

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

MATHEUS DUARTE MACHADO

Otimização de portfólio pelo modelo de Black-Litterman aplicado ao IMA-B5

SÃO PAULO - SP

2024

MATHEUS DUARTE MACHADO

Otimização de portfólio pelo modelo de Black-Litterman aplicado ao IMA-B5

Trabalho de conclusão de curso apresentado
ao Programa de Educação Continuada da
Escola Politécnica da Universidade de São
Paulo no MBA em Engenharia Financeira.

Orientador:

Prof. Dr. André Borges Catalão

SÃO PAULO - SP

2024

Sumário

1.	INTRODUÇÃO	7
2.	REFERENCIAL TEÓRICO	10
2.1.	MODELO DE MARKOWITZ	10
2.2.	MODELO DE BLACK-LITTERMAN	12
2.2.1.	TEOREMA DE BAYES	12
2.2.2.	EQUÍLIBRIO DE MERCADO (Π)	13
2.2.3.	GRAU DE INCERTEZA (τ)	16
2.2.4.	VISÕES DOS INVESTIDORES (P, Q)	16
2.2.5.	CONFIANÇA NAS OPINIÕES DOS INVESTIDORES (Ω)	18
2.2.6.	RETORNO ESPERADO DE BLACK-LITTERMAN (μ_{BL})	19
3.	IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO	22
3.1.	OBTENÇÃO DA BASE DE DADOS	22
3.2.	DEFINIÇÃO DAS OPINIÕES DOS INVESTIDORES	27
3.3.	PORTFÓLIOS OTIMIZADOS	29
4.	ANÁLISE DOS RESULTADOS	31
5.	CONCLUSÕES	35
6.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	37

RESUMO

Ao combinar informações de mercado com as expectativas do investidor, o modelo de Black-Litterman permite a otimização de portfólios de forma mais previsível e alinhada à realidade da gestão de carteiras. Desenvolvido a partir das premissas e conceitos introduzidos nos modelos de Markowitz e CAPM, Fisher Black e Robert Litterman solucionaram desafios como a alta sensibilidade e dependência aos dados históricos, concentração excessiva em poucos ativos e resultados irreplicáveis empiricamente. Neste trabalho, a metodologia de Black-Litterman é aplicada a um portfólio de renda fixa composto por séries genéricas de NTN-Bs com vencimentos constantes entre um e cinco anos, tornando a estratégia replicável. O principal índice de referência a ser superado é o IMA-B5, cuja composição possui os mesmos ativos, ponderados conforme sua participação na dívida do Tesouro Nacional. O fator determinante para as opiniões dos investidores é o comportamento da Taxa Selic ao longo dos ciclos econômicos dos últimos quatorze anos. Ao analisar os resultados de todo o período, é constatado que a carteira otimizada superou, em termos nominais, índices como o IMA-B5, CDI e IMA-Geral, e obteve o melhor desempenho ajustado ao risco, medido pelo Índice de Sharpe.

Palavras-chave: Black-Litterman. IMA-B5. Otimização de Carteiras. Renda Fixa. Índice de Sharpe.

ABSTRACT

By combining market information with investor views, the Black-Litterman model allows a more predictable and realistic portfolio Optimization. Developed based on the assumptions and concepts introduced in the Markowitz and CAPM models, Fisher Black and Robert Litterman addressed challenges such as the high sensitivity to and dependence on historical data, excessive concentration in few assets, and empirically non-replicable results. In this study, the Black-Litterman methodology is applied to a fixed-income portfolio composed of a generic series of NTN-Bs with constant maturities ranging from one to five years, making the strategy replicable. The main benchmark to be outperformed is the IMA-B5, whose composition includes the same securities, weighted according to its share in the Tesouro Nacional debt. The key factor in defining the investors' opinions is the behavior of the Taxa Selic throughout the economic cycles of the past fourteen years. When analyzing the results over the entire period, it is noted that the optimized portfolio outperformed, in nominal terms, indexes such as the IMA-B5, CDI and IMA-Geral. It also achieves the best risk-adjusted performance, as measured by the Sharpe Ratio.

Keywords: Black-Litterman. IMA-B5. Portfolio Optimization. Fixed Income. Sharpe Ratio.

1. INTRODUÇÃO

Na década de 1950, Harry Markowitz introduziu a primeira metodologia de otimização de portfólios no ramo de finanças, dando origem a um campo de estudo que se tornaria essencial tanto para a academia quanto para o setor financeiro mundial. Sua publicação inicial, conhecida como teoria moderna de carteiras, estabeleceu os pilares para análise de portfólios sob a ótica de risco e retorno.

Esse marco foi complementado posteriormente por modelos como o *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), publicado por William Sharpe em 1964, utilizando premissas de Markowitz e com contribuições de Tobin (1958), Treynor (1961), Lintner (1965) e Mossin (1966). O CAPM relaciona linearmente o retorno esperado de um ativo ao risco sistêmico de mercado – não diversificável – denominado Beta (β). O β corresponde ao coeficiente angular da reta de regressão do modelo e seu valor é calculado a partir da divisão entre a covariância dos retornos de um ativo com o mercado e a variância do mercado em si. Por se tratar de uma relação linear entre risco e retorno, quanto maior a volatilidade (risco) apresentada por um ativo, maior será o retorno exigido pelo investidor.

O avanço da tecnologia e estudos acadêmicos na área impulsionou o desenvolvimento de técnicas mais sofisticadas e que requerem maior poder computacional. Uma delas se destacou pela possibilidade de incorporar informações de mercado junto às expectativas dos investidores e ficou conhecida posteriormente como modelo de Black-Litterman. Proposto por Fischer Black e Robert Litterman no início dos anos 1990, o modelo ganhou visibilidade a nível mundial rapidamente e passou a ser objeto de estudo por acadêmicos e profissionais do ramo financeiro. Sua metodologia combina a teoria de equilíbrio de mercado com as opiniões dos investidores para ajuste das alocações de uma carteira, oferecendo soluções que superam limitações práticas dos métodos anteriores, como a alta sensibilidade a variações nos dados históricos, concentração excessiva em poucos ativos e soluções irreplicáveis ou sem sentido prático empiricamente.

Nesse contexto, este trabalho objetiva aplicar o modelo de Black-Litterman a um portfólio de renda fixa composto apenas por Títulos Públicos Federais indexados à inflação (NTN-B) com vencimentos de um até cinco anos e comparar o desempenho com o índice de renda fixa IMA-B5, que apresenta composição e restrições

semelhantes. O estudo parte da premissa de que ao incorporar a opinião de gestores em relação ao ciclo econômico, é possível superar os retornos desse índice de mercado utilizando os mesmos ativos, mas com pesos diferentes.

Foram utilizados quatorze anos de dados históricos, abrangendo o período de janeiro de 2010 a agosto de 2024, com rebalanceamentos periódicos da carteira ao longo desse intervalo. Para tornar o portfólio replicável e passível de se investir, foi necessário a criação de séries genéricas para refletir o retorno dos ativos de forma contínua, considerando que, anualmente, ocorre o vencimento de um dos títulos da carteira.

O critério adotado para definição das expectativas dos investidores será a evolução da Taxa Selic ao longo dos ciclos da política monetária do período analisado. A Selic é a taxa básica de juros da economia brasileira e é estabelecida pelo Comitê de Política Monetária (COPOM), órgão do Banco Central do Brasil, em reuniões que ocorrem a cada quarenta e cinco dias. De 2010 a 2024, foram identificados seis ciclos monetários de diferentes intensidades e durações. Três desses ciclos são caracterizados como períodos de aperto monetário, que promovem sucessivas elevações da Selic (01/2010 – 08/2011; 04/2013 – 11/2016; 03/2021 – 08/2023). A outra metade consistiu em ciclos de queda da taxa básica de juros, dos quais dois estão concluídos e um está em andamento (08/2011 – 04/2013; 11/2016 – 03/2021; 08/2023 – presente). Dessa forma, esses períodos serão considerados como os indicadores de ajuste das opiniões dos investidores e, consequentemente, do rebalanceamento do portfólio.

O *benchmark* a ser superado é o IMA-B5, subíndice do Índice de Mercado ANBIMA (IMA). O IMA foi criado pela Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (ANBIMA) em 2004, com intuito de ser uma referência informativa e comparativa para os investimentos de renda fixa no mercado nacional. Ele é formado por uma carteira de títulos públicos semelhante à que compõe a dívida interna do Brasil. Atualmente, esses títulos possuem diferentes formas remuneração e prazos e, para cobrir todas as opções, o IMA foi dividido em vários subíndices que replicam os ativos com características semelhantes. O IMA-B 5 representa a evolução, a preços de mercado, da carteira de títulos públicos indexados ao IPCA (NTN-B) com prazos de até cinco anos (ANBIMA, 2024).

A escolha deste índice como referência também foi motivada pela escassez de produções acadêmicas na literatura brasileira que abordam otimização de carteiras de renda fixa ou tenham como tema os índices IMA. Apesar de sua relevância, tanto pelo histórico de mais de duas décadas quanto pelo amplo uso por investidores — desde pessoas físicas até os grandes fundos de pensão —, há uma notável lacuna de estudos relacionados. Diante disso, foram encontrados apenas dois trabalhos com foco na replicação ou indexação de carteiras ao IMA-B (CARVALHAIS; DUARTE Jr., 2015) e IMA-Geral (FONSECA, 2017).

Este trabalho está estruturado em cinco seções principais. A primeira apresenta uma introdução geral ao tema e os objetivos do estudo. Na segunda parte, é realizada uma revisão teórica da teoria moderna de portfólios de Markowitz e a descrição detalhada do modelo de Black-Litterman. A terceira seção consiste no detalhamento e procedimentos para aplicação prática do modelo. A exposição e análise dos resultados obtidos é feita na quarta seção. Por fim, na quinta seção são definidas as conclusões, seguida pelas referências bibliográficas na sexta e última parte.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção serão detalhados os fundamentos teóricos das duas principais metodologias de otimização de carteira exploradas neste trabalho: o modelo de Markowitz e o modelo de Black-Litterman. Serão apresentados os principais pontos de cada abordagem, assim como suas vantagens e limitações. A discussão será mais aprofundada para o modelo de Black-Litterman, no qual será exposto seu desenvolvimento matemático e fórmulas utilizadas em sua aplicação prática.

2.1. MODELO DE MARKOWITZ

Desenvolvido por Harry Markowitz (1952), o modelo que ficou conhecido como otimização de Média-Variância ou Teoria Moderna de Portfólio, foi o pioneiro em finanças ao utilizar uma abordagem matemática (via programação linear) para o aprimoramento de carteiras de investimento. Como premissa para o desenvolvimento de seu modelo, Markowitz rejeita a hipótese de que o investidor procura apenas pela maximização do retorno de seus ativos e sugere que a rentabilidade é algo a ser perseguido, porém, deve, ao mesmo tempo, buscar minimizar o risco de sua carteira por meio da diversificação. O modelo também pressupõe que os retornos dos ativos são distribuídos normalmente e que o risco é medido exclusivamente pela variância dos retornos.

Para Markowitz (1952), a verdadeira diversificação ocorre na seleção e combinação de ativos em um portfólio que possuem baixa covariância entre si, o que reduz ou elimina o risco não-sistemático, também conhecido como risco específico. No entanto, não é possível eliminar em totalidade o risco de um portfólio, devido a permanência do risco sistemático (risco de mercado). Markowitz também demonstra que a relação entre risco e retorno é tal que, para o investidor obter maiores retornos em excesso, é necessário aceitar uma maior variância em sua carteira. Da mesma forma, é possível reduzir seu risco ao aceitar um menor retorno esperado.

Para um dado nível de retorno, o modelo define a solução ótima como aquela que apresenta a menor variância, e é indicada pelos pesos ideais dos ativos em uma carteira. Em seguida, Markowitz introduz o conceito de Fronteira Eficiente, que consiste em uma curva criada a partir da combinação de diversos portfólios ótimos para diferentes níveis de retorno e risco. De acordo com essa teoria, investidores racionais deveriam investir apenas em portfólios localizados nessa fronteira, pois é nela em que se encontram as carteiras com a menor volatilidade possível para um

retorno esperado específico. Assim, a Fronteira de Markowitz torna-se uma ferramenta importante para a construção de portfólios, auxiliando os investidores a visualizarem o *tradeoff* entre risco e retorno.

Apesar da inovação que o modelo representou para a área de finanças, a otimização de Média-Variância de Markowitz apresenta problemas significativos de aplicabilidade fora do contexto teórico. Robert Michaud (1989) em seu artigo “*The Markowitz Optimization Enigma: Is ‘Optimized’ Optimal?*” faz considerações apresentando os prós e contras do modelo, além de apontar fatores fundamentais que limitam sua efetividade empírica. Michaud aponta para problemas de concentração excessiva em ativos com alta rentabilidade esperada, ao mesmo tempo que, é comum a ocorrência de resultados com pesos excessivamente negativos (*short-selling*) para ativos com menor retorno ou mais voláteis. Esse fator, somado à dependência do modelo em dados históricos que são utilizados como *inputs* para estimar o retorno esperado, maximizam os erros de estimação dos parâmetros e tornam os resultados da otimização pouco críveis e de difícil replicação em um portfólio real. Michaud também afirma que o modelo ignora um dos fatores mais importantes na gestão de carteiras: a liquidez. Tal fator está relacionado com o tamanho da exposição de um ativo no portfólio em relação à capitalização de mercado de uma companhia. A imposição de uma limitação por liquidez (percebida apenas empiricamente) em uma carteira resultará em uma otimização com retornos piores e/ou menor redução de risco. Por fim, o autor menciona a instabilidade das soluções ótimas, onde pequenas variações nas premissas iniciais podem provocar grandes flutuações nos pesos finais dos ativos e sugere que o problema pode estar no mau-condicionamento da matriz de covariância, derivado da utilização de dados históricos insuficientes ou de estimativas não condizentes com a realidade.

He e Litterman (1999) citam duas razões em que acreditam explicar a baixa aplicabilidade do modelo de Markowitz na indústria financeira. A primeira é que gestores de portfólio tendem a focar em estratégias específicas para o universo de ativos investíveis, seja ela qual for. Enquanto isso, o modelo requer de forma irreal, que o gestor especifique o retorno esperado para todos os ativos, o que na prática é feito utilizando um *benchmark* mais amplo para a classe. A segunda razão é que os *portfolio managers* tendem a construir suas carteiras a partir dos pesos de cada ativo, enquanto Markowitz propõe o balanceamento entre rentabilidade e contribuição de

risco para o portfólio. Com isso, é comum que, ao testarem essa abordagem, as soluções ótimas apresentadas pelo otimizador são extremas e contraintuitivas. Segundo os autores, essa foi a motivação original para o modelo de Black-Litterman ser desenvolvido.

2.2. MODELO DE BLACK-LITTERMAN

Em 1990, Fischer Black e Robert Litterman introduziram em um memorando interno do Goldman Sachs, um artigo intitulado *Global Portfolio Optimization*, no qual apresentaram uma abordagem inovadora para a construção de portfólios, posteriormente conhecida como Modelo de Black-Litterman. Dois anos depois, em um artigo na *Financial Analysts Journal*, foi feita a primeira divulgação formal e acessível sobre o tema, onde mais detalhes e discussões sobre a otimização foram publicados. Para o desenvolvimento do modelo, Black e Litterman utilizaram uma abordagem bayesiana, que combina as expectativas de investidores sobre a rentabilidade esperada de um ou mais ativos com o vetor de equilíbrio de mercado para formar uma nova estimativa de retornos para os ativos (IDZOREK, 2004). Uma das razões da ampla adoção do modelo por instituições financeiras e gestoras de recursos está na liberdade e flexibilidade que ele oferece para os gestores incorporarem suas visões de mercado durante a otimização. Além disso, Idzorek destaca que o modelo de B-L resolve os problemas de alta concentração, sensibilidade de *inputs*, resultados contraintuitivos e maximização de erros encontrados no modelo de Markowitz.

2.2.1. TEOREMA DE BAYES

O Teorema de Bayes tem papel fundamental no desenvolvimento do modelo de Black-Litterman, permitindo a integração das expectativas dos investidores aos retornos de equilíbrio de mercado por meio da estatística de probabilidade condicional. Walters (2008) apresenta o teorema da seguinte forma:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)} \quad (1)$$

Onde,

$P(A|B)$ é a probabilidade de ocorrer o evento A, dado B; (Distribuição posterior)

$P(B|A)$ é a probabilidade de ocorrer o evento B, dado A; (Distribuição condicional)

$P(A)$ é a probabilidade de ocorrer o evento A; (Distribuição prévia)

$P(B)$ é a probabilidade de ocorrer o evento B; (Constante de normalização)

Considere que o evento A seja o retorno esperado pelo investidor (opinião) e o evento B, o retorno de equilíbrio de mercado. Temos que o resultado do teorema é a incorporação de informações prévias (expectativas do investidor) com os dados amostrais de mercado, sendo possível assim, gerar uma distribuição de probabilidade atualizada a partir de duas fontes de informação.

2.2.2. EQUÍLIBRIO DE MERCADO (Π)

O ponto de referência (e partida) para o modelo de Black-Litterman é o equilíbrio de mercado, denotado por Π , que se baseia no *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). O CAPM assume que os preços de mercado se ajustam até que os retornos esperados de todos os ativos em equilíbrio alcancem um nível que, se todos os investidores têm a mesma expectativa, a demanda por esses ativos será exatamente igual ao tamanho da oferta. Em outras palavras, o equilíbrio de mercado reflete o consenso do mercado sobre o retorno de cada ativo. (HE E LITTERMAN, 2002).

Para construção do vetor Π , utilizaremos o embasamento teórico e metodologia apresentada por Walters (2008). O CAPM aponta a existência de uma relação linear entre risco, medido pelo desvio padrão, e retorno. Também considera que os retornos são normalmente distribuídos. Sua fórmula é dada por:

$$E(r) = R_f + \beta R_m + \alpha \quad (2)$$

Onde,

$E(r)$ é o retorno esperado de um portfólio;

R_f é a taxa livre de risco;

R_m é o excesso de retorno da carteira de mercado;

β é um coeficiente de regressão calculado por: $\beta = \rho_{p,m} \frac{\sigma_p}{\sigma_m}$, em que $\rho_{p,m}$ é a correlação entre os retornos do portfólio p e os retornos de mercado m .

α é o resíduo ou excesso de retorno específico de um ativo

A teoria do CAPM afirma que o risco atrelado ao α de um ativo é descorrelacionado de outros e, por conta disso, esse tipo de risco pode ser reduzido por meio da diversificação. Portanto, o investidor deve ser remunerado apenas pelo risco não-específico (ou sistemático), que é medido pela variável β .

Como o ponto de partida é o portfólio de mercado, a soma dos pesos dos ativos deverá ser 1 e apenas ativos com risco farão parte de sua composição, ou seja, a rentabilidade dos investidores será baseada apenas na tomada de risco sistemático. O ativo livre de risco ($\beta = 0$) não está presente na carteira de mercado do modelo CAPM.

É considerado que a matriz de covariância dos retornos (Σ) já é conhecida e calculada a partir de dados históricos. Sua estimação não é descartada, mas Walters (2008) afirma que há dificuldades significantes em estimar uma matriz de covariância consistente e utilizar a covariância de retornos históricos introduz erros excessivos ao modelo.

A função objetivo (utilidade) a ser otimizada é:

$$U = w^T \Pi - \left(\frac{\delta}{2}\right) w^T \Sigma w \quad (3)$$

Na qual,

U é a função utilidade dos investidores

w é o vetor dos pesos de cada ativo na carteira de mercado

Π é o vetor do excesso de retorno no equilíbrio de mercado

δ é o coeficiente de aversão ao risco

Σ é a matriz de covariância

U possui máximo global único por ser uma função côncava. Maximizando U de forma irrestrita, encontraremos uma solução fechada. Para isso, calculamos a primeira derivada de (3) em relação aos pesos e igualamos a 0:

$$\frac{dU}{dw} = \Pi - \delta \Sigma w = 0 \quad (4)$$

Isolando Π :

$$\Pi = \delta \Sigma w \quad (5)$$

Idzorek (2004) descreve o procedimento acima como uma “otimização reversa”, pois ao contrário do processo tradicional de otimização, neste caso os retornos implícitos do mercado são inferidos com base em informações previamente conhecidas.

Seja n o número de ativos em um portfólio. Π é um vetor de dimensão $n \times 1$, Σ é uma matriz $n \times n$ e w é um vetor $n \times 1$. Para calcularmos o valor de Π , é necessário encontrar o valor de δ , o parâmetro de aversão ao risco. Idzorek (2004) destaca que δ representa o *tradeoff* esperado entre risco e retorno, atuando como um fator de escala para a otimização reversa dos retornos excedentes. Um valor mais elevado de δ aumenta a estimativa dos retornos implícitos, pois reflete a maior exigência de retorno para o risco assumido pelo investidor. Além de δ , o modelo de Black-Litterman incorpora outro parâmetro que ajusta e quantifica as incertezas associadas às opiniões do investidor. Esta variável é representada pela letra grega τ e será abordada com maiores detalhes em outro capítulo dedicado no trabalho.

Multiplicando ambos os lados de (5) por w^T e substituindo os vetores por escalares, temos:

$$w^T \Pi = \delta w^T \Sigma w \quad (6)$$

E sabemos que:

$$w^T \Sigma w = \sigma^2 \quad (7) \quad \text{e} \quad w^T \Pi = E(r) - R_f \quad (8)$$

Substituindo (7) e (8) em (6), chegamos em:

$$\delta = \frac{E(r) - R_f}{\sigma^2} \quad (9)$$

O numerador de (9) reflete o prêmio de risco do mercado e o denominador, a variância da carteira de mercado. Agora que temos o valor de δ , é possível calcular a solução fechada (Π) pela Equação (5).

Conforme destacado por Idzorek (2004), o vetor dos retornos de equilíbrio (Π) gera um portfólio ponderado pela capitalização de mercado dos ativos. Caso os investidores não tenham opiniões sobre os ativos, a otimização terá a composição da carteira de mercado. Em outras palavras, a partir do vetor Π é formada a alocação de

referência (neutra) para o modelo de Black-Litterman e sua distribuição prévia de equilíbrio é $N \sim (\Pi, \tau\Sigma)$.

2.2.3. GRAU DE INCERTEZA (τ)

A literatura apresenta diversas interpretações e metodologias para o uso do parâmetro τ . Isso ocorre devido a sua natureza subjetiva e falta de consenso entre os autores. He e Litterman (2002) afirmam que o escalar representa a incerteza do modelo CAPM. Idzorek (2004) argumenta que τ é inversamente proporcional ao peso relativo atribuído ao vetor de equilíbrio de mercado (Π), ou seja, um valor baixo indica maior confiança nas estimativas de equilíbrio, enquanto um valor maior dá mais peso às expectativas dos investidores na otimização. O autor sugere que o valor do escalar deve se situar entre 0,01 e 0,05. Black e Litterman (1992) e Lee (2000) interpretam que, por a incerteza da média dos retornos ser menor do que a variância dos retornos em si, τ é próximo de zero (em linha com Idzorek). Por outro lado, Satchell e Scowcroft (2000) propõem 1 como o valor padrão de τ . Blamont e Firoozye (2003) consideram que τ corresponde ao desvio padrão de Π e seu cálculo é:

$$\tau = \frac{1}{N} \quad (10)$$

Em que N é o número de amostras de dados utilizados.

2.2.4. VISÕES DOS INVESTIDORES (P, Q)

A etapa seguinte na construção da modelagem de Black-Litterman é uma de suas maiores vantagens e diferencial em relação aos modelos tradicionais, como Markowitz e CAPM: a incorporação das opiniões dos investidores sobre o retorno dos ativos. O conjunto de visões é tratada como uma distribuição condicional, que será combinada posteriormente com a distribuição prévia de equilíbrio de mercado. O modelo ajusta todos os retornos esperados a partir de seus valores de referência (equilíbrio de mercado), de forma consistente com a expectativa que foi expressa (He e Litterman, 2003).

As opiniões podem ser absolutas ou relativas. As expectativas relativas são aquelas que comparam dois ativos e o investidor informa o quanto (em porcentagem) espera-se que um ativo performe mais (ou menos) que o outro. Já na absoluta é necessário indicar apenas o excesso de retorno esperado de uma única posição. Não é obrigatório que o investidor tenha opinião sobre todas as posições.

Walters (2008) ressalta a importância das opiniões dos investidores serem independentes, ou seja, não serem correlacionadas. Isso garante que a matriz de covariância da distribuição condicional seja diagonal. O autor afirma que isso gerará mais estabilidade e simplificação ao modelo, evitando a complexidade e aumento da propensão a erros adicional ao estimar a covariância entre as opiniões.

Seja k o número de opiniões que o investidor possui e n o número de ativos em seu portfólio. Suas representações serão da seguinte forma:

Q Matriz $k \times 1$ com os retornos de cada visão;

P Matriz $k \times n$ em que cada linha representa o peso dos ativos para cada visão.

Se a opinião for absoluta, a soma dos pesos (linha) deve ser 1 e, caso seja relativa, deverá ser 0.

A partir da Equação (5), chegamos na distribuição prévia dos retornos (sem opiniões incorporadas), que é centrada no equilíbrio de mercado e normalmente distribuída com média Π :

$$\mu = \Pi + \varepsilon_e \quad (11)$$

Onde ε_e segue uma distribuição normal com média zero e covariância $\tau\Sigma$. Sendo τ o escalar detalhado no item 2.2.3 e Σ a matriz de covariância dos retornos dos ativos.

Matematicamente, a opinião do investidor é expressa como:

$$P\mu = Q + \varepsilon_v \quad (12)$$

Na qual P e Q são as matrizes descritas neste item e a incerteza das visões é exibida pela variável ε_v que segue uma distribuição normal, com média zero e com variância Ω . O parâmetro Ω será descrito no item 2.2.5.

Agora, a combinação das visões do investidor com a distribuição prévia dos retornos pela abordagem bayesiana é dada por:

$$\begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} \cdot \mu = \begin{bmatrix} \Pi \\ Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_e \\ \varepsilon_v \end{bmatrix} \quad (13)$$

Um exemplo hipotético será apresentado para auxiliar na interpretação. Considere que a carteira a ser otimizada possui quatro ativos ($n = 4$) e o investidor tem duas opiniões ($k = 2$):

1ª: O ativo 1 terá uma performance de 2% acima do ativo 2. (Relativa)

2ª: O ativo 4 performará acima do mercado em 4%. (Absoluta)

Dessa forma, P e Q são definidas por:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Observe que a soma dos elementos da primeira linha de P igual a zero, assim como a soma dos elementos da segunda linha é igual a um. Isso reflete a forma como as visões dos investidores são estruturadas no modelo. Uma outra variação possível das opiniões, seria o investidor acreditar que os ativos 1 e 3, em conjunto, terão um retorno 2% superior que o ativo 2. Nesse caso, os valores de P_{11} e P_{13} teriam um valor de 0,5, representando o peso igualmente distribuído entre eles.

2.2.5. CONFIANÇA NAS OPINIÕES DOS INVESTIDORES (Ω)

A incerteza (ou confiança) dos investidores em relação as suas próprias expectativas também são inseridas no modelo de Black-Litterman. O parâmetro Ω representa a matriz de variância das opiniões, sendo inversamente proporcionais à confiança nas previsões. Para Idzorek (2004), Ω é o parâmetro matemático mais abstrato do modelo. Litterman (2003) discorre que a forma correta de calcular Ω é uma questão frequentemente discutida e sem consenso sobre a resposta.

Walters (2008) destaca algumas maneiras de calcular o parâmetro:

- Proporcional à variância prévia
- Utilizando intervalos de confiança
- Em um modelo por fatores por meio da variância de resíduos
- Metodologia proposta por Idzorek (2004)

Neste trabalho utilizaremos o primeiro item: pela proporção da variância *a priori*. Nesse método, é assumido que a variância das opiniões são proporcionais à variância dos retornos dos ativos, assim como a variância da distribuição prévia (WALTERS, 2008). Logo, Ω é calculado pela fórmula:

$$\Omega = \text{diag}(P(\tau\Sigma)P^T) \quad (14)$$

Na qual Ω é uma matriz diagonal de dimensão $k \times k$, com elementos diferentes de zero nas posições ω_{ii} .

Walters ainda explica que a especificação da incerteza das expectativas atribuí, na prática, pesos iguais às opiniões dos investidores e aos pesos do equilíbrio de mercado. A inclusão do parâmetro τ no cálculo torna a solução menos sensível ao valor definido para τ . Essa abordagem parece ser a mais comum na literatura.

Com Ω calculado, podemos definir a distribuição condicional das opiniões (P_μ) segue uma distribuição normal, sendo Q sua média e variância Ω : $P_\mu \sim N(Q, \Omega)$.

2.2.6. RETORNO ESPERADO DE BLACK-LITTERMAN (μ_{BL})

Para calcular o equilíbrio de Black-Litterman, retomaremos ao Teorema de Bayes, cuja fórmula de probabilidade condicional é apresentada na Equação (1). Veríssimo (2023) propõe uma reformulação da expressão para facilitar sua interpretação da seguinte forma:

$$f_{\mu|P\mu}(P) = \frac{f_{P\mu|\mu}(P)f_{\mu}(P)}{f_{P\mu}(P)} \quad (15)$$

Onde,

$f_{\mu|P\mu}$ é a função densidade da probabilidade dos retornos condicionados às opiniões dos investidores;

f_{μ} é a função densidade de probabilidade da distribuição prévia;

$f_{P\mu|\mu}$ é a função densidade da probabilidade das expectativas se concretizarem, condicionado aos retornos esperados;

$f_{P\mu}$ é a distribuição marginal das visões dos investidores.

A partir de (13) e suas derivações matemáticas, temos que o retorno esperado pelo modelo de Black Litterman (μ_{BL}) é dado por:

$$\mu_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}Q] \quad (16)$$

Com os retornos ajustados (μ_{BL}) calculados, a etapa final consiste em determinar a nova variância (Σ_p). Idzorek (2004) destaca a importância de somar a variância posterior dos retornos estimados (M) com a covariância dos retornos de equilíbrio de mercado (Σ). Essa combinação reflete a incerteza das expectativas do investidor e a volatilidade dos dados históricos. O resultado dessa adição será utilizado como a covariância no otimizador. Utilizando a abordagem de He e Litterman (1999) e Idzorek (2004), temos o seguinte desenvolvimento:

$$\Sigma_p = \Sigma + M \quad (17)$$

Na qual,

$$M = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1} \quad (18)$$

Substituindo (18) em (17):

$$\Sigma_p = \Sigma + [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1} \quad (19)$$

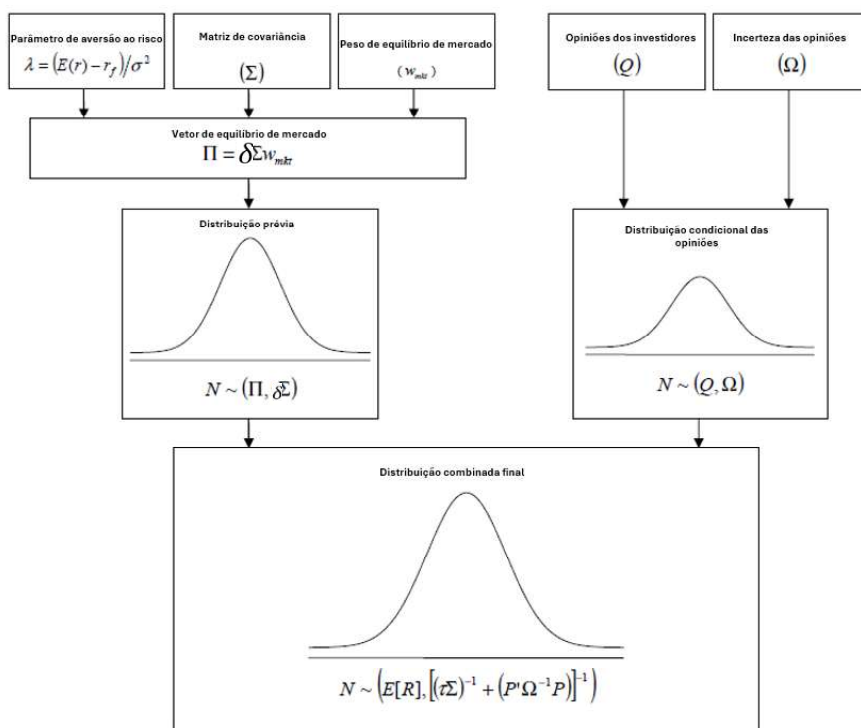
Finalmente, a solução ótima de Black-Litterman sem restrições é dada pelo vetor de pesos dos ativos w_{BL} :

$$w_{BL} = (\delta\Sigma_p)^{-1}\mu_{BL} \quad (20)$$

He e Litterman (1999) e Litterman (2003) sugerem que caso o investidor possua algum tipo de restrição para alocação, será necessária uma adaptação do modelo de Black-Litterman por meio de uma otimização de média-variância adicional para determinar o vetor de pesos dos ativos. Nesse ajuste, são utilizados o vetor dos retornos esperados de B-L (μ_{BL}) e a matriz de covariância (Σ) em conjunto com as restrições impostas. Idzorek (2004) alerta que a intuitividade do modelo (considerado um ponto forte) se torna menos aparente ao adicionar restrições como beta, volatilidade e venda a descoberto.

A Figura 1 sintetiza a metodologia utilizada para o detalhamento do modelo de Black-Litterman.

Figura 1 – Construção do Modelo de Black-Litterman



Adaptação: Autor. Fonte: Idzorek (2004)

3. IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO

3.1. OBTENÇÃO DA BASE DE DADOS

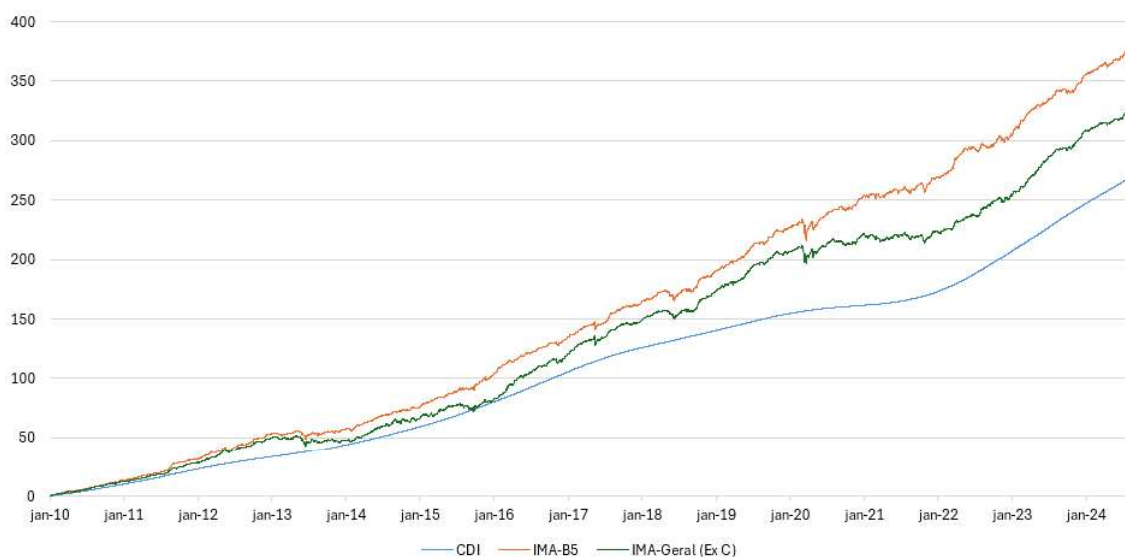
A primeira etapa da construção do modelo é a coleta das séries históricas dos ativos e índices que serão utilizados. O período de análise compreende de 04/01/2010 até 30/08/2024, com dados na forma de retornos diários. A partir dessas séries históricas, é possível calcular diversas métricas relevantes, como rentabilidade acumulada e anualizada, volatilidade (desvio padrão) e variância, *drawdown*, entre outros indicadores estatísticos que serão utilizados para análise do portfólio otimizado.

O principal índice de referência deste trabalho é o IMA-B5, que replica a evolução de preços das Notas do Tesouro Nacional – Série B (NTN-B) com vencimento de até cinco anos. As NTN-Bs são ativos que remuneram a variação do IPCA (índice oficial de inflação do país) acrescidas de uma taxa de juros pré-fixada (conhecida como juro real). Esses ativos realizam o pagamento de cupons semestrais, a uma taxa de 6% ao ano. A composição do IMA-B5 é dinâmica ao longo do tempo por utilizar como ponderação o total de títulos em circulação no mercado, conforme as emissões do Tesouro Nacional.

Também serão utilizados como *benchmarks* adicionais o CDI e o IMA-Geral (Ex-C). O IMA-G (Ex-C), ao contrário do IMA-B5, é um índice mais amplo de mercado, composto por todas as variações de Títulos Públicos Federais (TPF) em circulação, com exceção das NTN-C, que são indexadas ao IGP-M. É conhecido como o *benchmark* mais abrangente da classe renda fixa por ter em sua composição ativos pós e pré-fixados (LFT e LTN), assim como indexados à inflação (NTN-B). No entanto, o CDI é o mais utilizado como padrão da classe, devido ao seu caráter representativo das taxas de juros de curto prazo e a sua popularidade entre investidores.

O Gráfico 1 mostra o retorno acumulado dos índices citados durante o período de análise.

Gráfico 1 – Retorno acumulado dos benchmarks



Fonte: Elaboração própria (2024)

O portfólio a ser otimizado é composto por NTN-Bs com vencimentos de um a cinco anos. Considerando que, anualmente, ocorre o vencimento de um título em carteira, foi necessário criar cinco séries genéricas com “vencimento constante” para representar o retorno das NTN-Bs ao longo dos 14 anos. As séries são nomeadas por:

- NTN-B 1 ano;
- NTN-B 2 anos;
- NTN-B 3 anos;
- NTN-B 4 anos;
- NTN-B 5 anos;

A fim de facilitar o entendimento e interpretação da metodologia, discorreremos dois exemplos. Durante o ano de 2015, os retornos diários definidos para os ativos genéricos foram baseados nos seguintes ativos:

- NTN-B 1 ano = NTN-B com vencimento em 2016
- NTN-B 2 anos = NTN-B com vencimento em 2017
- NTN-B 3 anos = NTN-B com vencimento em 2018
- NTN-B 4 anos = NTN-B com vencimento em 2019
- NTN-B 5 anos = NTN-B com vencimento em 2020

Para o ano de 2024, a relação fica da seguinte maneira:

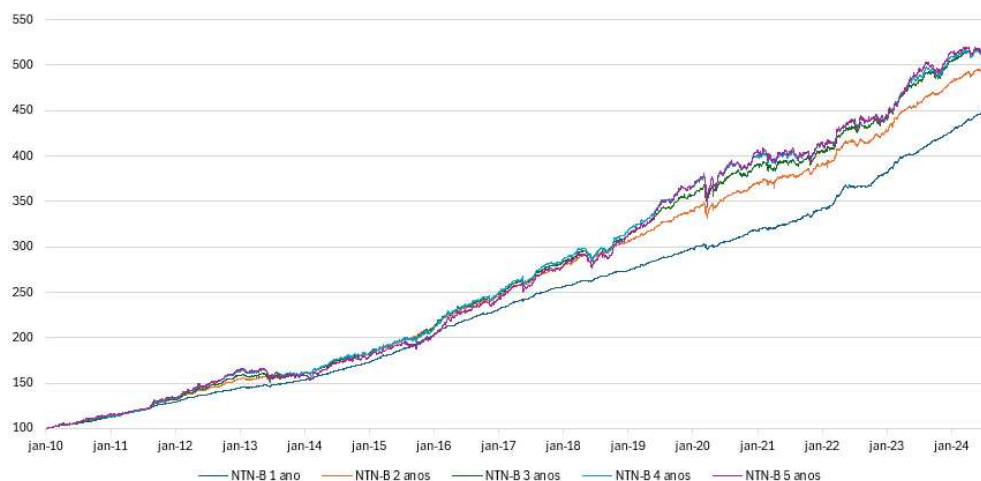
- NTN-B 1 ano = NTN-B com vencimento em 2025
- NTN-B 2 anos = NTN-B com vencimento em 2026
- NTN-B 3 anos = NTN-B com vencimento em 2027
- NTN-B 4 anos = NTN-B com vencimento em 2028
- NTN-B 5 anos = NTN-B com vencimento em 2029

As trocas do ativo referência para as séries genéricas sempre ocorrem na virada de ano.

Embora façam parte dos índices IMA, os títulos com vencimento do mesmo ano da data-base (equivalente à série “NTN-B 0 ano”) foram excluídos do estudo. Essa decisão foi tomada devido à disponibilidade limitada desses ativos no mercado. As NTN-Bs com vencimento em anos ímpares têm como padrão a data de expiração no dia 15 de maio, enquanto aquelas com vencimento em anos pares expiram em 15 de agosto. Assim, em anos ímpares, as NTN-Bs vencendo naquele mesmo ano-calendário ficam disponíveis para o investidor por apenas quatro meses e meio, enquanto nos anos pares, sua disponibilidade aumenta para sete meses e meio. Ao considerar um intervalo de dois anos, sua disponibilidade total é de apenas 12 meses (7,5 + 4,5). Portanto, para fins de simplificação e aumento da replicabilidade do modelo, as NTN-Bs com vencimento no mesmo ano da análise foram desconsideradas.

O Gráfico 2 mostra a evolução de preços dos cinco ativos genéricos partindo da base 100.

Gráfico 2 – Evolução de preços das séries NTN-Bs genéricas



Fonte: Elaboração própria (2024)

Nota-se que no longuíssimo prazo, as NTN-Bs de 3, 4 e 5 anos têm desempenho similares, com o título de 2 anos entregando um retorno ligeiramente inferior. A NTN-B de 1 ano possui um diferencial negativo de rentabilidade mais acentuado em relação aos outros.

Além de dados relativos aos retornos dos ativos, é fundamental a inclusão de medidas de risco em uma análise. O Índice de Sharpe (IS) é um indicador amplamente utilizado no mercado financeiro para avaliar a relação entre excesso de retorno (acima da taxa livre de risco) e a volatilidade de um ativo (ou portfólio). Ele fornece uma avaliação de quanto retorno adicional é obtido para cada unidade de risco (medido pelo desvio padrão) assumido. Quanto maior o Índice de Sharpe, maior será o prêmio pelo risco tomado pelo investidor. O IS é calculado pela fórmula a seguir:

$$IS = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p} \quad (16)$$

Onde,

R_p é o retorno nominal de um portfólio ou ativo;

R_f é o retorno da taxa livre de risco (CDI no Brasil);

σ_p é o desvio padrão dos retornos de um portfólio ou ativo (volatilidade);

Na Tabela 1 são exibidos os dados (anualizados) necessários para o cálculo do Índice de Sharpe para cada série de NTN-B. O CDI anualizado do período deste estudo foi de 9,39%.

Tabela 1 – Retorno nominal, desvio padrão e Índice de Sharpe – Séries NTN-B

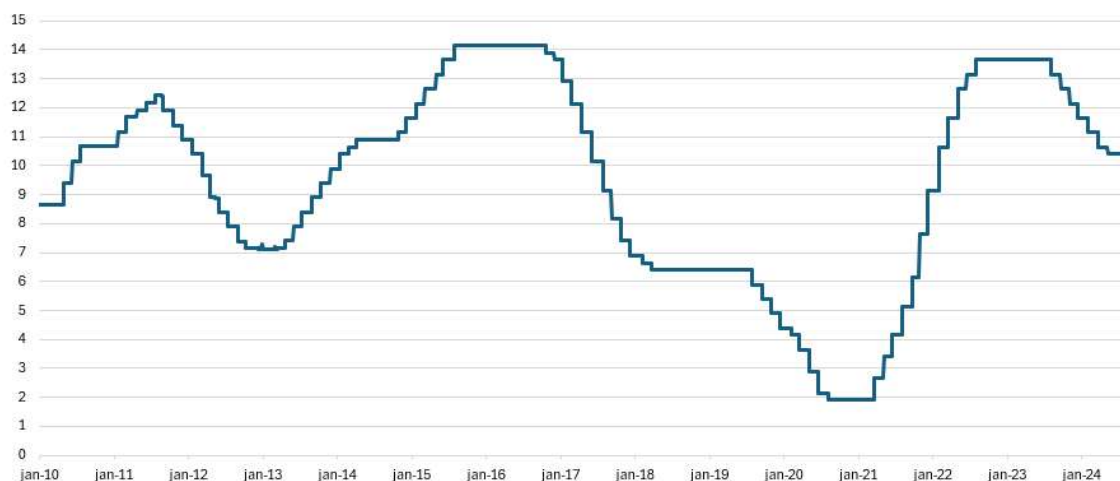
Ativo	Retorno Anualizado	Risco Anualizado	Índice de Sharpe
NTN-B 1 ano	10,95%	1,74%	0,90
NTN-B 2 anos	11,68%	2,91%	4,01
NTN-B 3 anos	12,02%	4,18%	2,88
NTN-B 4 anos	12,02%	4,84%	2,48
NTN-B 5 anos	12,07%	5,62%	2,15

Fonte: Elaboração própria (2024)

Observa-se que a NTN-B de 2 anos foi o vencimento que melhor remunerou o investidor pelo risco assumido (maior IS), apesar de ter sido a penúltima posição em relação à rentabilidade acumulada no intervalo, conforme visto no Gráfico 2. O aumento da volatilidade conforme os vencimentos ficam mais longos é uma tendência já esperada, visto que, quanto maior a duration de um ativo, maior será seu risco. Como a rentabilidade dos títulos com vencimento a partir de 3 anos se mantiveram próximos, houve uma redução gradual de seus Índices de Sharpe. Vale ressaltar, no entanto, que os dados apresentados na Tabela 1 são estáticos e se referem a uma janela temporal específica. Durante os 14 anos analisados, existiram períodos em que os ativos defensivos obtiveram números superiores aos mais longos, e vice-versa. Essa dinâmica será incorporada por meio da inserção de opiniões sobre as NTN-Bs no modelo de Black-Litterman.

A incorporação das expectativas dos investidores terá como referência o ciclo da política monetária brasileira. O principal instrumento à disposição do Banco Central do Brasil para realizar esse controle é a taxa de juros de curto prazo, conhecida como Selic Over. A taxa Selic, expressa em %a.a (percentual ao ano), serve como base para as demais taxas de juros no mercado por ser considerada a remuneração livre de risco. Além disso, ela exerce influência direta nas decisões dos agentes econômicos em relação ao consumo e investimento e, consequentemente, impactando a atratividade dos títulos públicos indexados à inflação. Em ciclos de alta da taxa básica de juros e pressão inflacionária, os títulos com vencimentos mais curtos tendem a ser obter performance superiores devido sua menor sensibilidade às taxas de juros e maior correlação com a inflação de curto prazo. Em contrapartida, nos ciclos de queda (que tendem a ocorrer quando a inflação está sob controle), as NTN-Bs com vencimento mais longo são mais beneficiadas pela duration maior. No Gráfico 3 temos a evolução da taxa Selic de 04/01/2010 a 30/08/2024.

Gráfico 3 – Taxa Selic (%a.a)



Fonte dos dados: Banco Central do Brasil. Elaboração própria (2024)

3.2. DEFINIÇÃO DAS OPINIÕES DOS INVESTIDORES

Consideraremos um ciclo de alta (queda) da Selic ou aperto (afrouxamento) monetário durante todo o intervalo em que a decisão do COPOM for de manter ou elevar (reduzir) a taxa básica de juros. Assim, de janeiro de 2010 a agosto de 2024, identificamos seis ciclos monetários. O Gráfico 4 exibe a divisão desses períodos ao longo do tempo.

Gráfico 4 – Divisão dos ciclos monetários de 2010 a 2024



Fonte dos dados: Banco Central do Brasil. Elaboração própria (2024)

Na Tabela 2 são apresentadas as classificações, durações, datas de início e fim de cada período. Serão nessas datas que o portfólio será rebalanceado devido à mudança das expectativas do investidor em relação ao retorno das NTN-Bs. É

importante ressaltar que os rebalanceamentos são realizados nos dias seguintes às reuniões do COPOM. Ou seja, a reação do investidor é pós fato relevante, o que replica as condições reais de mercado naquelas datas e remove o viés de antecipação do modelo.

Tabela 2 – Características dos ciclos monetários

Período	Classificação	Data início	Data final	Duração (DC)
1	Alta	04/01/2010	01/09/2011	605
2	Queda	02/09/2011	18/04/2013	594
3	Alta	19/04/2013	20/10/2016	1280
4	Queda	21/10/2016	18/03/2021	1609
5	Alta	19/03/2021	03/08/2023	867
6	Queda	04/08/2023	30/08/2024	392

Fonte: Elaboração própria (2024)

Para determinar as matrizes P e Q dos ciclos de alta e queda da Selic, foram selecionados os ativos que obtiveram excesso de retorno mais evidente em relação aos demais em cada um dos intervalos, com base nos dados históricos.

Nos períodos de redução da taxa básica de juros, verificou-se as seguintes tendências:

- A “NTN-B 5 anos” registrou, em média, um desempenho 4% superior ao da “NTN-B 1 ano”.
- O retorno da “NTN-B 4 anos” foi, em média, 2% acima ao da “NTN-B 2 anos”.

Assim, transformando essas informações para o formato matricial necessário, definimos as opiniões sobre os períodos de política monetária expansionista da seguinte forma:

$$P_Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q_Q = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Em contraste, nos intervalos em que o Banco Central optou por uma política monetária mais restritiva, estabelecemos que:

- A “NTN-B 1 ano” registrou uma performance 1,40% superior ao da “NTN-B 5 anos”.
- O retorno da “NTN-B 2 anos” foi 0,75% acima ao da “NTN-B 4 anos”.

Logo, temos que P_A e Q_A são expressos por:

$$P_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q_A = \begin{bmatrix} 1,4 \\ 0,75 \end{bmatrix}$$

Todos os retornos são expressos em porcentagem ao ano (%a.a).

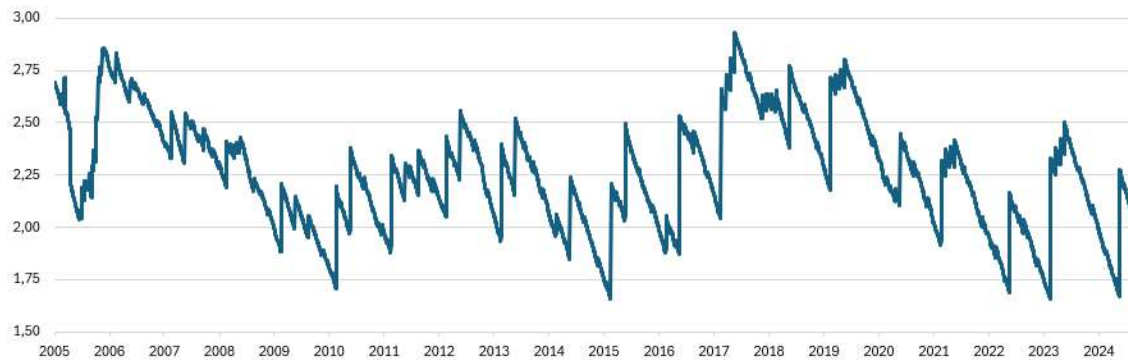
3.3. PORTFÓLIOS OTIMIZADOS

Para a continuação da implementação do modelo de Black-Litterman, foram determinados dois vetores de equilíbrio de mercado (Π) correspondentes aos dois critérios das matrizes P e Q : alta e redução da Selic. O vetor de pesos ponderados pela capitalização de mercado (w_{mkt}) foi calculado a partir da participação média histórica de cada vencimento na composição do IMA-B5, considerando expirações de 1 a 5 anos:

$$w_{mkt} = \begin{bmatrix} 0,208 \\ 0,217 \\ 0,246 \\ 0,182 \\ 0,147 \end{bmatrix}$$

A duration dessa carteira teórica é de aproximadamente 2,28 anos, em linha com a média histórica do IMA-B5 de 2,26 anos. O Gráfico 5 exibe a evolução da duration (em anos) do IMA-B5 desde 2005.

Gráfico 5 – Duration histórica do índice IMA-B5



Fonte: Elaboração própria (2024)

A matriz de covariância (Σ) foi estimada a partir das séries históricas das NTN-Bs genéricas descritas no item 3.1. O parâmetro τ foi fixado em 0,01, adotando o limite inferior sugerido pela literatura, considerando o extenso período de dados históricos coletados (mais de 14 anos). A matriz Ω foi calculada conforme a Equação (14). Com

todas as variáveis estabelecidas, a Equação (16) foi aplicada para calcular os dois vetores de retornos de Black-Litterman. O vetor que utiliza as matrizes P_Q e Q_Q , refletindo os cenários de queda de juros, será denominado μ_{BL-Q} . Já o vetor que incorporou as matrizes P_A e Q_A , referentes as expectativas para o ciclo de alta, será identificado por μ_{BL-A} .

Embora seja possível estruturar uma posição equivalente a uma venda descoberta em NTN-B por meio de derivativos, neste trabalho optou-se por restringir tal operação. Logo, para calcular os pesos w_{BL-Q} e w_{BL-A} na solução ótima com proibição ao *short selling*, os vetores de retorno μ_{BL-Q} e μ_{BL-A} foram inseridos em um otimizador de média-variância. Nesse novo processo, a matriz de covariância (Σ) permaneceu a mesma da etapa inicial.

A Tabela 3 mostra as alocações de carteira adotadas em cada ciclo monetário. A combinação dos retornos diários de todos os intervalos resulta em uma única série temporal, que captura a performance do portfólio otimizado pelo modelo de Black-Litterman e rebalanceado periodicamente com base nas expectativas do investidor.

Tabela 3 – Rebalanceamentos de carteira

Período	Classificação	Data início	Data final	Composição
1	Alta	04/01/2010	01/09/2011	w_{BL-A}
2	Queda	02/09/2011	18/04/2013	w_{BL-Q}
3	Alta	19/04/2013	20/10/2016	w_{BL-A}
4	Queda	21/10/2016	18/03/2021	w_{BL-Q}
5	Alta	19/03/2021	03/08/2023	w_{BL-A}
6	Queda	04/08/2023	30/08/2024	w_{BL-Q}

Fonte: Elaboração própria (2024)

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

A Tabela 4 detalha o peso atribuído a cada NTN-B nas duas soluções ótimas (w_{BL-Q} e w_{BL-A}), bem como na carteira de equilíbrio de mercado (w_{mkt}).

Tabela 4 – Pesos dos portfólios otimizados com restrição à *short selling*

Ativo	w_{BL-Q}	w_{BL-A}	w_{mkt}
NTN-B 1 ano	3,80%	71,40%	20,80%
NTN-B 2 anos	4,10%	28,60%	21,70%
NTN-B 3 anos	24,80%	0,00%	24,60%
NTN-B 4 anos	34,00%	0,00%	18,20%
NTN-B 5 anos	33,30%	0,00%	14,70%

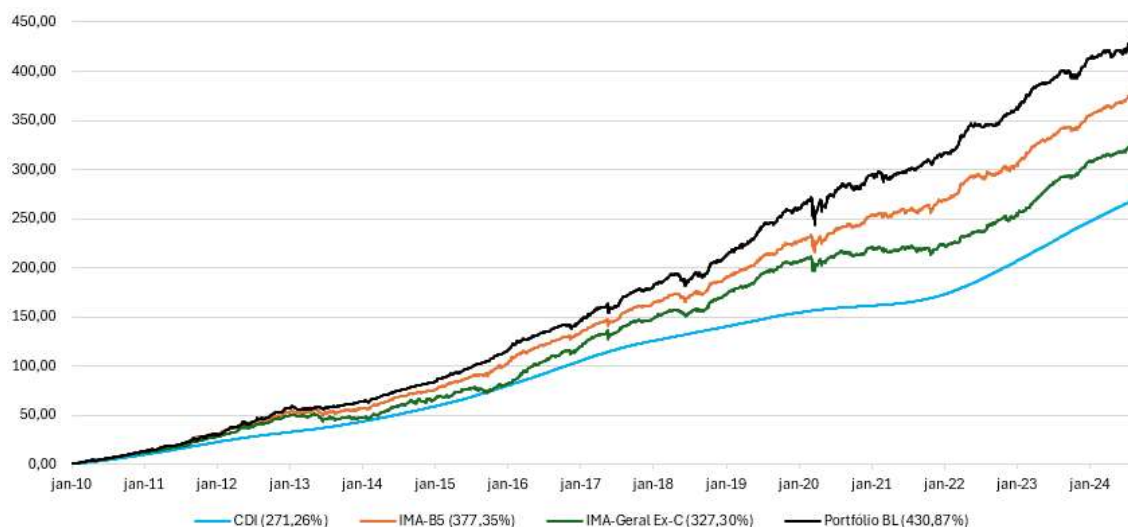
Fonte: Elaboração própria (2024)

Nota-se que em ambas as soluções as opiniões exercem um impacto relevante na composição dos vetores de pesos em comparação à carteira de mercado. No portfólio resultante do viés de redução da Selic (w_{BL-Q}), há uma concentração próxima de 70% nos dois ativos de maior duration e uma alocação abaixo de 10% nas NTN-Bs de menor risco. Como não houve opiniões envolvendo o título com expiração em três anos, sua participação permaneceu semelhante ao equilíbrio de mercado, em torno de 25%.

Na carteira gerada para um ciclo de aperto monetário (w_{BL-A}), a composição foi mais extrema e defensiva, com exposição nula aos três ativos mais voláteis e uma concentração superior a 70% no ativo mais conservador à disposição (NTN-B 1 ano). Observa-se também uma divergência significativa na alocação da NTN-B 3 anos em relação ao vetor Π , mesmo sem a inclusão de expectativas para esse ativo. Ao compararmos a rentabilidade e volatilidade da NTN-B 3 anos em relação às NTN-Bs 1 e 2 anos, temos que a mais longa possui uma expectativa de retorno inferior e maior desvio padrão. Logo, pela combinação de menor retorno e maior risco, o otimizador de média-variância penalizou significativamente este ativo. A mesma lógica se aplica aos títulos de 4 e 5 anos, somando ainda o impacto das opiniões negativas para esses vencimentos.

A evolução da rentabilidade acumulada da carteira dinâmica de Black-Litterman, comparada aos *benchmarks* IMA-B5, IMA-Geral (Ex-C) e CDI, é exibida no Gráfico 6.

Gráfico 6 – Rentabilidade acumulada (%) - Portfólio BL vs. Benchmarks



Fonte: Elaboração própria (2024)

É evidente que, durante praticamente todo o intervalo analisado, o portfólio resultante das otimizações de Black-Litterman tem desempenho superior em comparação aos índices de referência, destacando-se especialmente em relação ao IMA-B5, que compartilha o mesmo universo de ativos investíveis. Tal superioridade sugere que as opiniões incorporadas com base na flutuação da taxa Selic resultaram em alocações eficazes ao longo do horizonte de estudo.

É crucial complementar a avaliação desses ativos inserindo indicadores e métricas para análise de risco. A Tabela 5 traz alguma dessas informações:

Tabela 5 – Comparativo de resultados

Ativo	Retorno Anualizado	Risco Anualizado	Índice de Sharpe (IS)
Portfólio BL	12,10%	3,50%	0,77
IMA-B5	11,29%	2,84%	0,67
IMA-Geral Ex-C	10,45%	3,37%	0,31
CDI	9,39%	0,20%	0,00

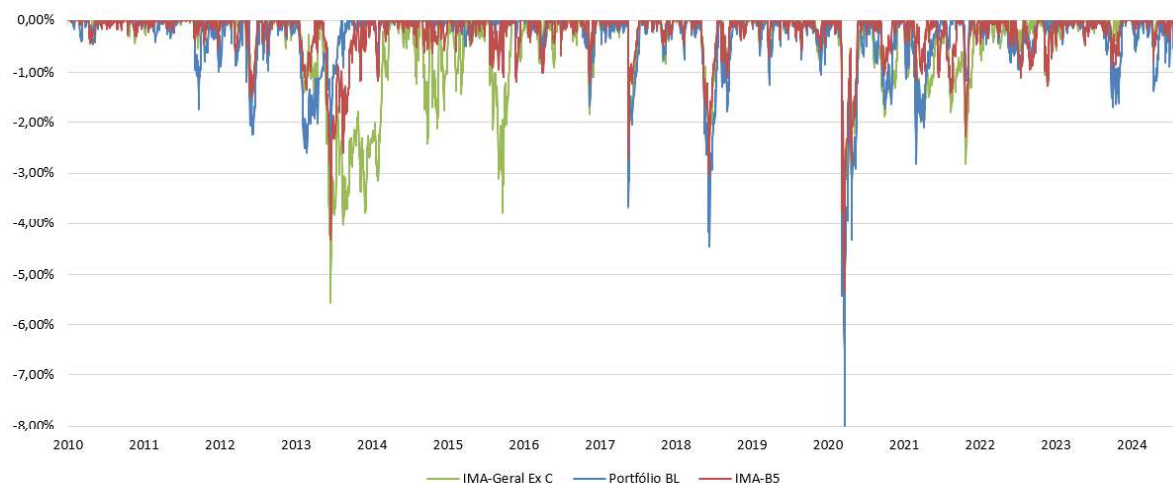
Fonte: Elaboração própria (2024)

O portfólio de Black-Litterman registrou o maior Índice de Sharpe, demonstrando que, apesar de possuir também o desvio padrão mais elevado, a estratégia mais exposta à volatilidade resultou na melhor relação risco-retorno entre as opções analisadas. O

benchmark IMA-B5 obteve um IS ligeiramente inferior, indicando que a seleção de uma estratégia passiva pode ser uma alternativa válida para os investidores.

A experiência do investidor durante o período de alocação em um ativo é um fator que pode influenciar decisões de investimento. O *drawdown* acumulado é uma métrica útil para avaliação desse aspecto, pois leva em consideração apenas os intervalos de retornos negativos, que tendem a ser os mais desafiadores emocionalmente e propensos à irracionalidade dos investidores. Além de complementar a análise de risco, essa métrica exibe a profundidade e a duração das perdas sofridas, oferecendo uma visão mais completa do comportamento dos ativos em cenários adversos. O Gráfico 7 apresenta o *drawdown* histórico dos ativos em análise neste trabalho.

Gráfico 6 – Drawdown diário acumulado



Fonte: Elaboração própria (2024)

O Gráfico 6 revela que nos momentos de estresse do mercado, o portfólio de BL apresentou as maiores quedas em relação aos *benchmarks*. Como esperado, há uma alta correlação das janelas de queda com o IMA-B5, diferindo apenas a intensidade dos movimentos, o que pode ser explicado pela composição da carteira de BL nas datas de ocorrência. Percebe-se que nos períodos de grande divergência das quedas acumuladas como em 2017, 2018, 2020 e 2021, a opinião vigente no portfólio era de queda da taxa Selic. Conforme demonstrado na Tabela 4, essa expectativa leva a uma alocação mais agressiva, caracterizada pela concentração nas NTN-Bs de prazos mais longos e maior *duration* ponderada, aumentando a sensibilidade aos movimentos da curva de juros. O CDI não foi incluso no Gráfico 6 pois não possui retornos diários negativos.

Como complemento final à análise da carteira de Black-Litterman, a Tabela 6 exibe um conjunto de dados que permitem uma avaliação mais completa sobre a consistência de resultados, as relações estatísticas com os *benchmarks* e riscos associados.

Tabela 5 – Dados descritivos da carteira Black-Litterman

Estatísticas	Portfólio BL
Nº de meses	176
Correlação com CDI	0,139
Correlação com IMA-G Ex C	0,691
Correlação com IMA-B5	0,871
Beta IMA-B5	0,978
Tracking Error IMA-B5 (%)	0,45
% meses com retorno >0%	89,20%
% meses com retorno <0%	10,80%
% meses com retorno > CDI	60,23%
% meses com retorno < CDI	39,77%
% meses com retorno > IMA-B5	55,11%
% meses com retorno < IMA-B5	44,89%
% meses com retorno > IMA-G Ex-C	59,09%
% meses com retorno < IMA-G Ex-C	40,91%
Máximo drawdown mensal (MDD)	2,77%
Tempo de recuperação MDD (meses)	3

A partir da tabela acima, é possível extrair *insights* relevantes. Primeiramente, destaca-se a alta correlação e beta do portfólio BL com o IMA-B5, seu principal índice de referência, ambos próximos a 1. Em conjunto com o baixo *Tracking Error* de 0,45%, temos uma indicação de que o objetivo da otimização em criar uma carteira com comportamento semelhante a esse *benchmark* foi alcançado. Em termos de consistência, o modelo de Black-Litterman foi superior a todos os *benchmarks*, com retornos superiores a eles em mais de 50% das janelas mensais. Outro ponto de destaque é o valor do máximo *drawdown* mensal de 2,77% em maio de 2020. Como observado no Gráfico 6, em janelas diárias, houve ocasiões em que quedas consecutivas acumularam valores que excedem de forma relevante os 2,77%. Essa diferença sugere que após perdas acentuadas, a recuperação da carteira tende a ser rápida.

5. CONCLUSÕES

Em um país com longo passado inflacionário que afetou todas as camadas da sociedade e moldou nossa cultura e costumes, a NTN-B é um ativo essencial para construção de uma carteira do investidor brasileiro. Com um histórico de dados com mais de duas décadas e utilizada como base para criação de diversos índices do mercado nacional, as NTN-Bs também são conhecidas pela sua consistência no longo prazo em obter retornos superiores à nossa taxa livre de risco, o CDI. Dessa forma, a estruturação de uma metodologia na tentativa de superar um índice composto apenas por esses ativos (IMA-B5), pode ser vista como uma forma de agregar valor ao investidor.

O modelo de Black-Litterman foi o procedimento selecionado para a estruturação e otimização do portfólio final. A única restrição incorporada no modelo foi a exclusão de operações de venda à descoberto (*short-selling*). Durante o período de *backtesting*, ocorreram seis rebalanceamentos de posições, devido a alteração das opiniões do investidor, que foram baseadas no ciclo de política monetária do país. Nos ciclos de aperto monetário, a visão predominante foi defensiva, com maior concentração em títulos de menor duration (1 e 2 anos). Nos ciclos de queda da Selic, o portfólio se torna mais agressivo nos ativos com vencimentos mais longos (4 e 5 anos).

É importante reforçar que esses rebalanceamentos foram efetuados após as reuniões do COPOM, ou seja, consideram a definição sobre a Selic posteriormente ao seu anúncio oficial. Foi assumido que o investidor, na data de cada ajuste de portfólio, teria acesso à mesma informação disponível no presente, o que replica o comportamento real de mercado. Essa abordagem torna o *backtesting* mais robusto e aumenta a aplicabilidade dos resultados para projeções futuras, evitando vieses de previsão.

Os resultados demonstraram que foi possível a criação de uma carteira com os mesmos ativos, nível de risco similar e performance superior ao IMA-B5. Os indicadores estatísticos beta, correlação e *tracking error* mostraram uma boa qualidade e nível de replicação entre o portfólio e o índice. Seus valores calculados foram de 0,98, 0,87 e 0,45%, respectivamente. O excesso de retorno em relação ao IMA-B5 foi de 0,81% ao ano, enquanto apresentou uma volatilidade de apenas 0,66% ao ano acima. Seu Índice de Sharpe também foi superior, alcançando um nível de 0,77 vs. 0,67 e 0,31, do IMA-B5 e IMA-Geral, respectivamente. O portfólio final também obteve rentabilidade acumulada acima do CDI e IMA-Geral (Ex-C). Pela

métrica de *drawdown*, a carteira de Black-Litterman foi a que obteve resultados mais fracos. Grande parte de suas quedas consecutivas foi maior do que o restante dos índices de referência. É notável que a aleatoriedade dos momentos de estresse de mercado também teve um papel importante no resultado dos *drawdowns*. As três maiores quedas do portfólio ocorreram em momentos em que o posicionamento da carteira era mais agressivo (concentração nas NTN-Bs longas) e fazem parte da história do mercado financeiro nacional: “Joesley Day”, Crise dos Caminhoneiros e Covid-19.

Diante disso, são possíveis desenvolvimentos futuros deste trabalho a implementação da metodologia com a inclusão de estratégias de *hedge* ou mecanismos de *stop loss*, assim como a utilização de outros índices ANBIMA como principal benchmark. A substituição da Taxa Selic por uma variável econômica distinta como principal balizador para o rebalanceamento do portfólio também é uma linha de pesquisa válida e promissora.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANBIMA. **Índice de Mercado ANBIMA (IMA)**. Disponível em: https://www.anbima.com.br/pt_br/informar/precos-e-indices/indices/ima.htm. Acesso em: 30 out. 2024.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Página oficial**. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br>. Acesso em: 30 out. 2024.

BLACK, F.; LITTERMAN, R. **Asset Allocation: Combining Investor Views with Market Equilibrium**. Goldman Sachs Fixed Income Research, 1990.

BLACK, F.; LITTERMAN, R. **Global Portfolio Optimization**. Financial Analysts Journal, v. 48, n. 5, p. 28-43, 1992.

CARVALHAIS, E. R.; DUARTE JÚNIOR, A. M. **Indexação de Carteiras de Renda Fixa ao IMA-B**. Brazilian Business Review, Vitória, v. 12, n. 3, p.122-152, maio/junho 2015.

DROBETZ, W. **How to Avoid the Pitfalls in Portfolio Optimization? Putting the Black-Litterman Approach at Work**. Financial Markets and Portfolio Management, v. 15, p. 59-75, 2001.

FONSECA, R. L. **Replicação de Índices de Renda Fixa em Carteiras: Caso do IMA-Geral**. 2017.

HE, G.; LITTERMAN, R. **The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios**. Goldman Sachs Asset Management, 1999.

IDZOREK, T. M. **A Step-by-Step Guide to the Black-Litterman Model**. Chicago: Ibbotson Associates, 2004.

LINTNER, J. **The Valuation of Risk Asset and the Selection of Risk Investments in Stock Portfolio and Capital Budgets**. Review of Economics and Statistics, v. 47, p. 13-37, 1965.

LITTERMAN, R.; QUANTITATIVE RESOURCES GROUP; GOLDMAN SACHS ASSET MANAGEMENT. **Modern Investment Management: An Equilibrium Approach**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2003.

MARKOWITZ, H. **Portfolio Selection.** The Journal of Finance, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.

MICHAUD, R. **The Markowitz Optimization Enigma: Is “Optimized” Optimal?** Financial Analysts Journal, v. 45, p. 31-42, 1989.

MOSSIN, J. **Equilibrium in an Asset Market.** Econometria, v. 34, p. 768-783, 1966.

SATCHELL, S.; SCOWCROFT, A. **A Demystification of the Black–Litterman Model: Managing Quantitative and Traditional Portfolio Construction.** Journal of Asset Management, v. 1, n. 2, p. 138-161, set. 2000.

SHARPE, W. F. **Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk.** Journal of Finance, v. 19, n. 3, p. 425–442, 1964.

TOBIN, J. **Liquidity Preference as a Behavior Toward Risk.** Review of Economic Studies, p. 65-86, 1958.

TREYNOR, J. L. **Market Value, Time and Risk.** Manuscrito não publicado. 1961.

VERÍSSIMO, D. G. **Otimização de Portfólio: O Modelo Black-Litterman Aplicado a uma Carteira Multimercado no Brasil.** 2023.

WALTERS, J. **The Black-Litterman Model: A Detailed Exploration.** 2008.