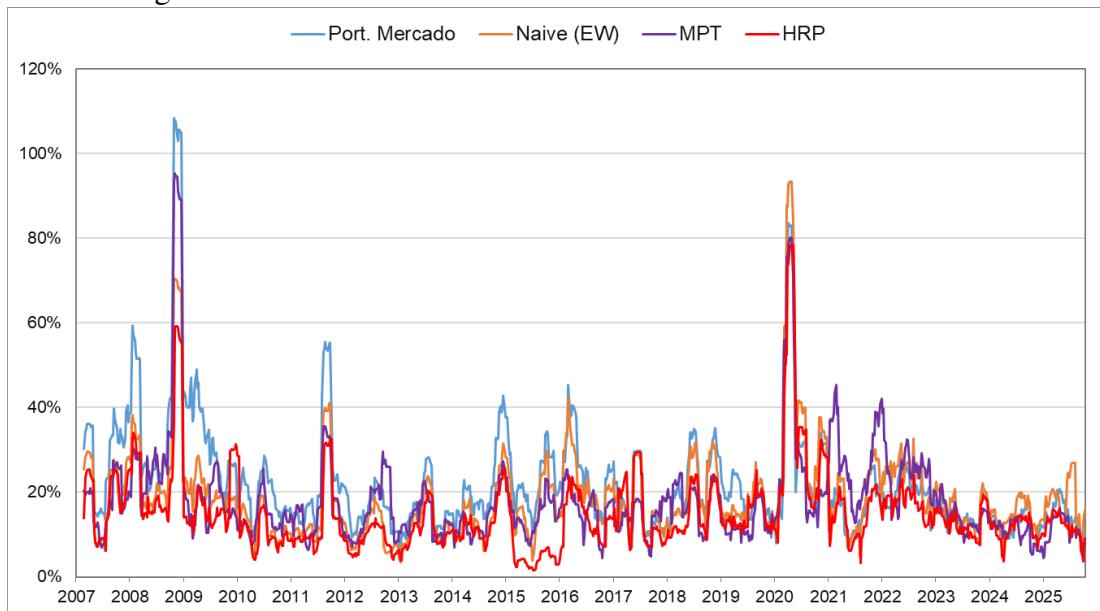
Tabela 8: Métricas de Risco por Método de Otimização

Modelo	Volatilidade Anualizada	Drawdown Máximo
MPT	21.6%	-60.8%
Port Mercado	25.5%	-60.2%
Naive (EW)	22.2%	-49.2%
HRP	18.0%	-45.6%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em relação a evolução da volatilidade no tempo por método, pode-se dizer que a volatilidade anualizada em janelas rolantes de 2 meses é consistentemente mais baixa no modelo HRP quando comparado com os outros três modelos. Nota-se alguns choques de volatilidade em momentos de grande estresse de mercado, como a crise de 2008 ou o período de Covid-19. As Figuras 12 e 13 ilustram isso.

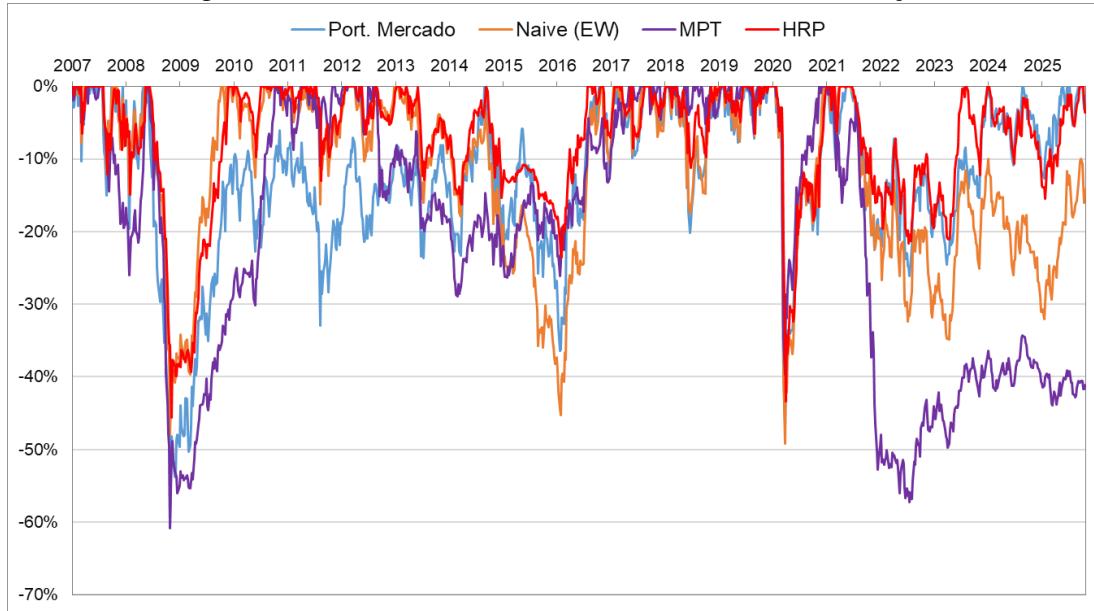
Figura 12: Volatilidade Anualizada em Janelas Rolantes de 60 dias



Fonte: Elaborada pelo autor.

Adicionalmente ao resultado de drawdown máximo, também deve ser compreendido o comportamento do drawdown por método. O Drawdown no tempo pode ser visto na Figura 13.

Figura 13: Drawdown Máximo dos Métodos de Otimização



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.1.3 Métricas de Retorno

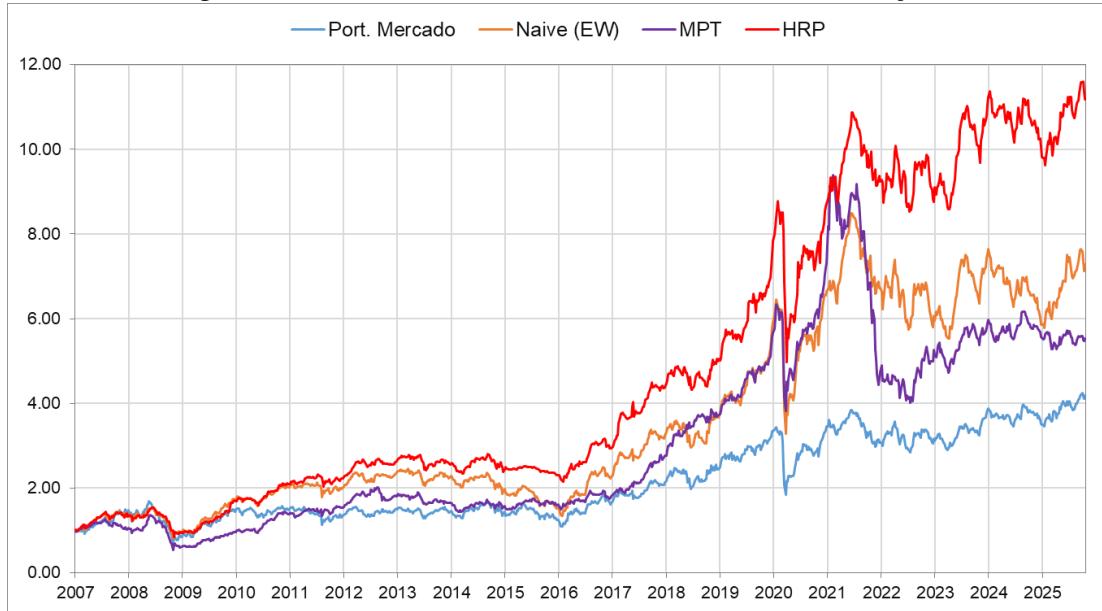
Acerca dos resultados de retorno, o método de otimização que obteve o melhor retorno acumulado, e por consequência, um maior retorno anualizado, foi o HRP. Em segundo lugar, o melhor retorno é do naive (EW). Em terceiro lugar, o melhor retorno é do MPT. E, por último, o pior retorno é do Portfólio de Mercado. Esses dados podem ser vistos tanto na Tabela 9 quanto na Figura 14.

Tabela 9: Métricas de Retorno por Método de Otimização

Modelo	Retorno Acumulado	Retorno Anualizado
MPT	453.1%	9.5%
Port Mercado	319.3%	7.9%
Naive (EW)	628.6%	11.1%
HRP	1017.7%	13.7%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 14: Retorno Acumulado dos Métodos de Otimização



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ademais, pode-se fazer a quebra dos retornos dos métodos por janelas de otimização (de 2007 até 2025). Apesar de ter o melhor retorno acumulado, como pode-se ver na Tabela 9, o portfólio do HRP não é o que apresenta mais anos com o melhor retorno, o portfólio do MPT é o melhor em 9 dos 19 anos de otimização. Por outro lado, esse método também é, empatado como o Portfólio de Mercado, responsável por ser o pior em 7 dos 19 anos. Esses dados podem ser vistos na Tabela 10.

Tabela 10: Retorno por Ano por Método de Otimização

Ano	MPT	Port Mercado	Naive (EW)	HRP
2007	6.0%	47.8%	39.1%	34.3%
2008	-42.2%	-42.6%	-31.3%	-29.0%
2009	58.1%	73.3%	80.4%	76.4%
2010	41.9%	1.4%	17.4%	24.8%
2011	11.3%	-8.3%	0.2%	5.7%
2012	20.4%	10.3%	18.0%	20.0%
2013	-10.1%	-3.1%	-4.6%	-3.1%
2014	-4.5%	-1.7%	-13.0%	-5.4%
2015	1.8%	-12.4%	-22.5%	-5.8%
2016	12.0%	31.6%	47.2%	27.6%
2017	53.8%	28.7%	43.3%	49.2%
2018	34.9%	17.5%	15.7%	14.5%
2019	51.4%	33.4%	57.4%	56.2%
2020	29.4%	3.5%	12.5%	11.2%
2021	-35.2%	-10.6%	1.0%	6.0%
2022	10.7%	2.4%	-9.8%	-5.2%
2023	12.3%	21.0%	24.2%	26.4%
2024	-5.9%	-8.7%	-22.2%	-11.4%
2025	-0.4%	19.8%	24.3%	14.0%
Média	12.9%	10.7%	14.6%	16.1%
Mínimo	-42.2%	-42.6%	-31.3%	-29.0%
Máximo	58.1%	73.3%	80.4%	76.4%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Sob o aspecto de geração de Alfa de Jensen, detalhado na subseção 2.5.2, pode-se analisar os retornos contra o Portfólio de Mercado, considerando-o como benchmark. Todos os métodos de otimização geram Alfa no período analisado, mas em média, o HRP gera 5.4% de Alfa ao ano, em comparação com 3.9% do naive (EW) e 2.2% do MPT. Os dados podem ser vistos na Tabela 11.

Tabela 11: Alfa de Jensen sobre o IBrX 100 por Ano por Método de Otimização

Ano	MPT	Port Mercado	Naive (EW)	HRP
2007	-41.9%	0.0%	-8.8%	-13.5%
2008	0.4%	0.0%	11.3%	13.6%
2009	-15.3%	0.0%	7.0%	3.0%
2010	40.5%	0.0%	16.0%	23.4%
2011	19.5%	0.0%	8.5%	14.0%
2012	10.2%	0.0%	7.8%	9.8%
2013	-7.0%	0.0%	-1.4%	0.0%
2014	-2.8%	0.0%	-11.3%	-3.7%
2015	14.2%	0.0%	-10.1%	6.6%
2016	-19.6%	0.0%	15.6%	-3.9%
2017	25.1%	0.0%	14.6%	20.5%
2018	17.5%	0.0%	-1.7%	-3.0%
2019	18.0%	0.0%	24.0%	22.9%
2020	25.9%	0.0%	9.0%	7.7%
2021	-24.6%	0.0%	11.6%	16.6%
2022	8.3%	0.0%	-12.2%	-7.6%
2023	-8.7%	0.0%	3.2%	5.4%
2024	2.9%	0.0%	-13.4%	-2.6%
2025	-20.3%	0.0%	4.5%	-5.9%
Média	2.2%	0.0%	3.9%	5.4%
Média	-41.9%	0.0%	-13.4%	-13.5%
Média	40.5%	0.0%	24.0%	23.4%

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.1.4 Métricas de Retorno Ajustado ao Risco

Sob a ótica de retorno ajustado ao risco, calculou-se os índices Sharpe anualizado e Sortino anualizado detalhados na subseção 2.5.3. A taxa livre de risco utilizada foi o CDI, uma vez que é amplamente considerada a taxa de remuneração de investimentos sem risco, conforme explicado na seção 2.5.

Os resultados apontam que o HRP obteve o maior índice Sharpe e Sortino entre os 4 modelos, seguido do naive, do MPT e, por último, o Portfólio de Mercado. Apesar da diferença de valor entre o Sharpe e o Sortino, a ordem do melhor para o pior método é mantida. Esses valores podem ser vistos na Tabela 12.

Tabela 12: Métricas de Risco ajustado ao Retorno por Método de Otimização

Modelo	Sharpe Anualizado	Sortino Anualizado
MPT	0.09	0.12
Port Mercado	0.06	0.08
Naive (EW)	0.16	0.22
HRP	0.28	0.36

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2 Discussão dos Resultados

A análise dos modelos de alocação de portfólio revelou diferenças significativas de desempenho entre as três abordagens estudadas: Teoria Moderna de Portfólio (MPT), Hipótese de Mercados Eficientes (EMH), representado tanto pelo Portfólio de Mercado quanto a alocação naive, e a Paridade de Risco Hierárquica (HRP). As métricas de retorno, risco e retorno ajustado ao risco, apresentadas na Seção 4.1, permitem interpretar a robustez de cada modelo ao longo de um período extenso e marcado por retornos positivos e negativos.

Em geral, observou-se que o modelo HRP apresentou resultados mais consistentes em termos de estabilidade de retornos ajustados ao risco, especialmente em períodos de retornos ruins, conforme evidenciado pela Tabela 10. Essa demonstração está em linha com os argumentos teóricos de Marcos López de Prado, que defende que a estrutura hierárquica clusterizada do HRP contribui para uma diversificação mais robusta mesmo quando os dados de entrada são ruidosos ou quando a matriz de covariância está mal condicionada (PRADO, 2016).

Ademais, o modelo MPT parece ter mostrado forte sensibilidade à estimativa dos parâmetros, o que se refletiu em maior volatilidade de retornos e variações bruscas na alocação ao longo do tempo, além da forte concentração de portfólio em poucos ativos, conforme demonstrado na Figura 11. Embora o modelo apresente bons resultados em algumas janelas, sua performance foi menos estável no horizonte completo analisado. Tal comportamento corrobora as limitações apontadas na literatura quanto à fragilidade estatística da otimização quadrática sob incerteza paramétrica, explicado como a maldição de Markowitz (PRADO, 2018) na subseção 2.4.1.

A estratégia naive (EW), associada à EMH, apresentou desempenho positivo em

termos de retorno, risco e retorno ajustado ao risco, quando comparado com o Portfólio de Mercado. Embora não tenha sido a melhor em nenhum métrica calculada, a simplicidade e previsibilidade da estratégia, que superou o MPT em algumas métricas, reforçam os argumentos teóricos da forma fraca da eficiência de mercado, que sugere que retornos superiores são difíceis de alcançar de forma sistemática, explicado na subseção 2.3.3.

Por fim, é importante destacar que os resultados foram obtidos com uma amostra extensa e que buscou eliminar o viés de sobrevivência. Esses fatores corroboram para a validação externa dos achados no trabalho.

4.3 Comparação com a Literatura

A comparação dos resultados obtidos neste trabalho pode ser feito com os achados de (REIS et al., 2023) e (BRAGA et al., 2023), descritos na seção 2.8, permite situar o desempenho relativo dos métodos MPT, HRP e naive no contexto da literatura acadêmica recente.

A Tabela 13 mostra um resumo dos resultados obtidos por métrica dos dois trabalhos e os compara com os resultados obtidos por este trabalho. No caso do (REIS et al., 2023), os resultados selecionados foram os do backtest do maior período fora da amostra e com janelas de 120 meses, além disso, igualou-se os métodos MV dele pelo MPT deste trabalho, por seguirem a mesma metodologia, mas possuírem siglas distintas. Os sinais $>$ e $<$ significam que o método foi superior ao do lado e inferior, respectivamente. No caso de métricas em que um valor menor significa superioridade, como volatilidade, uma menor volatilidade é representada pelo sinal $>$.

Tabela 13: Comparação de Resultados com Trabalhos Acadêmicos Selecionados

Categoría	Métrica	Este Trabalho	Trabalho 1	Trabalho 2
Risco	Volatilidade Anualizada	HRP > MPT > EW	MPT > HRP > EW	HRP > MPT > EW
Risco	Drawdown Máximo	HRP > EW > MPT	N/A	HRP > MPT > EW
Retorno	Retorno Acumulado	HRP > EW > MPT	EW > HRP > MPT	MPT > HRP > EW
Retorno ajustado Risco	Sharpe Anualizado	HRP > EW > MPT	EW > HRP > MPT	MPT > HRP > EW
Retorno ajustado Risco	Sortino Anualizado	HRP > EW > MPT	EW > HRP > MPT	N/A

Fonte: Trabalho 1 refere-se a (REIS et al., 2023). Trabalho 2 refere-se a (BRAGA et al., 2023). Adaptada pelo autor.

Em linhas gerais, não há uma convergência de resultados entre os trabalhos em

nenhuma categoria de métricas (risco, retorno e retorno ajustado ao risco).

Em termos de métricas de risco, este trabalho mostra que o HRP obteve um risco menor que os demais modelos, tanto em volatilidade quanto em drawdown máximo. (REIS et al., 2023), obteve o mesmo resultado para a métrica de volatilidade, mas não para a de drawdown máximo, nessa, o HRP continua sendo o melhor modelo, mas o MPT segue como o segundo melhor. Já para (BRAGA et al., 2023), apesar dos autores não calcularem a métrica de drawdown máximo, a volatilidade calculada mostra o MPT a frente do HRP e do EW.

Em termos de métricas de retorno, este trabalho tem como resultado o HRP a frente do EW, que por sua vez está a frente do MPT. Já no trabalho (REIS et al., 2023), o MPT foi superior ao HRP e o EW seguindo na última colocação. Por outro lado, em (BRAGA et al., 2023), os autores tem como resultado o EW na frente do HRP, que está a frente do MPT.

Em termos de métricas de retorno ajustado ao risco, este trabalho tem como resultado o HRP a frente do EW, nas métricas de Sharpe e Sortino, que por sua vez está a frente do MPT. Em (REIS et al., 2023), o EW tem as métricas melhores que o HRP, que por sua vez, está a frente do MPT. Já em (BRAGA et al., 2023), apesar dos autores não calcularem a métrica de Sortino, o MPT apresenta um Sharpe melhor que o HRP, que é superior ao EW.

Logo, apesar dos resultados deste trabalho apontarem o HRP como um método de otimização superior em todas as métricas selecionadas, ao comparar com os demais trabalhos que incluem os três métodos, não é encontrado um resultado comum. Essa divergência entre os resultados relativos dos métodos pode decorrer de diferenças estruturais importantes: a seleção do universo de ativos (diferentes classes, setores ou geografias), o horizonte temporal analisado (que captura distintos regimes de volatilidade e tendências de mercado) e a frequência de rebalanceamento das carteiras. Adicionalmente, escolhas metodológicas específicas, como o tamanho da janela de treinamento e otimização são fatores determinantes que podem justificar a heterogeneidade dos achados na comparação com a literatura acadêmica.

5 CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo comparar três abordagens distintas de alocação de portfólio: Paridade de Risco Hierárquica (HRP), Teoria Moderna de Portfólio (MPT) e Hipótese de Mercados Eficientes (EMH) no contexto do mercado acionário brasileiro, entre os anos de 2002 e 2025. A análise foi conduzida de forma rigorosa, com simulações out-of-sample (fora da amostra) em janelas temporais, buscando eliminar o viés de sobrevivência e utilização uma ampla variedade de métricas de desempenho e risco.

Os resultados empíricos indicaram que o método HRP obteve desempenho mais robusto e consistente, destacando-se pela estabilidade na alocação e alcançando resultados superiores em termos de métricas de risco, retorno e retorno ajustado ao risco. Em contraste, pode-se dizer que o MPT demonstrou alta concentração de alocação em alguns ativos, o que leva níveis de risco piores e retornos mais instáveis. A estratégia naïve (EW), ainda que de mais simples metodologia, demonstrou um resultado acima do Portfólio de Mercado (IBrX 100) e superior ao MPT, em métricas de risco, retorno e retorno ajustado ao risco.

Essas evidências sugerem que a abordagem do HRP representa uma alternativa para alocação promissora na alocação de ações no Brasil aos métodos tradicionais de alocação de ativos, como o MPT e a EMH.

5.1 Limitações do Trabalho

Embora o presente estudo tenha buscado rigor metodológico na aplicação dos modelos de alocação de portfólio ao mercado acionário brasileiro, algumas limitações devem ser reconhecidas, sobretudo no que se refere à sua capacidade de generalização prática e à abrangência dos testes.

Em primeiro lugar, os testes empíricos foram conduzidos com dados de preços e proventos ajustados, garantindo a consistência histórica dos retornos. No entanto, a análise não impôs qualquer filtro de liquidez, de modo que ações com baixa negociação ou spreads (diferença entre valor de compra e venda) elevados podem ter impactado artificialmente os resultados de determinadas janelas. Da mesma forma, ativos que apresentaram problemas de precificação em períodos específicos não foram excluídos ou ajustados manualmente, o que pode introduzir ruído estatístico nas medidas de retorno e risco.

Adicionalmente, os resultados apresentados não consideram nenhum tipo de custo de transação, como corretagem, spread de compra e venda ou impostos incidentes sobre operações. Embora esse seja um procedimento comum em simulações iniciais, a ausência desses custos limita a aplicabilidade dos resultados em ambientes reais de negociação, especialmente em estratégias com alto turnover (rotatividade do portfólio). Cabe destacar que, neste trabalho, o giro da carteira ao longo do tempo não foi mensurado explicitamente, o que impede avaliar o impacto de uma política de rebalanceamento frequente na performance líquida das estratégias.

Por fim, outro ponto relevante diz respeito à ausência de restrições operacionais adicionais nos modelos otimizados. Não foram estabelecidos limites mínimos ou máximos por ativo, nem foram consideradas restrições setoriais ou regras de diversificação por liquidez. Essa opção foi feita para não interferir com o output dos modelos, possivelmente alterando o resultado final.

Essas limitações, embora naturais em estudos empíricos, abrem caminho para extensões metodológicas e aprimoramentos que podem ser explorados na seção 5.2.

5.2 Estudos Futuros

O trabalho desenvolveu e aplicou três métodos de otimização de portfólio no contexto do mercado de ações brasileiro, no período de 2002 a 2025, considerando o universo de ações que compuseram o índice IBrX 100 ao longo do tempo. A amostra totalizou 313 ativos conforme a Tabela 5, e a estratégia metodológica buscou eliminar o viés de sobrevivência e aplicar os modelos de forma fora da amostra, aumentando a robustez empírica dos resultados.

Como extensão natural, sugere-se expandir a análise para incluir outras classes

de ativos do universo brasileiro de investimentos, tais como renda fixa, commodities, crédito privado, fundos de investimento imobiliário (FIIs) e fundos negociados em bolsa (ETFs). Tal diversificação permitiria avaliar a eficácia dos modelos em ambientes com diferentes dinâmicas de risco-retorno.

Outra direção importante seria a incorporação de custos transacionais, como corretagem, spread, emolumentos e tributação (deve ser considerada instituição que é gestora do portfólio). Essa inclusão tornaria o backtest mais fidedigno ao ambiente real de investimento, sobretudo em estratégias que envolvem maior turnover. Além disso, poderia ser interessante implementar mecanismos de controle ou penalização de rotatividade da carteira, de forma a avaliar o custo-benefício de estratégias com maior frequência de rebalanceamento.

Finalmente, seria valioso incorporar algum modelo de projeção de retornos futuros tanto no modelo MPT quanto no HRP. Ambos modelos permitem que visões de retorno projetadas sejam consideradas no lugar do histórico de retorno dos ativos.

Prado sugere em (PRADO, 2016) que é possível adaptar o algoritmo do HRP para incorporar visões de retorno futuro projetadas, adicionar restrições no processo de alocação hierárquica, ou mesmo reformulando a função de ponderação dos pesos com base em expectativas externas.

6 APÊNDICE

6.1 Código utilizado em Python para os métodos MPT e HRP

Input:

- Arquivos de retornos *in-sample* (`janelas_i.csv`)
- Arquivos de retornos *out-of-sample* (`retornos_i.csv`)
- Frequência dos retornos (semanal = $365/7 \approx 52$)
- Diretórios de entrada e saída (`janelas`, `naive`, `output`)

Output:

- Pesos otimizados do MPT por janela (`weights_MPT_i.csv`)
- Pesos otimizados do HRP por janela (`weights_HRP_i.csv`)
- Série final de retornos *out-of-sample* (`backtest_00S.csv`)

```

import os
import glob
import numpy as np
import pandas as pd
from pypfopt.expected_returns import mean_historical_return
from pypfopt.risk_models import sample_cov
from pypfopt.efficient_frontier import EfficientFrontier
from pypfopt.hierarchical_portfolio import HRPOpt

# ===== CONFIG =====

```

```

script_dir = os.path.dirname(os.path.abspath(__file__))

# in-sample (training)
dir_janelas = os.path.join(script_dir, "janelas")

# out-of-sample (optimization)
dir_naive = os.path.join(script_dir, "naive")

# output (returns + allocations)
dir_output = os.path.join(script_dir, "output")
os.makedirs(dir_output, exist_ok=True)

FREQ = 52 # used weekly returns

files_is = sorted(glob.glob(os.path.join(dir_janelas, "janela_*.csv"))
                  ))
num_janelas = len(files_is)

retornos_oos_mpt = [] # create list for reutrns for MPT
retornos_oos_hrp = [] # create list for reutrns for HRP

# ====== LOOP ROLLING WINDOWS ======
for i in range(1, num_janelas + 1):
    print(f"\n==== Janela {i} ====")

    # ----- 1. IN-SAMPLE WINDOW -----
    file_is = os.path.join(dir_janelas, f"janela_{i}.csv")
    if not os.path.exists(file_is):
        print(f"Error in file: {file_is}, skip.")
        continue

    df_is = pd.read_csv(file_is, sep=";", parse_dates=["Dates"])
    df_is = df_is.set_index("Dates")

    # in case there is a stock without returns, remove it
    df_is = df_is.apply(pd.to_numeric, errors="coerce")
    df_is = df_is.dropna(axis=1, how="all")

    if df_is.shape[1] < 2:
        print("Error")
        continue

```

```

# ----- 2. ESTIMATE MU AND COV -----
try:
    mu = mean_historical_return(df_is, returns_data=True,
                                frequency=FREQ)
    S = sample_cov(df_is, returns_data=True, frequency=FREQ)
except Exception as e:
    print(f"Window {i}: Error in calculating MU and Cov")
    continue

# ----- 3. MPT Optimization -----
w_mpt = None
try:
    ef = EfficientFrontier(mu, S)
    ef.max_sharpe()
    w_mpt = ef.clean_weights()
    pd.Series(w_mpt, name="weight").to_csv(
        os.path.join(dir_output, f"weights_MPT_{i}.csv"),
        sep=";"
    )
    print("MPT ok.")
except Exception as e:
    print(f"Window {i}: error in MPT")
    w_mpt = None

# ----- 4. HRP Optimization -----
w_hrp = None
try:
    df_hrp = df_is.copy()

    # remover inf/-inf
    df_hrp = df_hrp.replace([np.inf, -np.inf], np.nan)
    df_hrp = df_hrp.dropna(axis=1, how="any")
    stds = df_hrp.std()
    df_hrp = df_hrp.loc[:, stds > 0]
    df_hrp = df_hrp.dropna(axis=0, how="any")

    if df_hrp.shape[1] < 2:
        print(f"Window {i}: Error in HRP, skip")
        w_hrp = None
    else:
        hrp = HRP0pt(df_hrp)
        w_hrp = hrp.optimize()

```

```

        w_hrp = hrp.clean_weights()
        pd.Series(w_hrp, name="weight").to_csv(
            os.path.join(dir_output, f"weights_HRP_{i}.csv"),
            sep=";"
        )
        print("HRP ok.")
    except Exception as e:
        print(f"Window {i}: Error in HRP")
        w_hrp = None

    if (w_mpt is None) and (w_hrp is None):
        print("Error")
        continue

    # ----- 5. OUT-OF-SAMPLE -----
    file_oos = os.path.join(dir_naive, f"retornos_{i}.csv")
    if not os.path.exists(file_oos):
        print("file not found")
        continue

    df_oos = pd.read_csv(file_oos, sep=";", parse_dates=["Dates"])
    df_oos = df_oos.set_index("Dates")
    df_oos = df_oos.apply(pd.to_numeric, errors="coerce")
    df_oos = df_oos.dropna(axis=1, how="all")

    common_cols = [c for c in df_is.columns if c in df_oos.columns]
    if not common_cols:
        print("Error")
        continue

    df_oos = df_oos[common_cols]

    # ----- 7. RETURNS -----
    # MPT
    if w_mpt is not None:
        w_vec_mpt = pd.Series(w_mpt).reindex(common_cols).fillna(0)
        port_ret_mpt = (df_oos * w_vec_mpt).sum(axis=1)
        retornos_oos_mpt.append(port_ret_mpt)

    # HRP
    if w_hrp is not None:
        w_vec_hrp = pd.Series(w_hrp).reindex(common_cols).fillna(0)

```

```

port_ret_hrp = (df_oos * w_vec_hrp).sum(axis=1)
retornos_oos_hrp.append(port_ret_hrp)

# ===== 8. CONCATENATE BACKTEST OOS =====
final_df = pd.DataFrame()

if retornos_oos_mpt:
    final_df["MPT"] = pd.concat(retornos_oos_mpt).sort_index()
if retornos_oos_hrp:
    final_df["HRP"] = pd.concat(retornos_oos_hrp).sort_index()

if not final_df.empty:
    backtest_path = os.path.join(dir_output, "backtest_oos.csv")
    final_df.to_csv(backtest_path, sep=";", decimal=".")
    print(backtest_path)
else:
    print("Error 2")

```

Listing 6.1: Código em Python com apoio da biblioteca PyPortfolioOpt utilizado para implementação dos modelos MPT e HRP

6.2 Alocação Completa HRP por Janela

Tabela 14: Alocação Completa do Método HRP por Janela de Otimização

Ação	Jan 1	Jan 2	Jan 3	Jan 4	Jan 5	Jan 6	Jan 7	Jan 8	Jan 9	Jan 10	Jan 11	Jan 12	Jan 13	Jan 14	Jan 15	Jan 16	Jan 17	Jan 18	Jan 19
PETR4	0.62%	0.57%	0.33%	0.28%	0.28%	0.30%	0.21%	0.30%	0.06%	0.08%	0.11%	0.05%	0.06%	0.13%	0.16%	0.31%	0.17%	0.35%	0.33%
PETR3	0.44%	0.57%	0.32%	0.26%	0.26%	0.28%	0.19%	0.25%	0.06%	0.08%	0.11%	0.05%	0.11%	0.14%	0.26%	0.21%	0.17%	0.34%	0.32%
ABEV3	0.98%	1.00%	1.10%	1.17%	1.23%	0.83%	1.05%	0.84%	0.27%	0.98%	0.96%	1.44%	1.36%	1.75%	1.31%	1.11%	0.93%	1.30%	1.02%
ITUB4	0.49%	0.43%	0.44%	0.26%	0.20%	0.12%	0.25%	0.29%	0.07%	0.29%	0.25%	0.30%	0.18%	0.20%	0.42%	0.27%	0.49%	0.59%	0.30%
TNLP4	0.58%	0.50%	0.44%	0.45%	0.49%	0.45%													
BBDC4	0.35%	0.41%	0.32%	0.29%	0.33%	0.38%	0.20%	0.21%	0.11%	0.16%	0.13%	0.12%	0.28%	0.33%	0.35%	0.43%	0.25%	0.42%	0.42%
VALE5	0.74%	0.50%	0.32%	0.28%	0.26%	0.28%	0.20%	0.32%	0.11%	0.13%	0.12%								
ELET3	0.16%	0.23%	0.29%	0.34%	0.39%	0.42%	0.35%	0.27%	0.04%	0.19%	0.16%	0.14%	0.12%	0.14%	0.11%	0.17%	0.10%	0.21%	0.25%
BRTP4	0.36%	0.51%	0.46%																
ITSA4	0.53%	0.65%	0.40%	0.42%	0.19%	0.12%	0.23%	0.16%	0.10%	0.15%	0.14%	0.29%	0.19%	0.47%	0.30%	0.29%	0.59%	0.43%	0.35%
OIBR4	0.34%	0.39%	0.37%	0.48%	0.47%	0.40%	0.56%	0.22%	0.05%	0.14%	0.14%	0.09%	0.18%	0.23%	0.18%	0.49%	0.37%	0.34%	0.48%
UBBR1	0.26%	0.36%	0.25%																
CMIG4	0.29%	0.43%	0.41%	0.53%	0.62%	0.65%	0.59%	0.34%	0.08%	0.15%	0.15%	0.07%	0.07%	0.19%	0.12%	0.31%	0.33%	0.58%	0.52%
BBDC3	0.74%	0.36%	0.31%	0.31%	0.36%	0.43%	0.22%	0.48%	0.13%	0.40%	0.33%	0.13%	0.21%	0.17%	0.35%	0.42%	0.41%	0.45%	0.47%
VIVO4	0.33%	0.26%	0.27%	0.24%	0.42%														
TMAR5	0.46%	0.39%	0.46%	0.86%	0.55%	0.46%													
PCAR4	0.70%	0.82%	0.47%	0.44%	0.49%	0.51%	0.52%	0.46%	0.27%	0.38%	0.30%	0.31%	0.27%	0.55%					
ELET6	0.18%	0.50%	0.31%	0.39%	0.47%	0.54%	0.55%	0.27%	0.05%	0.16%	0.18%	0.19%	0.15%	0.17%	0.14%	0.14%	0.25%	0.28%	0.20%
CPL6	0.42%	0.41%	0.59%	0.53%	0.63%	0.74%	0.75%	0.78%	0.10%	0.16%	0.27%	0.22%	0.17%	0.22%	0.23%	0.34%	0.57%	0.61%	0.74%
EBTP4	0.23%	0.67%	0.80%	1.53%	1.44%	0.99%	0.78%	1.22%	0.17%										
AMBV3	0.83%	0.82%	1.08%	0.82%	1.15%	0.87%	1.04%												
TNLP3	0.23%	0.28%	0.45%	0.27%	0.32%	0.35%													
GGBR4	0.35%	0.32%	0.21%	0.18%	0.17%	0.30%	0.08%	0.18%	0.09%	0.19%	0.12%	0.12%	0.14%	0.13%	0.25%	0.38%	0.34%	0.36%	0.34%
VCPA4	0.84%	0.90%	0.39%																
NETC4	0.26%	0.54%	0.67%	0.52%	0.51%	0.59%	0.75%	1.66%	0.39%										
CSNA3	0.30%	0.25%	0.24%	0.19%	0.19%	0.21%	0.19%	0.10%	0.07%	0.06%	0.04%	0.04%	0.04%	0.05%	0.09%	0.14%	0.22%	0.11%	0.11%
VIVT4	1.01%	0.86%	1.47%	2.03%	2.61%	1.50%	2.61%	1.43%	0.21%	0.71%	0.57%	0.89%	0.60%	0.58%					
BRTP3	0.24%	0.36%	0.58%																
CRUZ3	1.34%	0.99%	0.65%	0.79%	0.69%	0.68%	0.73%	1.07%	0.22%										
TMCP4	0.47%	0.41%	1.12%																
VALE3	0.69%	0.47%	0.29%	0.24%	0.23%	0.25%	0.27%	0.27%	0.06%	0.11%	0.17%	0.12%	0.12%	0.15%	0.16%	0.43%	0.74%	0.44%	0.40%
TCSL4	0.60%	0.35%	0.34%	0.28%	0.35%														
USIM5	0.25%	0.19%	0.21%	0.17%	0.21%	0.20%	0.20%	0.13%	0.04%	0.07%	0.08%	0.04%	0.09%	0.05%	0.13%	0.29%	0.29%	0.32%	0.29%
CESP5	0.17%	0.19%	0.28%	0.39%	0.34%	0.39%	0.45%	1.07%	0.21%	0.49%	0.50%	1.36%	2.34%	2.38%	2.49%	2.21%			
EBTP3	0.23%	0.48%	0.72%	1.25%	1.21%	0.99%	0.80%	1.23%	0.08%										
KLBN4	0.70%	0.65%	0.52%	0.37%	0.39%	0.44%	0.58%	0.36%	0.17%	0.67%	0.96%	1.29%	1.93%	1.52%	1.33%	1.74%	0.76%	1.09%	1.16%
VIVT3	0.97%	0.89%	1.42%	1.90%	2.76%	2.06%	2.98%	1.61%	0.21%	0.65%	0.74%	0.76%	0.54%	0.54%	2.55%	2.59%	2.98%	2.73%	2.36%
BRAP4	0.83%	0.36%	0.26%	0.26%	0.22%	0.24%	0.16%	0.15%	0.09%	0.23%	0.12%	0.18%	0.07%	0.16%	0.31%	0.37%	0.45%	0.40%	

Ação	Jan 1	Jan 2	Jan 3	Jan 4	Jan 5	Jan 6	Jan 7	Jan 8	Jan 9	Jan 10	Jan 11	Jan 12	Jan 13	Jan 14	Jan 15	Jan 16	Jan 17	Jan 18	Jan 18
ELPL5	0.19%	0.26%	0.56%	1.38%															
EMBR3	1.54%	1.18%	1.01%	0.81%	0.55%	0.63%	0.35%	0.67%	0.31%	0.49%	1.46%	1.65%	1.47%	2.76%	0.31%	0.42%	0.23%	0.22%	0.32%
BRKM5	0.24%	0.27%	0.43%	0.39%	0.50%	0.43%	0.25%	0.31%	0.09%	0.29%	0.72%	0.83%	1.04%	0.85%	0.29%	0.26%	0.42%	0.27%	0.22%
SDIA4	1.11%	0.73%	0.43%																
ISAE4	0.56%	0.45%	0.67%	1.02%	1.42%	1.69%	1.07%	1.29%	0.34%	0.64%	0.60%	1.00%	1.25%	1.27%	1.78%	2.01%	1.52%	2.23%	2.73%
GOAU4	0.65%	0.38%	0.21%	0.18%	0.17%	0.29%	0.16%	0.27%	0.09%	0.16%	0.07%	0.09%	0.11%	0.09%	0.23%	0.37%	0.39%	0.22%	0.21%
GETI4	1.02%	0.45%	0.74%	2.95%	1.34%	1.38%	1.33%	0.86%	0.19%										
CTNM4	1.10%	1.33%	1.63%	1.46%	1.73%	1.76%	1.75%	1.19%	0.42%	0.83%	0.42%	0.31%	0.38%	0.39%	0.40%	0.37%	0.32%	0.30%	0.23%
SUZB5	1.29%	1.05%	0.83%	0.69%	0.46%	0.33%	0.47%	0.40%	0.09%	0.32%	0.31%								
SBSP3	0.52%	0.53%	0.39%	0.31%	0.34%	0.37%	0.39%	0.58%	0.21%	0.48%	0.39%	0.47%	0.38%	0.19%	0.23%	0.39%	0.30%	0.35%	0.22%
PTIP4	1.00%	0.57%																	
FFTL4	1.67%	1.50%	0.88%	0.58%	0.61%														
TMCP3	0.85%	1.29%	2.67%																
DURA4	1.00%	0.70%	0.38%																
CPLS3	0.38%	0.57%	0.57%	1.07%	0.63%	0.92%	0.94%	0.66%	0.17%	0.16%	0.29%	0.22%	0.28%	0.24%	0.43%	0.34%	0.55%	0.56%	0.66%
ACES4	0.57%	0.53%																	
CMIG3	0.40%	0.47%	0.56%	0.59%	1.04%	0.70%	0.66%	0.39%	0.09%	0.16%	0.13%	0.08%	0.07%	0.16%	0.12%	0.28%	0.17%	0.29%	0.39%
UBBR4	0.43%	0.70%	0.38%																
UGPA4	1.64%	1.15%	0.96%	1.27%	0.70%														
UNIP6	0.58%	0.54%	0.73%	0.62%	0.75%	0.78%	0.69%	0.60%	0.18%	1.35%	2.67%	1.94%	1.15%	1.53%	0.59%	0.65%	0.62%	0.65%	0.54%
BBAS3	0.46%	0.43%	0.36%	0.36%	0.29%	0.33%	0.32%	0.38%	0.05%	0.19%	0.08%	0.11%	0.13%	0.11%	0.13%	0.27%	0.32%	0.27%	0.23%
CGAS5	0.53%	0.53%	1.16%	1.67%	1.52%	1.27%	1.69%	1.70%	0.45%	2.41%	1.96%	1.75%	1.48%	1.09%	1.56%	1.03%	1.39%	1.74%	1.89%
EGIE3	0.75%	0.63%	0.64%	1.00%	1.26%	1.18%	1.49%	1.86%	0.46%	0.68%	0.78%	0.72%	0.84%	1.16%	1.90%	1.56%	2.05%	1.90%	1.93%
TNCP4	0.52%	0.61%	1.67%	1.69%	1.84%	0.69%													
EMAE4	0.75%	0.79%	0.59%	1.92%	1.84%	1.70%	1.67%	0.97%	0.76%	1.46%	1.20%	1.37%	1.07%	1.20%	2.01%	2.04%	1.11%	1.08%	0.80%
BOBR4	1.07%	1.63%	1.21%	1.49%	0.69%	0.99%	0.71%	1.06%	0.38%	1.14%	0.73%	0.64%	0.76%	0.55%	0.90%	0.78%	0.98%	1.19%	1.65%
TIMS3	0.40%	0.26%	0.29%	0.24%	0.27%	0.40%	0.53%	0.80%	0.10%	0.33%	0.31%	0.50%	0.63%	0.64%	0.74%	1.06%	1.24%	1.51%	1.47%
CLSC4	0.50%	0.42%	0.54%	0.66%	0.89%	1.00%	0.78%	1.30%	0.28%	0.59%	1.15%	0.88%	1.07%	1.21%	1.35%	1.61%	1.43%	1.64%	1.29%
LAME4	0.77%	0.51%	0.37%	0.27%	0.30%	0.33%	0.21%	0.41%	0.14%	0.22%	0.19%	0.18%	0.16%	0.18%	0.32%	0.52%			
VIVO3	0.52%	0.46%	0.41%	0.51%	0.65%														
CESP3	0.21%	0.22%	0.33%	0.28%	0.34%	0.39%	0.36%	0.33%	0.17%	0.47%	0.26%	0.38%	0.24%	0.44%	0.79%	0.85%			
CNFB4	0.96%	0.80%	1.40%	1.23%	1.15%	1.08%													
TMAR3	0.48%	0.47%	0.81%	0.66%	0.84%	1.27%													
BRAP3	0.58%	0.40%	0.25%	0.25%	0.21%	0.23%	0.27%	0.16%	0.10%	0.43%	0.11%	0.15%	0.08%	0.28%	0.36%	0.45%	0.39%	0.51%	0.53%
TMAR6	0.71%	0.79%	1.89%	3.04%	3.20%	4.22%													
ISAE3	0.50%	0.54%	1.06%	1.08%	3.38%	4.67%	1.58%	1.51%	0.33%	1.59%	1.67%	4.49%	4.01%	2.78%	3.22%	3.01%	2.63%	2.93%	3.06%
TNCP3	0.19%	0.36%	0.92%	0.73%	0.49%	0.35%	0.38%												
MAGS5	1.85%	2.10%																	

Ação	Jan 1	Jan 2	Jan 3	Jan 4	Jan 5	Jan 6	Jan 7	Jan 8	Jan 9	Jan 10	Jan 11	Jan 12	Jan 13	Jan 14	Jan 15	Jan 16	Jan 17	Jan 18	Jan 18
INEP4	0.39%	0.31%	0.60%	0.82%	0.85%	0.51%	0.81%	0.38%	0.08%	0.33%	0.28%	0.30%	0.24%	0.22%	0.36%	0.30%	0.23%	0.22%	0.29%
ACES3	0.65%	0.48%																	
ARCZ6	0.86%	0.82%	0.33%																
POMO4	2.21%	1.44%	0.54%	0.50%	0.45%	0.39%	0.35%	0.42%	0.12%	0.35%	0.30%	0.32%	0.25%	0.41%	0.33%	0.36%	0.33%	0.37%	0.37%
COCE5	1.46%	1.43%	1.93%	2.82%	2.49%	1.64%	2.05%	2.64%	0.43%	1.53%	1.09%	1.58%	0.96%	0.90%	1.64%	1.14%	1.87%	1.74%	1.62%
TASA4	1.67%	0.71%	0.83%	0.62%	0.76%	0.53%	0.57%	0.44%	0.11%	0.55%	0.65%	0.65%	0.16%	0.24%	0.31%	0.22%	0.23%	0.42%	0.27%
LAME3	1.09%	1.19%	1.15%	0.72%	0.69%	0.51%	0.25%	0.44%	0.13%	0.21%	0.33%	0.37%	0.22%	0.24%	0.37%	0.65%			
ETER3	2.26%	1.56%	0.96%	0.58%	0.70%	0.59%	0.65%	1.19%	0.29%	1.19%	1.92%	1.53%	1.35%	0.57%	0.46%	0.46%	0.31%	0.25%	0.34%
CPSL3	0.61%																		
RAPT4	1.18%	0.75%	0.67%	0.46%	0.42%	0.41%	0.41%	0.59%	0.20%	0.41%	0.27%	0.20%	0.15%	0.21%	0.22%	0.22%	0.24%	0.30%	0.20%
PMAM4	0.22%	0.32%	0.52%	0.29%															
OIBR3	0.31%	0.64%	0.87%	2.62%	2.87%	2.07%	1.18%	0.20%	0.05%	0.12%	0.16%	0.10%	0.21%	0.21%	0.17%	0.40%	0.22%	0.19%	0.31%
ARCE3	1.10%																		
WEGE4	1.74%																		
BRFS3	0.69%	0.56%	0.47%	0.56%	0.79%	0.67%	0.92%	0.90%	0.20%	0.71%	0.67%	0.71%	0.50%	0.61%	0.75%	0.86%	0.62%	0.60%	0.66%
GGBR3	0.43%	0.39%	0.49%	0.20%	0.18%	0.21%	0.09%	0.20%	0.04%	0.25%	0.15%	0.15%	0.10%	0.19%	0.27%	0.26%	0.37%	0.48%	0.45%
RSID3	1.08%	0.81%	0.48%	0.26%	0.21%	0.23%	0.10%	0.11%	0.02%	0.12%	0.09%	0.07%	0.11%	0.13%	0.21%	0.25%	0.39%	0.37%	0.46%
GUAR3	1.68%	1.24%	1.35%	1.04%	1.07%	0.82%	0.34%	1.03%	0.29%	0.69%	0.39%	0.58%	0.43%	0.53%	0.19%	0.26%	0.11%	0.10%	0.08%
SLED4	2.56%	2.55%	0.86%	0.54%	0.52%	0.60%	0.58%	0.51%	0.12%	0.35%	0.40%	0.35%	0.30%	0.57%	0.32%	0.43%	0.47%		
MYPK4	0.67%	0.60%																	
WEGE3	1.74%	2.38%	1.03%	0.61%	0.67%	0.57%	0.62%	0.98%	0.34%	1.11%	1.45%	1.73%	1.44%	1.26%	0.93%	1.26%	1.05%	1.08%	1.27%
USIM3	0.35%	0.24%	0.28%	0.17%	0.20%	0.20%	0.19%	0.08%	0.03%	0.14%	0.09%	0.25%	0.31%	0.22%	0.20%	0.33%	0.40%	0.38%	0.32%
PDT3	0.84%	0.99%	0.65%	0.46%	0.50%	0.48%	0.41%	0.41%	0.14%	0.84%	0.77%	0.71%	0.70%	0.59%	0.42%	0.42%	0.38%	0.29%	0.23%
KEPL3	2.17%	0.65%	0.81%	0.70%	0.51%	0.35%	0.35%	0.39%	0.17%	0.48%	0.63%	0.44%	0.52%	0.62%	2.04%	1.92%	1.61%	1.60%	1.55%
UGPA3	1.64%	1.15%	0.96%	1.22%	0.70%	0.98%	0.97%	1.61%	0.44%	0.88%	1.07%	1.11%	0.94%	0.79%	0.55%	0.31%	0.42%	0.38%	0.33%
HGTX3	0.69%	0.86%	1.57%	1.03%	1.00%	0.59%	0.62%	0.50%	0.14%	0.37%	0.19%	0.44%	0.31%	0.47%	0.15%				
MYPK3	0.44%	0.44%	0.73%	0.65%	0.56%	0.45%	0.32%	0.35%	0.19%	0.29%	0.42%	0.30%	0.28%	0.39%	0.32%	0.24%	0.41%	0.44%	0.42%
TIET1	1.09%	0.45%	1.23%	2.53%	1.34%	1.38%	1.88%	1.08%	0.23%	0.65%	0.66%	0.41%	0.82%	1.06%	1.22%				
AURE3	0.32%	0.24%	0.45%	0.28%	0.44%	0.39%	0.47%	0.58%	0.23%	0.55%	0.25%	0.37%	0.24%	0.42%	0.97%	0.85%	2.81%	3.65%	3.85%
ALPA4	1.66%	1.52%	0.96%	0.81%	0.93%	0.69%	0.82%	0.57%	0.16%	0.37%	0.57%	0.56%	0.52%	0.51%	1.01%	0.95%	0.86%	0.74%	1.04%
RIP14	0.46%	0.46%																	
FESA4	2.36%	1.79%	0.79%	0.65%	0.70%	0.24%	0.38%	0.41%	0.08%	0.40%	0.74%	1.12%	1.08%	1.13%	0.82%	0.49%	0.37%	0.64%	0.54%
GETI3	3.27%	2.27%	1.87%	2.70%	1.94%	1.70%	1.08%	0.82%	0.19%										
PMAM3	0.07%	0.15%	0.42%	0.29%	0.57%	0.28%	0.31%	0.25%	0.06%	0.15%	0.25%	0.47%	0.43%	0.57%	0.29%	0.28%	0.15%	0.20%	0.21%
LEVE3	6.86%	5.57%	2.89%	2.92%	2.03%	1.21%	1.75%	0.86%	0.31%	1.56%	2.47%	1.82%	1.88%	1.82%	0.85%	0.33%	0.78%	0.56%	0.47%
TUPY3	0.88%	1.43%	2.06%	2.22%	1.76%	2.31%	1.91%	2.03%	0.32%	1.42%	1.63%	2.07%	1.43%	1.32%	0.41%	0.33%	0.62%	0.58%	0.50%
BDLL4	1.72%	1.02%	0.80%	2.35%	2.19%	1.62%	1.95%	0.67%	0.22%	1.13%	1.19%	1.29%	2.95%	1.78%	0.70%	0.72%	0.60%	0.51%	0.56%
RPMG3	2.66%	1.75%	1.91%	1.75%	0.64%	0.38%	0.43%	0.28%	0.10%	0.50%	0.63%	0.74%	0.78%	0.06%	0.13%	0.09%	0.11%	0.03%	0.77%

Ação	Jan 1	Jan 2	Jan 3	Jan 4	Jan 5	Jan 6	Jan 7	Jan 8	Jan 9	Jan 10	Jan 11	Jan 12	Jan 13	Jan 14	Jan 15	Jan 16	Jan 17	Jan 18	Jan 18
SZPQ4	0.33%	0.66%	1.03%	1.48%															
SAPR4	2.42%	1.61%	1.69%	1.73%	1.69%	1.50%	1.85%	0.25%	1.20%	1.11%	0.73%	0.81%	0.82%	0.52%	0.51%	0.56%	0.35%	0.62%	
MOTV3	0.94%	0.47%	0.40%	0.37%	0.45%	0.50%	1.05%	0.13%	0.57%	0.33%	0.22%	0.28%	0.32%	0.40%	0.29%	0.26%	0.31%	0.28%	
LREN3	0.32%	0.45%	0.36%	0.32%	0.35%	0.36%	0.24%	0.11%	0.35%	0.23%	0.24%	0.26%	0.52%	0.44%	0.31%	0.36%	0.33%	0.19%	
BEES3	0.77%	0.78%	0.68%	0.86%	0.37%	0.64%	0.47%	0.10%	0.40%	2.28%	3.45%	2.84%	2.15%	1.80%	1.61%	2.49%	1.80%	2.50%	
MAGG3	2.10%	0.80%	0.46%	0.39%	0.33%	0.28%	0.35%	0.12%	0.34%	1.11%	1.94%	1.55%							
RADL3	0.81%	0.87%	0.92%	0.79%	0.94%	1.06%	0.72%	0.15%	0.60%	0.84%	0.75%	1.01%	1.34%	1.16%	1.60%	1.37%	1.66%	1.94%	
PCAR3	7.25%	12.98%	3.04%	2.50%	2.51%	2.47%	1.57%	6.66%	18.16%	5.77%	0.25%	0.16%	0.43%	0.69%	0.45%	1.66%	0.85%	1.07%	
ALLL4	0.10%	0.16%	0.32%																
TAMM4		0.75%	0.36%	0.30%	0.35%														
ELPL3		0.52%	0.51%	0.49%	0.11%	0.73%	0.47%	0.16%	0.40%	0.71%	0.44%	0.49%							
BHIA3		1.05%	0.91%	0.93%	1.13%	1.03%	0.60%	0.41%	0.77%	0.44%	0.46%	0.36%	0.28%	0.25%	0.28%	0.15%	0.16%	0.20%	
GOLL5		0.35%	0.32%	0.30%	0.21%	0.29%	0.06%	0.18%	0.09%	0.04%	0.03%	0.07%	0.09%	0.05%	0.08%	0.10%	0.05%		
NATU3		0.66%	0.66%	0.60%	0.89%	0.57%	0.25%	0.38%	0.31%	0.37%	0.26%	0.36%	0.35%	0.23%	0.43%	0.37%	0.33%		
CPFE3		0.57%	0.72%	0.74%	0.87%	1.32%	0.31%	0.50%	0.35%	0.44%	0.84%	1.08%	1.16%	1.64%	1.13%	0.83%	0.86%		
PSSA3		1.19%	0.75%	0.53%	0.59%	0.91%	0.27%	0.42%	0.47%	0.57%	0.39%	0.62%	0.97%	1.43%	2.24%	2.17%	1.62%		
DASA3		0.51%	0.64%	0.56%	0.74%	0.87%	0.38%	2.42%	1.87%	1.76%	2.09%	1.69%	2.26%	1.26%	0.91%	0.68%	0.52%		
GRND3		0.91%	0.95%	1.02%	0.87%	0.90%	0.13%	0.65%	0.75%	0.46%	0.75%	0.97%	0.83%	0.75%	1.27%	0.60%	0.93%		
ALLL3		0.22%	0.17%	0.19%	0.20%	0.33%	0.13%												
NTCO3		0.59%	0.60%	0.48%	0.77%	0.46%	0.19%	0.38%	0.47%	0.36%	0.48%	0.33%	0.62%	0.23%	0.40%	0.34%	0.41%		
MNDL4		1.87%	1.28%	0.16%															
CYRE3			0.14%	0.15%	0.15%	0.09%	0.08%	0.18%	0.26%	0.18%	0.25%	0.31%	0.26%	0.28%	0.11%	0.25%	0.21%		
CSAN3			0.32%	0.38%	0.25%	0.34%	0.12%	0.37%	0.45%	0.26%	0.31%	0.57%	0.72%	0.84%	0.58%	0.54%	0.83%		
AMER3			0.20%	0.22%	0.19%	0.10%	0.05%	0.10%	0.19%	0.35%	0.24%	0.24%	0.32%	0.34%	0.32%	0.38%	0.20%		
RENT3			0.18%	0.20%	0.24%	0.52%	0.23%	0.58%	0.33%	0.27%	0.20%	0.45%	0.26%	0.40%	0.37%	0.25%	0.35%		
ENBR3			0.83%	0.88%	0.86%	1.01%	0.24%	0.29%	0.31%	0.46%	0.80%	0.92%	0.99%	1.03%	0.79%				
ARTR3			0.65%	0.65%	0.69%	1.08%	0.16%	0.65%											
UOLL4			1.33%	2.20%															
CTAX4			0.91%	0.94%	0.86%	1.18%	0.59%	0.38%											
CTAX3			0.79%	0.69%	0.69%	0.80%	0.32%	0.34%	0.24%	0.22%	0.12%	0.11%	0.22%	0.31%	0.27%	0.10%	0.48%		
CESP6			0.41%	0.30%	0.29%	0.13%	0.29%	0.22%	0.23%	0.45%	0.55%	0.77%	1.47%						
ELPL4			1.37%	0.85%	0.62%	0.09%	0.27%	0.14%											
GFS3			0.15%	0.15%	0.06%	0.02%	0.15%	0.12%	0.18%	0.18%	0.31%	0.21%	0.12%	0.18%	0.21%	0.20%			
CSMG3			0.74%	0.55%	0.72%	0.21%	0.33%	0.18%	0.18%	0.27%	0.11%	0.31%	0.48%	0.41%	0.64%	0.54%			
TOTS3			1.15%	1.34%	0.93%	0.20%	0.76%	0.41%	0.58%	0.40%	0.59%	0.72%	0.93%	0.60%	0.86%	0.62%			
LIGT3			0.76%	1.19%	1.05%	0.11%	0.20%	0.16%	0.16%	0.14%	0.24%	0.12%	0.16%	0.26%	0.28%	0.28%	0.28%		
MMXM3			0.13%	0.12%	0.14%	0.03%	0.09%	0.14%	0.23%	0.27%	0.41%	0.03%							
LUPA3			0.33%	0.28%	0.16%	0.04%	0.14%	0.05%	0.06%	0.09%	0.07%	0.14%	0.29%	0.20%	0.20%	0.17%			

Ação	Jan 1	Jan 2	Jan 3	Jan 4	Jan 5	Jan 6	Jan 7	Jan 8	Jan 9	Jan 10	Jan 11	Jan 12	Jan 13	Jan 14	Jan 15	Jan 16	Jan 17	Jan 18	Jan 18
POSI3						0.29%	0.32%	0.31%	0.07%	0.27%	0.56%	0.76%	0.45%	0.46%	0.20%	0.15%	0.21%	0.17%	0.09%
TESA3						0.27%	0.21%	0.24%	0.11%	0.24%	0.46%	0.50%	0.41%	0.57%	0.52%				
ODPV3						0.79%	0.72%	0.92%	0.21%	0.75%	1.83%	1.67%	1.52%	1.50%	2.30%	2.93%	3.16%	2.95%	2.25%
BISA3						0.39%	0.35%	0.15%	0.06%										
MDIA3						1.40%	0.55%	1.12%	0.32%	0.62%	0.63%	0.65%	0.45%	0.71%	1.33%	1.64%	1.62%	1.23%	1.49%
VLID3						1.02%	1.03%	1.05%	0.18%	0.81%	0.70%	1.03%	0.62%	0.89%	0.20%	0.29%	0.35%	0.28%	0.16%
TAEE1						1.07%	1.61%	2.10%	0.83%	1.86%	1.31%	1.40%	1.09%	0.88%	1.72%	2.42%	1.62%	2.73%	3.34%
PLAS3						0.48%	0.42%	0.31%	0.23%	0.74%	0.34%	0.34%	0.29%	0.31%	0.46%	0.34%	0.49%	0.57%	0.61%
CSUD3						0.87%	0.85%	0.94%	0.14%	0.47%	0.75%	0.41%	0.47%	0.42%	0.49%	0.51%	0.52%	0.57%	0.57%
PDGR3							0.11%	0.10%	0.05%	0.10%	0.08%	0.08%	0.10%	0.11%	0.16%	0.12%	0.17%	0.15%	0.19%
JBSS3							0.45%	0.21%	0.08%	0.34%	0.48%	0.41%	0.47%	0.32%	0.80%	0.83%	0.97%	1.41%	1.20%
SMTO3							0.43%	0.57%	0.12%	0.49%	0.79%	0.61%	0.64%	0.83%	0.66%	0.91%	0.93%	1.43%	1.27%
TCSA3							0.29%	0.15%	0.05%	0.23%	0.34%	0.38%	0.34%	0.38%	0.12%	0.19%	0.08%	0.09%	0.15%
SYNE3							1.00%	1.30%	0.98%	2.58%	2.92%	3.38%	3.25%	2.58%	0.90%	0.43%	0.80%	0.49%	0.69%
PINE4							0.54%	0.41%	0.12%	0.55%	1.74%	1.58%	1.11%	0.78%	0.39%	0.40%	0.46%	0.43%	0.53%
BRSR6							0.26%	0.28%	0.07%	0.22%	0.18%	0.18%	0.10%	0.12%	0.21%	0.26%	0.49%	0.64%	0.63%
SLCE3							0.16%	0.58%	0.11%	0.63%	2.15%	1.77%	1.90%	2.14%	2.37%	1.21%	1.83%	1.69%	1.89%
MRVE3							0.15%	0.13%	0.04%	0.10%	0.18%	0.28%	0.22%	0.36%	0.35%	0.19%	0.25%	0.14%	0.22%
LOGN3							0.58%	0.71%	0.17%	0.22%	0.31%	0.25%	0.23%	0.21%	0.23%	0.36%	0.38%	0.29%	0.40%
TEND3							0.27%	1.01%	64.36%			0.19%	0.11%	0.29%	0.45%	0.31%	0.18%	0.25%	0.23%
FHER3							0.31%	0.41%	0.11%	0.44%	0.39%	0.27%	0.30%	0.24%	0.43%	0.31%	0.37%	0.40%	0.28%
BRML3							0.23%	0.35%	0.13%	0.16%	0.13%	0.25%	0.26%	0.39%	0.32%	0.28%	0.27%		
AEDU3							0.67%	0.28%											
MULT3							0.82%	0.54%	0.22%	0.67%	0.24%	0.30%	0.41%	0.50%	0.43%	0.37%	0.35%	0.37%	0.23%
AMIL3							0.74%												
DXCO3							0.58%	0.55%	0.12%	0.41%	0.30%	0.31%	0.28%	0.30%	0.32%	0.33%	0.19%	0.20%	0.23%
ENEV3							0.37%	0.58%	0.04%	0.32%	0.35%	0.39%	0.36%	1.01%	1.20%	1.07%	1.13%	0.89%	0.66%
IGTA3							0.84%	0.66%	0.20%	0.40%	0.45%	0.49%	0.30%	0.36%	0.26%				
SULA1							0.69%	0.85%	0.21%	0.36%	0.39%	0.46%	0.37%	0.62%	0.53%	0.90%			
EVEN3							0.18%	0.19%	0.05%	0.24%	0.38%	0.18%	0.23%	0.28%	0.14%	0.12%	0.20%	0.14%	0.20%
EZTC3							0.34%	0.30%	0.06%	0.26%	0.41%	0.32%	0.17%	0.22%	0.35%	0.34%	0.14%	0.30%	0.27%
NEXP3							0.22%	0.31%	0.10%	0.31%	0.46%	0.73%	0.57%	0.43%	0.23%	0.23%	0.17%	0.20%	
COGN3							1.00%	0.36%	0.14%	0.29%	0.40%	0.27%	0.16%	0.19%	0.18%	0.27%	0.14%	0.15%	0.19%
BEEF3							0.38%	0.40%	0.16%	0.85%	1.48%	1.53%	1.37%	1.21%	0.97%	0.91%	1.05%	0.82%	0.63%
VIVR3							0.35%	0.29%	0.20%	0.14%	0.12%	0.11%	0.09%	0.11%	0.18%	0.12%	0.16%	0.18%	0.20%
BPAN4							0.47%	0.42%	0.14%	0.57%	0.59%	0.34%	0.38%	0.45%	0.27%	0.35%	0.37%	0.22%	0.12%
AMAR3							0.28%	0.39%	0.12%	0.31%	0.12%	0.23%	0.22%	0.15%	0.28%	0.17%	0.07%	0.07%	0.23%
JHSF3							0.32%	0.42%	0.17%	0.35%	0.43%	0.30%	0.34%	0.29%	0.20%	0.29%	0.23%	0.13%	0.13%

Ação	Jan 1	Jan 2	Jan 3	Jan 4	Jan 5	Jan 6	Jan 7	Jan 8	Jan 9	Jan 10	Jan 11	Jan 12	Jan 13	Jan 14	Jan 15	Jan 16	Jan 17	Jan 18	Jan 18
DAYC4							0.28%	0.41%	0.24%	1.47%									
B3SA3							0.32%	0.11%	0.31%	0.19%	0.29%	0.33%	0.44%	0.46%	0.63%	0.51%	0.44%	0.41%	
HYPE3							0.31%	0.16%	0.33%	0.53%	0.47%	0.89%	0.87%	1.51%	1.10%	1.15%	1.37%	0.93%	
OGXP3							0.14%	0.03%	0.13%	0.09%	0.16%	0.25%							
PRML3							0.12%	0.05%	0.14%	0.31%	0.30%								
YDUQ3							0.54%	0.11%	0.25%	0.31%	0.21%	0.12%	0.30%	0.17%	0.25%	0.23%	0.21%	0.15%	
EQTL3							1.98%	0.34%	0.88%	0.92%	0.66%	0.98%	1.44%	1.49%	1.01%	1.15%	0.90%	0.50%	
CIEL3							0.31%	0.67%	0.68%	0.82%	0.74%	0.90%	0.50%	0.48%	0.36%	0.41%			
SANB1							0.15%	0.36%	0.45%	0.39%	0.39%	0.24%	0.24%	0.34%	0.27%	0.37%	0.52%		
CTIP3							0.16%	0.60%	0.93%										
FIBR3							0.09%	0.31%	0.33%	0.64%	1.40%								
FLRY3							0.33%	0.83%	1.22%	1.63%	0.85%	1.02%	0.61%	0.67%	1.50%	0.91%	1.02%		
ENGI1							0.64%	1.41%	2.80%	2.23%	2.10%	1.48%	1.25%	1.01%	1.11%	1.12%	0.44%		
DIRR3							0.13%	0.54%	0.21%	0.32%	0.24%	0.27%	0.21%	0.30%	0.26%	0.30%	0.15%		
BRPR3							0.43%	0.32%	0.39%	0.60%	0.69%	0.68%	0.67%	0.62%					
ECOR3							0.58%	0.25%	0.26%	0.22%	0.26%	0.32%	0.37%	0.36%	0.28%	0.15%			
MPLU3							0.85%	1.35%	1.12%	0.63%									
PRI03							0.15%	0.18%	0.20%	0.17%	0.24%	0.19%	0.28%	0.37%	0.31%	0.32%			
OSXB3							0.11%	0.16%	0.20%	0.30%	0.42%	0.29%	0.31%	0.24%	0.20%	0.20%			
MILS3							0.18%	0.19%	0.19%	0.17%	0.15%	0.26%	0.34%	0.15%	0.26%	0.17%			
ALSC3							0.24%	0.32%	0.32%	0.31%									
TERI3							0.14%												
SIMH3							0.41%	0.39%	0.33%	0.41%	0.21%	0.32%	0.28%	0.13%	0.20%	0.09%			
ENAT3							0.32%	0.30%	0.34%	0.34%	0.56%	0.68%	0.76%	0.75%					
MGLU3							0.20%	0.17%	0.19%	0.18%	0.34%	0.32%	0.24%	0.16%	0.23%				
QUAL3							0.52%	0.40%	0.45%	0.44%	0.42%	0.34%	0.47%	0.33%	0.25%				
AZZA3							0.42%	0.37%	0.48%	0.51%	0.76%	0.47%	0.68%	0.46%	0.47%				
ALOS3							0.86%	0.75%	1.31%	0.99%	0.22%	0.22%	0.18%	0.31%	0.35%				
MEAL3							1.04%	0.64%	0.67%	0.76%	0.19%	0.17%	0.14%	0.12%	0.21%				
LCAM3							1.43%	1.19%	1.37%	0.47%	0.21%								
BBSE3							0.42%	0.36%	0.80%	1.00%	0.86%	1.13%	1.28%						
SMLS3							0.30%	0.38%	0.20%										
CVCB3							0.53%	0.55%	0.17%	0.08%	0.11%	0.12%	0.06%						
LINX3							0.67%	0.61%	0.69%										
ALUP1							0.66%	0.70%	1.47%	2.06%	2.49%	2.01%	2.14%						
SEER3							0.23%	0.25%	0.31%	0.29%	0.26%	0.14%	0.11%						
ANIM3							0.16%	0.14%	0.39%	0.20%	0.13%	0.19%	0.09%						
KLBN1							1.31%	1.19%	2.01%	0.72%	1.30%	1.76%							

Ação	Jan 1	Jan 2	Jan 3	Jan 4	Jan 5	Jan 6	Jan 7	Jan 8	Jan 9	Jan 10	Jan 11	Jan 12	Jan 13	Jan 14	Jan 15	Jan 16	Jan 17	Jan 18	Jan 18
RLOG3													0.35%	0.41%					
RAIL3													0.27%	1.11%	1.28%	1.24%	0.87%		
WIZC3													0.44%	0.63%	0.42%	0.27%	0.31%		
STBP3													0.21%	0.14%	0.14%	0.21%			
SUZB3													0.72%	0.74%	0.88%				
CRFB3													1.27%	1.27%	1.13%				
SAPR1													0.51%	0.58%	0.33%				
MOVI3													0.17%	0.24%	0.17%				
AZUL4													0.14%	0.17%	0.14%				
VBBR3													0.41%	0.46%	0.40%				
IRBR3													0.19%	0.20%	0.20%				
BPAC1													0.18%	0.22%	0.23%				
LOGG3													0.47%	0.39%					
HAPV3													0.56%	0.46%					
VIVA3														0.33%					
NEOE3														0.87%					
SBFG3														0.21%					
CEAB3														0.16%					

Fonte: Elaborada pelo autor.

6.3 Alocação Completa MPT por Janela

Tabela 15: Alocação Completa do Método MPT por Janela de Otimização

Ação	Jan 1	Jan 2	Jan 3	Jan 4	Jan 5	Jan 6	Jan 7	Jan 8	Jan 9	Jan 10	Jan 11	Jan 12	Jan 13	Jan 14	Jan 15	Jan 16	Jan 17	Jan 18	Jan 18
PETR4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	9.67%
PETR3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ABEV3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	11.20%	4.89%	7.33%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ITUB4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TNLP4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%													
BBDC4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
VALE5	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ELET3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BRTP4	0.00%	0.00%																	
ITSA4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
OIBR4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
UBBR1	0.00%	0.00%																	
CMIG4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BBDC3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
VIVO4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%															
TMAR5	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%														
PCAR4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ELET6	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
CPLE6	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	9.70%	0.00%
EBTP4	0.00%	0.00%	5.35%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%									
AMBV3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%													
TNLP3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%														
GGBR4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
VCPA4	0.00%	0.00%																	
NETC4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%										
CSNA3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
VIVT4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BRTP3	0.00%	0.00%																	
CRUZ3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.34%	0.00%	0.00%											
TMCP4	0.00%	0.00%																	
VALE3	0.36%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TCSL4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%															
USIM5	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
CESP5	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.29%	0.00%	0.00%	0.00%	4.42%	1.70%	1.40%	0.55%	3.46%				
EBTP3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%										
KLBN4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	3.29%	13.41%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
VIVT3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BRAP4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	5.48%	0.00%	

Ação	Jan 1	Jan 2	Jan 3	Jan 4	Jan 5	Jan 6	Jan 7	Jan 8	Jan 9	Jan 10	Jan 11	Jan 12	Jan 13	Jan 14	Jan 15	Jan 16	Jan 17	Jan 18	Jan 18
ELPL5	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%															
EMBR3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	5.23%	10.31%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BRKM5	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	5.17%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
SDIA4	0.00%	0.00%	0.00%																
ISAE4	0.00%	0.00%	0.00%	5.72%	7.54%	11.36%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	8.04%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GOAU4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GETI4	0.00%	0.00%	16.92%	0.00%	0.00%	6.28%	7.29%	0.00%	0.00%										
CTNM4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
SUZB5	0.00%	1.03%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%							
SBSP3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
PTIP4	0.00%	0.00%																	
FFTL4	0.00%	2.99%	0.00%	0.00%	0.00%														
TMCP3	0.00%	0.00%	0.00%																
DURA4	0.00%	0.00%	0.00%																
CPL3	0.00%	0.00%	4.53%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	3.21%	0.00%	0.00%
ACES4	0.00%	0.00%																	
CMIG3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
UBBR4	0.00%	0.00%																	
UGPA4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%															
UNIP6	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	8.55%	21.56%	19.94%	15.13%	2.07%	22.48%	10.65%	0.00%	0.00%	
BBAS3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
CGAS5	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	6.47%	2.55%	2.01%	4.44%	5.95%	0.00%	
EGIE3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
TNCP4	0.00%	0.00%	0.00%	0.70%	8.02%														
EMAE4	0.00%	0.00%	2.72%	1.50%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	4.54%	8.43%	22.18%	15.75%	13.26%	0.00%	0.00%
BOBR4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TIMS3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
CLSC4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	4.77%	4.63%	0.44%	11.70%	0.00%	0.00%	12.34%
LAME4	1.12%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
VIVO3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%															
CESP3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
CNFB4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%													
TMAR3	0.00%	1.06%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%													
BRAP3	0.00%	2.67%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.72%	0.00%	0.00%
TMAR6	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%													
ISAE3	0.00%	0.00%	15.48%	17.84%	11.81%	20.39%	0.00%	0.00%	0.00%	2.85%	3.13%	2.84%	4.30%	1.69%	12.37%	15.60%	15.27%	0.00%	
TNCP3	0.00%	0.00%	0.75%	3.71%	1.54%	1.00%	2.95%												
MAGS5	0.00%	0.00%																	

Ação	Jan 1	Jan 2	Jan 3	Jan 4	Jan 5	Jan 6	Jan 7	Jan 8	Jan 9	Jan 10	Jan 11	Jan 12	Jan 13	Jan 14	Jan 15	Jan 16	Jan 17	Jan 18	Jan 18
INEP4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ACES3	0.00%	3.52%																	
ARCZ6	1.33%	0.00%	0.00%																
POMO4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
COCE5	0.00%	0.00%	2.20%	5.76%	0.00%	0.00%	13.84%	1.96%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TASA4	1.21%	0.00%	1.35%	2.62%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
LAME3	16.29%	11.05%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ETER3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	4.25%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
CPSL3	0.00%																		
RAPT4	4.31%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
PMAM4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%															
OIBR3	0.00%	0.00%	11.92%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ARCE3	9.38%																		
WEGE4	15.57%																		
BRFS3	0.00%	0.00%	0.39%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	5.50%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GBBR3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
RSID3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GUAR3	15.54%	1.34%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.87%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
SLED4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
MYPK4	0.00%	0.00%																	
WEGE3	0.00%	5.27%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	2.07%	3.44%	3.32%	7.07%	0.00%	0.00%	0.48%	7.99%	5.69%	3.62%	17.65%
USIM3	1.84%	5.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
PDT3	0.00%	0.81%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
KEPL3	6.35%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.12%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	10.02%	19.25%
UGPA3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.47%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
HGTX3	0.00%	0.73%	2.87%	18.67%	33.69%	32.01%	23.45%	5.43%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
MYPK3	2.98%	8.45%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TIET1	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AURE3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ALPA4	7.95%	8.15%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	2.16%	2.56%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
RIP14	0.00%	1.85%																	
FESA4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GETI3	8.80%	5.78%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%										
PMAM3	0.24%	0.20%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
LEVE3	6.74%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.71%	4.03%	1.10%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TUPY3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	4.25%	0.00%	3.57%	4.50%	6.20%	2.31%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BDLL4	0.00%	0.00%	9.43%	6.14%	9.83%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
RPMG3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.89%	0.00%	0.00%	0.45%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

Ação	Jan 1	Jan 2	Jan 3	Jan 4	Jan 5	Jan 6	Jan 7	Jan 8	Jan 9	Jan 10	Jan 11	Jan 12	Jan 13	Jan 14	Jan 15	Jan 16	Jan 17	Jan 18	Jan 18
SZPQ4	0.00%	3.31%	0.00%	0.00%															
SAPR4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	13.31%	10.26%	3.79%	0.00%	5.21%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
MOTV3	3.35%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
LREN3	3.55%	6.28%	6.69%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BEES3	0.00%	0.00%	0.15%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	4.04%	5.18%	6.27%	0.00%	0.00%	0.00%	5.10%	7.71%
MAGG3	24.16%	6.54%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
RADL3	3.27%	12.83%	12.02%	15.62%	3.65%	2.96%	0.00%	0.00%	0.00%	14.21%	11.46%	9.74%	6.81%	0.00%	0.00%	0.00%	10.26%	0.00%	
PCAR3	5.31%	0.00%	5.64%	8.02%	3.76%	5.34%	1.65%	13.79%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ALLL4	0.47%	1.01%	0.00%																
TAMM4		8.74%	0.00%	0.00%	0.00%														
ELPL3		0.00%	1.47%	1.25%	2.30%	0.00%	0.16%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BHIA3		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	3.25%	0.29%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GOLL5		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
NATU3		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.54%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
CPFE3		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
PSSA3		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
DASA3		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.54%	5.25%	4.19%	9.54%	16.42%	1.80%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GRND3		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	4.71%	0.00%	0.00%	4.72%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ALLL3		0.97%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%											
NTCO3		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
MNDL4		0.00%	0.00%	0.00%															
CYRE3		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
CSAN3		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AMER3		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
RENT3		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ENBR3		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ARTR3		0.00%	0.00%	3.97%	14.71%	0.00%	0.00%												
UOLL4		0.00%	0.00%																
CTAX4		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%												
CTAX3		0.00%	0.00%	0.00%	4.25%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
CESP6		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ELPL4		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%											
GFSA3		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
CSMG3		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TOTS3		9.35%	5.43%	2.04%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
LIGT3		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
MMXM3		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
LUPA3		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

Ação	Jan 1	Jan 2	Jan 3	Jan 4	Jan 5	Jan 6	Jan 7	Jan 8	Jan 9	Jan 10	Jan 11	Jan 12	Jan 13	Jan 14	Jan 15	Jan 16	Jan 17	Jan 18	Jan 18	
POSI3						0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
TESA3						0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
ODPV3						0.00%	0.00%	5.16%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
BISA3						0.00%	0.00%	0.00%	0.00%											
MDIA3						0.00%	0.00%	3.29%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
VLID3						0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
TAEE1						0.00%	4.83%	4.68%	9.99%	20.11%	4.04%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	16.33%	12.98%	19.95%	
PLAS3						0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
CSUD3						0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
PDGR3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
JBSS3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.69%	3.45%	
SMTO3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	4.62%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TCSA3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
SYNE3							0.00%	0.34%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	4.19%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
PINE4							0.00%	1.23%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
BRSR6							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
SLCE3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	7.89%	9.95%	0.00%	
MRVE3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
LOGN3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.23%	0.00%	0.00%	
TEND3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.58%	0.55%	0.73%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
FHER3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
BRML3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
AEDU3							0.00%	0.00%												
MULT3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
AMIL3							0.00%													
DXCO3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
ENEV3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
IGTA3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%				
SULA1							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	4.40%	0.00%	0.00%				
EVEN3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
EZTC3							0.00%	3.99%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
NEXP3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
COGN3							0.00%	0.69%	11.43%	0.00%	9.17%	2.42%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
BEEF3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
VIVR3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
BPAN4							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
AMAR3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
JHSF3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	

Ação	Jan 1	Jan 2	Jan 3	Jan 4	Jan 5	Jan 6	Jan 7	Jan 8	Jan 9	Jan 10	Jan 11	Jan 12	Jan 13	Jan 14	Jan 15	Jan 16	Jan 17	Jan 18	Jan 18
DAYC4							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%									
B3SA3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
HYPE3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
OGXP3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%							
PRML3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%								
YDUQ3							0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
EQTL3							17.47%	17.29%	27.66%	23.42%	19.62%	4.80%	0.20%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
CIEL3								9.23%	18.95%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
SANB1								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
CTIP3								0.00%	0.00%	0.00%									
FIBR3								0.00%	0.00%	11.06%	6.74%	9.99%							
FLRY3								0.00%	0.00%	0.00%	2.26%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
ENGI1								0.00%	2.72%	7.30%	6.28%	11.30%	3.79%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
DIRR3								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
BRPR3								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
ECOR3								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
MPLU3								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%							
PRI03								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	2.01%	9.58%	8.89%	11.70%	6.12%		
OSXB3								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
MILS3								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
ALSC3								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%								
TERI3								0.00%											
SIMH3								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
ENAT3								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
MGLU3								0.00%	0.00%	5.11%	4.53%	42.51%	4.58%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
QUAL3								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
AZZA3								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
ALOS3								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
MEAL3								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
LCAM3								0.00%	7.23%	17.01%	6.54%	0.38%							
BBSE3								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
SMLS3								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%								
CVCB3								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
LINX3								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%								
ALUP1								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
SEER3								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
ANIM3								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
KLBN1								0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	

Ação	Jan 1	Jan 2	Jan 3	Jan 4	Jan 5	Jan 6	Jan 7	Jan 8	Jan 9	Jan 10	Jan 11	Jan 12	Jan 13	Jan 14	Jan 15	Jan 16	Jan 17	Jan 18	Jan 18
RLOG3														0.00%	0.00%				
RAIL3														0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
WIZC3														0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
STBP3														0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
SUZB3														0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
CRFB3														0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
SAPR1														0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
MOVI3														0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
AZUL4														0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
VBBR3														0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
IRBR3														0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
BPAC1														0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
LOGG3														0.00%	0.00%				
HAPV3														0.00%	0.00%				
VIVA3															0.00%				
NEOE3															0.00%				
SBFG3															0.00%				
CEAB3															0.00%				

Fonte: Elaborada pelo autor.

REFERÊNCIAS

- BODIE, Z.; KANE, A.; MARCUS, A. J. *Essentials of investment: Global edition.* New York: McGraw-Hill, 2013.
- BRAGA, V. D. S. et al. Analyzing the performance of diversified commodity derivatives portfolios in Brazil. *Applied Economics and Finance*, v. 11, 2023. ISSN 2332-7294.
- CARESSATO, N. J. L. *Análise comparativa entre metodologias de otimização de portfólio.* Dissertação (Graduação em Engenharia Mecânica) — Universidade Estadual Paulista (Unesp), Araraquara, 2017.
- CERTIFICADO de Depósito Interbancário (CDI) - o que é, significado e definição | Bora Investir — borainvestir.b3.com.br. <<https://borainvestir.b3.com.br/glossario/certificado-de-deposito-interbancario-cdi/>>. Acesso em 25 out. 2025.
- DUARTE, F. G. *Um framework para alocação de portfólios baseada em agrupamento particional.* Dissertação (Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Computação) — Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, 2019.
- ELTON, E. J.; GRUBER, M. J.; BLAKE, C. R. Survivorship bias and mutual fund performance. *The Review of Financial Studies*, v. 9, n. 4, p. 1097–1120, 1996.
- FAMA, E. F. Random walks in stock market prices. *Financial Analysts Journal*, v. 21, n. 5, p. 55–59, set. 1965.
- FAMA, E. F. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *The Journal of Finance*, v. 25, n. 2, p. 383, maio 1970.
- FAMA, E. F. Efficient capital markets: II. *The Journal of Finance*, v. 46, 1991. ISSN 00221082.
- FAMA, R. Conceito de taxa livre de risco e sua aplicação no capital asset pricing model: um estudo exploratório para o mercado brasileiro. In: *Encontro Brasileiro de Finanças*. [S.I.]: IBMEC, 2002.
- FATIMA, L.; CORTES, O. C.; COSTA, J. P. A. Uma nova meta-heurística adaptativa baseada em vetor de avaliações para otimização de portfólios de investimentos. *Inteligência Artificial*, v. 22, p. 85–101, dez. 2019.
- GELMINI, M.; UBERTI, P. The equally weighted portfolio still remains a challenging benchmark. *International Economics*, v. 179, p. 100525, 2024. ISSN 2110-7017. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2110701724000489>>.

- GRUENBERG, T. *Portfolio Analytics: An Introduction to Return and Risk Measurement*. 1. ed. New York: Springer, 2015. ISBN 978-3-319-19812-5.
- GUZMAN, M. An analysis of Argentina's 2001 default resolution. *Comparative Economic Studies*, v. 62, 2020. ISSN 14783320.
- GÂRLEANU, N.; PEDERSEN, L. H. Active and passive investing: Understanding Samuelson's dictum. *The Review of Asset Pricing Studies*, v. 12, n. 2, p. 389–446, 2022.
- HEWAMALAGE, H.; ACKERMANN, K.; BERGMEIR, C. Forecast evaluation for data scientists: common pitfalls and best practices. *Data Mining and Knowledge Discovery*, v. 37, 2023. ISSN 1573756X.
- INSIDER Trading Policy | SEC - sec.gov. 2015. <https://www.sec.gov/Archives/edgar/data/1164964/000101968715004168/globalfuture_8k-ex9904.htm>. Acesso em 25 out. 2025.
- JENSEN, M. C. The performance of mutual funds in the period 1945–1964. *The Journal of Finance*, Wiley, v. 23, n. 2, p. 389–416, 1968.
- LAKONISHOK, J.; SHLEIFER, A.; VISHNY, R. W. Contrarian investment, extrapolation, and risk. *The Journal of Finance*, v. 49, 1994. ISSN 15406261.
- MALKIEL, B. G. The efficient market hypothesis and its critics. *Journal of Economic Perspectives*, v. 17, n. 1, p. 59–82, 2003. ISSN 08953309.
- MARKOWITZ, H. M. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.
- MARKOWITZ, H. M. Portfolio selection: Efficient diversification of investments. *Operations Research*, v. 10, 1959. ISSN 14732858.
- MARTIN, R. A. Pyportfolioopt: portfolio optimization in Python. *Journal of Open Source Software*, The Open Journal, v. 6, n. 61, p. 3066, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.21105/joss.03066>>.
- MORAIS, T. *Teoria de Markowitz*. 2021. Disponível em: <<https://pt.linkedin.com/pulse/teoria-de-markowitz-tim%C3%B3teo-morais-pinto>>.
- PASKARAMOORTHY, A.; ZYL, T. van; GEBBIE, T. The bias of iid resampled back-tests for rolling-window mean-variance portfolios. *Investment Analysts Journal*, 2025.
- PRADO, M. Lopez de. Building diversified portfolios that outperform out of sample. *Journal of Portfolio Management*, v. 42, 2016. ISSN 00954918.
- PRADO, M. Lopez de. *Advances in financial machine learning*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc, 2018.
- PRESS release. NobelPrize.org. Nobel Prize Outreach 2025. <<https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1990/press-release/>>. Acesso em: 29 jul. 2025.

- QIAN, E. Risk parity portfolios: Efficient portfolios through true diversification. *PanAgora Asset Management Research Paper*, p. 291–320, 2005.
- REIS, F. et al. Using hierarchical risk parity in the Brazilian market: An out-of-sample analysis. *Brazilian Review of Finance*, v. 21, 2023. ISSN 1679-0731.
- RESOLUCAO CVM 62 | CVM - cvm.gov.br. 2022. <<https://conteudo.cvm.gov.br/legislacao/resolucoes/resol062.html>>. Acesso em 25 out. 2025.
- SAMUELSON, P. A. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. RAND Corporation, 1965. Disponível em: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789814566926_0002>.
- SEN, J. *A Comparative Study on the Sharpe Ratio, Sortino Ratio, and Calmar Ratio in Portfolio Optimization*. Kolkata: Praxis Business School, 2022. 8 p.
- SHARPE, W. F. The Sharpe ratio. *The Journal of Portfolio Management*, v. 21, 1994. ISSN 0095-4918.
- SILVA, B. C. d. *Otimização de portfólio de investimento com análise envoltória de dados e Markowitz*. Dissertação (Graduação em Engenharia de Produção) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2022.
- SOUZA, P. O. d. *Otimização de portfólios de investimento: a estratégia de paridade de risco no cenário brasileiro*. Dissertação (Mestrado em Administração) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.
- VERBEEK, M. *A guide to modern econometrics*. Chichester: John Wiley & Sons, 2007. v. 8. ISSN 24106445.
- VYAS, A. *The hierarchical risk parity algorithm: An introduction*. 2023. Acesso em 25 out. 2025. Disponível em: <<https://hudsonthames.org/an-introduction-to-the-hierarchical-risk-parity-algorithm/>>.
- ÍNDICE Brasil 100 (IBRX 100 B3) | B3 — b3.com.br. 2025. <https://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/indice-brasil-100-ibrx-100.htm>. Acesso em 25 out. 2025.