

Álvaro Augusto Volpato

**Estudos do Impacto de PSSs na Margem de
Estabilidade Transitória de Sistemas Elétricos de
Potência**

Brasil

2017, v-1.1

Álvaro Augusto Volpato

Estudos do Impacto de PSSs na Margem de Estabilidade Transitória de Sistemas Elétricos de Potência

Monografia de Conclusão de Curso apresentada
ao Departamento de Engenharia Elétrica e de
Computação da Escola de Engenharia de São
Carlos - Universidade de São Paulo como requi-
sito à obtenção do título de bacharel em Enge-
nharia Elétrica com Ênfase em Eletrônica.

Universidade de São Paulo

Escola de Engenharia de São Carlos

Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação

Brasil

2017, v-1.1

V472e Volpato, Álvaro Augusto
Estudos do Impacto de PSSs na Margem de Estabilidade Transitória de Sistemas Elétricos de Potência / Álvaro Augusto Volpato; orientador Luís Fernando Costa Alberto. São Carlos, 2017.

Monografia (Graduação em Engenharia Elétrica com ênfase em Eletrônica) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2017.

1. Margem de estabilidade. 2. Sistemas eletricos de potencia. 3. Sistemas dinamicos. I. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Nome: Álvaro Augusto Volpato

Título: "Estudos do impacto de PSSs na margem de estabilidade transitória de sistemas elétricos de potência"

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado
em 16 / 11 / 2017,

com NOTA 9,5 (NOVE, CINCO), pela Comissão Julgadora:

*Prof. Associado Luís Fernando Costa Alberto - Orientador -
SEL/EESC/USP*

Prof. Associado Rodrigo Andrade Ramos - SEL/EESC/USP

Mestre Taylon Gomes Landgraf - Doutorando - SEL/EESC/USP

Coordenador da CoC-Engenharia Elétrica - EESC/USP:
Prof. Associado Rogério Andrade Flauzino

Resumo

O objetivo da monografia foi estudar como as técnicas de controle linear utilizadas para determinar os controladores largamente conhecidos como AVR e PSS impactam a margem de estabilidade transitória do sistema máquina *versus* barramento infinito (OMIB, *One Machine versus Infinite Bus*).

Adota-se o modelo de um eixo para um gerador síncrono de pólos salientes. Em seguida, estudam-se modelos de AVR e PSS apresentados na norma IEEE Standard 421.5 (2005) e IEEE Standard 1110 (2002), adotando-se o modelo PSS1A (*single-input*) daquela norma.

As equações diferenciais do sistema são numericamente integradas, e o sistema é então simulado sob perturbação, e sua resposta dinâmica é analisada.

São averiguadas ocorrências de Bifurcações de Hopf no sistema em função dos parâmetros dos controladores, através da parametrização dos autovalores e análise do comportamento local do sistema no equilíbrio. Traçam-se os Diagramas de Bifurcação do sistema.

Baseando-se da teoria de Regiões de Estabilidade em Sistemas Dinâmicos Não Lineares, as simulações são utilizadas para desenvolver um Método Força Bruta (MFB) para estimar a Região de Estabilidade do sistema em malha aberta, controlado por AVR, controlado por AVR e PSS com e sem saturadores de excitação. Traçam-se também Regiões de Estabilidade variando-se alguns parâmetros (ganhos) dos controladores. As estimativas são comparadas para se concluir acerca dos impactos dos controladores naquele tamanho da Região de Estabilidade.

Conclui-se que, enquanto o sistema em malha aberta possui a maior Região, a introdução do controlador AVR no sistema é extremamente deletéria à Região de Estabilidade do sistema; em seguida, o PSS expande a Região, e a conseguinte introdução de saturadores diminui significativamente o seu tamanho. Além disso, à medida que se aumentam os ganhos dos controladores, o tamanho da Região tende a diminuir. Consequentemente, altos ganhos e saturadores têm efeito detrimental no tamanho da Região de Estabilidade e na margem de estabilidade transitória de sistemas elétricos de potência.

Palavras-chaves: margem de estabilidade, sistemas elétricos de potência, sistemas dinâmicos.

Abstract

The main goal of this thesis is to study how linear control techniques, used to design the broadly known AVR and PSS controllers, impact the transient stability margin of the One Machine versus Infinite Bus System (OMIB).

The one-axis model is adopted for representing the synchronous machine, which consists of a salient-pole hydrogenerator. Then the AVR and PSS models, defined in IEEE Standards 421.5 (2005) and 1110, are presented. The model used to represent the PSS was PSS1A (*single-input*), defined in Standard 421.5.

The DAE equations of the system are numerically integrated and the system is simulated under perturbation and its dynamical response is analyzed.

Hopf Bifurcation occurrences are investigated by parametrization of the system eigenvalues as functions of the controllers gains and time constants. The Bifurcation Diagrams of the system were also determined and plotted.

Based on Dynamical Nonlinear Systems Stability Region Theory, the simulations are utilized to build up a Brute-Force Method (BFM) to estimate the Stability Region in four situations: open-loop system (no controllers), controlled by AVR solely, AVR and PSS controlled and without saturators, AVR and PSS controlled but with saturators. Also, the Region is also estimated for various values of controllers parameters (gains). These estimatives are further compared so as to conclude about the controllers impacts on the size of the Stability Region.

The main conclusion is that while the open-loop system retains the widest Stability Region, that Region is extremely decreased by inclusion of AVR; the further introduction of the PSS widens back the Region, and finally the introduction of saturators significantly reduces the size of Stability Region. Moreover, when the controllers gains are increased, the Region tends to shrink. Consequently, high gains and saturators have a detrimental effect in the size of the Stability Region and in the margin of transitory stability of power systems.

Keywords: stability region, electric power systems, dynamical systems.

Lista de ilustrações

| | |
|---|-----|
| Figura 1 – Esquemático do sistema OMIB em estudo | 29 |
| Figura 2 – Esquemático de blocos linearizado do sistema OMIB em malha aberta | 32 |
| Figura 3 – Diagrama das condições iniciais do sistema em estudo, explicitadas na tabela 2.4. | 40 |
| Figura 4 – Gráfico do ângulo de rotação θ em função do parâmetro z | 47 |
| Figura 5 – Região de Factibilidade do sistema OMIB em estudo (tabela 1). | 52 |
| Figura 6 – Simulação de perturbação do sistema em malha aberta. | 61 |
| Figura 7 – Diagrama esquemático de blocos do sistema controlado por AVR. | 63 |
| Figura 8 – Gráficos do comportamento dinâmico do sistema controlado por AVR e do sistema em malha aberta após perturbação. | 67 |
| Figura 9 – Diagrama esquemático de blocos do sistema controlado por AVR e PSS sem saturadores. | 70 |
| Figura 10 – Diagrama esquemático de blocos do sistema controlado por AVR e PSS com saturadores. | 74 |
| Figura 11 – Traçados da função $S(x)$ e sua derivada função pulso. | 77 |
| Figura 12 – Gráficos do comportamento dinâmico do sistema controlado por AVR e PSS, com e sem saturadores. | 80 |
| Figura 13 – Esquemático de explicação da Bifurcação de Hopf. | 85 |
| Figura 14 – Lugar de raízes do sistema controlado apenas por AVR, em função dos parâmetros do controlador AVR. | 87 |
| Figura 15 – Diagrama de bifurcação do sistema controlado por AVR no ponto de equilíbrio $\vec{S} = P + jQ = 1 + j0.5$ | 93 |
| Figura 16 – Gráficos qualitativos do comportamento de sistema bidimensional com autovalores reais ao redor do equilíbrio. | 118 |
| Figura 17 – Gráficos qualitativos do comportamento de sistema bidimensional com autovalores complexos ao redor do equilíbrio. | 118 |
| Figura 18 – Esquemático explicativo da Região de Estabilidade. | 121 |
| Figura 19 – Esboço da estimativa da Região de Estabilidade através do método Força Bruta. | 124 |
| Figura 20 – Esquemático de representação de trajetória referente ao método Força Bruta. | 126 |
| Figura 21 – Representações tridimensionais e bidimensionais da estimativa da Região de Estabilidade do sistema em malha aberta. | 130 |
| Figura 22 – Representações tridimensionais da estimativa da Região de Estabilidade do sistema livre. | 131 |
| Figura 23 – Representações tridimensionais e bidimensionais da estimativa da Região de Estabilidade do sistema sem saturadores. | 132 |
| Figura 24 – Representações bidimensionais e tridimensionais da estimativa da Região de Estabilidade do sistema saturado. | 133 |

| | |
|---|-----|
| Figura 25 – Representações bidimensionais e tridimensionais das duas estimativas das Regiões de Estabilidade dos sistemas livre e saturado superpostas. | 134 |
| Figura 26 – Estimativa da Região de Estabilidade do sistema, no plano (ω, δ) , variando-se o ganho K_e | 135 |
| Figura 27 – Estimativa da Região de Estabilidade do sistema, no plano (ω, δ) , variando-se o ganho K_{PSS} | 135 |
| Figura 28 – Diagrama de blocos do sistema OMIB linearizado controlado por AVR. | 220 |
| Figura 29 – Gráficos da frequência de corte ω_G e da margem de ganho do sistema controlado por AVR. | 225 |
| Figura 30 – Gráficos da frequência de corte ω_F e da margem de fase do sistema controlado por AVR. | 229 |
| Figura 31 – Gráficos relacionando as margens de estabilidade do sistema controlado por AVR e os parâmetros K_e e T_e | 230 |
| Figura 32 – Diagrama de blocos do sistema OMIB linearizado controlado por AVR e PSS. | 233 |
| Figura 33 – Gráficos relacionando a margem de ganho e a frequência de corte ω_G sistema controlado por AVR e PSS parametrizados pelos parâmetros K_{PSS} e T_2 | 240 |

Lista de tabelas

| | | | |
|----------|---|---|----|
| Tabela 1 | – | Relação dos parâmetros do sistema OMIB | 30 |
| Tabela 2 | – | Tabela relacionando as variáveis do sistema em estudo no equilíbrio $\vec{S} = 1 + j0.5$ | 39 |
| Tabela 3 | – | Tabela relacionando os parâmetros da Região de Factibilidade do sistema em estudo aplicando-se o algoritmo desenvolvido. | 51 |

Lista de abreviaturas e siglas

| | |
|-------------|--|
| OMIB | <i>One Machine Infinite Bus System</i> |
| PSS | <i>Power System Stabilizer</i> |
| AVR | <i>Automatic Voltage Regulator</i> |
| EADs | <i>Equações Algébrico-Diferenciais</i> |
| MFB | <i>Método Força Bruta</i> |
| $ \cdot $ | <i>Módulo complexo ou norma de matriz complexa na norma euclidiana</i> |
| $\ \cdot\ $ | <i>Norma de vetor complexo na norma euclidiana</i> |

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Introdução | 23 |
| I Estudo do sistema OMIB e equilíbrio do fluxo de potência | 27 |
| 1 O SISTEMA OMIB | 29 |
| 1.1 Descrição do sistema | 29 |
| 1.2 Modelo linearizado | 32 |
| 1.3 Hipóteses simplificadoras | 33 |
| 1.3.1 Máquina com rotor de pólos lisos e modelo de um eixo | 33 |
| 1.3.2 Barramento infinito | 34 |
| 2 CALCULANDO O PONTO INICIAL DE OPERAÇÃO | 35 |
| 2.1 Equações das componentes da corrente de barramento | 35 |
| 2.2 Cálculo das tensões e ângulo do eixo do rotor | 36 |
| 2.3 Potência mecânica e tensão de campo no equilíbrio | 38 |
| 2.4 Algoritmo e aplicação no sistema em estudo | 38 |
| 3 A REGIÃO DE FACTIBILIDADE | 41 |
| 3.1 Definição | 41 |
| 3.2 Identificação da Região de Factibilidade | 43 |
| 3.3 Estudo do ângulo de rotação dos eixos | 46 |
| 3.4 Redução à forma canônica: cálculo do vértice e do foco | 47 |
| 3.5 Ponto de mínima potência reativa | 49 |
| 3.6 Algoritmo e aplicação ao sistema em estudo | 50 |
| II Comportamento dinâmico do sistema OMIB | 53 |
| 4 EADS DO SISTEMA SEM CONTROLADORES | 55 |
| 4.1 Descrição da metodologia de simulação do sistema | 55 |
| 4.2 Equações diferenciais da máquina em malha aberta | 56 |
| 4.3 Equações algébricas das componentes da corrente de barramento | 57 |
| 4.4 Sistema algébrico-diferencial e simulação | 59 |
| 5 EADS DO SISTEMA CONTROLADO POR AVR | 63 |
| 5.1 Controle automático de tensão (AVR) | 64 |
| 5.2 Sistema diferencial e simulação | 65 |

| | | |
|------------|---|------------|
| | 6 EADS DO SISTEMA CONTROLADO POR AVR E PSS | 69 |
| 6.1 | Dedução das EADs do sistema | 70 |
| 6.2 | EADs do sistema controlado por AVR e PSS sem saturadores | 72 |
| 6.3 | EADs do sistema controlado por AVR e PSS com saturadores | 74 |
| 6.3.1 | A função saturação $S(x)$ | 74 |
| 6.3.2 | Derivação da função $S(x)$ | 75 |
| 6.3.3 | Sistema de equações e simulação | 78 |
| III | Estudos de estabilidade | 81 |
| | 7 OCORRÊNCIA DE BIFURCAÇÕES NO SISTEMA | 83 |
| 7.1 | A Bifurcação de Hopf | 83 |
| | 8 SISTEMA CONTROLADO POR AVR | 89 |
| 8.1 | Existência de bifurcação | 89 |
| 8.2 | Parâmetros na bifurcação | 91 |
| 8.3 | Discussão da figura 15 | 93 |
| 8.3.1 | Intervalo em que K_{eB} não é bijetora | 94 |
| 8.3.2 | Autovalores na bifurcação | 94 |
| 8.4 | Checagem da condição de transversalidade | 95 |
| 8.4.1 | Prova 1 | 97 |
| 8.4.2 | Prova 2 | 98 |
| | 9 SISTEMA CONTROLADO POR AVR E PSS | 101 |
| 9.1 | Parâmetros na bifurcação | 102 |
| 9.2 | Análise da posição das soluções de $Q(x)$ | 104 |
| 9.3 | Substituindo as soluções de $Q(x^2)$ em $R(x^2)$ | 107 |
| 9.4 | Análise paramétrica do Diagrama de Bifurcação | 107 |
| 9.5 | Averiguação da existência de Bifurcação no sistema controlado por AVR e PSS | 111 |
| IV | A Região de Estabilidade | 113 |
| | 10 MOTIVAÇÃO, DEFINIÇÃO E CARACTERIZAÇÃO | 115 |
| 10.1 | Motivação | 115 |
| 10.2 | Definição | 116 |
| 10.3 | Comportamento de sistemas lineares bidimensionais | 117 |
| 10.4 | Expansão da classificação de equilíbrio para sistemas não-lineares | 119 |
| | 11 O MÉTODO FORÇA BRUTA | 123 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 11.1 | Descrição | 123 |
| 11.2 | Eficientização | 124 |
| | 12 APLICANDO O MFB AO SISTEMA EM ESTUDO | 127 |
| 12.1 | Implementação | 127 |
| 12.1.1 | Primeira implementação do MFB | 127 |
| 12.1.2 | Segunda implementação do MFB | 128 |
| 12.2 | Resultados | 128 |
| V | Discussão e conclusão | 137 |
| | 13 DISCUSSÃO | 139 |
| 13.1 | Sobre os traçados da Região de Estabilidade | 139 |
| 13.2 | Sobre a performance do MFB | 141 |
| 13.3 | Sobre a investigação em bifurcações | 141 |
| 13.4 | Possíveis desenvolvimentos futuros | 142 |
| | 14 CONCLUSÃO | 143 |
| | REFERÊNCIAS | 145 |
| | APÊNDICES | 147 |
| | APÊNDICE A – PROGRAMAS PARA MATLAB | 149 |
| A.1 | Cálculo das condições iniciais do sistema | 149 |
| A.2 | Região de Factibilidade | 150 |
| A.3 | Simulação do sistema em malha aberta | 151 |
| A.4 | Simulação do sistema controlado por AVR | 155 |
| A.5 | Simulação do sistema controlado por AVR e PSS | 159 |
| A.6 | Estimativa das Regiões de Estabilidade | 165 |
| A.7 | Estimativa das Regiões de Estabilidade | 172 |
| A.8 | Gráficos de margens de estabilidade do sistema controlado por AVR | 178 |
| A.9 | Gráficos de margens de estabilidade do sistema controlado por AVR e PSS | 182 |
| | APÊNDICE B – ANÁLISE LOCAL DO SISTEMA AVR | 189 |
| B.1 | Cálculo do jacobiano | 189 |
| B.1.1 | Primeira coluna | 189 |
| B.1.2 | Segunda coluna | 190 |
| B.1.3 | Terceira coluna | 191 |
| B.1.4 | Quarta coluna | 192 |

| | | |
|-------|--|------------|
| B.1.5 | Autovalores do jacobiano | 192 |
| | APÊNDICE C – ANÁLISE LOCAL DO SISTEMA AVR+PSS | 197 |
| C.1 | Cálculo do jacobiano | 197 |
| C.1.1 | Primeira coluna | 198 |
| C.1.2 | Segunda coluna | 200 |
| C.1.3 | Terceira coluna | 200 |
| C.1.4 | Quarta coluna | 202 |
| C.1.5 | Quinta coluna | 203 |
| C.1.6 | Sexta coluna | 204 |
| C.2 | Aproximação do Jacobiano com considerações sobre a função pulso . . . | 204 |
| C.3 | Polinômio característico | 205 |
| C.3.1 | Primeira parcela | 208 |
| C.3.2 | Segunda parcela | 209 |
| C.3.3 | Forma final do polinômio característico | 211 |
| C.4 | Identificando as dependências dos controladores | 212 |
| C.4.1 | Coeficiente a_0 | 213 |
| C.4.2 | Coeficiente a_1 | 215 |
| C.4.3 | Coeficiente a_3 | 217 |
| | APÊNDICE D – SINTONIA DO SISTEMA CONTROLADO POR AVR | 219 |
| D.1 | Modelo linearizado do sistema | 219 |
| D.2 | Calculando as margens de ganho e fase do sistema | 222 |
| D.3 | Resolvendo a primeira equação do sistema (D.16) | 223 |
| D.4 | Resolvendo a segunda equação do sistema | 226 |
| D.4.1 | Primeira combinação | 226 |
| D.4.2 | Segunda combinação | 227 |
| D.4.3 | Novo sistema | 227 |
| D.5 | Escolha dos parâmetros K_e e T_e | 230 |
| | APÊNDICE E – SINTONIA DO SISTEMA CONTROLADO POR AVR E PSS | 233 |
| E.1 | Modelo linearizado do sistema e função de transferência | 233 |
| E.2 | Resolvendo o sistema (E.12) | 237 |
| E.3 | Resolvendo o sistema (E.13) | 238 |
| E.4 | Escolha de K_{PSS} e T_2 | 239 |
| | APÊNDICE F – PROVA DO TEOREMA DE HARTMAN-GROBMAN | 241 |
| F.1 | Justificativa | 241 |
| F.2 | Visão geral do apêndice | 242 |
| F.3 | A Desigualdade de Grönwall Generalizada | 244 |
| F.4 | A Fórmula da Variação das constantes | 246 |

| | | |
|------------|---|------------|
| F.5 | O Teorema do Valor Médio para funções multivariáveis | 247 |
| F.6 | Majorando a norma de matrizes exponenciais | 251 |
| F.7 | Estabilidade de sistemas | 257 |
| F.8 | O Teorema de Hartman-Grobman | 260 |

Agradecimentos

Aos meus pais, sem os quais este trabalho não ocorreria, denotativa e conotativamente. Meu pai, mentor do meu gosto por Engenharia, Matemática e Física, e minha mãe, mentora do meu gosto por Música, Filosofia e Cultura, sempre fizeram questão de checar os deveres de casa, e dar uns puxões de orelha aqui e ali; sempre fizeram questão de proporcionar as melhores condições que pudessem dar, financeiras e psicológicas, mesmo que isso lhes custassem as próprias.

Dedico este trabalho aos meus pais. Sempre que uma passagem difícil surgia, sempre que uma nota baixa aparecia, sempre que o cansaço vinha, eu lia um capítulo dos exemplares da dissertação de mestrado do meu pai ou da monografia da minha mãe, títulos que eu guardo com carinho na gaveta da escrivaninha. Mesmo sem falar uma palavra, ou até mesmo sem saber, os dois continuam me inspirando. Eu amo vocês.

Aos professores Luís Fernando Costa Alberto, Hildebrando Munhoz, Paulo Roberto Veronese e Rodrigo Andrade Ramos, aos quais agradeço pelo ensinamento tácito: inteligência não é um critério epistemológico, mas sim ético e moral.

Agradeço especialmente ao professor Luís Fernando, pelo trabalho – digno de Sísifo – de orientação.

À Universidade de São Paulo, instituição primaz que proporcionou infraestrutura de ponta e excelentes docentes que me inspiraram à carreira acadêmica.

Finalmente gostaria de agradecer aos amigos Rodrigo Machado, pelo suporte e encorajamento durante todos os anos de curso; Rafael Fortulan, colega de laboratório e de turma, pelas sugestões e pela companhia; e Taylon Landgraf, quem teve muita paciência nos momentos iniciais deste trabalho, especialmente na parte de máquinas elétricas.

Introdução

Geradores síncronos em sistemas elétricos de potência são equipados com controladores de excitação e reguladores de velocidade. Estes controladores têm por objetivo principal manter a tensão e a frequência dentro de limites pré-especificados. Além disso, são também projetados para rapidamente amortecer oscilações eletromecânicas induzidas por perturbações. Os *Power System Stabilizers* (PSSs), em particular, fazem parte do sistema de excitação da maioria dos geradores do sistema elétrico e são projetados especificamente para atuar em condições não estacionárias com o objetivo de amortecer oscilações eletromecânicas potencialmente danosas à operação do sistema elétrico.

Usualmente, estes controladores são lineares e são projetados partindo-se do princípio de que as perturbações são suficientemente pequenas e que o modelo do sistema elétrico, intrinsecamente não linear, possa ser representado sem grandes erros por um modelo linearizado. Nestes projetos, a estabilidade local do ponto de equilíbrio é requerida e as restrições de desempenho estão associadas aos modos de oscilação e taxas de amortecimento do modelo linearizado. Além disso, técnicas de controle linear não levam em consideração índice algum de desempenho ou limite de valores do sistema não-linear em malha fechada. Desta maneira, os projetos tradicionais de controladores em sistemas elétricos não levam em consideração o desempenho do sistema a grandes perturbações; em geral, este desempenho é posteriormente verificado por meios simulatórios.

Outrossim, parte-se daquele princípio de pequenas perturbações e projetam-se os controladores para um dado sistema, negligenciando-se suas características não-lineares. A efetividade dos controladores projetados é averiguada posteriormente, mas ainda assim geralmente não há preocupação sobre o comportamento do sistema a grandes amplitudes.

Em tempo, a despeito de esta abordagem garantir a estabilidade e o funcionamento de ambos o sistema e controlador numa pequena vizinhança do ponto de operação, o impacto do projeto linear dos controladores no comportamento do sistema a grandes perturbações é desconhecido. A teoria de Sistemas Dinâmicos endossa essa análise local linearizada, especialmente o Teorema de Hartmann-Grobman, segundo o qual um sistema dinâmico comporta-se similarmente ao seu modelo linearizado numa certa vizinhança de um equilíbrio hiperbólico sob alguns requisitos. No entanto, nada se afirma sobre a vizinhança em si.

O problema de análise de estabilidade de sistemas elétricos a grandes perturbações é conhecido por estabilidade transitória, e não está associado ao problema de estabilidade local do ponto de operação mas ao tamanho da região de estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha fechada.

A questão da região de estabilidade é imperativa devido ao seu impacto nas margens de estabilidade transitória do sistema elétrico. Métodos de controle linear não podem garantir um impacto positivo no tamanho da região de estabilidade. Reconheceu-se, por exemplo, que um alto ganho de realimentação pode desestabilizar sistemas em malha fechada (KHALIL, 2008). Por conseguinte, valores altos de ganho de realimentação podem diminuir o tamanho da região de estabilidade a margens intoleráveis, impossibilitando garantir-se a estabilidade do sistema elétrico.

O objetivo principal deste trabalho de pesquisa é investigar o impacto dos controladores lineares e em particular do PSS no tamanho da região de estabilidade dos sistemas elétricos e o seu impacto na margem de estabilidade transitória. Pretende-se também investigar como o projeto do controle linear pode levar em consideração condições de desempenho relacionadas ao problema de estabilidade transitória. O comportamento da região de estabilidade do sistema é investigado através da pesquisa de bifurcações do sistema dinâmico, ou seja, averiguação da ocorrência de bifurcações do sistema em função dos parâmetros dos controladores.

Visão geral da monografia

Os objetivos desta monografia foram:

1. O desenvolvimento de procedimento baseado no Método Força-Bruta para estimar a Região de Estabilidade do sistema, e a comparação das regiões de estabilidade do sistema em quatro situações, listadas abaixo, para concluir sobre o impacto dos controladores naquela Região.
 - a) Em malha aberta;
 - b) Controlado apenas por AVR;
 - c) Controlado por AVR e PSS, sem saturadores;
 - d) Controlado por AVR e PSS, com saturadores.
2. O desenho dos Diagramas de Bifurcação do sistema nas situações (b), (c) e (d) e definir o comportamento do sistema em bifurcação, para averiguar a existência do fenômeno da Bifurcação de Hopf nos sistemas em função dos controladores.

Para o primeiro objetivo, foi necessário desenvolver programas de simulação do sistema a partir de várias condições iniciais o que, por sua vez, necessitou que se caracterizasse o sistema

em equilíbrio estático. Para o segundo, conhecer o comportamento local do sistema (cálculo dos autovalores no equilíbrio) e ter o equilíbrio estático bem definido, como também determinar o efeito dos parâmetros dos controladores nesse comportamento local. Assim, o documento divide-se em quatro partes.

A primeira compreende a caracterização do sistema, bem como a explicação dos modelos utilizados. Trata-se de uma parte comum a ambos os objetivos finais, uma vez que é necessário bem conhecer o sistema para desempenhar ambos. Além disto, a primeira parte também lida com a análise estática do sistema a partir das equações do fluxo de potência, e determinação das condições de existência das soluções destas equações.

Ja a Parte II é voltada para a construção dos programas de simulação do sistema. Esta parte tem como função construir os modelos dinâmicos (dedução das Equações Algébrico-Diferenciais ou EADs) do sistema a partir do modelo da máquina adotado e dos modelos de controladores AVR e PSS adotados. Para validar as EADs deduzidas, simula-se o sistema sob perturbação.

A Parte III empresta do equilíbrio calculado na primeira parte, bem como dos sistemas de EADs deduzidos na segunda parte, para fazer a análise local dos autovalores no equilíbrio. Seu objetivo é determinar a ocorrência de bifurcação no sistema a partir dos parâmetros dos controladores. A ideia é determinar se de fato ocorrem bifurcações no sistema, como indicado na literatura (GAO; K.T.CHAU, 2004; LI et al., 2002), e em quais situações elas ocorrem. A análise é feita a partir da parametrização do Jacobiano do sistema no equilíbrio estático em função das constantes de ganho e tempo dos controladores.

Finalmente, a Parte IV se vale do equilíbrio estático do sistema, calculado na Parte I, e dos programas de simulação, construídos na Parte II, para traçar estimativas da Região de Estabilidade do sistema naquelas quatro situações. Ao final, traçaram-se estimativas das Regiões de Estabilidade para se compará-las e concluir sobre o efeito dos controladores nessa Região.

Naturalmente, estas duas últimas partes empregam extensiva e ostensivamente de conhecimentos de Análise, Sistemas Dinâmicos e Álgebra Linear (LIMA, 1981; LIMA, 2017; LIMA, 2016; WANG, 1993; BRETAS; ALBERTO, 2000; STROGATZ, 2014; CHIANG; ALBERTO, 2015; CHIANG; ALBERTO, 2012) para que os resultados obtidos sejam coerentes com a teoria matemática envolvida. Também nota-se que por vezes alguns resultados serão apresentados e as contas movidas aos apêndices – como por exemplo os cálculos dos polinômios característicos do sistema – para legibilidade do texto.

Também o texto é largamente baseado na literatura sobre sistemas elétricos de potência como (KUNDUR, 1994; IEEE, 2002; IEEE, 2005). O modelo da máquina utilizado foi retirado de (ALBERTO; RAMOS; BRETAS, 2000).

Estudo do sistema OMIB e equilíbrio do fluxo de potência

O sistema OMIB

Neste capítulo define-se o sistema Máquina Única Contra Barramento Infinito (OMIB) utilizado. São apresentados o modelo da máquina utilizado e os seus parâmetros, que foram retirados de (DEMELLO; CONCORDIA, 1969). Apresentam-se também as hipóteses simplificadoras do modelo, que são descritas em detalhes em (ALBERTO; RAMOS; BRETAS, 2000) e enunciadas aqui.

1.1

Descrição do sistema

O sistema de Máquina Única Contra Barramento Infinito (*One-Machine-Infinite-Bus System*) consiste de um gerador síncrono acoplado a um barramento infinito (de tensão constante) através de uma linha de transmissão. Sendo o gerador suposto de pólos lisos, o sistema pode ser representado como na figura 1. A máquina recebe, da fonte motriz, uma potência mecânica P_m e do sistema de controle uma tensão de campo E_{FD} equivalente de modelo fasorial¹.

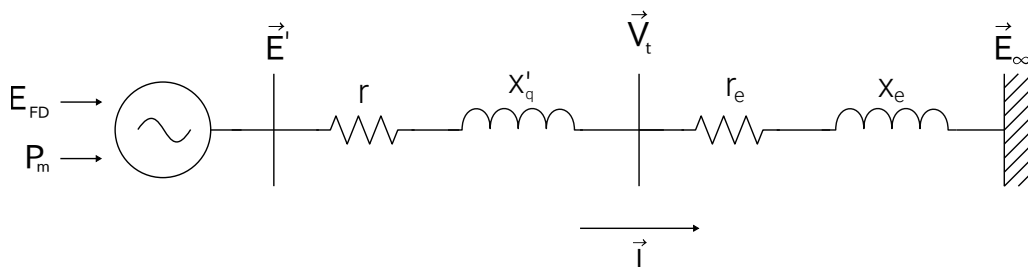


Figura 1 – Esquemático do sistema OMIB em estudo

¹ Trata-se de tensão *equivalente* porque o sistema diferencial (1.1), que rege a máquina, trata as variáveis de estado fasorialmente – constituindo portanto simulação fasorial e não simulação de transiente eletromagnético (“EMT”), na qual a tensão de campo V_{FD} seria *de facto* a tensão no enrolamento de campo. A partir deste ponto, cometer-se-á abuso de nomenclatura designando E_{FD} por “tensão no enrolamento de campo” compreendendo-se tratar de equivalente fasorial.

| Grandeza | Sigla | Valor (p.u.) |
|---|-----------|--------------|
| Impedância equivalente de regime permanente de eixo direto | x_d | 1.14 |
| Impedância equivalente de regime permanente de eixo em quadratura | x_q | 0.66 |
| Impedância transitória de eixo direto | x'_d | 0.24 |
| Impedância transitória de eixo em quadratura | x'_q | 0.24 |
| Constante de tempo transitória de eixo direto | T'_{do} | 12 |
| Constante de inércia do rotor | H | 1.5 |
| Resistência equivalente de armadura | r | 0 |
| Resistência equivalente de linha | r_e | 0.01 |
| Impedância equivalente de linha | x_e | 0.1 |
| Tensão de barramento infinito | E | 1 |

Tabela 1 – Relação dos parâmetros do sistema OMIB e do gerador síncrono, provindos de (DEMELLO; CONCORDIA, 1969).

Os parâmetros da figura 1 são listados abaixo:

- r e x_d representam a impedância de eixos direto e em quadratura interna da máquina. Sendo esta de rotor liso, podemos concluir que as impedâncias dos dois eixos coincidem;
- r_e e x_e representam a impedância da linha de transmissão;
- \vec{E}' é a tensão interna da máquina, denotada por $\vec{E}' = E'_q + jE'_d$;
- \vec{V}_t é a tensão nos terminais da máquina, representada por $\vec{V}_t = V_q + jV_d$;
- \vec{E}_∞ é a tensão do barramento infinito, constante ao longo do tempo. Para clareza do texto, será denotada apenas por \vec{E} ;
- \vec{I} é a corrente fornecida pela máquina ao barramento, denotada por $\vec{I} = I_q + jI_d$;
- P_m é a potência mecânica que o elemento motriz fornece ao gerador. NO artigo [1] de onde se retiraram os parâmetros do sistema consta que a máquina faz parte de um hidrogerador; logo, o elemento motriz é uma turbina hidroelétrica;
- E_{FD} é a tensão no circuito de campo do gerador.

A tabela 1 define os parâmetros utilizados da máquina e do sistema. Todos os parâmetros foram retirados de (DEMELLO; CONCORDIA, 1969).

Dinamicamente, a máquina, em malha aberta, é regida segundo o sistema diferencial (1.1), retirado de (ALBERTO; RAMOS; BRETAS, 2000), denominado “modelo de um eixo”.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_4 - x_1 + (x_d - x'_d)I_d}{T'_{do}} \\ \dot{x}_2 = \frac{P_m - x_1 I_q - (x'_d - x'_q)I_d I_q}{2H} \\ \dot{x}_3 = x_2 \\ \dot{x}_4 = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Sendo:

- $E'_q = x_1$;
- $\omega = x_2$ a velocidade angular do rotor com relação ao eixo QD;
- $\delta = x_3$ o ângulo do rotor com relação do eixo QD;
- $E_{FD} = x_4$ a tensão no enrolamento de campo, que no sistema em malha aberta é constante e igual ao valor inicial;
- I_d e I_q respectivamente as componentes em eixo direto e em quadratura da corrente de barramento;
- P_m a potência mecânica entregue à máquina.

Naturalmente, o sistema não está completo porque ausentam as equações das compoentes I_d e I_q da corrente de barramento. Estas equações provêm do acoplamento ao barramento infinito, e são deduzidas no capítulo seguinte.

Deve-se sempre ter em mente que o texto utiliza dois sistemas de coordenadas para as tensões e correntes: um sendo o eixo imaginário-real, no qual a tensão do barramento \vec{E} jaz sobre o eixo real, e o eixo QD (quadratura-direto) que está em fase com o rotor da máquina, este proveniente da aplicação da Transformação de Park. Estes sistemas de coordenadas (imaginário-real e QD) são similares, a menos de uma rotação que equivale à posição angular do rotor da máquina com relação à tensão do barramento infinito. A razão para a adoção de dois eixos é que, ao se utilizar a tensão do Barramento Infinito como referência de fase (originando o eixo imaginário-real), as contas para cálculo do equilíbrio estático são facilitadas. Enquanto isso, o sistema dinâmico (1.1) que rege a máquina tem como variáveis de estado e variáveis algébricas as tensões e correntes expressas no eixo QD, de onde depreende-se a razão para se utilizar este nas simulações dinâmicas.

Note-se também que todas as grandezas são denotadas no sistema por unidades (P.U.).

1.2

Modelo linearizado

Para ajustar os controladores e exemplificar as técnicas lineares de controle utilizadas usualmente neste tipo de sistema, necessitar-se-á do seu modelo linearizado; para obtê-lo, calcula-se o jacobiano do sistema dinâmico (1.1), resultando no sistema linear (1.2) a seguir. Nos apêndices B e C constam as contas, omitidas pela legibilidade.

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \\ \Delta \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{1,1} & 0 & J_{1,3} \\ J_{2,1} & 0 & J_{2,3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{T'_{do}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta E_{FD} \\ \Delta P_m \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Onde o operador Δ denota o deslocamento do equilíbrio e $J_{m,n}$ denotam as componentes da matriz jacobiana, denotadas no conjunto de equações (1.3). A figura 2 denota o diagrama de blocos do sistema linearizado correspondente a este sistema linearizado.

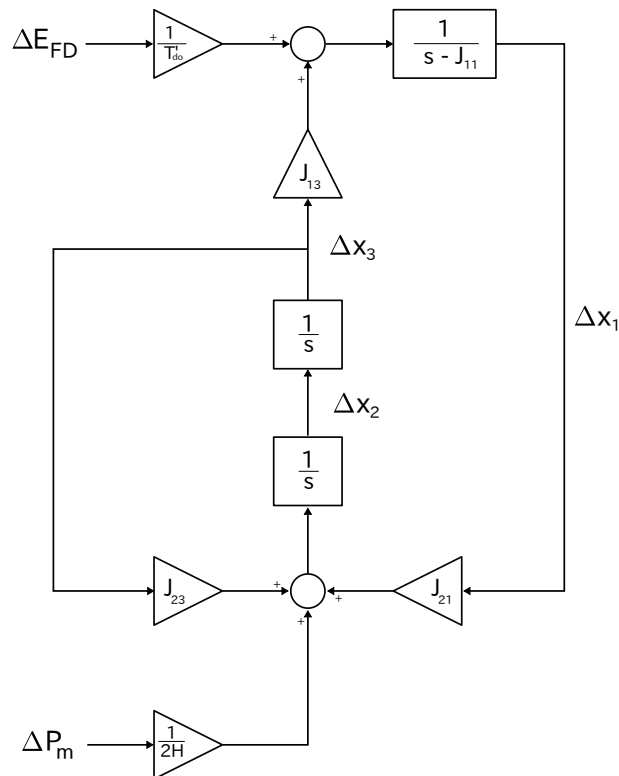


Figura 2 – Esquemático de blocos linearizado do sistema OMIB em malha aberta

$$\begin{cases}
 J_{1,1} = -\frac{1}{T'_{do}} \left[\frac{(x_d - x'_d) \sin(\phi)}{X} + 1 \right] \\
 J_{2,1} = \frac{1}{2HX^2} \left\{ E \left[X \cos(x_3 + \phi) + (x'_d - x'_q) \sin(x_3 + 2\phi) \right] - x_1 \left[2X \cos(\phi) + (x'_d - x'_q) \sin(2\phi) \right] \right\} \\
 J_{1,3} = \frac{E(x_d - x'_d)}{X T'_{do}} \cos(x_3 + \phi) \\
 J_{2,3} = \frac{E}{2HX^2} \left\{ x_1 \left[(x'_d - x'_q) \cos(x_3 + 2\phi) - X \sin(x_3 + \phi) \right] - E(x'_d - x'_q) \cos(2x_3 + 2\phi) \right\} \\
 \vec{X} = X e^{j\phi} = (r + r_e) + j(x'_q + x_e)
 \end{cases} \quad (1.3)$$

A este sistema linearizado serão acoplados os controladores AVR e PSS, para que seus parâmetros sejam sintonizados. Nos apêndices D e E consta o método de sintonia, realizado a partir das margens de estabilidade (margens de ganho e de fase) dos sistemas em malha fechada.

1.3

Hipóteses simplificadoras

O modelo do sistema conta com algumas hipóteses simplificadoras que merecem destaque e têm implicações diretas no seu comportamento. São duas as hipóteses: a máquina tem rotor de pólos lisos cujo o modelo é o chamado modelo de um eixo, descrito no sistema (4.2), e a simplificação através do barramento infinito.

1.3.1 Máquina com rotor de pólos lisos e modelo de um eixo

O modelo usado para o gerador é o **modelo de um eixo**; o gerador tem rotor de polos salientes. Estas características resultam nas seguintes principais suposições:

- A componente de eixo direto da tensão interna da máquina E'_d é desprezível em qualquer instante de tempo;
- O regime subtransitário da máquina pode ser desprezado por sua brevidade;
- As impedâncias equivalentes transitórias de eixo direto e em quadratura x'_d e x'_q , são próximas, consideradas iguais.

Nota-se que esta suposição permite que o sistema seja desenhado como na figura 1. Caso a máquina tenha pólos salientes ou deseja-se adotar um modelo mais complexo, como por exemplo o de dois eixos desenvolvido na mesma bibliografia que o de um eixo, então o sistema não pode ser descrito como na figura porque a máquina não pode mais ser representada por um modelo de circuito elétrico.

1.3.2 Barramento infinito

Na figura, a barra \vec{E} é denominada “barramento infinito”. Fisicamente, a máquina está conectada a um sistema elétrico geralmente muito maior que ela e sobre o qual sua influência é negligível. A tensão \vec{E} é constante em fase e módulo independente da carga que a máquina imprima sobre ela.

Em última instância, r_e , x_e e \vec{E} representam o circuito equivalente de Thèvenin daquele sistema muito maior ao qual a máquina conecta-se.

É importante lembrar que a suposição da insignificância de uma máquina perante o sistema todo é questão de pesquisas recentes. Por exemplo, (THORP; WANG, 2010) afirmam que a falha de uma única máquina em situações de alta demanda de potência pode levar a um colapso em cadeia do sistema elétrico como um todo: se uma máquina falha, alguma outra precisa compensar a componente defeituosa, o que por sua vez sobre carrega esta outra, e assim o sistema todo quebra – significando que a premissa do barramento infinito não é absoluta, dado que o mau funcionamento de uma máquina pode dirimir o sistema.

Calculando o ponto inicial de operação

Inicialmente, a máquina se encontra num estado de operação, fornecendo ao sistema uma potência elétrica aparente $\vec{S} = P + jQ$. Nesse momento, uma potência mecânica P_m é fornecida à máquina. As grandezas elétricas do sistema da figura 1 são calculadas para este ponto de operação.

Dado que os controladores utilizados são construídos sobre modelos lineares como o da figura 2, necessitam-se calcular as variáveis de estado do sistema em equilíbrio, para então se calcular a matriz jacobiana do sistema neste equilíbrio. Além disso, o estudo de bifurcações da parte III se vale dessa matriz jacobiana, calculada no equilíbrio, para investigar a ocorrência de bifurcações do sistema.

Tendo isto em vista, este capítulo desenvolve as equações de equilíbrio do sistema. Também é definida a Região de Factibilidade, que determina as condições de existência de solução dessas equações de equilíbrio.

2.1

Equações das componentes da corrente de barramento

Fornecendo uma potência aparente \vec{S} conhecida inicialmente, então a máquina deve suprir duas demandas: um gasto de potência nas impedâncias da linha, mais a potência transmitida ao barramento. As condições iniciais do sistema são então calculadas segundo a equação

$$\vec{S} = \overbrace{\left[(r + r_e) + j(x'_d + x_e) \right] \times |\vec{I}|^2}^{\text{Gastos nas impedâncias}} + \overbrace{E \times \vec{I}^*}^{\text{Barramento infinito}}$$

$$\therefore P + jQ = \left[(r + r_e) |\vec{I}|^2 + EI_r \right] + j \left[(x'_d + x_e) |\vec{I}|^2 - EI_i \right] \quad (2.1)$$

Fazendo $|\vec{I}|^2 = I_r^2 + I_i^2$. Denotando $x_d' + x_e = x_t$ e $r + r_e = r_t$

$$\begin{cases} P = r_t(I_r^2 + I_i^2) + E I_r \\ Q = x_t(I_r^2 + I_i^2) - E I_i \end{cases} \quad (2.2)$$

Multiplicando a equação de cima por x_t , e a de baixo por r_t ,

$$\begin{cases} P x_t = r_t x_t(I_r^2 + I_i^2) + E x_t I_r \\ Q r_t = r_t x_t(I_r^2 + I_i^2) - E r_t I_i \end{cases} \quad (2.3)$$

Diminuindo uma da outra,

$$0 = (Q r_t - P x_t) + E(x_t I_r + r_t I_i) \quad (2.4)$$

$$\therefore I_i = \frac{P x_t - Q r_t}{E r_t} - \frac{x_t}{r_t} I_r \quad (2.5)$$

Substituindo na primeira equação do sistema 2.2,

$$\begin{aligned} P &= r_t \left[I_r^2 + \left(\frac{P x_t - Q r_t}{E r_t} - \frac{x_t}{r_t} I_r \right)^2 \right] + E I_r \\ \Rightarrow P &= r_t \left[I_r^2 + \left(\frac{Q r_t - P x_t}{E r_t} \right)^2 + \left(\frac{x_t}{r_t} I_r \right)^2 + 2 \frac{Q r_t - P x_t}{E r_t} \frac{x_t}{r_t} I_r \right] + E I_r \end{aligned} \quad (2.6)$$

Multiplicando por $r_t E^2$ para eliminar os denominadores,

$$\begin{aligned} 0 &= -r_t P E^2 + [(r_t E)^2 I_r^2 + (Q r_t - P x_t)^2 + (E x_t I_r)^2 + 2 x_t E (Q r_t - P x_t) I_r] + r_t E^3 I_r \\ 0 &= I_r^2 [E^2 (x_t^2 + r_t^2)] + I_r [r_t E^3 + 2 x_t E (Q r_t - P x_t)] + [(Q r_t - P x_t)^2 - r_t P E^2] \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.2

Cálculo das tensões e ângulo do eixo do rotor

Tem-se portanto o sistema para I_r e I_i :

$$\begin{cases} 0 = I_r^2 [E^2(x_t^2 + r_t^2)] + I_r [r_t E^3 + 2 x_t E(Q r_t - P x_t)] + [(Q r_t - P x_t)^2 - r_t P E^2] \\ I_i = \frac{P x_t - Q r_t}{E r_t} - \frac{x_t}{r_t} I_r \end{cases} \quad (2.8)$$

Onde I_r e I_i são as componentes da corrente de barramento no eixo complexo. Resolvem-se as duas equações para I_r e I_i ; em seguida, calculam-se \vec{E}' e \vec{V}_t :

$$\begin{cases} \vec{V}_t = E + (r_e + j x_e) \vec{I} \\ \vec{E}' = \vec{V}_t + (r + j x'_q) \vec{I} \end{cases} \quad (2.9)$$

Falta agora transformar estas grandezas para o eixo QD. Para descobrir a posição deste eixo em relação ao imaginário, utiliza-se do fato que, em se tratando de um modelo de um eixo, então \vec{E}' está em fase com o eixo Q, de forma que

$$\vec{Q} = \frac{\vec{E}'}{|\vec{E}'|} = e^{j\delta} \Leftrightarrow \tan(\delta) = \frac{\text{Im}(\vec{E}')}{\text{Re}(\vec{E}')} \quad (2.10)$$

Girando \vec{Q} de noventa graus, obtém-se o versor do eixo direto \vec{D} , quer dizer:

$$\vec{Q} = (\cos(\delta), \sin(\delta)) \Rightarrow \vec{D} = (-\sin(\delta), \cos(\delta)) \quad (2.11)$$

De onde as grandezas no eixo QD são

$$\begin{cases} E'_q = \vec{E}' \cdot \vec{Q} = \text{Re}(\vec{E}') \cos(\delta) + \text{Im}(\vec{E}') \sin(\delta) \\ E'_d = \vec{E}' \cdot \vec{D} = -\text{Re}(\vec{E}') \sin(\delta) + \text{Im}(\vec{E}') \cos(\delta) \\ V_q = \vec{V}_t \cdot \vec{Q} = \text{Re}(\vec{V}_t) \cos(\delta) + \text{Im}(\vec{V}_t) \sin(\delta) \\ V_d = \vec{V}_t \cdot \vec{D} = -\text{Re}(\vec{V}_t) \sin(\delta) + \text{Im}(\vec{V}_t) \cos(\delta) \\ I_q = \vec{I} \cdot \vec{Q} = \text{Re}(\vec{I}) \cos(\delta) + \text{Im}(\vec{I}) \sin(\delta) \\ I_d = \vec{I} \cdot \vec{D} = -\text{Re}(\vec{I}) \sin(\delta) + \text{Im}(\vec{I}) \cos(\delta) \end{cases} \quad (2.12)$$

Vale lembrar que o texto utiliza dois sistemas de coordenadas: o eixo imaginário-real, no qual a tensão de barramento infinito é igual a 1 p.u. em fase zero, e o eixo quadratura-direto, no qual a tensão \vec{E}' é um real. Isso se deve ao fato que, nas equações diferenciais do gerador, as grandezas devem ser utilizadas na sua forma QD, muito embora a tensão de barramento infinito seja referência de fase no eixo imaginário-real.

2.3

Potência mecânica e tensão de campo no equilíbrio

No equilíbrio, aplicando $\dot{x} = 0$ no sistema diferencial da máquina (sistema 1.1):

$$\begin{cases} 0 = \frac{E_{FD}^* - E_q'^* + (x_d - x_d') I_d^*}{T_{do}'} \\ 0 = \frac{P_m^* - E_q'^* I_q^* - (x_d' - x_d') I_d^* I_q^*}{2H} \\ 0 = x_2^* \end{cases} \quad (2.13)$$

Onde o superescrito estrela (*) significa uma grandeza quando no equilíbrio da máquina. Assim, nesse equilíbrio, fazendo $\dot{x} = 0$, resulta que

$$\begin{cases} P_m^* = E_q'^* I_q^* + (x_d' - x_d') I_d^* I_q^* \\ E_{FD}^* = E_q'^* - (x_d - x_d') I_d^* \\ \omega^* = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

2.4

Algoritmo e aplicação no sistema em estudo

Desenvolve-se assim o algoritmo para cálculo das condições iniciais:

1. Resolver o sistema (2.8), calculando a corrente de barramento no eixo imaginário-real;
2. De posse da corrente, calcular as tensões interna e terminal através de (2.9);
3. Calcular a corrente e tensões no eixo QD do rotor da máquina, através das equações (2.12);
4. Calcular a tensão de campo e potência mecânica no equilíbrio através do sistema (2.14)

Aplicando este algoritmo ao sistema em estudo, com condição inicial $\vec{S} = P + jQ = 1 + j0.5$, resulta a tabela 2.4 onde se encontram as variáveis do sistema no estado de equilíbrio.

Estas condições iniciais são apresentadas no diagrama da figura 3. O código em MATLAB desenvolvido para cálculo das condições iniciais se encontra no apêndice A, seção A.1, página 149.

Na figura, são:

| Grandeza | Sigla | Valor (p.u.) |
|---|-------------|--------------------|
| Tensão interna induzida | \vec{E}' | $1.064 + j0.3350$ |
| Componente em quadratura de \vec{E}' | E'_q | 1.115 |
| Tensão de campo | E_{FD} | 1.519 |
| Tensão terminal | \vec{V}_t | $1.026 + j0.09741$ |
| Componente em quadratura de \vec{V}_t | V_q | 1.008 |
| Componente em direto de \vec{V}_t | V_d | -0.2152 |
| Corrente de barramento | \vec{I} | $0.9899 - j0.1583$ |
| Componente em quadratura de \vec{I} | I_q | 0.8967 |
| Componente em direto de \vec{I} | I_d | -0.4483 |
| Ângulo do rotor | δ | 0.3051 rad |
| Potência mecânica inicial | P_m | 1.000 |

Tabela 2 – Tabela relacionando as variáveis do sistema em estudo no equilíbrio $\vec{S} = 1 + j0.5$.

- A corrente de barramento \vec{I} em rosa;
- A tensão de barramento infinito em verde \vec{E}_∞ ;
- A tensão terminal \vec{V} em vermelho;
- A tensão induzida \vec{E}' em azul.

De imediato nota-se que todas as tensões estão avançadas à corrente de barramento, de onde conclui-se que a máquina está sobre-excitada – *ist est*, opera a fator de potência indutivo. De fato, além de a linha de transmissão ser altamente indutiva, a máquina entrega ao sistema uma potência reativa positiva.

Depois, nota-se que a máquina trabalha como gerador, uma vez que o módulo da tensão induzida é maior que o módulo da terminal, que por sua vez é maior que o módulo da tensão do barramento infinito.

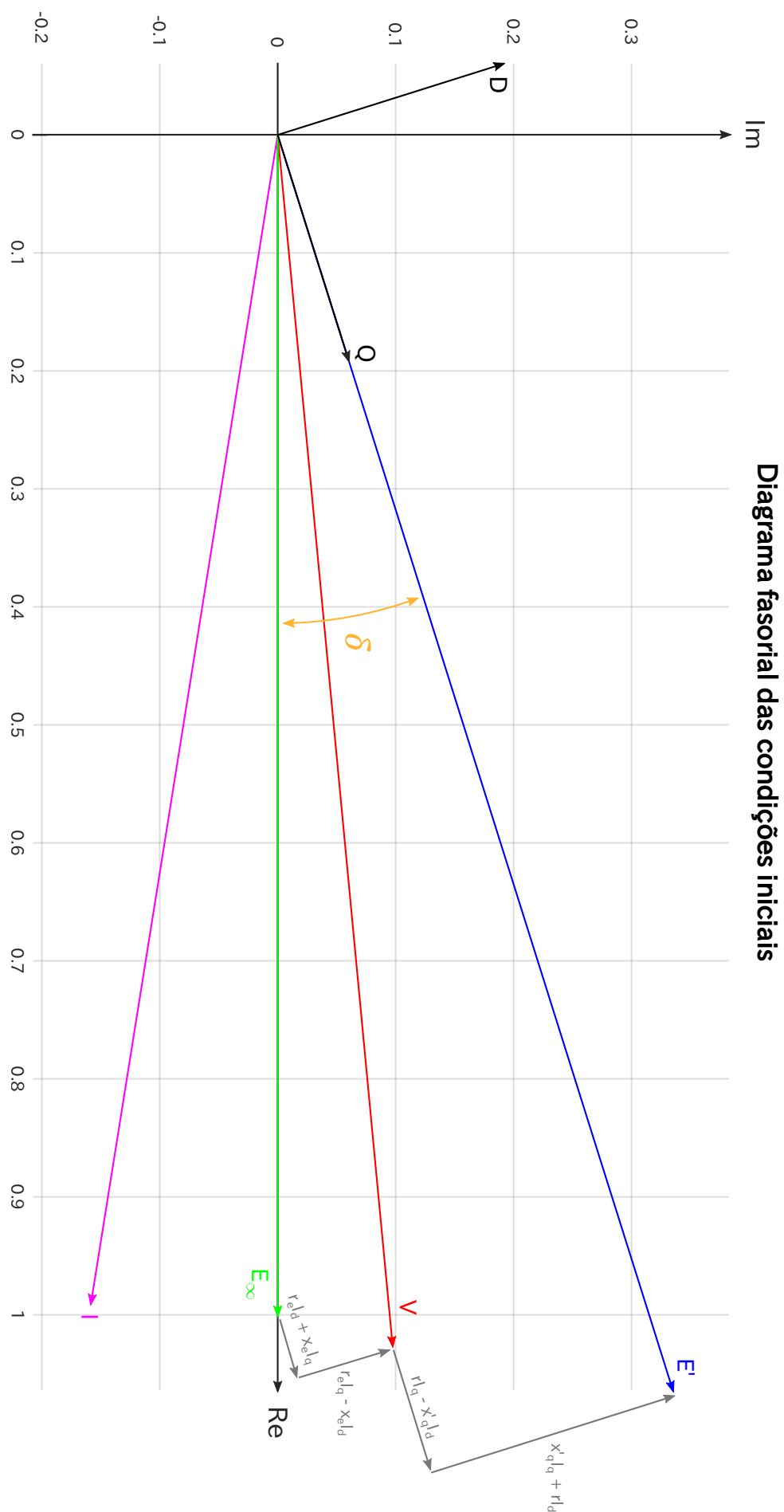


Figura 3 – Diagrama das condições iniciais do sistema em estudo, explicitadas na tabela 2.4.

A Região de Factibilidade

Nota-se que o sistema (2.8) é quadrático. Logo, nem sempre tem solução, significando necessária uma análise para determinar os valores de P , Q , r_t e x_t possíveis que permitem solução das equações de fluxo de potência. Mostrar-se-á que os valores daquelas grandezas não podem ser arbitrários. Em última instância, define-se a **Região de Factibilidade**, o lugar geométrico dos pontos (P, Q) que tornam a equação factível, e encontra-se a forma dessa região em função dos valores de r_t e x_t .

3.1

Definição

Analisando o discriminante Δ da equação (2.7) obtém-se

$$\Delta = \left[r_t E^3 + 2x_t E (Q r_t - P x_t) \right]^2 - 4 \left[E^2 (x_t^2 + r_t^2) \right] \left[(Q r_t - P x_t)^2 - r_t P E^2 \right] \quad (3.1)$$

Agora, dividindo a equação por $E^2 r_t^4$ e fazendo $z = \frac{x_t}{r_t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{E^2 r_t^4} &= \left[\frac{E^2}{r_t} + 2z(Q - Pz) \right]^2 - 4(1 + z^2) \left[(Q - Pz)^2 - P \frac{E^2}{r_t} \right] = \\ &= \frac{E^4}{r_t^2} + 4 \frac{z E^2}{r_t} (Q - Pz) + \cancel{4z^2 (Q - Pz)^2} - 4 \left[(Q - Pz)^2 - P \frac{E^2}{r_t} \right] - \cancel{4z^2 (Q - Pz)^2} + 4Pz^2 \frac{E^2}{r_t} = \\ &= \frac{E^4}{r_t^2} + 4 \frac{E^2}{r_t} z (Q - Pz) - 4 \left[(Q - Pz)^2 - P \frac{E^2}{r_t} \right] + 4Pz^2 \frac{E^2}{r_t} = \\ &= \frac{E^4}{r_t^2} + 4 \frac{E^2}{r_t} z Q - \cancel{4 \frac{E^2}{r_t} z^2 P} - 4 \left[(Q - Pz)^2 - P \frac{E^2}{r_t} \right] + \cancel{4Pz^2 \frac{E^2}{r_t}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{E^4}{r_t^2} + 4 \frac{E^2}{r_t} z Q - 4 \left[(Q - Pz)^2 - P \frac{E^2}{r_t} \right] = \\
&= \frac{E^4}{r_t^2} + 4 \frac{E^2}{r_t} z Q - 4 \left(Q^2 - 2zQP + P^2 z^2 - P \frac{E^2}{r_t} \right) = \\
&= -4P^2 z^2 + z4Q \left(\frac{E^2}{r_t} + 2P \right) + \frac{E^4}{r_t^2} - 4Q^2 + \frac{4E^2}{r_t} P \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Que é uma forma de enxergar a Região de Factibilidade, como uma parábola em z . Isto quer dizer que dadas as condições iniciais desejadas $\vec{S} = P + jQ$, então encontra-se a região dos z possíveis. Desta forma é possível encontrar valores de r_t e de x_t que factibilizam o fluxo de potência do sistema.

No entanto, há também outra forma de enxergar a região: como uma cônica no eixo de Argand-Gauss (P, Q) , parametrizada por z :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta}{E^2 r_t^4} &= -4P^2 z^2 + z4Q \left(\frac{E^2}{r_t} + 2P \right) + \frac{E^4}{r_t^2} - 4Q^2 + \frac{4E^2}{r_t} P = \\
&= -4z^2 P^2 + 8zPQ - 4Q^2 + P \frac{4E^2}{r_t} + Q \frac{4zE^2}{r_t} + \left(\frac{E^2}{r_t} \right)^2 \quad (3.3)
\end{aligned}$$

É importante notar que, como $r_t = r + r_e$, sendo que r corresponde à resistência equivalente de armadura da máquina, então $r_t > 0$ sempre, de forma que a possibilidade $r_t = 0$ não precise ser considerada¹. Logo, z existe sempre. Quer-se que, para I_r ter solução, $\Delta \geq 0$. Assim, define-se a **Região de Factibilidade**

Definição 1. A Região de Factibilidade. *Sejam as equações de equilíbrio do fluxo de potência*

$$\begin{aligned}
I_r^2 [E^2(x_t^2 + r_t^2)] + I_r [r_t E^3 + 2 x_t E(Q r_t - P x_t)] + [(Q r_t - P x_t)^2 - r_t P E^2] &= 0 \\
I_i &= \frac{P x_t - Q r_t}{E r_t} - \frac{x_t}{r_t} I_r
\end{aligned}$$

Com discriminante

$$\Delta = [r_t E^3 + 2 x_t E(Q r_t - P x_t)]^2 - 4 [E^2(x_t^2 + r_t^2)] [(Q r_t - P x_t)^2 - r_t P E^2]$$

¹ O que é aparentemente oximórico dado que o modelo adotado na tabela 1 possui resistência de armadura nula. De fato, trata-se de uma incongruência, mas que foi mantida pelo bem da integridade da fonte – um artigo largamente conhecido e utilizado, inclusive atualmente.

Então a Região de Equilíbrio é a região do Plano de Argand-Gauss (P, Q) para os quais as equações tem solução, que ocorre se e somente se o discriminante for não-negativo. Trata-se portanto do conjunto dos pontos (P, Q) para os quais as equações de fluxo de potência têm equilíbrio garantido, isto é, o lugar geométrico dos (P, Q) que satisfazem

$$-4z^2P^2 + 8zPQ - 4Q^2 + P\frac{4E^2}{r_t} + Q\frac{4zE^2}{r_t} + \left(\frac{E^2}{r_t}\right)^2 \geq 0 \quad (3.4)$$

3.2

Identificação da Região de Factibilidade

Note-se que a equação de Δ é na verdade uma equação de segundo grau com termo retangular; logo, trata-se de uma cônica, quádrlica ou seus equivalentes degenerados. A fim de identificar precisamente de qual caso se trata, a seguir aplicam-se os procedimentos de Álgebra Linear para definir afinal qual região é essa, lançando-se mão de uma rotação de eixos. A equação é da forma

$$(R_F): aP^2 + bPQ + cQ^2 + dP + eQ + f \geq 0$$

Denotando $\vec{S} = \begin{pmatrix} P & Q \end{pmatrix}$,

$$(R_F): SAS^T + BS + f \geq 0$$

Sendo as matrizes A e B :

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4z^2 & \frac{8z}{2} \\ \frac{8z}{2} & -4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} -z^2 & z \\ z & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4E^2}{r_t} & \frac{4zE^2}{r_t} \end{bmatrix} = \frac{4E^2}{r_t} \begin{bmatrix} 1 & z \end{bmatrix}$$

Calculando os autovalores de $\frac{A}{4}$,

$$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -z^2 - \lambda & z \\ z & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + z^2)(\lambda + 1) - z^2 =$$

$$= \lambda^2 + \lambda(1 + z^2) - \cancel{z^2} + \cancel{z^2} =$$

$$= \lambda \{ \lambda - [-(1 + z^2)] \} = 0$$

$$\therefore \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -4(1 + z^2) \end{cases}$$

A diagonalização de A resulta D^2 :

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4(1 + z^2) \end{bmatrix}$$

Encontrando os autovetores: para $\lambda_1 = 0$:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -z^2 & z \\ z & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{cases} -z^2 x + z y = 0 \\ z x - y = 0 \end{cases}$$

Resulta o autovetor $v_1 = (1, z)^T$, que normalizado resulta u_1 :

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} \\ z \\ \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Já para $\lambda_2 = -4(1 + z^2)$:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -z^2 & z \\ z & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -(1 + z^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Assim, obtém-se o sistema

² Note-se que a matriz diagonal D tem determinante nulo, uma vez que A tem um autovetor nulo. Segue disso que a equação tem a forma de uma parábola ou seus casos degenerados: uma reta ou um par de retas paralelas.

$$\begin{cases} -z^2x + zy = -(1+z^2)x \\ zx - y = -(1+z^2)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + zy = 0 \\ zx + z^2y = 0 \end{cases}$$

Resulta o autovetor $v_2 = (-z, 1)^T$, que normalizado resulta u_2 :

$$u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Assim, sucede uma nova base

$$K = \begin{bmatrix} (u_1) & (u_2) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \begin{bmatrix} 1 & -z \\ z & 1 \end{bmatrix}$$

Determina-se assim que a equação da região equivale a uma transformação para as coordenadas $X = (x, y)$ tais que

$$(R_F): XDX^T + BKX^T + f \geq 0 \quad (3.7)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4(1+z^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & z \end{bmatrix} \frac{4E^2}{r_t \sqrt{1+z^2}} \begin{bmatrix} 1 & -z \\ z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{E^4}{r_t^2} \geq 0$$

Expandindo as matrizes,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -4(1+z^2)y \end{bmatrix} + \frac{4E^2}{r_t \sqrt{1+z^2}} \begin{bmatrix} 1+z^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \left(\frac{E^2}{r_t}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4(1+z^2)y^2 - \frac{4E^2 \sqrt{1+z^2}}{r_t} x + \left(\frac{E}{r_t}\right)^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Tem-se portanto a equação final da Região de Factibilidade, parametrizada pela razão de impedâncias z :

$$(R_F): -4(1+z^2)y^2 - \frac{4E^2 \sqrt{1+z^2}}{r_t} x + \left(\frac{E}{r_t}\right)^2 \geq 0 \quad (3.9)$$

Que sugere a equação de uma parábola com eixo horizontal e concavidade para a esquerda – uma vez que o termo que multiplica y^2 é sempre negativo, qualquer que seja z (lembrando que z é a razão de dois números reais, dos quais o denominador é positivo portanto z existe e é inerentemente real).

A seguir, primeiramente estuda-se a transformação linear $(P, Q) \rightarrow (x, y)$, que corresponde a uma rotação de eixos. Em seguida, identifica-se a região dada pela equação (3.9) e seu gráfico é traçado.

3.3

Estudo do ângulo de rotação dos eixos

A transformação linear realizada, que leva a equação (3.4) à equação (3.9), corresponde a uma rotação de eixos no sentido anti-horário e na magnitude do ângulo θ . A figura 4 depicta o ângulo θ em função da razão z . Este ângulo corresponde à rotação da nova base K com relação ao eixo PQ , ou seja, o argumento do vetor u_1 , de onde

$$\left. \begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \\ \sin(\theta) &= \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \tan(\theta) = z \Leftrightarrow \theta = \text{atan}(z) \quad (3.10)$$

Lembra-se que os eixos (P, Q) e (x, y) relacionam-se através das equações

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \overbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}}^{R(\theta)} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}}_{R(-\theta) = R^{-1}(\theta)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Onde $R(\theta)$ é a matriz rotação de magnitude θ . Um fato a se denotar é que z quase sempre será um positivo maior que um, implicando na terceira condição de $\theta(z)$. Isso porque as resistências de linha e armadura são pequenas se comparadas às impedâncias de eixo e de linha, de forma que o módulo de z seja alto; além disso, tais impedâncias serão quase sempre indutivas, e z será quase sempre positivo. Em outras palavras, como a linha de transmissão tem característica primordialmente indutiva, e sendo z a razão da parte indutiva da sua impedância pela parte resistiva, segue que esta quantidade é grande. Tem-se portanto que z será, na maioria dos casos, um positivo de alto valor.

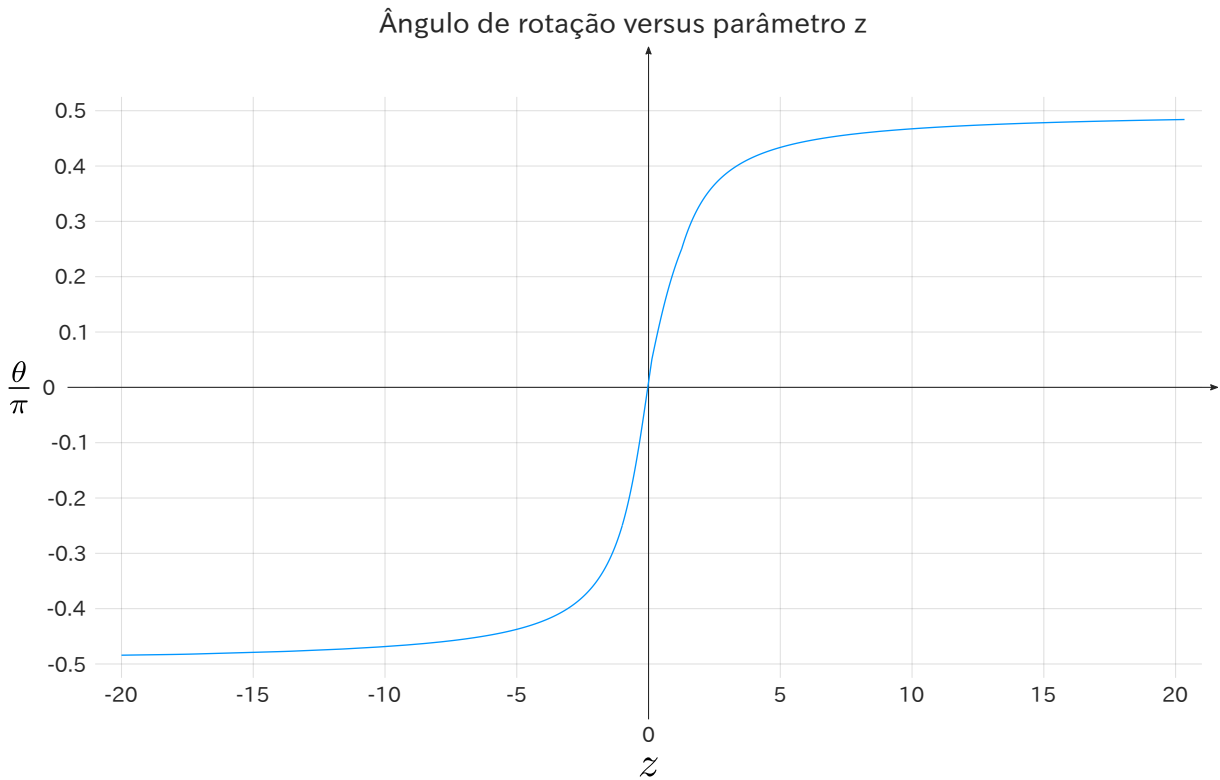


Figura 4 – Gráfico do ângulo de rotação θ em função do parâmetro z .

Assim, a rotação quase sempre será de um ângulo muito próximo de um quarto de volta. Conclui-se que, no eixo PQ , a região será uma parábola com eixo aproximadamente vertical, uma vez que em xy ela tem concavidade para a esquerda e, após rotacionada de aproximadamente metade de π , terá concavidade para cima.

É importante notar que fazendo a Série de Laurent da função $\arctan(\cdot)$ em $x = \infty$ então

$$\theta = \arctan(z) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! x^n} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} \quad (3.12)$$

Que é uma aproximação muito útil em cálculos exaustivos de fluxos de potência.

3.4

Redução à forma canônica: cálculo do vértice e do foco

Analisando a equação da Região (3.9), reduz-se à forma canônica da parábola. Sabe-se que

$$ay^2 + bx + cy + d = a \left(y^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}y + \frac{d}{a} \right) = a \left[\left(y + \frac{c}{2a} \right)^2 - \left(\frac{c}{2a} \right)^2 + \frac{b}{a}x + \frac{d}{a} \right] =$$

$$= a \left(y + \frac{c}{2a} \right)^2 - \frac{c^2}{4a} + bx + d = a \left(y + \frac{c}{2a} \right)^2 + b \left(x + \frac{d}{b} - \frac{c^2}{4ab} \right)$$

Assim,

$$(R_F): \left(y + \frac{c}{2a} \right)^2 + \frac{b}{a} \left(x + \frac{d}{b} - \frac{c^2}{4ab} \right) \geq 0 \quad (3.13)$$

Relembra-se a forma canônica da parábola:

$$\begin{aligned} (y - y_0)^2 - 2p(x - x_0) &\equiv \left(y + \frac{c}{2a} \right)^2 + \frac{b}{a} \left(x + \frac{d}{b} - \frac{c^2}{4ab} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -\frac{c}{2a} = 0 \\ x_0 = -\frac{d}{b} + \frac{c^2}{4ab} = \left(\frac{E^2}{r_t} \right)^2 \frac{r_t}{4E^2 \sqrt{1+z^2}} = \frac{E^2}{4r_t \sqrt{1+z^2}} \\ p = -\frac{b}{2a} = -\frac{4E^2 \sqrt{1+z^2}}{8r_t(1+z^2)} = -\frac{E^2}{2r_t \sqrt{1+z^2}} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\therefore \begin{cases} P_0 = x_0 \cos(\theta) - y_0 \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \frac{E^2}{4r_t \sqrt{1+z^2}} = \frac{E^2}{4r_t(1+z^2)} \\ Q_0 = x_0 \sin(\theta) + y_0 \cos(\theta) = -\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \frac{E^2}{4r_t \sqrt{1+z^2}} = -\frac{zE^2}{4r_t(1+z^2)} \end{cases} \quad (3.15)$$

Onde (x_0, y_0) é o vértice da parábola e p o seu parâmetro, isto é, a distância do foco ao vértice, que corresponde à distância do vértice à geratriz. Notadamente, a parábola tem concavidade para a esquerda sempre porque $p < 0$. Note-se também que a equação inclui a igualdade, significando que a região compreende o interior da parábola e a própria.

Quando a parábola for rotacionada de $-\theta$, para ir do eixo XY ao PQ, então também rotacionado será o vértice da parábola, que no PQ tem a forma (P_0, Q_0) :

Como $\theta \approx \frac{\pi}{2}$, a parábola no eixo PQ terá eixo quase vertical, significando que o vértice (P_0, Q_0) será muito próximo do ponto de menor potência reativa que a máquina pode entregar ao sistema.

Calcula-se também o foco da parábola:

$$\begin{cases} y_F = y_0 \\ x_F = x_0 + p = \frac{E^2}{4r_t\sqrt{1+z^2}} - \frac{E^2}{2r_t\sqrt{1+z^2}} = -\frac{E^2}{4r_t\sqrt{1+z^2}} \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\therefore \begin{cases} P_F = x_F \cos(\theta) - y_F \sin(\theta) = -\frac{E^2}{4r_t(1+z^2)} \\ Q_F = x_F \sin(\theta) + y_F \cos(\theta) = \frac{zE^2}{4r_t(1+z^2)} \end{cases} \quad (3.17)$$

Observa-se que o foco e o vértice da parábola são opostos.

3.5

Ponto de mínima potência reativa

Dado que o ângulo de rotação θ é próximo de $\frac{\pi}{2}$, decorre que a parábola que representa a Região de Factibilidade é quase vertical, mas não completamente. Isso significa que o vértice da parábola apenas aproxima o ponto mais baixo possível; trata-se de um ponto de interesse porque representa a menor potência reativa possível em regime permanente. Em que pese tratar-se do ponto mais baixo da parábola, representa na verdade o maior valor de potência reativa que a máquina pode receber do barramento infinito em regime permanente.

Derivando a equação da parábola (a igualdade da inequação 3.4) com relação a P :

$$-8z^2P + 8z\left(Q + P\frac{dQ}{dP}\right) - 8Q\frac{dQ}{dP} + \frac{4E^2}{r_t} + \frac{dQ}{dP}\frac{4zE^2}{r_t} = 0 \quad (3.18)$$

Aplicando $\frac{dQ}{dP} = 0$ e chamando de (P_{min}, Q_{min}) o ponto de mínima potência reativa:

$$-2z^2P_{min} + 2zQ_{min} + \frac{E^2}{r_t} = 0 \Leftrightarrow P_{min} = \frac{Q_{min}}{z} + \frac{E^2}{2z^2r_t} \quad (3.19)$$

Agora utilizando esta na equação da parábola:

$$-4z^2\left(\frac{Q}{z} + \frac{E^2}{2z^2r_t}\right)^2 + 8zQ\left(\frac{Q}{z} + \frac{E^2}{2z^2r_t}\right) - 4Q^2 + \left(\frac{Q}{z} + \frac{E^2}{2z^2r_t}\right)\frac{4E^2}{r_t} + Q\frac{4zE^2}{r_t} + \left(\frac{E^2}{r_t}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -\left[2z\left(\frac{Q}{z} + \frac{E^2}{2z^2r_t}\right) - 2Q\right]^2 + \left(\frac{Q}{z} + \frac{E^2}{2z^2r_t}\right)\frac{4E^2}{r_t} + Q\frac{4zE^2}{r_t} + \left(\frac{E^2}{r_t}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -\left(\frac{E^2}{zr_t}\right)^2 + \left(\frac{Q}{z} + \frac{E^2}{2z^2r_t}\right)\frac{4E^2}{r_t} + Q\frac{4zE^2}{r_t} + \left(\frac{E^2}{r_t}\right)^2 = 0 \xleftrightarrow{\times \frac{r_t^2}{E^4}} \\
&\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{4Qr_t}{zE^2} + \frac{2}{z^2}\right) + Q\frac{4zr_t}{E^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{4Qr_t}{E^2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 + \frac{1}{z^2} = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{4Qr_t}{E^2}\frac{z^2+1}{z} + \frac{z^2+1}{z^2} = 0 \tag{3.20}
\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} Q_{min} = -\frac{E^2}{4r_t z} = -\frac{E^2}{4x_t} \\ P_{min} = \frac{E^2}{2z^2} \left(\frac{1}{2x_t} - \frac{1}{r_t} \right) \end{cases} \tag{3.21}$$

3.6

Algoritmo e aplicação ao sistema em estudo

Desenvolve-se assim o algoritmo com o fim de traçar a Região de Factibilidade do sistema:

1. Calcula-se $z = \frac{x_t}{r_t}$
2. Calcula-se $\theta(z) = \text{atan}(z)$:
3. Traçar a Região de Factibilidade no eixo XY, segundo a equação

$$(R_F): -4(1+z^2)y^2 - \frac{4E^2\sqrt{1+z^2}}{r_t}x + \left(\frac{E}{r_t}\right)^2 \geq 0$$

4. Rotacionar o eixo XY de $-\theta$, obtendo a região no eixo PQ;
5. Calcular P_0 e Q_0 .

Aplicando este algoritmo para o sistema em estudo (tabela 1), no equilíbrio $\vec{S} = 1 + j0.5$, provém a tabela 3, que relaciona os parâmetros da Região de Factibilidade para este sistema em estudo. A figura 5 mostra a Região, bem como os pontos e parâmetros da tabela.

| Equação da Região de Factibilidade | | |
|--|----------------------|------------------------------------|
| $-y^2 - 2.939905160189274x + 2.160760587726880 \geq 0$ | | |
| Grandeza | Sigla | Valor |
| Razão de impedâncias | z | 34 |
| Ângulo de rotação | θ | 0.490640642678354π |
| Vértice da parábola | (P_0, Q_0) | $(0.02160760588, -0.73465859983)$ |
| Ponto de mínima potência reativa | (P_{min}, Q_{min}) | $(-0.04261652757, -0.73529411764)$ |
| Parâmetro da parábola | p | -1.469952580094637 |
| Foco da parábola | (P_F, Q_F) | $(-0.02160760588, 0.73465859983)$ |

Tabela 3 – Tabela relacionando os parâmetros da Região de Factibilidade do sistema em estudo aplicando-se o algoritmo desenvolvido.

Como discutido, o ângulo de rotação θ é próximo de $\frac{\pi}{2}$, imprimindo sobre a parábola uma quase verticalidade; para constatá-la, traçou-se o eixo da parábola em laranja, sobre o qual jaz o foco da parábola (em amarelo). É interessante notar que como o vértice e o foco são pontos opostos, o eixo cruza a origem. Além disso, o vértice (ponto vermelho) é muito próximo do ponto de menor potência reativa (ponto roxo).

Também nota-se que, sendo praticamente vertical, a parábola é quase simétrica no eixo das ordenadas, significando que o mesmo modelo de máquina pode ser utilizado como motor síncrono (potência P negativa, isto é, a máquina recebe potência do barramento) ou como gerador (P positivo). Ademais, a máquina também pode trabalhar recebendo potência reativa do barramento (Q negativo) até o limite Q_{min} .

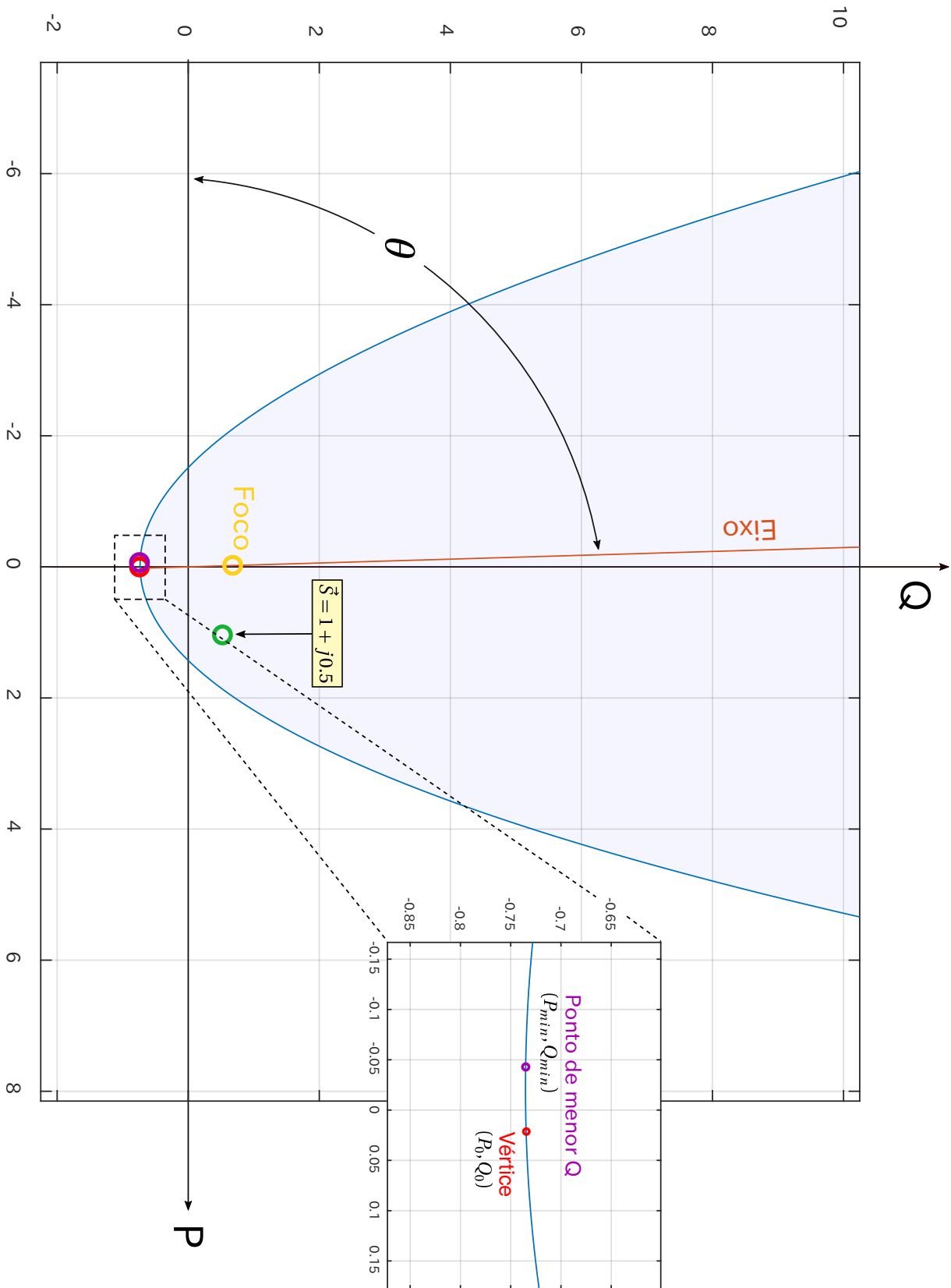


Figura 5 – Região de Factibilidade do sistema OMIB em estudo (tabela 1), hachurada, cujos parâmetros são dados na tabela 3. Em vermelho, o vértice da parábola; em laranja, o seu eixo; em verde, o ponto $\vec{S} = 1 + j0.5$; em roxo, o ponto de mínima potência reativa; em amarelo, o foco da parábola.

Comportamento dinâmico do sistema OMIB

EADs do sistema sem controladores

4.1

Descrição da metodologia de simulação do sistema

A primeira parte desta monografia concentrou-se em caracterizar o sistema no seu equilíbrio, lançando mão de análises conhecidas tais como análise de circuito, balanço do fluxo de potência e caracterização da Região de Factibilidade do sistema. O objetivo foi descrever o sistema e desenvolver as equações do seu equilíbrio. É natural, portanto, que siga disso uma análise do sistema em regime transitório, quer dizer, estudar o comportamento do sistema frente a perturbação.

É doravante mister para o objetivo final do trabalho desenvolver programas de simulação do sistema, porque o traçado das estimativas da Região de Estabilidade do sistema será feito através do método Força-Bruta – que exige a simulação repetida do sistema – necessitando portanto programas simulatórios eficientes.

Nesta parte, estudar-se-á o comportamento do sistema OMIB em condição transitória, complementando a parte anterior na qual estudou-se o comportamento de equilíbrio do sistema. O objetivo primário é, a partir do sistema de equações diferenciais em malha aberta, deduzir as equações diferenciais (EADs) do sistema quando controlado apenas por controlador do tipo AVR (*Automatic Voltage Regulator*), e também do sistema controlado por AVR e PSS (*Power System Stabilizer*), o qual pode ser equipado com saturadores (“sistema saturado”) ou não (“sistema livre”). Depois constroem-se os programas de simulação do sistema a partir das EADs desenvolvidas.

Também são deduzidas, a partir das equações do circuito da figura 1, as equações da tensão terminal da máquina e das correntes de barramento em função das variáveis de estado. Outrossim, o sistema será caracterizado através de equações algébrico-diferenciais (EADs), da forma do sistema (4.1):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t) \\ y = g(x, t) \\ I = SV \end{cases} \quad (4.1)$$

A primeira equação do sistema resume-se nas equações diferenciais da máquina (1.1). A segunda depiccta as equações algébricas do sistema, que relacionam as variáveis de estado – como por exemplo a tensão terminal V_t de equação (5.7). A terceira, por sua vez, trata da equação de interface entre a máquina e a rede externa.

Dado que o sistema diferencial da máquina já foi obtido, esta parte se concentra em deduzir as duas últimas equações, que consistem basicamente na obtenção das correntes de barramento e da tensão terminal da máquina como funções das variáveis de estado, e acoplar estas equações algébricas no sistema diferencial representado pela primeira equação.

Atenção especial deve ser dada ao fato que uma extensa manipulação algébrica é feita em virtude de as variáveis de estado serem dadas no eixo QD da máquina, enquanto as equações são obtidas (em primeiro momento) no eixo real-imaginário. Em outras palavras, obter as tensões e correntes do sistema em função das variáveis de estado perpassa uma rotação de ângulo, o ângulo do rotor com relação ao eixo real-imaginário, resultando em contas e expressões extensas.

Primeiramente, o sistema será caracterizado em malha aberta, sem controladores, e deduzir-se-ão as correntes de barramento como função das variáveis de estado. Em seguida, de posse da equação que caracteriza o AVR, este será introduzido e as equações do sistema controlado serão apresentadas. O sistema controlado por AVR será simulado sob perturbação. Então será introduzido o controlador PSS, as equações do sistema AVR+PSS serão deduzidas e simuladas. Finalmente, serão introduzidos saturadores; adaptar-se-ão as equações do sistema livre para obtê-las referentes ao sistema saturado.

O modelo de perturbação adotado será um degrau na potência mecânica, de amplitude $\Delta P = 0.1$.

Em seguida, de posse dos sistemas algébrico-diferenciais, na próxima parte serão analisados aspectos de estabilidade do sistema, como região de estabilidade e o surgimento de bifurcações e de ciclos-limite (órbitas periódicas), e a modificação da região de estabilidade do sistema em função do uso de saturadores.

4.2

Equações diferenciais da máquina em malha aberta

A máquina em malha aberta é regida segundo o sistema diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_4 - x_1 + (x_d - x'_d)I_d}{T'_{do}} \\ \dot{x}_2 = \frac{P_m - x_1 I_q + (x'_d - x'_q) I_d I_q}{2H} \\ \dot{x}_3 = x_2 \\ \dot{x}_4 = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Sendo:

- $E'_q = x_1$ a componente de quadratura da tensão interna induzida \vec{E}' ;
- $\omega = x_2$ a velocidade angular do rotor com relação ao eixo QD;
- $\delta = x_3$ o ângulo do rotor com relação do eixo QD;
- $E_{FD} = x_4$ a tensão no enrolamento de campo, que no sistema em malha aberta é constante e igual ao valor inicial;
- P_m a potência mecânica admitida do elemento motriz, variante no tempo e não controlável.

A despeito de quarta equação do sistema diferencial ser redundante – uma vez que se poderia adicionar uma quarta constante E_{FD} – adicionou-se-a para reiterar que, quando sem controladores, a tensão de campo E_{FD} da máquina é constante e igual ao valor em equilíbrio calculado através das equações de fluxo de potência ao passo que, no sistema AVR, a tensão de campo é uma variável de estado e no sistema AVR+PSS trata-se de uma função de variáveis de estado.

4.3

Equações algébricas das componentes da corrente de barramento

I_q e I_d são as componentes no eixo QD da corrente de barramento, calculadas através das componentes no eixo complexo I_r e I_i

$$\vec{I} = I_r + j I_i = \frac{\vec{E}' - \vec{E}}{(r + r_e) + j(x'_q + x_e)} = \frac{\vec{E}' - \vec{E}}{r_t + j x_t} \quad (4.3)$$

Mas de posse da igualdade $\vec{E}' = E'_q e^{j\delta} = x_1 e^{j x_3}$ obtem-se:

$$\begin{aligned}
\vec{I} &= \frac{x_1 [\cos(x_3) + j \sin(x_3)] - \vec{E}}{r_t + j x_t} = \\
&= \frac{\{x_1 [\cos(x_3) + j \sin(x_3)] - E\} (r_t - j x_t)}{r_t^2 + x_t^2} = \\
&= \frac{\{[x_1 \cos(x_3) - E] + j [x_1 \sin(x_3)]\} (r_t - j x_t)}{r_t^2 + x_t^2} = \\
&= \frac{[x_1 \cos(x_3) - E] r_t + x_1 \sin(x_3) x_t}{r_t^2 + x_t^2} + j \frac{x_1 \sin(x_3) r_t - [x_1 \cos(x_3) - E] x_t}{r_t^2 + x_t^2} \quad (4.4)
\end{aligned}$$

De onde

$$\begin{aligned}
I_r &= \frac{[x_1 \cos(x_3) - E] r_t + x_1 \sin(x_3) x_t}{r_t^2 + x_t^2} \\
I_i &= \frac{x_1 \sin(x_3) r_t - [x_1 \cos(x_3) - E] x_t}{r_t^2 + x_t^2}
\end{aligned}$$

Fazendo as projeções em termos do eixo QD:

$$\begin{aligned}
I_q &= \vec{I} \cdot \vec{Q} \\
I_d &= \vec{I} \cdot \vec{D}
\end{aligned}$$

E sabendo-se que $\vec{Q} = \cos(\delta) + j \sin(\delta)$ e $\vec{D} = -\sin(\delta) + j \cos(\delta)$:

$$\begin{pmatrix} I_q \\ I_d \end{pmatrix} = R(\delta) \begin{pmatrix} I_r \\ I_i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} I_q = I_r \cos(\delta) + I_i \sin(\delta) \\ I_d = -I_r \sin(\delta) + I_i \cos(\delta) \end{cases}$$

O sistema se traduz numa mudança de base na forma de translação. Assim,

$$\begin{aligned}
I_q &= \frac{x_1 r_t - E [r_t \cos(x_3) - x_t \sin(x_3)]}{r_t^2 + x_t^2} \\
I_d &= \frac{E [r_t \sin(x_3) + x_t \cos(x_3)] - x_1 x_t}{r_t^2 + x_t^2}
\end{aligned}$$

Denotando a impedância total como

$$\vec{X} = X \angle \phi \Leftrightarrow \begin{cases} X = \sqrt{r_t^2 + x_t^2} \\ \tan(\phi) = \frac{x_t}{r_t} \end{cases} \quad (4.5)$$

Escrevem-se assim I_q e I_d em função de x_1 e x_3 , para utilizar estas equações no sistema diferencial 4.2:

$$\begin{aligned} I_q &= \frac{x_1 \cos(\phi) - E [\cos(\phi) \cos(x_3) - \sin(\phi) \sin(x_3)]}{X} = \\ &= \frac{x_1 \cos(\phi) - E \cos(x_3 + \phi)}{X} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} I_d &= \frac{E [\cos(\phi) \sin(x_3) + \sin(\phi) \cos(x_3)] - x_1 \sin(\phi)}{X} = \\ &= \frac{E \sin(x_3 + \phi) - x_1 \sin(\phi)}{X} \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.4

Sistema algébrico-diferencial e simulação

Obtém-se assim as equações que definem o sistema em malha aberta. Denotou-se as funções algébricas em negrito.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_4 - x_1 + (x_d - x'_d) \mathbf{I}_d}{T'_{do}} \\ \dot{x}_2 = \frac{P_m - x_1 \mathbf{I}_q + (x'_d - x'_q) \mathbf{I}_d \mathbf{I}_q}{2H} \\ \dot{x}_3 = x_2 \\ \dot{x}_4 = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{I}_q = \frac{x_1 \cos(\phi) - E \cos(x_3 + \phi)}{X} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{I}_d = \frac{E \sin(x_3 + \phi) - x_1 \sin(\phi)}{X} \quad (4.10)$$

A simulação dinâmica do sistema em malha aberta ante perturbação resulta os gráficos da figura 6. O programa de simulação encontra-se no apêndice A, seção A.3, página 151.

Sob análise desta figura, conclui-se que o sistema em malha aberta possui três problemas. O primeiro, que refere-se à baixa regulação das tensões do sistema, quer dizer, ao fato de o erro de regime permanente das tensões ser muito grande; o segundo, que o tempo de acomodação é muito alto, cerca de cinco minutos, ineficiente para a maioria dos sistemas elétricos de potência; finalmente o terceiro, que as amplitudes das oscilações são demasiado grandes.

O primeiro problema será endereçado com a introdução do AVR, um controlador desenhado especificamente para melhorar a regulação de tensão do sistema. Os dois últimos problemas serão sanados com a subsequente introdução do PSS, cujo objetivo é responder dinamicamente às variações da frequência angular ω .

Comportamento transitório do sistema em malha aberta

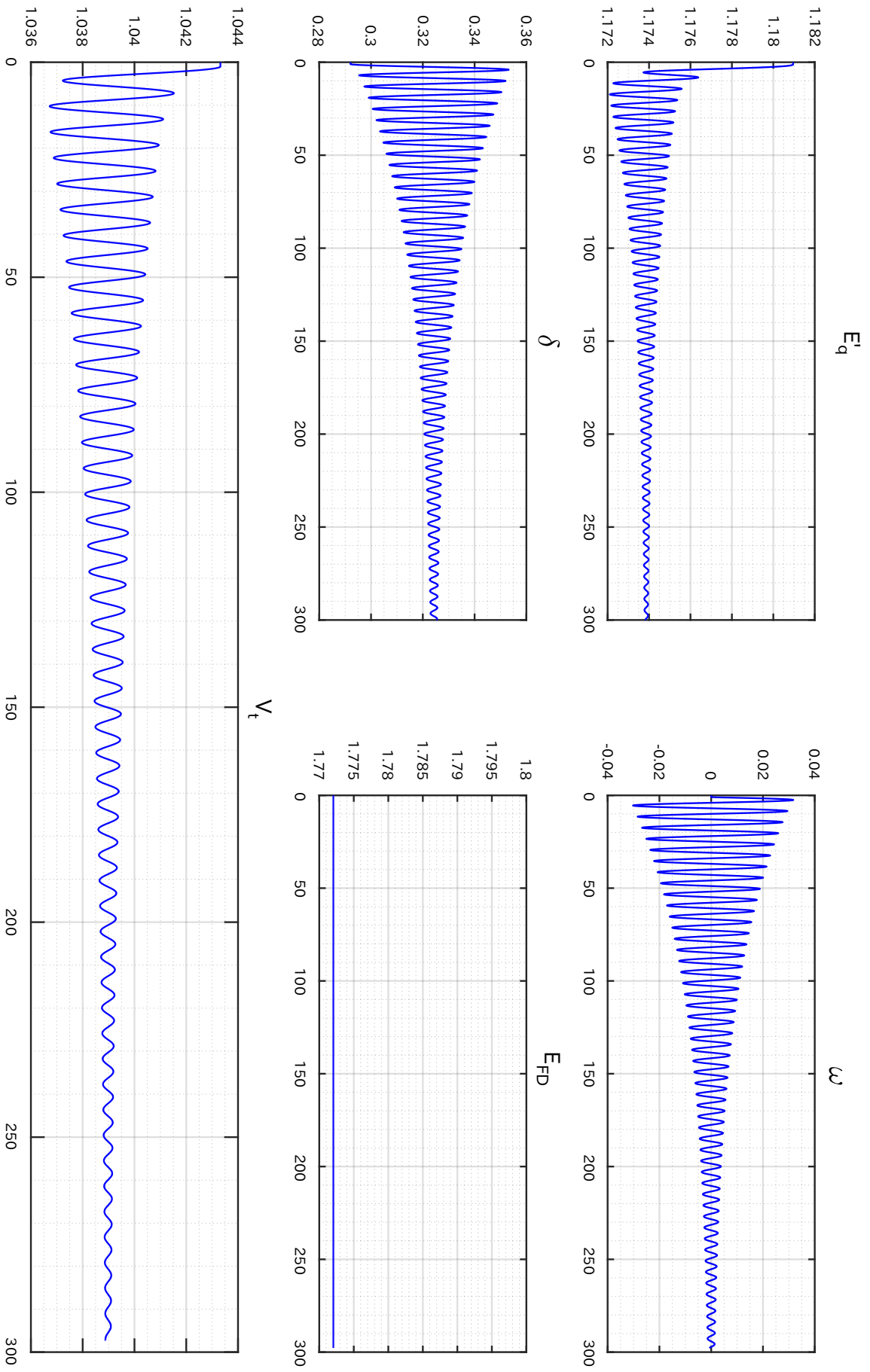


Figura 6 – Gráficos gerados na simulação dinâmica do sistema em malha aberta ante perturbação.

EADs do sistema controlado por AVR

A introdução do AVR procura aumentar a regulação das tensões no sistema, que é esquematizado no diagrama de blocos da figura 7.

Frise-se que o objetivo do AVR é apenas melhorar aquela regulação de tensões do sistema; os outros dois problemas (altas amplitudes de oscilações e alto tempo de acomodação) não são endereçados por este controlador. Em verdade, não apenas o AVR não endereça estes problemas como também pode amplificá-los; como desenvolvido na Parte IV desta monografia, o sistema controlado por AVR tende a instabilizar com ganhos K_e suficientemente altos.

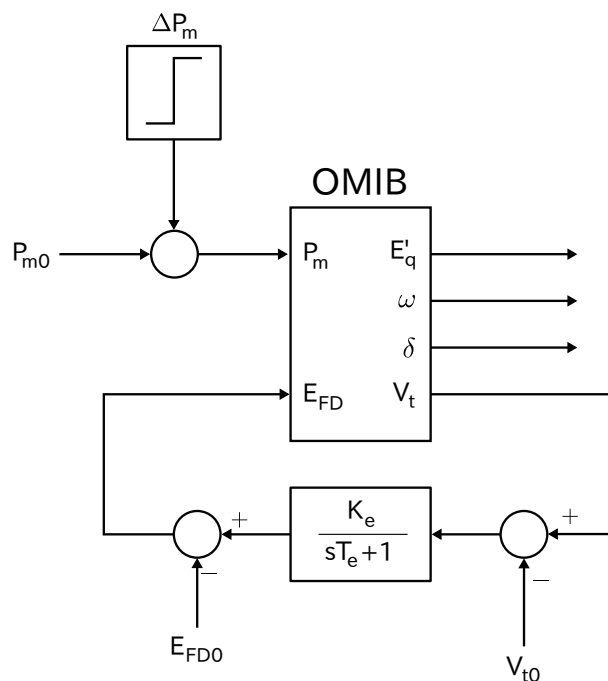


Figura 7 – Diagrama esquemático de blocos do sistema controlado por AVR.

Controle automático de tensão (AVR)

Um AVR (*Automatic Voltage Regulator*) é um dispositivo que ajusta a tensão no enrolamento de campo da máquina com o objetivo de regular a tensão terminal $|\vec{V}_t|$, denotada apenas por V_t . Sua lei de controle é dada por

$$\frac{\Delta E_{FD}}{\Delta V_t} = -\frac{K_e}{s T_e + 1} \quad (5.1)$$

Onde o operador Δ denota a diferença entre o valor atual de uma grandeza e o valor da mesma grandeza no ponto de operação. Transformando a equação (5.1) para o domínio do tempo, tem-se a lei de controle do AVR em forma diferencial:

$$\dot{E}_{FD} = -\frac{K_e(V_t - V_{t0}) + (E_{FD} - E_{FD0})}{T_e} \quad (5.2)$$

Para se poder implementar a lei de controle é necessário obter a relação da tensão terminal com as variáveis de estado. Como \vec{V}_t é função do divisor de tensões entre \vec{E}' e \vec{E} , obtém-se aquela tensão como função destas duas e das impedâncias:

$$\vec{V}_t = \vec{E} + (\vec{E}' - \vec{E}) \times \frac{r_e + j x_e}{(r + r_e) + j(x'_d + x_e)} \quad (5.3)$$

Denotando

$$\vec{Z} = r_e + j x_e = Z \angle \alpha \quad (5.4)$$

$$\vec{X} = \overbrace{(r + r_e)}^{r_t} + j \overbrace{(x'_d + x_e)}^{x_t} = X \angle \phi \quad (5.5)$$

Então

$$\begin{aligned} V_t &= |\vec{V}| = \\ &= \left| E + \left\{ x_1 [\cos(x_3) + j \sin(x_3)] - E \right\} \frac{r_e + j x_e}{(r + r_e) + j(x'_d + x_e)} \right| = \\ &= \left| E + \left\{ [x_1 \cos(x_3) - E] + j x_1 \sin(x_3) \right\} (K_R + j K_I) \right| = \\ &= \left| \left[(x_1 \cos(x_3) - E) K_R - x_1 K_I \sin(x_3) + E \right] + j \left[(x_1 \cos(x_3) - E) K_I + x_1 K_R \sin(x_3) \right] \right| = \\ &= \sqrt{\left[(x_1 \cos(x_3) - E) K_R - x_1 K_I \sin(x_3) + E \right]^2 + \left[(x_1 \cos(x_3) - E) K_I + x_1 K_R \sin(x_3) \right]^2} = \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\left[(x_1 \cos(x_3) - E)^2 + (x_1 \sin(x_3))^2 \right] (K_I^2 + K_R^2) + 2E \left[(x_1 \cos(x_3) - E) K_R - x_1 K_I \sin(x_3) \right] + E^2} = \\
&= \sqrt{\left[x_1^2 - 2E x_1 \cos(x_3) + E^2 \right] \left(\frac{Z}{X} \right)^2 + 2E \left[(x_1 \cos(x_3) - E) K_R - x_1 K_I \sin(x_3) \right] + E^2} = \\
&= \sqrt{\left[x_1^2 - 2E x_1 \cos(x_3) + E^2 \right] \left(\frac{Z}{X} \right)^2 + 2E \frac{Z}{X} \left[x_1 \cos(x_3 + \alpha - \phi) - E \cos(\alpha - \phi) \right] + E^2} \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Por outro lado, a mesma equação pode ser deduzida a partir das equações da máquina. Sabendo que

$$\vec{V}_t = \vec{E}' + (r + jx'_q) \vec{I} = x_1 e^{jx_3} + (r + jx'_q)(I_q + jI_d) \quad (5.8)$$

Substituindo as equações de I_q (4.9) e I_d (4.10) e tomando o módulo deve-se chegar na mesma expressão de (5.7).

5.2

Sistema diferencial e simulação

Assim, adiciona-se o controle AVR ao reescrever a quarta equação do sistema 4.2 como

$$\dot{x}_4 = -\frac{K_e(V_t - V_{t0}) + (x_4 - E_{FD0})}{T_e}$$

O sistema controlado por apenas um controlador AVR será descrito então por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_4 - x_1 + (x_d - x'_d) \mathbf{I}_d}{T'_{do}} \\ \dot{x}_2 = \frac{P_m - x_1 I_q + (x'_d - x'_q) \mathbf{I}_d \mathbf{I}_q}{2H} \\ \dot{x}_3 = x_2 \\ \dot{x}_4 = -\frac{K_e(\mathbf{V}_t - V_{t0}) + (x_4 - E_{FD0})}{T_e} \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{V}_t = \sqrt{\left[x_1^2 - 2E x_1 \cos(x_3) + E^2 \right] \left(\frac{Z}{X} \right)^2 + 2E \frac{Z}{X} \left[x_1 \cos(x_3 + \alpha - \phi) - E \cos(\alpha - \phi) \right] + E^2} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{I}_q = \frac{x_1 \cos(\phi) - E \cos(x_3 + \phi)}{X} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{I_d} = \frac{E \sin(x_3 + \phi) - x_1 \sin(\phi)}{X} \quad (5.12)$$

Simulando estas EADs sob perturbação obtém-se a figura 8. O programa de simulação em MATLAB se encontra no apêndice A, seção A.4, página 155. Os valores escolhidos de K_e e T_e são fruto de sintonia do controlador AVR, que consta no apêndice D. As escolhas em específico constam na seção D.5, na página 230.

De fato, o sistema AVR tem uma melhor regulação de tensão do que o sistema em malha aberta, dado que os erros de regime permanente das tensões E'_q e V_t são menores. Além disso, o sistema controlado é levemente mais lento (isto é, tem tempos de acomodação levemente maiores) e as amplitudes das oscilações são um pouco maiores.

Após uma análise minuciosa do comportamento do sistema, conclui-se que a primeira reação da máquina à perturbação é a queda da tensão interna E'_q , levando a uma conseguinte queda de V_t . No sistema em malha aberta, o barramento infinito é responsável por corrigir as oscilações; já no sistema controlado, além da função regulatória do barramento infinito, assim que a tensão V_t sofre queda, o controlador age aumentando E_{FD} , regulando V_t .

Comportamento transitório dos sistemas controlado por AVR e em malha aberta

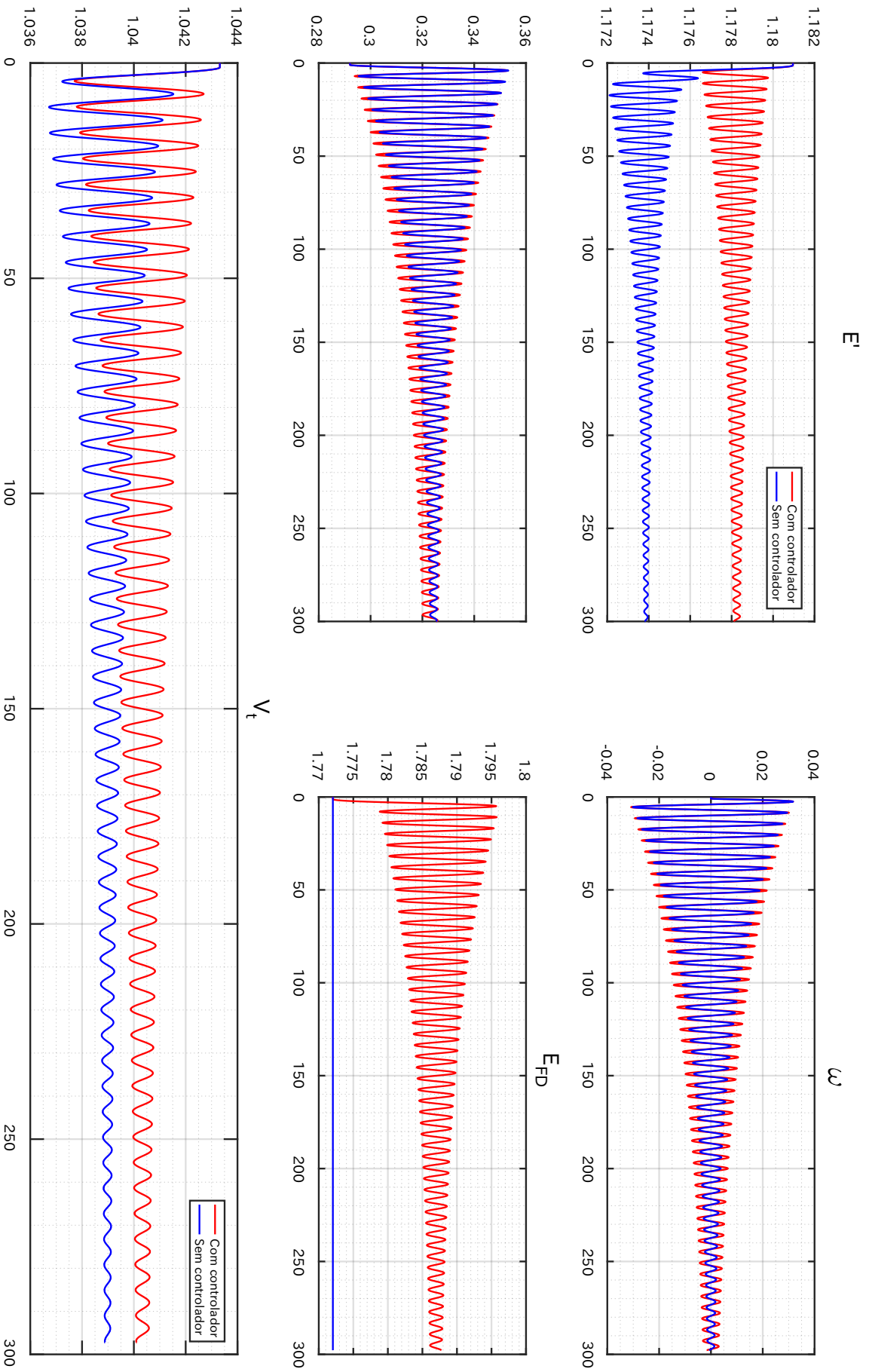


Figura 8 – Gráficos do comportamento dinâmico do sistema controlado por AVR e do sistema em malha aberta após perturbação.

EADs do sistema controlado por AVR e PSS

O problema da baixa regulação de tensão no sistema foi endereçado pelo AVR; no entanto, este controlador não diminui os tempos de acomodação, tanto menos diminui as amplitudes das oscilações do sistema. Para remeter-se a estes problemas insere-se no sistema o controlador do tipo *Power System Stabilizer*, que ajusta a tensão de campo E_{FD} segundo a performance dinâmica do sistema através das variações da frequência angular do rotor, potência elétrica gerada, tensão interna e afins. A figura 9 mostra o diagrama de blocos do sistema controlado por AVR e PSS sem saturadores.

Dentre todos os modelos de PSS disponíveis, nesta monografia adotou-se o PSS1A, descrito no IEEE Standard 421.5 de 2005, segundo o qual adiciona-se uma componente V_{PSS} na tensão de excitação E_{FD} :

$$\frac{V_{PSS}}{\Delta\omega} = \left[\frac{1}{sT_T + 1} \right] \times K_{PSS} \left[\frac{sT_w}{sT_w + 1} \right] \times \left[\frac{sT_1 + 1}{sT_2 + 1} \right] \quad (6.1)$$

Onde

- O tempo T_T modela a constante de tempo de um transdutor. Supôs-se que o transdutor é perfeito e que, portanto, $T_T = 0$ s;
- A constante K_{PSS} é o ganho do controlador PSS;
- O segundo fator T_w corresponde ao *washout*;
- O terceiro fator é um compensador de avanço-atraso, para ajustar a resposta em frequência e margens de estabilidade do controlador;

A tensão de campo deixa de ser uma variável de estado e passa a adicionar uma equação algébrica: $E_{FD} = V_{PSS} + V_{AVR} + E_{FD0}$.

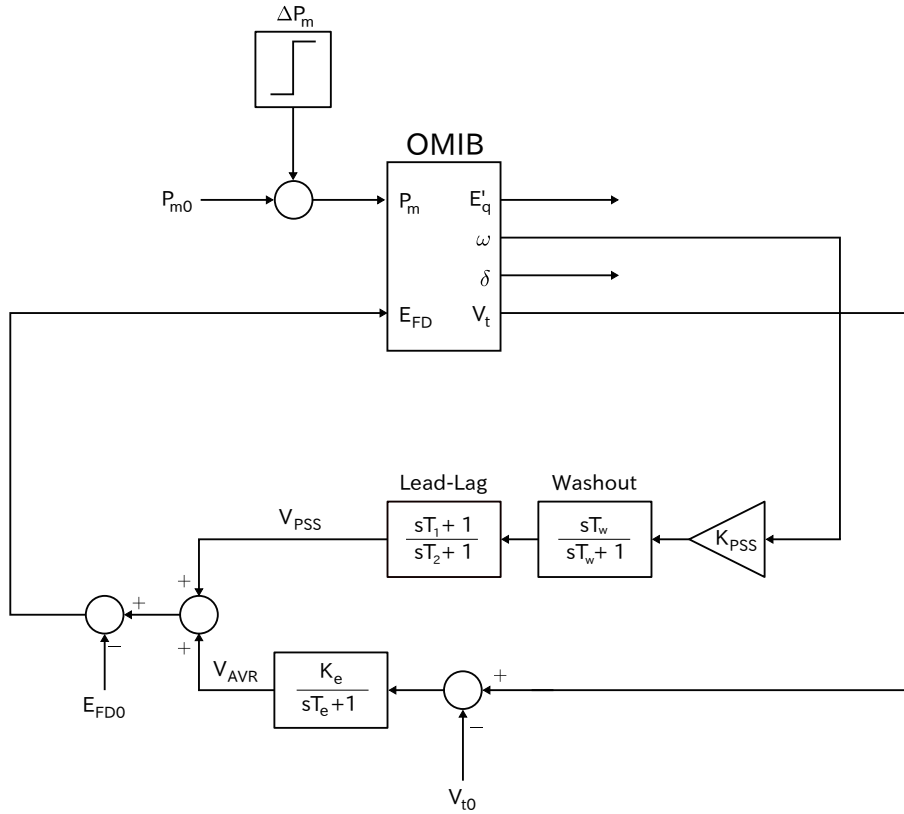


Figura 9 – Diagrama esquemático de blocos do sistema controlado por AVR e PSS sem saturadores.

6.1

Dedução das EADs do sistema

Passando a lei de controle do PSS (6.1) para o domínio do tempo:

$$T_w K_{PSS} \left(T_1 \frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{dw}{dt} \right) = V_{PSS} + (T_w + T_2) \frac{dV_{PSS}}{dt} + T_w T_2 \frac{d^2 V_{PSS}}{dt^2} \quad (6.2)$$

Observe-se que os termos $\dot{\omega}$ e $\ddot{\omega}$ podem ser retirados da equação de *swing*, que corresponde à segunda equação do sistema de equações diferenciais da máquina (sistema (4.2)), como será feito abaixo. Já para o AVR, da equação (5.2):

$$\frac{dV_{AVR}}{dt} = -\frac{K_e(V_t - V_{t0}) + (E_{FD} - E_{FD0})}{T_e} \quad (6.3)$$

Inserem-se novas variáveis de estado para os controladores:

$$\begin{cases} x_4 = V_{PSS} \\ x_5 = \dot{V}_{PSS} \\ x_6 = V_{AVR} \end{cases} \quad (6.4)$$

As equações de \dot{x}_4 e de \dot{x}_6 já são conhecidas, a saber,

$$\begin{cases} \dot{x}_4 = x_5 \\ \dot{x}_6 = -\frac{K_e(V_t - V_{t0}) + (x_4 + x_6)}{T_e} \end{cases} \quad (6.5)$$

Já a equação de \dot{x}_5 será obtida através de (6.2):

$$T_w K_{PSS} (T_1 \ddot{x}_2 + \dot{x}_2) - x_4 - (T_w + T_2) x_5 = T_w T_2 \dot{x}_5 \quad (6.6)$$

$$\therefore \dot{x}_5 = \frac{T_w K_{PSS} (T_1 \ddot{x}_2 + \dot{x}_2) - x_4 - (T_w + T_2) x_5}{T_w T_2} \quad (6.7)$$

Precisa-se saber a expressão de \ddot{x}_2 (uma vez que já se possui a equação de \dot{x}_2 pois é uma das equações do espaço de estado). Sabemos que, pela segunda equação do sistema diferencial (sistema 4.2),

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \frac{P_m - x_1 I_q - (x'_d - x'_q) I_d I_q}{2H} \\ \therefore \ddot{x}_2 &= \frac{\dot{P}_m - (x_1 \dot{I}_q + \dot{x}_1 I_q) - (x'_d - x'_q) (I_q \dot{I}_d + I_d \dot{I}_q)}{2H} = \\ &= \frac{\dot{P}_m - \left\{ x_1 \dot{I}_q + \left[\frac{(x_4 + x_6 + E_{FD0}) - x_1 + (x_d - x'_d) I_d}{T'_{do}} \right] I_q \right\} - (x'_d - x'_q) (I_q \dot{I}_d + I_d \dot{I}_q)}{2H} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Observe-se que, como P_m é um degrau no tempo da forma $P_m(t) = P_{m0} + \Delta P_m u(t - t_p)$, onde P_{m0} é o valor no ponto de operação inicial da potência mecânica, ΔP_m é a amplitude do degrau na potência mecânica e t_p é o instante de tempo em que esse degrau ocorre, então \dot{P}_m tem a forma de um impulso:

$$\dot{P}_m = \Delta P_m \delta(t - t_p)$$

Agora deduzam-se as expressões das derivadas das correntes. Das equações (4.9) e (4.10):

$$I_q = \frac{x_1 \cos(\phi) - E \cos(x_3 + \phi)}{X}$$

$$I_d = \frac{E \sin(x_3 + \phi) - x_1 \sin(\phi)}{X}$$

Onde $\vec{X} = (r + r_e) + j(x'_q + x_e) = X e^{j\phi}$. Relembrando que $x_2 = \dot{x}_3$, resulta

$$\dot{I}_q = \frac{\dot{x}_1 \cos(\phi) + x_2 E \sin(x_3 + \phi)}{X} \quad (6.9)$$

$$\dot{I}_d = \frac{x_2 E \cos(x_3 + \phi) - \dot{x}_1 \sin(\phi)}{X} \quad (6.10)$$

Mas a expressão de \dot{x}_1 é conhecida, de onde

$$\dot{I}_q = \frac{[(x_4 + x_6 + E_{FD0}) - x_1 + (x_d - x'_d)I_d] \cos(\phi) + x_2 T'_{do} E \sin(x_3 + \phi)}{T'_{do} X} \quad (6.11)$$

$$\dot{I}_d = \frac{x_2 T'_{do} E \cos(x_3 + \phi) - [(x_4 + x_6 + E_{FD0}) - x_1 + (x_d - x'_d)I_d] \sin(\phi)}{T'_{do} X} \quad (6.12)$$

6.2

EADs do sistema controlado por AVR e PSS sem saturadores

Finalmente, o sistema em malha fechada com o controlador AVR+PSS é regido pelas equações algébrico-diferenciais abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{\mathbf{E}_{\text{FD}} - x_1 + (x_d - x'_d)\mathbf{I}_d}{T'_{do}} \\ \dot{x}_2 = \frac{P_m - x_1\mathbf{I}_q - (x'_d - x'_q)\mathbf{I}_d\mathbf{I}_q}{2H} \\ \dot{x}_3 = x_2 \\ \dot{x}_4 = x_5 \\ \dot{x}_5 = \frac{T_w K_{\text{PSS}}(T_1\ddot{x}_2 + \dot{x}_2) - x_4 - (T_w + T_2)x_5}{T_w T_2} \\ \dot{x}_6 = -\frac{K_e(\mathbf{V}_t - V_{t0}) + (\mathbf{E}_{\text{FD}} - E_{\text{FD0}})}{T_e} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{I}_q = \frac{x_1 \cos(\phi) - E \cos(x_3 + \phi)}{X}$$

$$\mathbf{E}_{\text{FD}} = x_4 + x_6 + E_{\text{FD0}}$$

$$\mathbf{I}_d = \frac{E \sin(x_3 + \phi) - x_1 \sin(\phi)}{X}$$

$$\dot{\mathbf{I}}_q = \frac{[\mathbf{E}_{\text{FD}} - x_1 + (x_d - x'_d)\mathbf{I}_d] \cos(\phi) + x_2 T'_{do} E \sin(x_3 + \phi)}{X T'_{do}}$$

$$\dot{\mathbf{I}}_d = \frac{x_2 T'_{do} E \cos(x_3 + \phi) - [\mathbf{E}_{\text{FD}} - x_1 + (x_d - x'_d)\mathbf{I}_d] \sin(\phi)}{X T'_{do}}$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{\dot{P}_m - \left\{ x_1 \dot{\mathbf{I}}_q + \left[\frac{\mathbf{E}_{\text{FD}} - x_1 + (x_d - x'_d)\mathbf{I}_d}{T'_{do}} \right] \mathbf{I}_q \right\} - (x'_d - x'_q)(\mathbf{I}_q \dot{\mathbf{I}}_d + \mathbf{I}_d \dot{\mathbf{I}}_q)}{2H}$$

$$\mathbf{V}_t = \sqrt{\left[x_1^2 - 2E x_1 \cos(x_3) + E^2 \right] \left(\frac{Z}{X} \right)^2 + 2E \frac{Z}{X} \left[x_1 \cos(x_3 + \alpha - \phi) - E \cos(\alpha - \phi) \right] + E^2}$$

Com as impedâncias \vec{Z} e \vec{X} sendo

$$\vec{Z} = r_e + jx_e = Z e^{j\alpha} \quad (6.13)$$

$$\vec{X} = (r + r_e) + j(x'_q + x_e) = X e^{j\phi} \quad (6.14)$$

E $K_e, T_e, T_w, T_1, T_2, K_{PSS}$ sendo constantes referentes aos controladores. A simulação deste sistema se dará junto com a do próximo, no qual se introduzirão saturadores.

6.3

EADs do sistema controlado por AVR e PSS com saturadores

Para prevenir sobre-excitação do sistema, bem como prevenir oscilações de tensão de grande amplitude, introduzem-se saturadores em lugares específicos dos controladores. Neste trabalho, os saturadores serão introduzidos em dois pontos do sistema: primeiramente, na tensão de campo E_{FD} e, depois, na saída do PSS V_{PSS} , gerando a figura 10 a partir de 9:

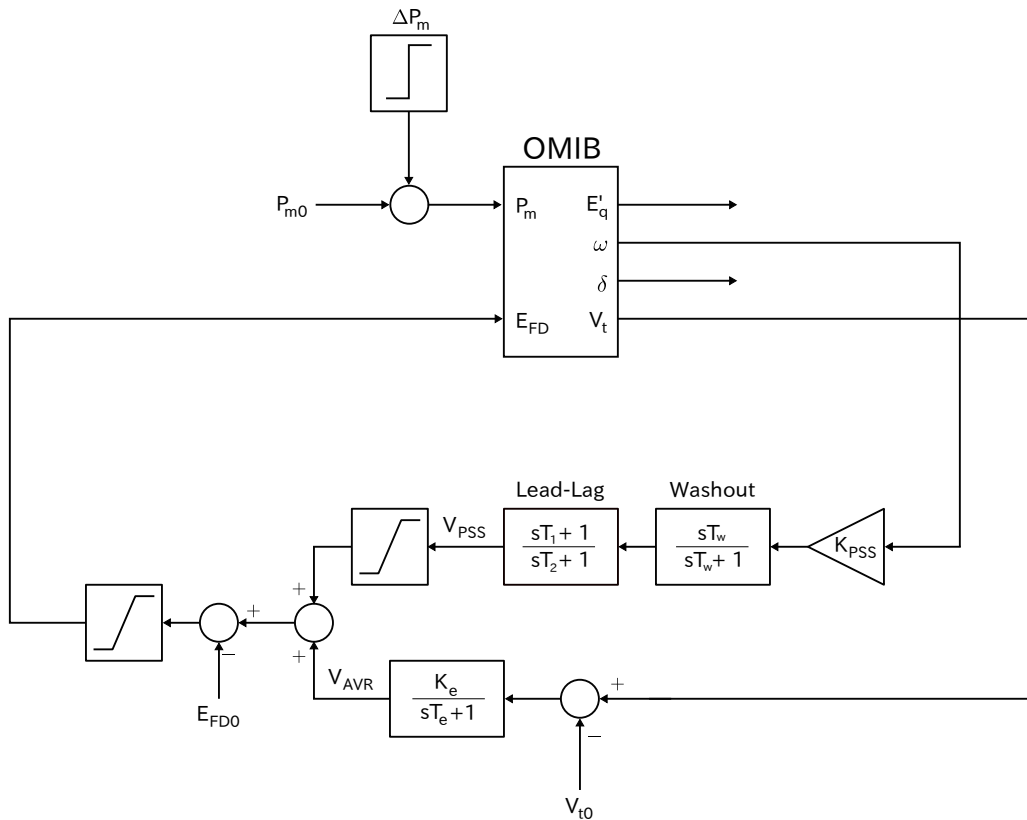


Figura 10 – Diagrama esquemático de blocos do sistema controlado por AVR e PSS com saturadores.

6.3.1 A função saturação $S(x)$

A função saturação será implementada como segue:

$$S(x, x_{max}, x_{min}) = R(x - x_{min}) - R(x - x_{max}) + x_{min} \quad (6.15)$$

Onde:

- x é a variável a ser ceifada;
- x_{max} é o máximo valor que x pode assumir;
- x_{min} é o mínimo valor que x pode assumir;
- $R(x)$ é a função rampa, descrita como

$$R(x) = x u(x) \quad (6.16)$$

Onde $u(x)$ é a função degrau de Heaviside. Para que $R(x)$ seja contínua, então define-se $R(0) = 0$.

É importante salientar que há várias formas de se implementar a função saturação; por exemplo, se poderia adotar

$$S(x) = \begin{cases} x_{max}, & \text{se } x \geq x_{max} \\ x, & \text{se } x_{min} \leq x \leq x_{max} \\ x_{min}, & \text{se } x \leq x_{min} \end{cases} \quad (6.17)$$

$$R(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (6.18)$$

Decidiu-se adotar $R(x)$, escrita em termos de $u(x)$ como em (6.16) e $S(x)$ como em (6.15) porque a resolução de equações diferenciais do MATLAB (quer dizer, o comando *solver*) funciona através de variáveis simbólicas, e a função condicional “if” não pode ser implementada para este tipo de variáveis – rendendo a definição mais usual imprópria. Logo, a função $S(x)$ deve ser definida segundo rotinas com as quais a plataforma numérica consiga trabalhar, como por exemplo a função rampa.

6.3.2 Derivação da função $S(x)$

No capítulo sobre Estudos em Estabilidade, será deduzida a matriz jacobiana do sistema. Para tanto, será preciso deduzir a derivada da função saturação, o que será feito nesta seção. Primeiramente,

$$R(x) = \int_{-\infty}^x u(t) dt \Leftrightarrow \frac{dR(x)}{dx} = u(x) \quad (6.19)$$

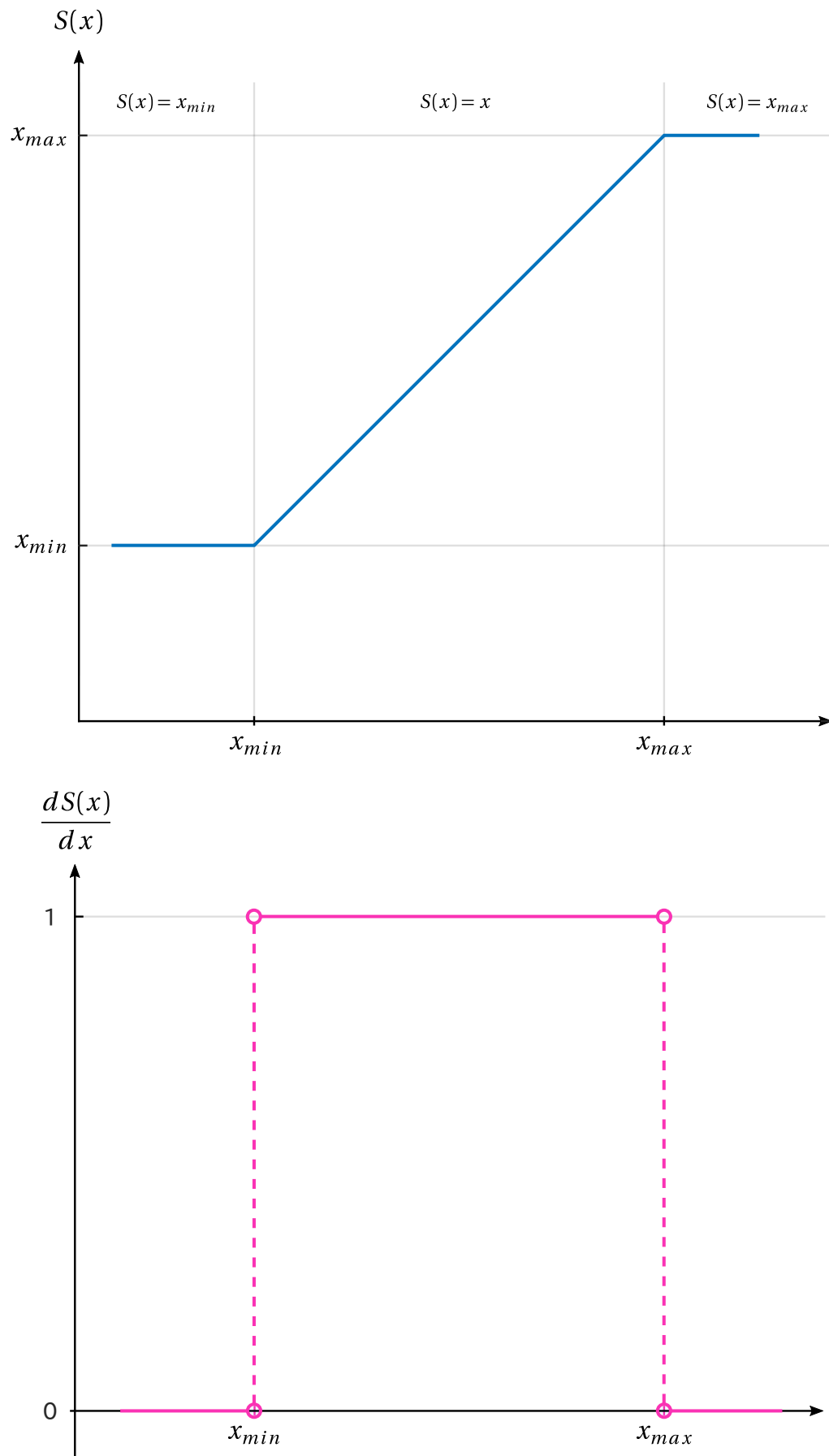
Pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}S(x) &= \frac{dR(x-x_{min})}{d(x-x_{min})} \frac{d(x-x_{min})}{dx} - \frac{dR(x-x_{max})}{d(x-x_{max})} \frac{d(x-x_{max})}{dx} = \\ &= u(x-x_{min}) - u(x-x_{max})\end{aligned}\quad (6.20)$$

Que é a função chamada Boxcar, função pulso, ou função retangular, de amplitude unitária, largura $x_{max} - x_{min}$ e cuja subida ocorre em x_{min} :

$$\frac{d}{dx}S(x) = \prod_{x_{min}}^{x_{max}}(x) \quad (6.21)$$

As funções $S(x)$ e $S'(x)$ estão traçadas na figura 11.

Figura 11 – Traçados da função $S(x)$ e sua derivada função pulso.

6.3.3 Sistema de equações e simulação

Finalmente, obtém-se um novo sistema de equações que incorpora a função saturação.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{E_{FD}^{\text{sat}} - x_1 + (x_d - x'_d)\mathbf{I}_d}{T'_{do}} \\ \dot{x}_2 = \frac{P_m - x_1\mathbf{I}_q - (x'_d - x'_q)\mathbf{I}_d\mathbf{I}_q}{2H} \\ \dot{x}_3 = x_2 \\ \dot{x}_4 = x_5 \\ \dot{x}_5 = \frac{T_w K_{PSS}(T_1\ddot{x}_2 + \dot{x}_2) - x_4 - (T_w + T_2)x_5}{T_w T_2} \\ \dot{x}_6 = -\frac{K_e(\mathbf{V}_t - V_{t0}) + (E_{FD}^{\text{sat}} - E_{FD0})}{T_e} \end{array} \right. \quad (6.22)$$

Denotam-se as funções saturadas x_4^{sat} e E_{FD}^{sat} :

$$x_4^{\text{sat}} = S(x_4, V_{PSS}^{\text{max}}, V_{PSS}^{\text{min}}) \quad (6.23)$$

$$E_{FD}^{\text{sat}} = S(x_4^{\text{sat}} + x_6 + E_{FD0}, E_{FD}^{\text{max}}, E_{FD}^{\text{min}}) \quad (6.24)$$

Têm-se as equações algébricas herdadas do sistema sem saturação, mas substituindo as variáveis antes não saturadas para suas versões com saturação:

$$\mathbf{I}_q = \frac{x_1 \cos(\phi) - E \cos(x_3 + \phi)}{X} \quad (6.25)$$

$$\mathbf{I}_d = \frac{E \sin(x_3 + \phi) - x_1 \sin(\phi)}{X} \quad (6.26)$$

$$\dot{\mathbf{I}}_q = \frac{[\mathbf{E}_{FD} - x_1 + (x_d - x'_d)\mathbf{I}_d] \cos(\phi) + x_2 T'_{do} E \sin(x_3 + \phi)}{X T'_{do}} \quad (6.27)$$

$$\dot{\mathbf{I}}_d = \frac{x_2 T'_{do} E \cos(x_3 + \phi) - [\mathbf{E}_{FD} - x_1 + (x_d - x'_d)\mathbf{I}_d] \sin(\phi)}{X T'_{do}} \quad (6.28)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{\dot{P}_m - \left\{ x_1 \dot{\mathbf{I}}_q + \left[\frac{\mathbf{E}_{FD} - x_1 + (x_d - x'_d)\mathbf{I}_d}{T'_{do}} \right] \mathbf{I}_q \right\} - (x'_d - x'_q)(\mathbf{I}_q \dot{\mathbf{I}}_d + \mathbf{I}_d \dot{\mathbf{I}}_q)}{2H} \quad (6.29)$$

$$V_t = \sqrt{\left[x_1^2 - 2E x_1 \cos(x_3) + E^2 \right] \left(\frac{Z}{X} \right)^2 + 2E \frac{Z}{X} \left[x_1 \cos(x_3 + \alpha - \phi) - E \cos(\alpha - \phi) \right] + E^2} \quad (6.30)$$

$K_e, T_e, T_w, T_1, T_2, K_{PSS}$ são constantes referentes aos controladores. As escolhas destes parâmetros provêm da sintonia do controlador, presente no apêndice E, seção E.4, página 239. Estas equações, simuladas sob perturbação juntamente com as equações do sistema não-saturado, resultam os gráficos da figura 12. Os limites de saturação de E_{FD} e V_{PSS} foram escolhidos de forma que:

- A tensão de campo não sofresse saturações;
- A tensão V_{PSS} sofresse leves saturações.

O programa de simulação em MATLAB encontra-se no apêndice A, seção A.5, página 159.

De uma análise da figura 12, conclui-se que a introdução do PSS de fato melhorou o comportamento dinâmico do sistema como propunha. O sistema controlado por AVR e PSS tem menor tempo de acomodação (menos de um minuto) do que aquele controlado apenas por AVR (cerca de cinco minutos). Além disso, as oscilações foram diminuídas; por exemplo, enquanto no sistema controlado por apenas AVR as oscilações na frequência angular ω chegaram a quase 8% (vide figura 8), no sistema controlado por AVR e PSS estas mesmas oscilações chegaram a menos de 6%.

Ainda na figura 12, também pode-se notar o efeito da saturação na resposta do sistema. Entre aproximadamente o sexto e o décimo segundos, e o décimo quarto e o décimo sexto, a tensão V_{PSS} atinge a saturação. As amplitudes de oscilação das tensões são muito reduzidas – por exemplo, sem saturação a tensão interna E'_q oscila em 4%, enquanto que com saturação essa oscilação não passa de 3%.

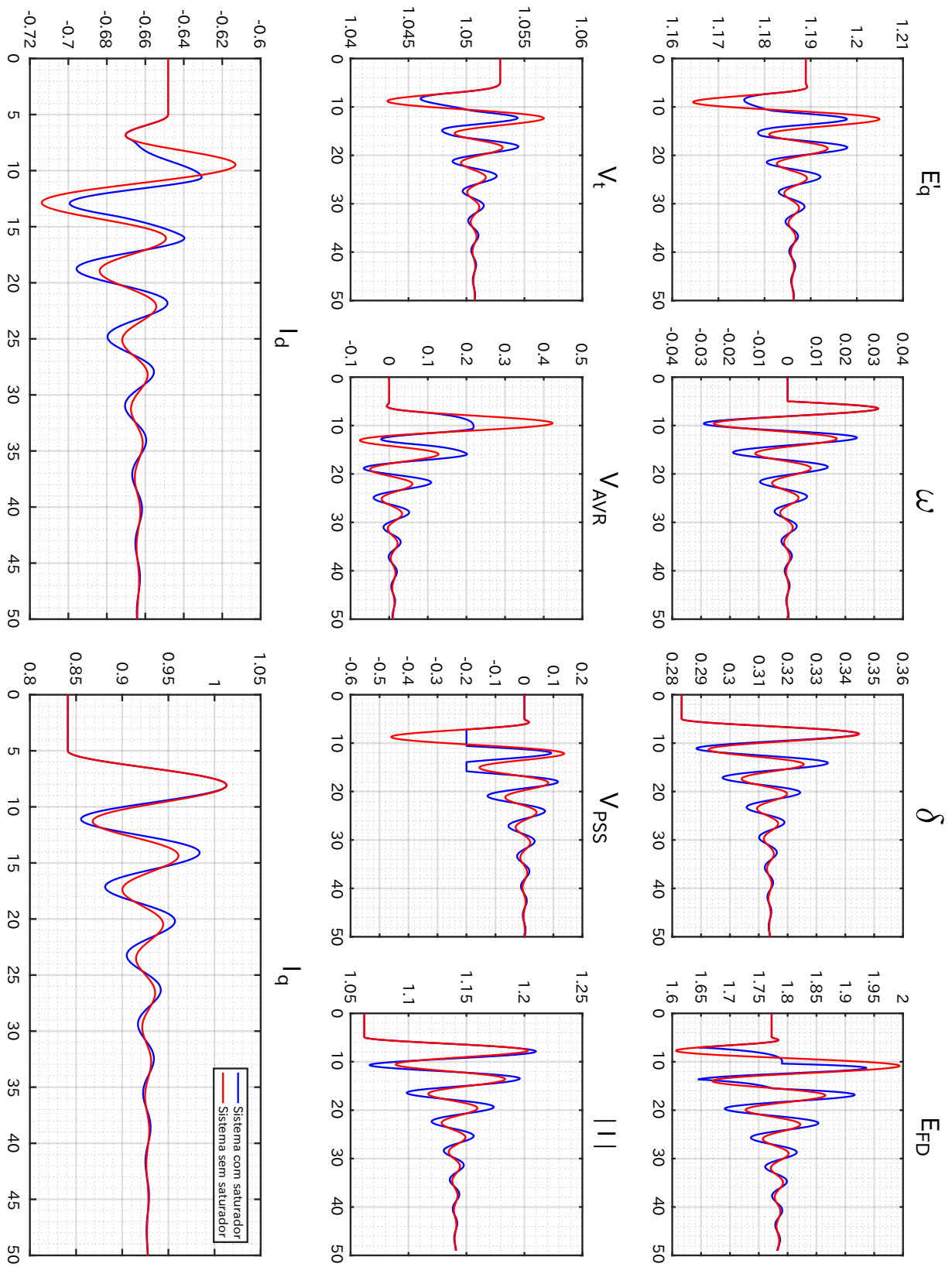


Figura 12 – Gráficos do comportamento dinâmico do sistema controlado por AVR e PSS, sem saturadores (curva vermelha) e com saturadores (cor azul).

Estudos de estabilidade

Ocorrência de bifurcações no sistema

Nesta parte, serão estudados os aspectos de estabilidade dos sistemas descritos na parte anterior. A análise de estabilidade será feita através da análise local dos sistemas, por meio da determinação dos autovalores no equilíbrio.

O objetivo é a determinação da ocorrência de Bifurcações de Hopf nos sistemas. Trata-se de um ponto no qual uma combinação específica dos parâmetros do sistema – das constantes do controlador – provocam uma mudança no ponto de equilíbrio, à medida que coalesce com uma solução periódica (órbita). Foi constatado, por exemplo, em (GAO; K.T.CHAU, 2004) e (LI et al., 2002) que motores síncronos de ímã permanente podem apresentar uma bifurcação de Hopf em função dos parâmetros dos controladores. Ambos os sistemas (aquele controlado apenas por AVR e aquele por PSS+AVR) serão analisados, com o objetivo final de determinar a combinação específica dos parâmetros que suscita a bifurcação e, se possível, traçar a órbita periódica resultante.

Primeiramente, para os dois sistemas, serão determinados os polinômios característicos como combinações dos elementos do jacobiano. A dedução destes elementos em função dos estados no equilíbrio, bem como do polinômio característico, é extensa e está nos apêndices.

De posse da forma analítica deste polinômio, são determinadas as condições de ocorrência da bifurcação, ou seja, a lei que relaciona os parâmetros do sistema para que o evento ocorra. Em seguida, os autovalores dos sistemas na bifurcação são determinados.

7.1

A Bifurcação de Hopf

Segundo (STROGATZ, 2014; WANG, 1993), uma bifurcação de Hopf é definida como segue:

Definição 2 (Bifurcação de Hopf). *Suponha um sistema dinâmico não-linear, ao qual se associa um equilíbrio estável x^* qualquer e um ciclo periódico instável; à medida que se alteram os parâmetros*

μ do sistema, o ciclo limite paulatinamente se aproxima do equilíbrio. Uma bifurcação de Hopf ocorre quando a combinação de parâmetros provoca a coalescência do ciclo limite com o equilíbrio, e este torna-se instável. Em outras palavras, existe um ponto crítico $\mu = \mu_B$ para o qual o ponto de equilíbrio do sistema dinâmico perde estabilidade, à medida que um par conjugado de autovalores do sistema nesse ponto de equilíbrio cruza o eixo imaginário.

A figura 13 mostra como a Bifurcação de Hopf ocorre. Inicialmente, tem-se um sistema de equilíbrio localmente estável x^* , envolto por um ciclo limite instável, em vermelho. O ciclo limite é instável porque, se levemente perturbado em direção a x^* , então a trajetória do sistema converge para o equilíbrio (curva verde); caso o ciclo seja perturbado na direção contrária a x^* , então a trajetória diverge (curva azul), como explicado em 13.(a). Já em 13.(b) mostra-se que, à medida que o vetor de parâmetros μ se aproxima de μ_B , o ciclo limite diminui, engulfando o equilíbrio; até que, em $\mu = \mu_B$, o equilíbrio e o ciclo limite instável coalescem; a situação final, ilustrada em 13.(c), mostra o equilíbrio instável resultante.

É preciso notar que há duas condições necessárias e suficientes para a ocorrência desta bifurcação: a primeira, que um par de autovalores do sistema no equilíbrio torne-se imaginário puro; a segunda, chamada Condição de Transversalidade, que a derivada da parte real dos autovalores $Re(\lambda)$ com relação aos parâmetros μ em questão não deve ser nula na bifurcação:

$$\left. \frac{\partial Re[\lambda(x^*, \mu)]}{\partial \mu} \right|_{\mu_B} \neq 0 \quad (7.1)$$

Onde x^* é o equilíbrio considerado, μ é um parâmetro qualquer e μ_B é o valor do parâmetro μ que leva à bifurcação. Esta condição garante que aquele par de autovalores de fato transite entre os semiplanos, ao invés de, por exemplo, assumir valores imaginários rapidamente ("bater e voltar"), ou ainda manter-se imaginários ao longo de um intervalo.

No caso da máquina síncrona controlada por AVR ou AVR+PSS, a bifurcação pode eclodir suscitada pelos parâmetros de ganho e de tempo dos controladores, quando um par conjugado de autovalores cruza o eixo imaginário, indo do semiplano esquerdo para o direito. O objetivo é encontrar a curva conhecida como Diagrama de Bifurcação, que expressa a relação entre os parâmetros do sistema (o par (K_e, T_e) , no caso do sistema controlado por AVR, e o quádruplo $(K_e, T_e, K_{PSS}, T_1, T_2, T_w)$ no caso do sistema controlado por AVR e PSS) que provoca a bifurcação.

A princípio, não basta impor, no polinômio característico, que λ seja imaginário puro pois não há garantia, por exemplo, que qualquer solução do polinômio seja imaginária, ou ainda que o polinômio tenha quatro soluções reais diferentes com uma sendo zero. Para assegurar a bifurcação de Hopf, deve-se garantir que λ transite entre os semiplanos, logo a necessidade da Condição de Transversalidade. Como os coeficientes daquele polinômio são todos suaves e

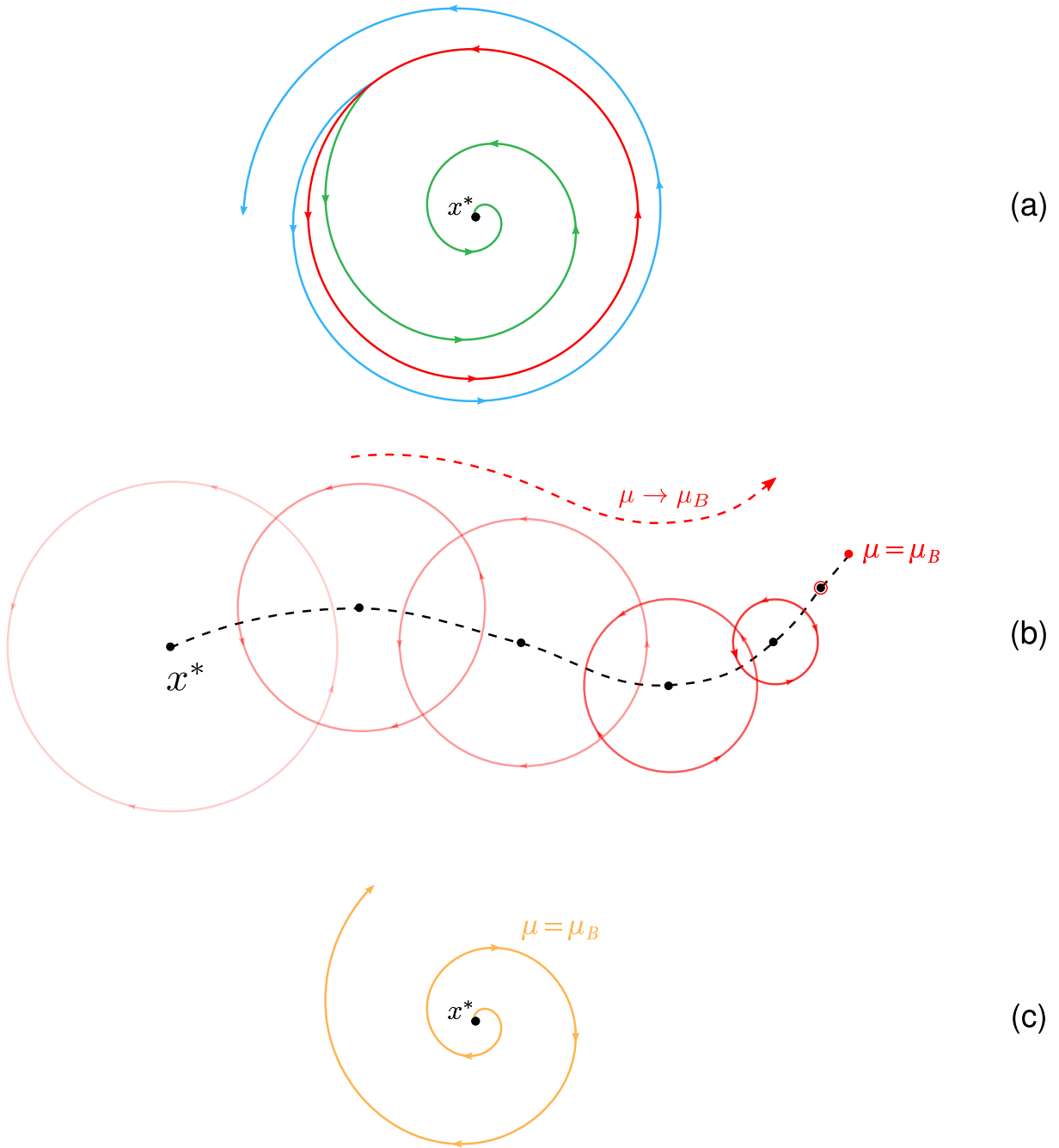


Figura 13 – Esquemático de explicação da Bifurcação de Hopf.

contínuos (quando existem) com relação ao conjunto de estados iniciais (pelas fórmulas dos J_{ij}), e as raízes de um polinômio qualquer (e.g., os autovalores do sistema) são contínuas com relação aos coeficientes desse polinômio (TYRTYSHNIKOV, 1997), então os autovalores são contínuos com relação ao conjunto de estados inicial. Portanto, é razoável ao menos considerar pelo menos como candidatos o conjunto dos pontos para os quais a solução do polinômio seja imaginária, mesmo que a bifurcação não seja garantida.

Para ilustrar que, de fato, ocorre uma bifurcação no sistema, traçou-se na figura 14 o lugar de raízes em função do ganho do controlador, K_e , para cinco valores diferentes do tempo T_e do

controlador. A figura mostra um autovalor do sistema, no ponto de equilíbrio $\vec{S} = P + jQ = 1 + j0.5$; para todos os cinco valores de tempo, o autovalor transita do semiplano esquerdo para o direito, mantendo-se no semiplano direito para ganhos maiores – como esperado, uma vez que já se espera instabilidade para valores altos de ganho. Sabendo que os coeficientes do polinômio característico do sistema considerado são reais, então com certeza o autovalor ilustrado na figura é acompanhado de seu par conjugado. Assim, de fato, há vários pares (K_e, T_e) que levam o sistema à bifurcação. Considerando que os coeficientes daquele polinômio são contínuos no espaço de estados iniciais x_0 , logo também é o conjunto de soluções do polinômio. Isso garante que qualquer valor de tempo entre 10^{-2} e 10^0 possua um K_e correspondente que, no ponto inicial específico, leve o sistema a uma bifurcação. Logo, prova-se que para este sistema, no ponto de equilíbrio considerado, há infinitos pares de parâmetros do controlador que levam o sistema a uma bifurcação.

Ademais, nota-se, ao analisar a parte real dos autovalores versus o ganho K_e , que a inclinação dos gráficos em momento algum é horizontal, o que sugere conformidade com a Condição de Transversalidade.

As duas subseções a seguir têm por objetivo:

1. Encontrar a condição de existência da bifurcação;
2. Determinar os parâmetros do controlador que levam à bifurcação;
3. Encontrar os autovalores do sistema no equilíbrio bifurcado;
4. Checar a concordância com a Condição de Transversalidade.

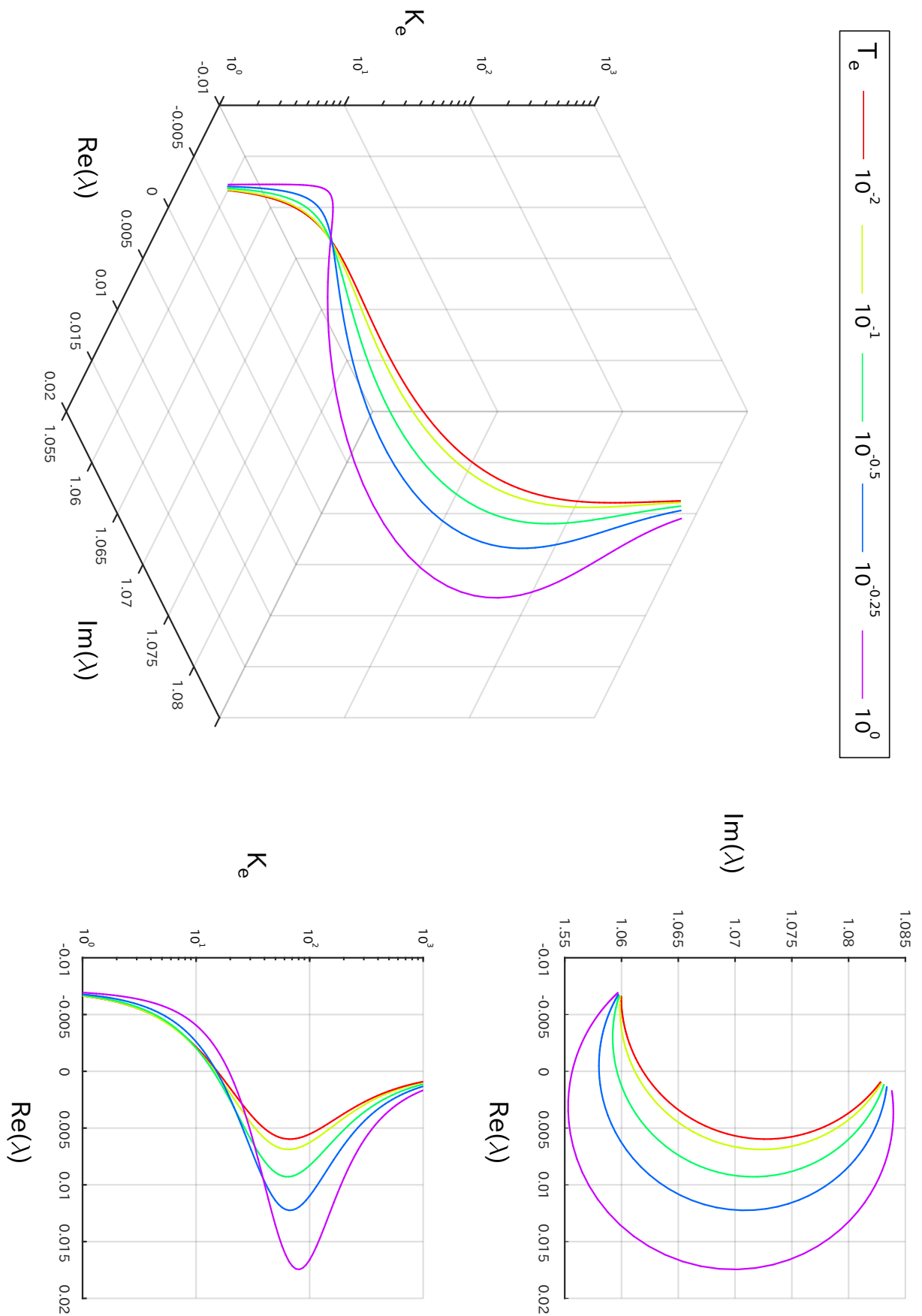


Figura 14 – Lugar de raízes do sistema controlado apenas por AVR, em função dos parâmetros do controlador AVR.

Sistema controlado por AVR

A figura 14 mostra que para o sistema controlado por AVR há ocorrência de bifurcação para algumas combinações particulares de K_e e T_e . O objetivo deste capítulo é mostrar que a bifurcação é possível, e de quais parâmetros essa existência depende. Em seguida, objetiva-se calcular a relação entre aqueles parâmetros que levam o sistema à bifurcação. Tendo este sistema quatro dimensões, analogamente seu jacobiano terá dimensão quatro. No apêndice B as contas de dedução do Jacobiano, bem como do polinômio característico, estão deduzidas. Enfim, o polinômio deste sistema é dado por

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^4 a_i \lambda^i =$$

$$\lambda^4 - \lambda^3 \begin{vmatrix} J_{1,1} & -1 \\ J_{4,4} & 1 \end{vmatrix} + \lambda^2 \left(\begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} \\ J_{4,1} & J_{4,4} \end{vmatrix} - J_{2,3} \right) + \lambda \left(\begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,3} \\ J_{2,1} & J_{2,3} \end{vmatrix} + J_{4,4} J_{2,3} \right) + \begin{vmatrix} J_{2,1} & J_{2,3} & 0 \\ J_{1,1} & J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{4,1} & J_{4,3} & J_{4,4} \end{vmatrix} = 0 \quad (8.1)$$

8.1

Existência de bifurcação

No polinômio característico 8.1, fazendo $\lambda = j\beta$, com β real, tem-se

$$(j\beta)^4 - (J_{1,1} + J_{4,4})(j\beta)^3 + (J_{1,1}J_{4,4} - J_{1,4}J_{4,1} - J_{2,3})(j\beta)^2 + [J_{2,3}(J_{1,1} + J_{4,4}) - J_{1,3}J_{2,1}](j\beta) +$$

$$+ J_{4,4}(J_{1,3}J_{2,1} - J_{1,1}J_{2,3}) + J_{1,4}(J_{2,3}J_{4,1} - J_{2,1}J_{4,3}) = 0$$

$$\begin{cases} \beta^4 - (J_{1,1}J_{4,4} - J_{1,4}J_{4,1} - J_{2,3})\beta^2 + J_{4,4}(J_{1,3}J_{2,1} - J_{1,1}J_{2,3}) + J_{1,4}(J_{2,3}J_{4,1} - J_{2,1}J_{4,3}) = 0 \\ (J_{1,1} + J_{4,4})\beta^3 + [J_{2,3}(J_{1,1} + J_{4,4}) - J_{1,3}J_{2,1}]\beta = 0 \end{cases} \quad (8.2)$$

A equação de baixo sugere $\beta = 0$, que não é um resultado desejado porque implicaria $\lambda = 0$ e, portanto, não garantiria um par de autovalores imaginários conjugados. Assim, supondo $\beta \neq 0$,

$$\begin{cases} \beta^4 - (J_{1,1}J_{4,4} - J_{1,4}J_{4,1} - J_{2,3})\beta^2 + J_{4,4}(J_{1,3}J_{2,1} - J_{1,1}J_{2,3}) + J_{1,4}(J_{2,3}J_{4,1} - J_{2,1}J_{4,3}) = 0 \\ (J_{1,1} + J_{4,4})\beta^2 + [J_{2,3}(J_{1,1} + J_{4,4}) - J_{1,3}J_{2,1}] = 0 \end{cases} \quad (8.3)$$

Desta última equação,

$$\begin{aligned} \beta^2 &= -\frac{[J_{2,3}(J_{1,1} + J_{4,4}) - J_{1,3}J_{2,1}]}{J_{1,1} + J_{4,4}} = \frac{J_{1,3}J_{2,1}}{J_{1,1} + J_{4,4}} - J_{2,3} \\ \therefore \beta &= \sqrt{\frac{J_{1,3}J_{2,1}}{J_{1,1} + J_{4,4}} - J_{2,3}} \end{aligned} \quad (8.4)$$

O que resulta uma condição de existência: sabendo que $J_{1,1} + J_{4,4} < 0$,

$$\beta \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \frac{J_{1,3}J_{2,1}}{J_{1,1} + J_{4,4}} - J_{2,3} > 0 \Leftrightarrow J_{1,3}J_{2,1} < J_{2,3}(J_{1,1} + J_{4,4}) \quad (8.5)$$

Perceba-se que a condição de existência não depende do controlador, uma vez que as componentes do jacobiano envolvidas não são funções dos seus parâmetros. Assim, conclui-se que:

1. Se a inequação (8.5) for satisfeita, então a existência da bifurcação é garantida, i.e., existe algum par (K_e, T_e) que leva o sistema à bifurcação;
2. A existência da Bifurcação de Hopf está ligada ao equilíbrio escolhido, e não ao controlador; em outras palavras, os parâmetros do controlador não determinam se a Bifurcação será possível, mas sim o ponto de equilíbrio, uma vez que a inequação (8.5) independe de K_e e de T_e . Isso quer dizer que há condições iniciais possíveis, mas que não admitem bifurcação;
3. Supondo que a bifurcação seja possível, *ist est*, o ponto inicial seja tal que a condição para a existência (8.5) seja satisfeita, então existe pelo menos um par (K_e, T_e) que leva o sistema a essa bifurcação – uma vez que sua existência não depende do controlador.

Resta então analisar se, satisfeita a condição de existência da bifurcação, o par (K_e, T_e) é único ou não para um dado ponto inicial; em caso positivo, determinar o par e, de outra forma, determinar uma relação entre os parâmetros.

8.2

Parâmetros na bifurcação

Substituindo (8.4) na primeira equação do sistema (8.3),

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{J_{1,3}J_{2,1}}{J_{1,1} + J_{4,4}} - J_{2,3} \right)^2 - (J_{1,1}J_{4,4} - J_{1,4}J_{4,1} - J_{2,3}) \left(\frac{J_{1,3}J_{2,1}}{J_{1,1} + J_{4,4}} - J_{2,3} \right) + \\
 & J_{4,4}(J_{1,3}J_{2,1} - J_{1,1}J_{2,3}) + J_{1,4}(J_{2,3}J_{4,1} - J_{2,1}J_{4,3}) = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left(\frac{J_{1,3}J_{2,1}}{J_{1,1} + J_{4,4}} - J_{2,3} \right) \left[\frac{J_{1,3}J_{2,1}}{J_{1,1} + J_{4,4}} - J_{2,3} + J_{1,4}J_{4,1} - J_{1,1}J_{4,4} + J_{2,3} \right] + \\
 & J_{4,4}(J_{1,3}J_{2,1} - J_{1,1}J_{2,3}) + J_{1,4}(J_{2,3}J_{4,1} - J_{2,1}J_{4,3}) = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow [J_{1,3}J_{2,1} - J_{2,3}(J_{1,1} + J_{4,4})][J_{1,3}J_{2,1} + (J_{1,4}J_{4,1} - J_{1,1}J_{4,4})(J_{1,1} + J_{4,4})] + \\
 & [J_{4,4}(J_{1,3}J_{2,1} - J_{1,1}J_{2,3}) + J_{1,4}(J_{2,3}J_{4,1} - J_{2,1}J_{4,3})](J_{1,1} + J_{4,4})^2 = 0
 \end{aligned}$$

Esta equação estabelece uma relação entre o espaço de estados em equilíbrio e o par (K_e, T_e) . A princípio, olhando para as formas dos componentes $J_{(x,y)}$, faz pensar ser uma equação transcendente. Assim, deve-se lançar mão de *solvers* numéricos para resolvê-la. No entanto, isto apresenta uma complicação: o chute inicial, necessário ao método numérico. A figura 14 sugere que, para um tempo T_e fixo, a solução em K_e é única, uma vez que a curva é assintótica dos dois lados. Assim, uma forma de evitar que o chute inicial tenha muita influência na solução é, para um dado conjunto de estados de equilíbrio \mathbf{x}^* , fixar T_e e resolver a equação para K_e . Uma outra forma é obter uma relação direta $K_e = f(\mathbf{x}, T_e)$, que será feito a seguir.

De fato, em uma primeira vista, (8.2) parece ser uma equação de solução complexa ou demorada devido aos grandes coeficientes, especialmente os da quarta coluna. Não se trata do caso, porém; como os coeficientes mais sofisticados são função dos estados iniciais, em termos de K_e e T_e tratam-se de funções simples. Em realidade, considerando os estados \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_4 fixos, então as únicas funções do controlador são os componentes $J_{1,4}$, $J_{3,4}$ e $J_{4,4}$. Assim, para melhor representar a finalidade da equação – dado um estado inicial \mathbf{x}^* , encontrar o par (K_e, T_e) que instabiliza o sistema e provoca bifurcação – representar-se-ão os coeficientes da quarta coluna do jacobiano como:

$$\begin{cases} J_{4,1} = -K_{4,1} \frac{K_e}{T_e} \\ J_{4,3} = -K_{4,3} \frac{K_e}{T_e} \\ J_{4,4} = -\frac{1}{T_e} \end{cases}$$

Assim, ressaltando estes termos em (8.2),

$$\begin{aligned} & \left[J_{1,3} J_{2,1} - J_{2,3} (J_{1,1} + \mathbf{J}_{4,4}) \right] \left[J_{1,3} J_{2,1} + (J_{1,4} \mathbf{J}_{4,1} - J_{1,1} \mathbf{J}_{4,4}) (J_{1,1} + \mathbf{J}_{4,4}) \right] \\ & + \left[\mathbf{J}_{4,4} (J_{1,3} J_{2,1} - J_{1,1} J_{2,3}) + J_{1,4} (J_{2,3} \mathbf{J}_{4,1} - J_{2,1} \mathbf{J}_{4,3}) \right] (J_{1,1} + \mathbf{J}_{4,4})^2 = 0 \quad (8.6) \end{aligned}$$

Aplicando as igualdades, e denominando \mathbf{K}_{eB} o ganho do controlador que provoca a bifurcação,

$$\begin{aligned} & \left[J_{1,3} J_{2,1} - J_{2,3} \left(J_{1,1} - \frac{1}{\mathbf{T}_e} \right) \right] \left[J_{1,3} J_{2,1} - \left(J_{1,4} K_{4,1} \frac{\mathbf{K}_{eB}}{\mathbf{T}_e} - J_{1,1} \frac{1}{\mathbf{T}_e} \right) \left(J_{1,1} - \frac{1}{\mathbf{T}_e} \right) \right] \\ & + \left[-\frac{1}{\mathbf{T}_e} (J_{1,3} J_{2,1} - J_{1,1} J_{2,3}) - J_{1,4} \frac{\mathbf{K}_{eB}}{\mathbf{T}_e} (J_{2,3} K_{4,1} - J_{2,1} K_{4,3}) \right] \left(J_{1,1} - \frac{1}{\mathbf{T}_e} \right)^2 = 0 \stackrel{\times T_e^3}{\Leftrightarrow} \\ & \Leftrightarrow \left[J_{1,3} J_{2,1} \mathbf{T}_e - J_{2,3} (J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1) \right] \left[J_{1,3} J_{2,1} \mathbf{T}_e^2 - (J_{1,4} K_{4,1} \mathbf{K}_{eB} - J_{1,1}) (J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1) \right] \\ & + \left[(J_{1,1} J_{2,3} - J_{1,3} J_{2,1}) + J_{1,4} \mathbf{K}_{eB} (J_{2,1} K_{4,3} - J_{2,3} K_{4,1}) \right] (J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left[J_{1,3} J_{2,1} \mathbf{T}_e - J_{2,3} (J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1) \right] \left[J_{1,3} J_{2,1} \mathbf{T}_e^2 + J_{1,1} (J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1) \right] + (J_{1,1} J_{2,3} - J_{1,3} J_{2,1}) (J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1)^2 + \\ & + \mathbf{K}_{eB} \left\{ -J_{1,4} K_{4,1} (J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1) \left[J_{1,3} J_{2,1} \mathbf{T}_e - J_{2,3} (J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1) \right] + J_{1,4} (J_{2,1} K_{4,3} - J_{2,3} K_{4,1}) (J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1)^2 \right\} = 0 \\ & \therefore \mathbf{K}_{eB} = -\frac{\left[J_{1,3} J_{2,1} \mathbf{T}_e - J_{2,3} (J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1) \right] \left[J_{1,3} J_{2,1} \mathbf{T}_e^2 + J_{1,1} (J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1) \right] + (J_{1,1} J_{2,3} - J_{1,3} J_{2,1}) (J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1)^2}{J_{1,4} (J_{2,1} K_{4,3} - J_{2,3} K_{4,1}) (J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1)^2 - J_{1,4} K_{4,1} (J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1) \left[J_{1,3} J_{2,1} \mathbf{T}_e - J_{2,3} (J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1) \right]} = \\ & = -\left(\frac{1}{J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1} \right) \frac{\left[J_{1,3} J_{2,1} \mathbf{T}_e - J_{2,3} (J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1) \right] \left[J_{1,3} J_{2,1} \mathbf{T}_e^2 - J_{1,1} (J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1) \right] + (J_{1,1} J_{2,3} - J_{1,3} J_{2,1}) (J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1)^2}{J_{1,4} (J_{2,1} K_{4,3} - J_{2,3} K_{4,1}) (J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1) - J_{1,4} K_{4,1} \left[J_{1,3} J_{2,1} \mathbf{T}_e - J_{2,3} (J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1) \right]} \\ & \therefore \mathbf{K}_{eB} = \left[\frac{J_{1,3}}{J_{1,4} (J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1)} \right] \frac{(J_{1,3} J_{2,1} - J_{1,1} J_{2,3}) \mathbf{T}_e^3 + J_{2,3} \mathbf{T}_e^2 + J_{1,1} \mathbf{T}_e - 1}{(J_{1,1} K_{4,3} - J_{1,3} K_{4,1}) \mathbf{T}_e - K_{4,3}} \quad (8.7) \end{aligned}$$

Que é uma relação deveras simples, e está graficada na figura 15. Todos os $J_{m,n}$ bem como os $K_{m,n}$ são funções do equilíbrio considerado, constantes com relação ao controlador. Assim, definindo-se um vetor de valores para T_e obtém-se os valores correspondentes de K_e . Outrossim, de posse das variáveis de estado no equilíbrio calculam-se os $J_{m,n}$ e os $K_{m,n}$; esta expressão determina que a cada valor de T_e corresponde um valor de K_e que leva o sistema à bifurcação.

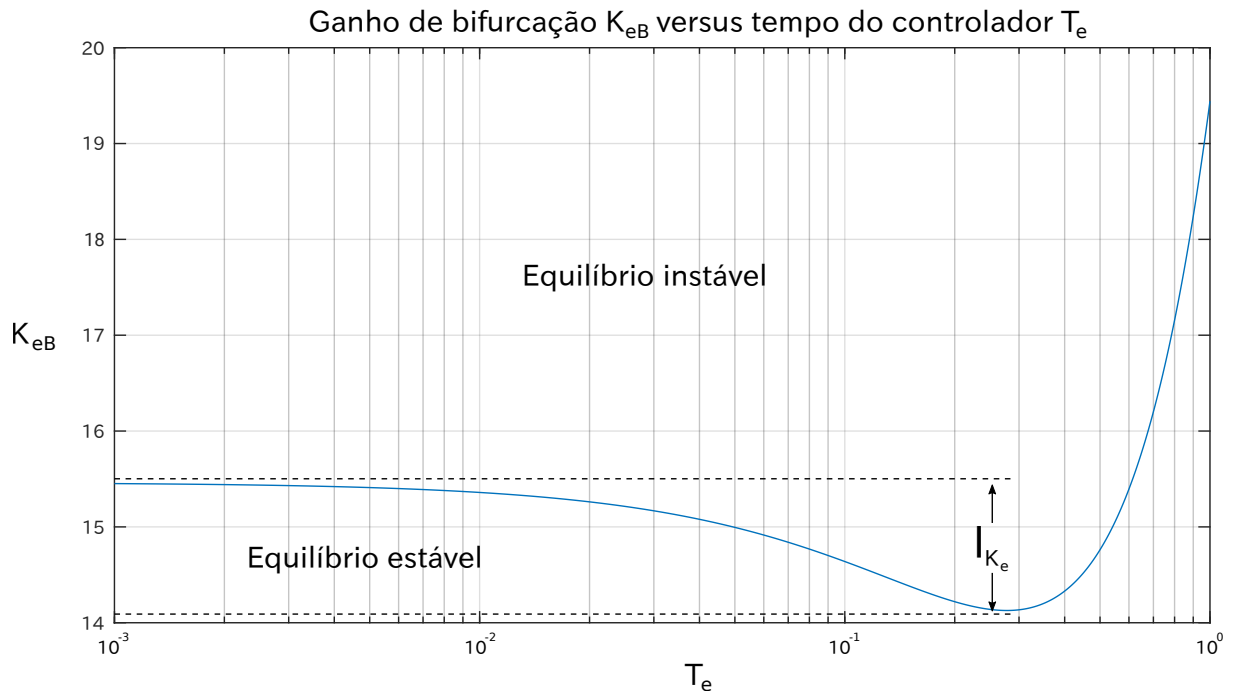


Figura 15 – Diagrama de bifurcação do sistema controlado por AVR no ponto de equilíbrio $\vec{S} = P + jQ = 1 + j0.5$.

8.3

Discussão da figura 15

A figura 15 mostra que para pontos (K_e, T_e) acima da curva o equilíbrio é instável, e que para pontos abaixo dela é estável, ou seja:

$$0 < K_e < K_{eB} \Leftrightarrow \text{Equilíbrio estável}$$

$$K_e = K_{eB} \Leftrightarrow \text{Bifurcação}$$

$$K_e > K_{eB} \Leftrightarrow \text{Equilíbrio instável}$$

Lembre-se que o ganho é inerentemente positivo, uma vez que qualquer valor não-positivo instabiliza o sistema.

8.3.1 Intervalo em que K_{eB} não é bijetora

Ainda assim, não justificou-se por que o par ganho-tempo é único, e não se trata do caso no qual um valor de ganho corresponde a três valores de tempo, como a equação (8.7) sugere – uma vez que essa equação define um polinômio de terceiro grau em T_e . Uma análise da figura 14 sugere que, para qualquer um dos cinco valores de tempo considerados, apenas um valor de ganho corresponde à bifurcação, uma vez que o comportamento é assintótico no eixo real.

No entanto, de uma análise da figura 15 infere-se que existe um intervalo de K_e , digamos, $I_{K_e} = (I_{K_e}^-, I_{K_e}^+)$ (denotado na figura por traços), para o qual cada valor de K_e possui dois correspondentes em T_e , quer dizer, para qualquer valor de ganho neste intervalo há exatamente dois valores de tempo T_e possíveis que bifurcam o sistema.

Calculando o extremo superior de I_{K_e} : do lado esquerdo da curva, para um T_e suficientemente pequeno,

$$I_{K_e}^+ = \lim_{T_e \rightarrow 0^+} K_e = \lim_{T_e \rightarrow 0^+} \left[\frac{J_{1,3}}{J_{1,4}(J_{1,1}\mathbf{T}_e - 1)} \right] \frac{(J_{1,3}J_{2,1} - J_{1,1}J_{2,3})\mathbf{T}_e^3 + J_{2,3}\mathbf{T}_e^2 + J_{1,1}\mathbf{T}_e - 1}{(J_{1,1}K_{4,3} - J_{1,3}K_{4,1})\mathbf{T}_e - K_{4,3}} = T'_{do} \frac{J_{1,3}}{K_{4,3}} \quad (8.8)$$

Para o estado inicial considerado, a expressão vale $I_{K_e}^+ = 15.648269934421407$. Já para calcular o extremo inferior do intervalo I_{K_e} , trata-se do valor para o qual a curva tem derivada nula:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}_{eB}}{\partial \mathbf{T}_e} = 0 &\Leftrightarrow [(J_{1,1}K_{4,3} - J_{1,3}K_{4,1})\mathbf{T}_e - K_{4,3}][J_{1,1}\mathbf{T}_e - 1][3(J_{1,3}J_{2,1} - J_{1,1}J_{2,3})\mathbf{T}_e^2 + 2J_{2,3}\mathbf{T}_e + J_{1,1}] = \\ &= [(J_{1,3}J_{2,1} - J_{1,1}J_{2,3})\mathbf{T}_e^3 + J_{2,3}\mathbf{T}_e^2 + J_{1,1}\mathbf{T}_e - 1][(J_{1,1}K_{4,3} - J_{1,3}K_{4,1})(J_{1,1}\mathbf{T}_e - 1) + J_{1,1}(J_{1,1}K_{4,3} - J_{1,3}K_{4,1})\mathbf{T}_e - J_{1,1}K_{4,3}] \Leftrightarrow \\ &= J_{1,1}(3J_{1,1}J_{2,3} - 3J_{1,13}J_{2,1})(J_{1,1}K_{4,3} - J_{1,3}K_{4,1})Te^4 + \\ &+ [(3J_{1,1}J_{2,3} - 3J_{1,3}J_{2,1})(2J_{1,1}K_{4,3} - J_{1,3}K_{4,1}) + 2J_{1,1}J_{2,3}(J_{1,1}K_{4,3} - J_{1,3}K_{4,1}) - 2J_{1,11}(J_{1,1}K_{4,3} - J_{1,3}K_{4,1})(J_{2,3} - J_{1,1}J_{2,3} + J_{1,3}J_{2,1})]Te^3 + \\ &+ [(2J_{1,1}K_{4,3} - J_{1,3}K_{4,1})(J_{2,3} - J_{1,1}J_{2,3} + J_{1,3}J_{2,1}) - J_{1,1}^2(J_{1,1}K_{4,3} - J_{1,3}K_{4,1}) - K_{4,3}(3J_{1,1}J_{2,3} - 3J_{1,3}J_{2,1}) - 2J_{2,3}(2J_{1,1}K_{4,3} - J_{1,3}K_{4,1})]Te^2 + \\ &+ [2J_{1,1}(J_{1,1}K_{4,3} - J_{1,3}K_{4,1}) + 2J_{2,3}K_{4,3}]Te + \\ &- J_{1,1}K_{4,3} + J_{1,3}K_{4,1} = 0 \end{aligned}$$

Para o equilíbrio $\vec{S} = 1 + j0.5$, a solução é $T_e = 0.297935089029690 \Leftrightarrow I_{K_e}^- = 14.202015827943844$. Assim, a função K_{eB} não é bijetora para $T_e \in (0, 0.297935089029690)$.

8.3.2 Autovalores na bifurcação

Assim, denotando o polinômio como $P(\lambda) = \lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$, com

$$\begin{cases} a_3 = -(J_{1,1} + J_{4,4}) \\ a_2 = (J_{1,1}J_{4,4} - J_{1,4}J_{4,1} - J_{2,3}) \\ a_1 = [J_{2,3}(J_{1,1} + J_{4,4}) - J_{1,3}J_{2,1}] \\ a_0 = J_{4,4}(J_{1,3}J_{2,1} - J_{1,1}J_{2,3}) + J_{1,4}(J_{2,3}J_{4,1} - J_{2,1}J_{4,3}) \end{cases} \quad (8.9)$$

Então dividindo $P(\lambda)$ por $(\lambda^2 + \beta^2)$,

$$P(\lambda) \equiv (\lambda^2 + \beta^2)(\lambda^2 + a_3\lambda + a_2 - \beta^2) + (a_1 - a_3\beta^2)\lambda + a_0 - \beta^2(a_2 - \beta^2) \quad (8.10)$$

Mas, de 8.4, se (K_e, T_e) estão ajustados para a bifurcação, isto é, $K_e = K_{eB}(T_e)$, então

$$a_1 - a_3\beta^2 = a_0 - \beta^2(a_2 - \beta^2) = 0 \quad (8.11)$$

Assim,

$$P(\lambda) \equiv (\lambda^2 + \beta^2)\left(\lambda^2 + a_3\lambda + a_2 - \frac{a_1}{a_3}\right) \quad (8.12)$$

Daonde, na bifurcação, os autovalores do sistema são:

$$\lambda = \begin{cases} -\frac{a_3}{2} \pm j\sqrt{a_2 - \frac{a_1}{a_3} - \left(\frac{a_3}{2}\right)^2} \\ \pm j\beta = \pm j\sqrt{-\frac{a_1}{a_3}} \end{cases} \quad (8.13)$$

Perceba-se que o radicando é sempre positivo – condição de existência de β e, logo, para a bifurcação – e logo os autovalores são sempre complexos; logo, a estabilidade destes autovalores fica a cabo de a_3 . Sabendo que este coeficiente é sempre positivo, então estes autovalores têm sempre parte real negativa. Vale lembrar que estes autovalores só são válidos para o ponto exato da bifurcação, isto é, quando $K_e = K_{eB}$.

8.4

Checagem da condição de transversalidade

Têm-se assim os parâmetros que levam o sistema à bifurcação (equação 8.7) e os autovalores do sistema na bifurcação (8.13). Falta checar se a condição de transversalidade confere, quer

dizer: sendo μ o vetor de parâmetros do sistema de tamanho p , se μ_B é tal que $\exists \lambda(\mu_B) \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, então também é necessário que o gradiente da parte real dos autovalores na bifurcação seja nulo, ou seja,

$$\left. \frac{\partial \operatorname{Re}[\lambda(\mu)]}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu_B} \neq 0 \quad (8.14)$$

Para uma Bifurcação de Hopf em $\mu = \mu_B$. Assim, calcular-se-á agora a forma desta derivada parcial. Sabemos que, para os autovalores,

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^4 a_i \lambda^i = 0$$

E que tanto os a_i como λ são funções do equilíbrio e dos parâmetros do controlador. Segue que, derivando implicitamente a igualdade com relação a um parâmetro μ , que pode ser tanto K_e quanto T_e ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\sum_{i=0}^4 a_i \lambda^i \right] &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 \left(i a_i \lambda^{(i-1)} \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} + \lambda^i \frac{\partial a_i}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial a_0}{\partial \mu} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \left(\sum_{i=1}^4 i a_i \lambda^{(i-1)} \right) + \sum_{i=0}^4 \lambda^i \frac{\partial a_i}{\partial \mu} &= 0 \\ \therefore \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} &= - \frac{\sum_{i=0}^4 \lambda^i \frac{\partial a_i}{\partial \mu}}{\sum_{i=1}^4 i a_i \lambda^{(i-1)}} \end{aligned} \quad (8.15)$$

Note-se que o denominador desta, que equivale à derivada do polinômio $P(x)$ aplicada em $x = \lambda$, não é zero se λ não tiver multiplicidade maior que um. Com efeito, a raiz de um polinômio qualquer é também raiz da sua derivada se, e somente se, tal raiz tiver multiplicidade superior a um. Como neste caso a análise é feita sobre a bifurcação, e provado está que nela todos os autovalores são distintos, segue que o polinômio não tem raízes duplas e, portanto, sua derivada não comunga de nenhuma de suas raízes.

Agora, sabendo que $\lambda = f(\mu) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{C}$, então

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = \frac{\partial \operatorname{Re}(\lambda)}{\partial \mu} + j \frac{\partial \operatorname{Im}(\lambda)}{\partial \mu}$$

$$\therefore \frac{\partial \operatorname{Re}(\lambda)}{\partial \mu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} + \overline{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \right)} \right]$$

As duas provas abaixo são feitas por *reductio ad absurdum*, ou seja, aplicando

$$\left. \frac{\partial \operatorname{Re}[\lambda(\mu)]}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu_B} = 0$$

E provando que esta condição não acontece.

8.4.1 Prova 1

Assumindo (8.14) então

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(\lambda)}{\partial \mu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} + \overline{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \right)} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} + \overline{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \right)} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \in \mathbb{C}^p - \mathbb{R}^p$$

Aplica-se então $\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = j\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}^n$:

$$-\frac{\sum_{i=0}^4 \lambda^i \frac{\partial a_i}{\partial \mu}}{\sum_{i=1}^4 i a_i \lambda^{(i-1)}} = j\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{i=0}^4 \lambda^i \frac{\partial a_i}{\partial \mu} = j\gamma \sum_{i=1}^4 i a_i \lambda^{(i-1)}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{\partial a_4}{\partial \mu} \equiv 0 \\ \frac{\partial a_0}{\partial \mu} \equiv 0 \\ \frac{\partial a_k}{\partial \mu} \equiv -j(k+1)\gamma a_k, \quad k \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

Enquanto a primeira equação é verdadeira, não o são as outras quatro. Primeiramente porque a segunda é imediatamente falsa, já que a_0 é função de ambos K_e e T_e ; depois, porque as três últimas assertivas requerem que os a_k sejam funções complexas do vetor de parâmetros μ – uma vez que, por hipótese, $\gamma \in \mathbb{R}^p$ – quando, sendo os a_k valorados reais, isso não é possível. O caso $\gamma = 0$ também é contraditório, porque neste caso os a_i devem ser independentes de μ , que não é o caso.

8.4.2 Prova 2

Deduzindo a forma do conjugado da derivada parcial de $\text{Re}(\lambda)$ com relação a μ , e sabendo que todos os a_i são funções reais, i.e.,

$$a_i = f(\mu) \mid f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\partial a_i}{\partial \mu} = g(\mu) \mid g: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$\therefore \begin{cases} \overline{a_i} = a_i \\ \overline{\left(\frac{\partial a_i}{\partial \mu}\right)} = \frac{\partial a_i}{\partial \mu} \end{cases}$$

Então

$$\frac{\overline{\partial \lambda}}{\partial \mu} = - \frac{\overline{\left[\sum_{i=0}^4 \lambda^i \frac{\partial a_i}{\partial \mu} \right]}}{\left[\sum_{i=1}^4 i a_i \lambda^{(i-1)} \right]} = - \frac{\sum_{i=0}^4 \overline{(\lambda^i)} \frac{\partial a_i}{\partial \mu}}{\sum_{i=1}^4 i a_i \overline{(\lambda^{(i-1)})}}$$

Daonde

$$\frac{\partial \text{Re}(\lambda)}{\partial \mu} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\sum_{i=0}^4 \lambda^i \frac{\partial a_i}{\partial \mu}}{\sum_{i=1}^4 i a_i \lambda^{(i-1)}} + \frac{\sum_{i=0}^4 \overline{(\lambda^i)} \frac{\partial a_i}{\partial \mu}}{\sum_{i=1}^4 i a_i \overline{(\lambda^{(i-1)})}} \right]$$

Fazendo a prova por redução a absurdo, aplicando a negação da transversalidade:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re}(\lambda)}{\partial \mu} = 0 &\Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^4 \lambda^i \frac{\partial a_i}{\partial \mu} \right) \left(\sum_{i=1}^4 i a_i \overline{\lambda^{(i-1)}} \right) = - \left(\sum_{i=0}^4 \overline{\lambda^i} \frac{\partial a_i}{\partial \mu} \right) \left(\sum_{i=1}^4 i a_i \lambda^{(i-1)} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^4 \lambda^i \frac{\partial a_i}{\partial \mu} \right) \left(\sum_{i=1}^4 i a_i \overline{\lambda^{(i-1)}} \right) = - \overline{\left[\left(\sum_{i=0}^4 \lambda^i \frac{\partial a_i}{\partial \mu} \right) \left(\sum_{i=1}^4 i a_i \overline{\lambda^{(i-1)}} \right) \right]} \end{aligned}$$

Decorre disto que a expressão à esquerda é imaginária pura; outrossim, sua parte real é nula:

$$\begin{aligned} \therefore \left(\sum_{i=0}^4 \lambda^i \frac{\partial a_i}{\partial \mu} \right) \left(\sum_{i=1}^4 i a_i \overline{\lambda^{(i-1)}} \right) \in \mathbb{C} - \mathbb{R} &\Leftrightarrow \operatorname{Re} \left[\left(\sum_{i=0}^4 \lambda^i \frac{\partial a_i}{\partial \mu} \right) \left(\sum_{i=1}^4 i a_i \overline{\lambda^{(i-1)}} \right) \right] = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re} \left(\sum_{i=0}^4 \lambda^i \frac{\partial a_i}{\partial \mu} \right) \operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^4 i a_i \overline{\lambda^{(i-1)}} \right) - \operatorname{Im} \left(\sum_{i=0}^4 \lambda^i \frac{\partial a_i}{\partial \mu} \right) \operatorname{Im} \left(\sum_{i=1}^4 i a_i \overline{\lambda^{(i-1)}} \right) = 0 \end{aligned}$$

Sendo as operações $\operatorname{Re}(\cdot)$ e $\operatorname{Im}(\cdot)$ distributivas, e utilizando novamente a valoração real dos a_i e suas derivadas com relação a μ ,

$$\left[\sum_{i=0}^4 \operatorname{Re}(\lambda^i) \frac{\partial a_i}{\partial \mu} \right] \left[\sum_{i=1}^4 i a_i \operatorname{Re}(\lambda^{(i-1)}) \right] + \left[\sum_{i=0}^4 \operatorname{Im}(\lambda^i) \frac{\partial a_i}{\partial \mu} \right] \left[\sum_{i=1}^4 i a_i \operatorname{Im}(\lambda^{(i-1)}) \right] = 0$$

Que aparentemente é uma equação transcendente. Para reduzi-la, adota-se $\mu \equiv K_e$, calculando-se as derivadas em $K_e = K_{eB}$. Pode-se fazê-lo porque a condição de transversalidade é aplicada na bifurcação (i.e., $\mu = \mu_B$), condição que será utilizada agora para simplificar a expressão:

$$\left[\sum_{i \in \{0,2\}} \operatorname{Re}(\lambda^i) \frac{\partial a_i}{\partial \mu} \right] \left[\sum_{i=1}^4 i a_i \operatorname{Re}(\lambda^{(i-1)}) \right] + \left[\sum_{i \in \{0,2\}} \operatorname{Im}(\lambda^i) \frac{\partial a_i}{\partial \mu} \right] \left[\sum_{i=1}^4 i a_i \operatorname{Im}(\lambda^{(i-1)}) \right] = 0$$

Na bifurcação, $K_e = K_{eB} \Rightarrow \lambda = j\beta$ ¹. Assim, λ^i é real para i par, zerando o primeiro fator da segunda parcela. Além disso, o segundo somatório é reduzido:

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{i \in \{0,2\}} \operatorname{Re}(\lambda^i) \frac{\partial a_i}{\partial K_e} \right]_{K_{eB}} \left[\sum_{i \in \{1,3\}} i a_i \operatorname{Re}(\lambda^{(i-1)}) \right] = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\partial a_0}{\partial K_e} - \beta^2 \frac{\partial a_2}{\partial K_e} \right)_{K_{eB}} (-3a_3\beta^2 + a_1) = 0 \end{aligned}$$

¹ Note-se que o outro par de autovalores não é considerado porque a Condição de Transversalidade se aplica apenas ao par de autovalores que de fato transita entre os semiplanos, que neste caso é o par $\lambda = \pm j\beta$.

Substituindo $\beta^2 = -\frac{a_1}{a_3}$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial a_0}{\partial K_e} + \frac{a_1}{a_3} \frac{\partial a_2}{\partial K_e} \right) \Big|_{K_{eB}} \left(3a_3 \frac{a_1}{a_3} + a_1 \right) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4a_1 \left(\frac{\partial a_0}{\partial K_e} + \frac{a_1}{a_3} \frac{\partial a_2}{\partial K_e} \right) \Big|_{K_{eB}} &= 0 \end{aligned}$$

Sabe-se que $a_1 \neq 0$ e $a_3 \neq 0$; finalmente,

$$\frac{\partial \operatorname{Re}[\lambda(\mu)]}{\partial \mu} \Big|_{\mu_B} = 0 \Leftrightarrow \left(a_3 \frac{\partial a_0}{\partial K_e} + a_1 \frac{\partial a_2}{\partial K_e} \right) \Big|_{K_{eB}} = 0$$

O que é um absurdo, pelas fórmulas dos a_i . Logo, a condição de transversalidade está satisfeita sempre que a condição encontrada ocorrer, ou seja, $K_e = K_{eB}(T_e)$ é de fato uma ocorrência da Bifurcação de Hopf.

Sistema controlado por AVR e PSS

O polinômio característico deste sistema é dado por 9.1. As formas dos componentes do jacobiano, bem como as contas do cálculo do polinômio, encontram-se no apêndice C.

$$P(x) = \sum_{n=0}^6 a_n \lambda^n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = - \begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,1} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{2,3} & J_{2,1} & 0 & 0 \\ J_{5,3} & J_{5,1} & J_{5,4} & J_{5,6} \\ J_{6,3} & J_{6,1} & J_{6,4} & J_{6,6} \end{vmatrix} \\ \\ a_1 = J_{5,5} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} & 0 \\ J_{1,3} & J_{1,1} & J_{1,6} \\ J_{6,3} & J_{6,1} & J_{6,6} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} & 0 \\ J_{1,3} & J_{1,1} & J_{1,4} \\ J_{5,3} & J_{5,1} & J_{5,4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} & 0 \\ J_{5,2} J_{1,6} & J_{5,6} & J_{6,6} \\ J_{5,2} J_{1,4} & J_{5,4} & J_{6,4} \end{vmatrix} \\ \\ a_2 = -J_{2,1} \begin{vmatrix} J_{1,4} & J_{1,3} \\ J_{5,5} & J_{5,2} \end{vmatrix} + J_{2,3} \begin{vmatrix} J_{5,4} & J_{5,5} & 0 \\ J_{1,1} & 1 & -1 \\ J_{6,6} & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,3} & J_{1,6} \\ J_{2,1} & J_{2,3} & 0 \\ J_{6,1} & J_{6,3} & J_{6,6} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,1} & J_{5,4} & J_{5,6} \\ J_{6,1} & J_{6,4} & J_{6,6} \end{vmatrix} \\ \\ a_3 = -J_{2,1} J_{1,3} + J_{2,3} (J_{1,1} + J_{5,5} + J_{6,6}) - \left(\begin{vmatrix} J_{5,6} & J_{5,4} \\ J_{6,6} & J_{6,4} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} \\ J_{5,1} & J_{5,4} \end{vmatrix} + J_{5,5} \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,6} \\ J_{6,1} & J_{6,6} \end{vmatrix} \right) \\ \\ a_4 = \left\{ J_{2,3} - J_{5,4} + J_{5,5} (J_{1,1} + J_{6,6}) + \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,6} \\ J_{6,1} & J_{6,6} \end{vmatrix} \right\} \\ \\ a_5 = -(J_{1,1} + J_{5,5} + J_{6,6}) \\ \\ a_6 = 1 \end{array} \right.$$

9.1

Parâmetros na bifurcação

Tem-se portanto o polinômio mônico característico $P(x)$, cujas raízes são os autovalores do sistema. Na bifurcação, estes autovalores serão imaginários puros; aplicando então $\lambda = j\alpha, \alpha \in \mathbb{R}_+$, então

$$-\alpha^6 + ja_5\alpha^5 + a_4\alpha^4 - ja_3\alpha^3 - a_2\alpha^2 + ja_1\alpha + a_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha^6 + a_4\alpha^4 - a_2\alpha^2 + a_0 = 0 \\ a_5\alpha^5 - a_3\alpha^3 + a_1\alpha = 0 \end{cases}$$

Eliminando a solução nula desta última equação (porque $\alpha = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \notin \mathbb{C} - \mathbb{R}$, quando se quer o $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} \alpha^6 - a_4\alpha^4 + a_2\alpha^2 - a_0 = 0 \\ a_5\alpha^4 - a_3\alpha^2 + a_1 = 0 \end{cases} \quad (9.1)$$

Denotar-se-ão $Q(x)$ e $R(x)$ tais que

$$\begin{cases} Q(x) = x^3 - a_4x^2 + a_2x - a_0 \\ R(x) = a_5x^2 - a_3x + a_1 \end{cases} \quad (9.2)$$

Nota-se que:

- A solução procurada deve ser solução de ambos $Q(x^2)$ e $R(x^2)$; logo, o Diagrama de Bifurcação pode ser obtido substituindo as raízes de $Q(x^2)$ em $R(x^2)$. A recíproca, no entanto, não é verdadeira porque há duas raízes de $R(x^2)$ não contempladas por $Q(x^2)$;
- O sistema possui pelo menos um par de autovalores imaginários se $Q(x)$ tiver pelo menos uma solução positiva. Assim, se faz necessário analisar a posição das raízes de $Q(x)$;
- A solução trivial ocorre se e somente se $a_0 = 0$.

Supondo $a_5 = 0$, então

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{a_1}{a_3}} \quad (9.3)$$

Suponho $a_5 \neq 0$ então, para esta última equação,

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1a_5}}{2a_5}} \quad (9.4)$$

Em primeiro lugar, é imperativo notar que, enquanto em 9.3 há duas soluções possíveis, em 9.4 há quatro. Isso significa que $a_5 = 0$ implica em apenas um par de autovalores ser capaz de bifurcar; quando $a_5 \neq 0$, dois pares são capazes de bifurcação.

Estas fórmulas não garantem que $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Nota-se portanto que a existência de α , e logo a existência da bifurcação, está atrelada à região $a_1a_3 > 0$ na primeira equação e às regiões $\Delta = a^3 - 4a_1a_5 \geq 0$, $a_3 \pm \sqrt{\Delta} > 0$ na segunda, significando que estas inequações representem na verdade o Diagrama de Bifurcação.

Embora relativamente simples, a fórmula revela alguns aspectos sobre a bifurcação nos sistemas controlados por AVR e PSS, especialmente referindo-se ao determinante. Há a possibilidade de haver duas raízes possíveis, uma raiz possível ou nenhuma. Seja μ_B um elemento bifurcante no espaço dos parâmetros, e os polinômios $Q(x) = a_5x^2 + a_3x + a_1$ e $R(x) = x^3 - a_4x^2 + a_2x - a_0$:

1. Se houver duas soluções possíveis para o mesmo μ_B , isso quer dizer que dois pares de autovalores bifurcam ao mesmo tempo. Neste caso, o polinômio $Q(x)$ tem duas soluções positivas;
2. Se houver apenas uma solução possível para o mesmo μ_b , é porque $Q(x)$ admite duas soluções de sinais opostos ou apenas uma solução positiva;
3. Se não houver solução possível, é porque $Q(x)$ não admite solução positiva;
4. Dado que os parâmetros do sistema sem saturação são diferentes daqueles para o sistema com saturação, então é possível que para um μ_B seja possível a bifurcação em um deles, mas não no outro.

μ_B é obtido substituindo as soluções de $Q(x)$ em $R(x)$. No entanto, primeiramente é preciso analisar a posição das soluções de $Q(x)$, que será feito na seção seguinte.

Análise da posição das soluções de $Q(x)$

Como $Q(x)$ é quadrático e $R(x)$ é cúbico, então a análise das soluções do sistema 9.2 começará por aquele por duas razões: primeiramente pela dificuldade de se analisar a posição das raízes de um polinômio cúbico; segundo, porque há duas raízes de $R(x^2)$ não previstas por $Q(x^2)$, então substituir as raízes daquele neste representa sobretrabalho.

Primeiramente, supondo $a_5 = 0$, então, por 9.3, haverá solução se $a_1 a_3 > 0$.

Já para $a_5 \neq 0$, é preciso analisar a posição das soluções de um polinômio de segundo grau. Lembra-se que o objetivo é encontrar a bifurcação, e para tanto $Q(x)$ deve ter pelo menos uma raiz positiva. De posse do lema a seguir, pode-se analisar melhor este caso:

Lema 1 (Posição das soluções da equação quadrática). *Seja $P(x) = ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ uma equação quadrática genérica valorada real, com duas raízes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ hipotéticas. Então há cinco possibilidades para as raízes:*

1. As duas raízes existem, são diferentes e são positivas:

$$\begin{cases} x_1, x_2 > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} = x_1 + x_2 > 0 \\ \frac{c}{a} = x_1 x_2 > 0 \end{cases} \xrightarrow{\times a^2} \begin{cases} -ba > 0 \\ ca > 0 \\ b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$$

2. As duas raízes existem, são diferentes e são negativas

$$\begin{cases} x_1, x_2 < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} = x_1 + x_2 < 0 \\ \frac{c}{a} = x_1 x_2 > 0 \end{cases} \xrightarrow{\times a^2} \begin{cases} -ba < 0 \\ ca > 0 \\ b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$$

3. As duas raízes existem e alternam sinais:

$$x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow \frac{c}{a} < 0 \xrightarrow{\times a^2} ca < 0$$

4. Existe apenas uma raiz dupla, digamos, x_1 : $\Delta = 0, x_1 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} \leq 0 \xrightarrow{\times 2a^2} -ba \leq 0$

5. As raízes não existem: $\Delta < 0$.

Utilizando este lema, então para $Q(x)$:

1. Há duas raízes positivas, e logo dois α possíveis para dois pares de autovalores bifurcantes se

$$\begin{cases} a_3^2 - 4a_1a_5 > 0 \\ -a_3a_5 > 0 \\ a_1a_5 > 0 \end{cases}$$

2. Há uma raiz positiva e outra negativa, ou seja, apenas um par de autovalores bifurca, se

$$x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow a_1a_5 < 0$$

3. Há apenas uma raiz dupla positiva, ou seja, dois pares de autovalores bifurcantes que convergem para o mesmo valor, se

$$\begin{cases} a_3^2 - 4a_1a_5 = 0 \\ -a_3a_5 > 0 \end{cases}$$

4. Não há raízes positivas, ou seja, não há α imaginário se $a_3^2 - 4a_1a_5 < 0$ ou se

$$\begin{cases} a_3^2 - 4a_1a_5 > 0 \\ -a_3a_5 < 0 \\ a_1a_5 > 0 \end{cases}$$

Pode-se, no entanto, simplificar a discussão ao analisar a_5 . Sabe-se que

$$\begin{aligned} a_5 &= -(J_{1,1} + J_{5,5} + J_{6,6}) = \\ &= \frac{T_2 + T_w}{T_2 T_w} + \frac{1}{T_e} \prod_{E_{FD}^{min}}^{E_{FD}^{max}} (x_4^{\text{sat}} + x_6 + E_{FD0}) + \frac{1}{T'_{do}} \left[\frac{(x_d - x'_d) \sin(\phi)}{X} + 1 \right] \end{aligned}$$

A primeira parcela é positiva dada a natureza das constantes de tempo T_w e T_2 .

A terceira parcela é também sempre positiva; isso porque T'_{do} é inerentemente positivo, $x_d - x'_d$ é naturalmente positivo porque as impedâncias permanentes são naturalmente maiores que seus pares transitórios, X é positivo por definição, e $\sin(\phi)$ é muito próximo da unidade porque ϕ é a fase de uma impedância majoritariamente indutiva.

Já a segunda parcela também será, via de regra, positiva. No equilíbrio estático, a tensão de saída do excitador é, por definição, igual à tensão E_{FD0} (ou a E_{FD}^{max} , mas não faz sentido

construir um saturador cujo limite é menor que o valor da variável no equilíbrio). Se preferir, no equilíbrio estático, os controladores não atuam; logo, neste equilíbrio, $V_{PSS} = V_{AVR} = 0$. Como T_e é, por definição, positivo, então a primeira parcela também é positiva, de onde $a_5 > 0$.

Sob esta análise, então a possibilidade $a_5 = 0$ é descartada, tal qual a solução 9.3; simplificam-se também as condições sob a suposição $a_5 \neq 0$: dividindo as inequações apropriadas por a_5 , então

1. Há duas raízes positivas, e logo dois α possíveis para dois pares de autovalores bifurcantes se

$$\begin{cases} a_3^2 - 4a_1a_5 > 0 \\ a_3 < 0 \\ a_1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 < -2\sqrt{a_1a_5} \\ a_1 > 0 \end{cases}$$

2. Há uma raiz positiva e outra negativa, ou seja, apenas um par de autovalores bifurca, e outro é real, se

$$x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow a_1 < 0$$

3. Há apenas uma raiz dupla positiva, ou seja, dois pares de autovalores bifurcantes que convergem para o mesmo valor, se

$$\begin{cases} a_3^2 - 4a_1a_5 = 0 \\ a_3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a_3 = -2\sqrt{a_1a_5}$$

4. Não há raízes positivas, ou seja, não há α imaginário se

$$a_3^2 - 4a_1a_5 < 0 \Leftrightarrow a_3 \in \left(-2\sqrt{a_1a_5}, 2\sqrt{a_1a_5} \right)$$

ou se

$$\begin{cases} a_3^2 - 4a_1a_5 > 0 \\ a_3 > 0 \\ a_1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 > 2\sqrt{a_1a_5} \\ a_1 > 0 \end{cases}$$

9.3

Substituindo as soluções de $Q(x^2)$ em $R(x^2)$

Sabemos portanto que a solução de $Q(x^2)$ é

$$\alpha = \sqrt{\frac{a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1a_5}}{2a_5}}$$

Substituindo esta solução em $R(x^2)$, tem-se a relação entre os a_i , e portanto entre os parâmetros dos controladores, para ocorrer bifurcação:

$$\left(\frac{a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1a_5}}{2a_5}\right)^3 + a_4 \left(\frac{a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1a_5}}{2a_5}\right)^2 - a_2 \left(\frac{a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1a_5}}{2a_5}\right) + a_0 = 0$$

Multiplicando por $8a_5^3$ para eliminar os denominadores,

$$\begin{aligned} & \left(a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1a_5}\right)^3 + 2a_5a_4 \left(a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1a_5}\right)^2 - 4a_5^2a_2 \left(a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1a_5}\right) + 8a_5^3a_0 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1a_5}\right) \left[\left(a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1a_5}\right)^2 + 2a_5a_4 \left(a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1a_5}\right) - 4a_5^2a_2 \right] + 8a_5^3a_0 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1a_5}\right) \left[\left(a_3 + a_5a_4 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1a_5}\right)^2 - a_5^2(a_4^2 + 4a_2) \right] + 8a_5^3a_0 = 0 \end{aligned}$$

9.4

Análise paramétrica do Diagrama de Bifurcação

Através da seção passada, se pode concluir acerca de quatro dos seis autovalores do sistema. Este fato surge do grau dos polinômios $R(x^2)$ e $Q(x^2)$, uma vez que eles não comungam de um par de raízes.

Para poder representar melhor o Diagrama de Bifurcação e analisá-lo eficientemente, os parâmetros K_e e K_{PSS} dos controladores serão variados; os outros serão fixados.

Vamos supor que o sistema tem autovalores λ_i , $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Destes seis, se pode concluir sobre os primeiros quatro a partir dos resultados a seguir:

- Se $a_1 < 0$, então $Q(x)$ admite uma solução positiva e outra negativa. Há apenas um par de autovalores bifurcantes, digamos, λ_1 e λ_2 :

$$\lambda_{(1,2)} = \pm j \sqrt{\frac{a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_1a_5}}{2a_5}}$$

Já os outros dois autovalores serão reais:

$$\lambda_{(3,4)} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a_3^2 - 4a_1a_5} - a_3}{2a_5}}$$

E o diagrama de bifurcação é dado por

$$\left(a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_1a_5}\right) \left[\left(a_3 + a_5a_4 + \sqrt{a_3^2 - 4a_1a_5}\right)^2 - a_5^2(a_4^2 + 4a_2) \right] + 8a_5^3a_0 = 0$$

Note-se que a_3 pode assumir qualquer valor.

- Se $a_1 = 0$, então $Q(x^2)$ assume solução trivial mas $R(x^2)$ não; logo, o zero não é solução do sistema (9.2), a menos que $a_0 = 0$.

- Se $a_3 < 0$, um par de autovalores é bifurcante, dado por

$$\lambda_{(1,2)} = \pm j \sqrt{\frac{|a_3|}{a_5}}$$

Os outros dois autovalores são complexos não reais. O diagrama de bifurcação é dado por

$$8a_5^3a_0 = 0$$

- Se $a_3 = 0$, então $Q(x^2)$ só admite solução nula, o que é impossível a menos que $a_0 = 0$.
 - * Se a_0 for de fato nulo, então o sistema admite um par de soluções triviais, e apenas duas. Se a_2 também for nulo, então o sistema admite quatro. Se a_4 também for nulo, então o sistema admite cinco. Se a_5 , então todas as soluções serão triviais.
- Se $a_3 > 0$, então um par de autovalores é real, dado por

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{a_3}{a_5}}$$

Os outros dois autovalores são complexos não-reais.

- Se $a_1 > 0$:

- Se $a_3 < -2\sqrt{a_1 a_5}$, então há dois pares de autovalores bifurcantes:

$$\lambda_{(1,2,3,4)} = \pm j \sqrt{\frac{a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1 a_5}}{2a_5}}$$

E o diagrama de bifurcação é dado por

$$\left(a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1 a_5}\right) \left[\left(a_3 + a_5 a_4 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1 a_5}\right)^2 - a_5^2 (a_4^2 + 4a_2) \right] + 8a_5^3 a_0 = 0$$

- Se $a_3 = -2\sqrt{a_1 a_5}$, então há dois pares de autovalores bifurcantes idênticos iguais a

$$\lambda_{(1,3)} = \overline{\lambda_{(2,4)}} = \pm j \sqrt{\frac{a_3}{a_5}}$$

E o diagrama de bifurcação é dado por

$$a_3 \left[\left(a_3 + a_5 a_4\right)^2 - a_5^2 (a_4^2 + 4a_2) \right] + 8a_5^3 a_0 = 0$$

- Se $|a_3| < 2\sqrt{a_1 a_5}$ então todos os quatro autovalores são complexos, não há nenhum real ou imaginário puro;
- Se $a_3 = 2\sqrt{a_1 a_5}$ então não há bifurcação; há dois pares de autovalores reais idênticos e iguais a

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{a_3}{a_5}}$$

- Se $a_3 > 2\sqrt{a_1 a_5}$ os dois pares de autovalores são complexos não-reais.
- **É importante notar** que a solução trivial ocorre se e somente se $a_0 = 0$. Neste caso, então com certeza haverá pelo menos mais um autovalor real, uma vez que os complexos ocorrem aos pares.

Assim sendo, conclui-se que o sistema admite bifurcação apenas se, para algum par (K_e, K_{PSS}) :

- $a_1 < 0$; ou
- $a_1 = 0$ e $a_3 < 0$; ou
- $a_1 > 0$ e $a_3 \leq 2\sqrt{a_1 a_5}$;

Como discutido no apêndice C, os coeficientes a_0, a_1, a_3 e a_5 são funções dos controladores e do estado considerado:

$$a_0 = \frac{1}{\mathbf{T}_e \mathbf{T}_w \mathbf{T}_2} \left(\begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,3} \\ J_{2,1} & J_{2,3} \end{vmatrix} - \mathbf{K}_e J_{1,6} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ K_{6,3} & K_{6,1} \end{vmatrix} \right) = A \mathbf{K}_e + B \quad (9.5)$$

$$a_1 = \mathbf{K}_{PSS} \frac{\mathbf{T}_1}{\mathbf{T}_2} \begin{vmatrix} K_{5,4} & K_{5,3} & K_{5,1} \\ 0 & J_{2,3} & J_{2,1} \\ J_{1,6} & J_{1,3} & J_{1,1} \end{vmatrix} - \mathbf{K}_e \frac{\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_w}{\mathbf{T}_w \mathbf{T}_e \mathbf{T}_2} J_{1,6} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ K_{6,3} & K_{6,1} \end{vmatrix} + \frac{\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_w + \mathbf{T}_e}{\mathbf{T}_e \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_w} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ J_{1,3} & J_{1,1} \end{vmatrix} - \frac{J_{2,3}}{\mathbf{T}_e \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_w} \quad (9.6)$$

$$= C \mathbf{K}_e + D \mathbf{K}_{PSS} + E \quad (9.7)$$

$$a_3 = -\mathbf{K}_{PSS} \left[\frac{\mathbf{T}_1}{\mathbf{T}_2} \left(\begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} \\ K_{5,1} & K_{5,4} \end{vmatrix} + \frac{K_{5,6} - K_{5,4}}{\mathbf{T}_e} \right) + \frac{J_{2,1} J_{1,4}}{\mathbf{T}_2} \right] + \mathbf{K}_e \frac{\mathbf{T}_w + \mathbf{T}_2}{\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_w \mathbf{T}_e} K_{6,1} J_{1,6} +$$

$$- J_{2,1} J_{1,3} + J_{2,3} \left(J_{1,1} - \frac{\mathbf{T}_w + \mathbf{T}_2}{\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_w} - \frac{1}{\mathbf{T}_e} \right) + \frac{1}{\mathbf{T}_e \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_w} - J_{1,1} \frac{\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_w + \mathbf{T}_e}{\mathbf{T}_w \mathbf{T}_2} = F \mathbf{K}_e + G \mathbf{K}_{PSS} + H \quad (9.8)$$

Sendo assim, e lembrando que $\mathbf{K}_e, \mathbf{K}_{PSS} > 0$, tem-se que o sistema admite bifurcação se:

- $\mathbf{a}_1 < 0 \Leftrightarrow CE < 0 \vee DE < 0$;
- Ou $\mathbf{a}_1 = 0 \wedge \mathbf{a}_3 < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow C \mathbf{K}_e + D \mathbf{K}_{PSS} + E = 0 \wedge F \mathbf{K}_e + G \mathbf{K}_{PSS} + H < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(F - \frac{GC}{D} \right) \mathbf{K}_e + H - \frac{GE}{D} < 0 \Leftrightarrow \left(F - \frac{GC}{D} \right) \left(H - \frac{GE}{D} \right) < 0 \stackrel{\times D^2}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix} C & D \\ F & G \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D & E \\ G & H \end{vmatrix} > 0 \quad (9.9)$$

- Ou se existir algum par $(\mathbf{K}_e, \mathbf{K}_{PSS}) : \mathbf{a}_1 > 0 \wedge \mathbf{a}_3 \leq -2\sqrt{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_5} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mathbf{a}_1 > 0 \wedge \mathbf{a}_3 < 0 \wedge |\mathbf{a}_3| \geq 2\sqrt{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C \mathbf{K}_e + D \mathbf{K}_{PSS} + E > 0 \wedge F \mathbf{K}_e + G \mathbf{K}_{PSS} + H < 0 \wedge \left(F \mathbf{K}_e + G \mathbf{K}_{PSS} + H \right)^2 \geq 4a_5 \left(C \mathbf{K}_e + D \mathbf{K}_{PSS} + E \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C \mathbf{K}_e + D \mathbf{K}_{PSS} + E > 0 \\ F \mathbf{K}_e + G \mathbf{K}_{PSS} + H < 0 \\ F^2 \mathbf{K}_e^2 + G^2 \mathbf{K}_{PSS}^2 + 2FG \mathbf{K}_e \mathbf{K}_{PSS} + (2FH - 4a_5 C) \mathbf{K}_e + (2GH - 4a_5 D) \mathbf{K}_{PSS} + H^2 - 4a_5 E \geq 0 \end{cases} \quad (9.10)$$

Averiguação da existência de Bifurcação no sistema controlado por AVR e PSS

Como discutido na seção anterior, o Diagrama de Bifurcação será representado bidimensionalmente para melhor se poder visualizá-lo. Os ganhos K_e e T_e serão variados e os outros parâmetros serão mantidos constantes:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_w \\ T_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Substituindo nas fórmulas os valores dos componentes $J_{m,n}$ e $K_{m,n}$ do jacobiano no equilíbrio $\vec{S} = 1 + j0.5$, e também os valores de T_1, T_2, T_w, T_e nas expressões (9.5) a (9.8) então

$$\begin{cases} a_0 = K_e \cdot 0.008969302610266 + 0.099845713151587 \\ a_1 = K_e \cdot 0.035877210441062 + 0.849764645906651 \\ a_3 = K_{PSS} \cdot 0.009195121241277 + K_e \cdot 0.032506650440767 + 3.592841222631569 \\ a_5 = 2.637064246614808 \end{cases} \quad (9.11)$$

Valendo-se do fato que $K_e, K_{PSS} \geq 0$ então todos os coeficientes são sempre positivos, eliminando grande parte da análise paramétrica do Diagrama de Bifurcação. Restam apenas três possibilidades:

1. Se $a_3 < 2\sqrt{a_1 a_5}$ então todos os quatro autovalores são complexos, não há nenhum real ou imaginário puro;
2. Se $a_3 = 2\sqrt{a_1 a_5}$ então não há bifurcação; há dois pares de autovalores reais idênticos e iguais a

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{a_3}{a_5}}$$

3. Se $a_3 > 2\sqrt{a_1 a_5}$ os dois pares de autovalores são complexos não-reais.

Valendo-se do sistema (9.11) conclui-se que $a_1, a_3 > 0$ para quaisquer valores de K_e e K_{PSS} possíveis.

Pelas conclusões da seção passada isto implica portanto que este sistema, no equilíbrio $\vec{S} = 1 + j0.5$ considerado, e com as escolhas de $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_w, \mathbf{T}_e$ fixas, **não é capaz de bifurcação** para nenhum par $(\mathbf{K}_e, \mathbf{K}_{PSS})$.

A Região de Estabilidade

Motivação, definição e caracterização

10.1

Motivação

Nesta parte o objetivo é comparar as Regiões de Atração do sistema em quatro condições: malha aberta, controlado por AVR apenas, e controlado por AVR e PSS, com e sem saturações. Para estimar essas regiões, utilizar-se-á de método numérico denominado “Força Bruta”, que se baseia na simulação do sistema para uma grade de valores iniciais. Para tanto, é necessário caracterizar o equilíbrio do sistema, para então poder simular o sistema a partir de condições iniciais diversas. Ora, trata-se exatamente do que fora feito nas primeiras partes.

A análise seguiu da seguinte forma:

1. Caracterização da máquina elétrica e do barramento infinito, constituindo o sistema OMIB;
2. Cálculo do equilíbrio do sistema, seguido de desenvolvimento do algoritmo para cálculo desse equilíbrio baseado na potência aparente fornecida pela máquina inicialmente;
3. Definição da Região de Factibilidade do sistema e desenvolvimento de algoritmo para caracterizar essa região;
4. Dedução dos modelos dos controladores AVR e PSS, além da função saturação $S(x)$;
5. Dedução dos modelos algébrico-diferenciais do sistema em malha aberta e fechada, a partir do modelo da máquina:
 - a) Sistema em malha aberta;
 - b) Controlado por AVR;
 - c) Controlado por AVR e PSS, sem saturações (sistema “livre”);
 - d) Controlado por AVR e PSS com saturações (sistema saturado);

6. Validação dos modelos deduzidos a partir de simulações numéricas do sistema sob perturbação do tipo degrau na potência mecânica.

Os passos culminam com a estimativa da Região de Estabilidade do sistema. O objetivo principal é estudar como a introdução de saturadores altera aquela Região.

Para estimá-la, foi utilizado o método *Brute Force*, ou Força Bruta, que consiste em simular o sistema a partir de várias condições iniciais e averiguar, individualmente, quais trajetórias são assintoticamente estáveis ao equilíbrio.

10.2

Definição

Antes de se analisar o comportamento dinâmico frente a uma perturbação do equilíbrio, é imperativo que se entendam as possíveis classificações dos pontos de equilíbrio. Há basicamente dois critérios de classificação: o primeiro, que diz respeito ao comportamento da trajetória do sistema quando da perturbação do equilíbrio; e o segundo, que diz respeito à análise local do sistema no equilíbrio através dos autovalores do seu jacobiano calculado nesse equilíbrio.

Define-se primeiramente o conceito de equilíbrio. A ideia de “equilíbrio” é um ponto no qual o sistema permanece se não perturbado. Matematicamente,

Definição 3 (Pontos de equilíbrio). *Seja um sistema dinâmico $\dot{x} = f(x)$, $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ não autônomo, com condição inicial $x(t_0) = x_0$, cuja trajetória é $x = \phi(x_0, t)$. Supõem-se f e ϕ C^1 -contínuas em Ω . Um ponto x^* é chamado de **equilíbrio** do sistema se $f(x^*) = 0$. Pode-se também definir o conjunto dos pontos de equilíbrio, dado por*

$$E = \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\} \quad (10.1)$$

Esta definição, no entanto, advém do valor da derivada do sistema exatamente nos pontos de equilíbrio, ou seja, não depreende nenhuma característica do sistema quando perturbado desse equilíbrio. Além disso, frise-se que em muitos sistemas os equilíbrios podem não ser isolados, isto é, o conjunto E pode representar uma linha ou até mesmo um plano.

A criação de uma classificação dos equilíbrios em função do comportamento dinâmico do sistema na sua vizinhança toma por base o comportamento de sistemas lineares. Exemplifica-se assim o caso de sistemas lineares bidimensionais.

10.3

Comportamento de sistemas lineares bidimensionais

Imagine um sistema do tipo $\dot{x} = Ax, A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Sendo assim, pode-se tomar a forma canônica de Jordan $J = PAP^{-1}$ de A , tal que o sistema $\dot{z} = Jz$ tenha comportamento similar, mas as suas duas variáveis tenham acoplamento mínimo. Este sistema, por sua vez, tem dois autovalores que podem ser reais ou complexos.

A classificação do equilíbrio $z = 0$ tem por base dois critérios: primeiro, o fato de os autovalores serem complexos, imaginários, ou reais, e o segundo, a parte real dos autovalores ser menor, igual ou maior que zero.

Definição 4 (Pontos de equilíbrio em sistemas lineares bidimensionais). *Seja um sistema dinâmico $\dot{x} = Ax, A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, com um ponto de equilíbrio x^* . Então x^* é classificado como segue:*

- x^* é um **nó estável** se todos os autovalores de A forem reais negativos;
- Por outro lado, se todos os autovalores forem reais positivos, então x^* é um **nó instável**;
- Se os autovalores de A forem complexos de parte real negativa, então x^* é um **foco estável**;
- Já se os autovalores de A forem complexos de parte real positiva, então x^* é um **foco instável**;
- Finalmente, se todos os autovalores do sistema forem imaginários puros, então o equilíbrio é chamado **centro**.

O comportamento do sistema linear é esquematizado nas figuras 16 e 17, que ilustram os planos de fase do sistema em oito situações possíveis. A primeira ilustra o comportamento do sistema quando seus autovalores são reais, e a segunda ilustra o comportamento do sistema quando seus autovalores são complexos.

Se os autovalores forem reais negativos, então o sistema decai exponencialmente ao equilíbrio, que é global e assintoticamente estável. Se forem ambos positivos, o sistema explode exponencialmente, e o equilíbrio é instável.

Por outro lado, se os autovalores forem complexos não-reais, o sistema apresenta comportamento oscilatório. Se os autovalores tiverem parte real negativa, o equilíbrio é estável; se tiverem parte real positiva, o equilíbrio é instável.

Finalmente, se os autovalores forem imaginários puros, o equilíbrio não é estável, e o sistema apresenta infinitas órbitas periódicas (mas nenhum ciclo-limite).

A ideia da próxima seção é: dado que o Teorema de Hartman-Grobman garante que, para equilíbrios hiperbólicos, o sistema não linear comporta-se similarmente à linearização, então pode-se classificar o equilíbrio do sistema não-linear baseando-se no comportamento do sistema linearizado.

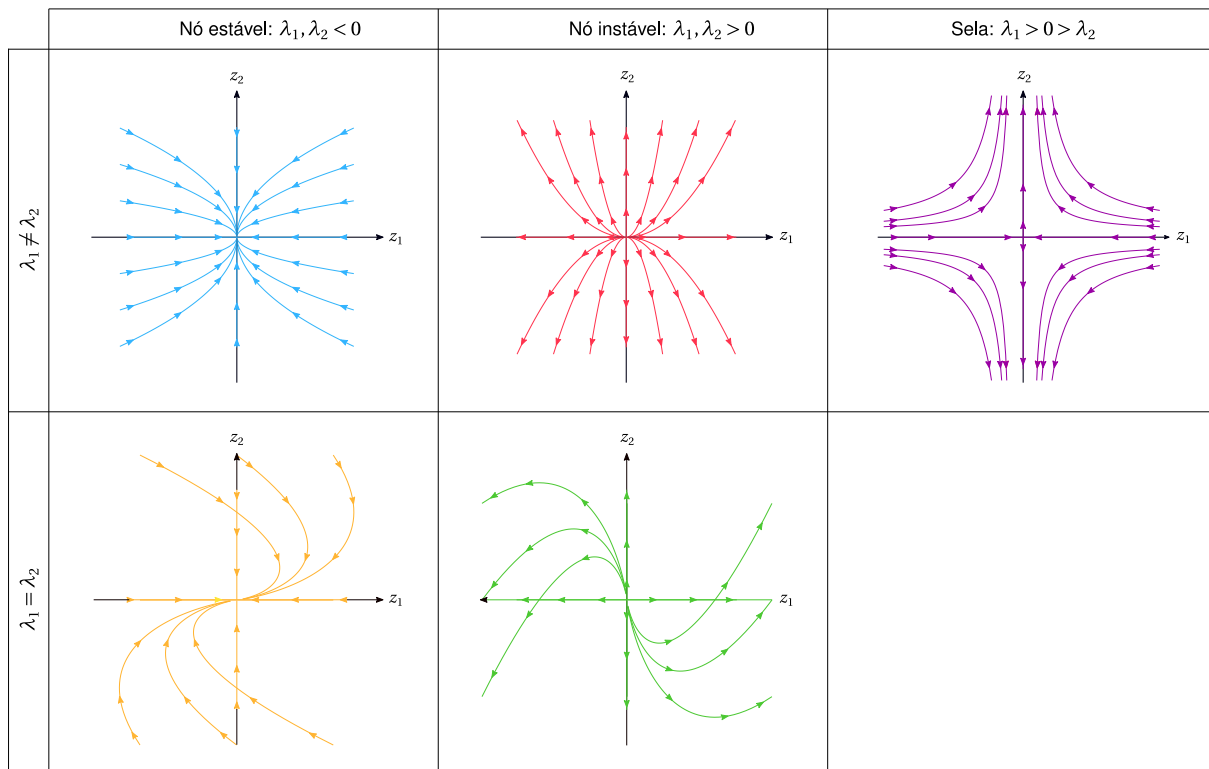


Figura 16 – Gráficos qualitativos do comportamento de sistema bidimensional com autovalores reais ao redor do equilíbrio

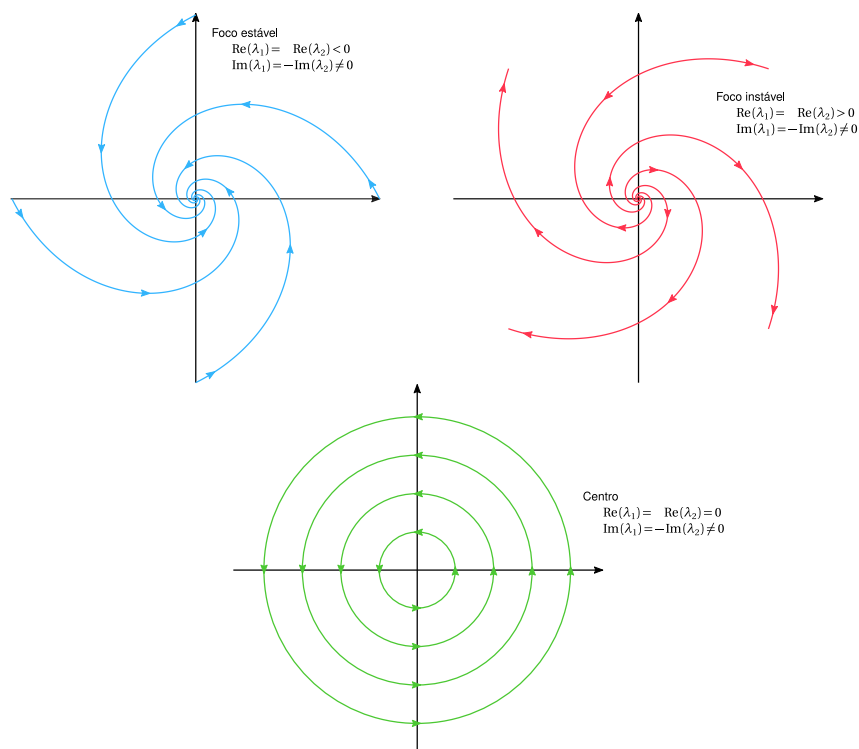


Figura 17 – Gráficos qualitativos do comportamento de sistema bidimensional com autovalores complexos ao redor do equilíbrio

10.4

Expansão da classificação de equilíbrio para sistemas não-lineares

Dado que o Teorema de Hartman-Grobman garante que o sistema não linear se comporta similarmente à sua linearização numa vizinhança de um equilíbrio hiperbólico, analogamente ao caso dos sistemas lineares bidimensionais, classificam-se os equilíbrios de sistemas não lineares a partir dos autovalores do sistema linearizado calculado no ponto de equilíbrio.

Definição 5 (Classificação de pontos de equilíbrio de sistemas não lineares). *Seja um sistema dinâmico $\dot{x} = f(x)$, f C^1 -contínua em Ω . Seja também um ponto de equilíbrio x^* tal que $f(x^*) = 0$. Denotando o jacobiano de f com relação a x no equilíbrio x^* por $J_f(x^*)$, então x^* é classificado como segue:*

- O equilíbrio x^* é um **equilíbrio hiperbólico** se todos os autovalores de $J_f(x^*)$ têm parte real não-nula, e pode ser subclassificado em:
 - Se os autovalores forem complexos não-reais, então x^* é um:
 - * **Foco estável** se todos os autovalores têm parte real negativa;
 - * **Foco instável** se todos os autovalores têm parte real positiva;
 - * **Equilíbrio hiperbólico tipo k** se exatamente k autovalores têm parte real positiva;
 - Se os autovalores forem reais, então x^* é um:
 - * **Nó estável** se todos os autovalores são negativos;
 - * **Nó instável** se todos os autovalores são positivos;
 - * **Cela** se alguns autovalores são positivos e outros negativos;
- Do contrário, x^* é chamado **centro** se todos os autovalores têm parte real nula;
- Os casos em que alguns autovalores têm parte real nula e outros não são chamados “casos elípticos”. Há classificações para estes casos, mas não serão postas aqui dado que os sistemas dinâmicos lineares bidimensionais, que serviram de inspiração para esta classificação, não contemplam estes casos.

E seja a definição de equilíbrio atrativo em (LUO, 2014; CHIANG; ALBERTO, 2015):

Definição 6 (Equilíbrio atrativo). *Seja um sistema dinâmico $\dot{x} = f(x)$, com condição inicial $x(t_0) = x_0$, cuja trajetória é $x = \phi(x_0, t)$, com $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$. Supõe-se f C^1 -contínua em Ω . Seja também um ponto de equilíbrio x^* tal que $f(x^*) = 0$. Denotando o jacobiano de f com relação a x no equilíbrio x^* por $J_f(x^*)$, então x^* é um equilíbrio **atrativo** se existe uma vizinhança de*

x^* , suponha $U(x^*)$, tal que o sistema converge para x^* à medida que $t \rightarrow \infty$ se $x_0 \in U(x^*)$. Matematicamente, x^* é atrativo se

$$\exists \eta > 0 \mid \|x^* - x_0\| < \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t_0, x_0, t) - x^*\| = 0 \quad (10.2)$$

A ideia de caracterizar a estabilidade do equilíbrio é definir padrões de análise para determinar se o sistema tenderá ao equilíbrio se perturbado levemente. Sendo assim, classifica-se o equilíbrio de duas formas.

A primeira forma de caracterizar o equilíbrio x^* é através dos autovalores de f em x^* , quer dizer, através da solução $\det[J_f(x^*) - \lambda I] = 0$. Esta forma foi inspirada no comportamento de sistemas lineares bidimensionais.

Já segunda consiste na análise através do comportamento da trajetória $x = \phi(x_0, t)$, com x_0 uma condição inicial próxima ao equilíbrio x^* , ou seja, $x_0 \in U(x^*)$ com $U(x^*)$ uma vizinhança do equilíbrio. Trata-se de um equilíbrio atrativo estável se $U(x^*)$ existe, ou seja, se o sistema for solto suficientemente próximo do equilíbrio, retornará ao mesmo equilíbrio em tempo infinito.

O Teorema de Hartman-Grobman garante que, se o campo vetorial do sistema dinâmico f for C^1 , e x^* for um equilíbrio hiperbólico, então será atrativo se for um foco ou nó estável, e não será atrativo se for um foco ou nó instável; se x^* não for hiperbólico, então não se pode garantir que o sistema comporta-se similarmente à sua linearização. Assim, para esta classe de sistemas, a atratividade do ponto de equilíbrio hiperbólico e a característica dos autovalores nesse equilíbrio são intercambiáveis.

No entanto, a análise local dos autovalores do sistema no equilíbrio deixa passar uma questão importante que a análise de trajetória menciona. Se todos os autovalores do sistema dinâmico no equilíbrio têm parte real negativa, então existe uma vizinhança $U(x^*) \supset \{x^*\}$ dentro da qual o equilíbrio é atrativo (novamente pelo Teorema de Hartman-Grobman), mas nada pode ser dito sobre a vizinhança em si – exceto por sua existência. A questão é determinar essa vizinhança; em geral, nos sistemas dinâmicos não-lineares, ao se soltar o sistema de uma condição inicial suficientemente longe do equilíbrio, a trajetória $\phi(x_0, t)$ pode divergir do equilíbrio considerado.

Na prática, na maioria dos sistemas dinâmicos, ao se soltar o sistema de um ponto inicial suficientemente longe do equilíbrio, então esse sistema não é capaz de voltar ao mesmo equilíbrio. Assim, trata-se de determinar quais as condições x_0 a partir das quais se pode abandonar o sistema sem que ele divirja do equilíbrio x^* – ou seja, sem que o sistema encontre outro ponto de equilíbrio e sem que as variáveis de estado admitam valores muito grandes (“explodam”).

À região $U(x^*)$ se denomina Região de Estabilidade ou Atração, ou seja, o conjunto das condições iniciais x_0 que levam o sistema ao equilíbrio x^* .

Definição 7 (Região de Estabilidade). *Seja um sistema dinâmico $\dot{x} = f(x)$, com condição inicial $x(t_0) = x_0$, cuja trajetória é $x = \phi(x_0, t)$, com $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$. Supõe-se f C^1 -contínua em Ω . Seja*

também um ponto de equilíbrio x^* tal que $f(x^*) = 0$. A Região de Estabilidade $R_e(x^*)$ é o lugar geométrico dos pontos x_0 tais que a trajetória $\phi(x_0, t)$ converge assintoticamente para x^* :

$$R_e(x^*) = \left\{ x_0 \in \Omega \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(x_0, t) - x^*\| = 0 \right\} \quad (10.3)$$

A figura 18 mostra um esquemático que exemplifica o conceito da definição 7. Na figura, o traçado preto denota a Região de Estabilidade de um sistema genérico bidimensional, sendo x^* o equilíbrio assintótico. Os pontos em azul, pertencentes à Região, são utilizados como pontos de partida do sistema, cujas trajetórias a partir de tais pontos são denotadas também em azul. Por outro lado, os pontos em rosa são exteriores à Região, e portanto suas trajetórias devem escapar à Região.

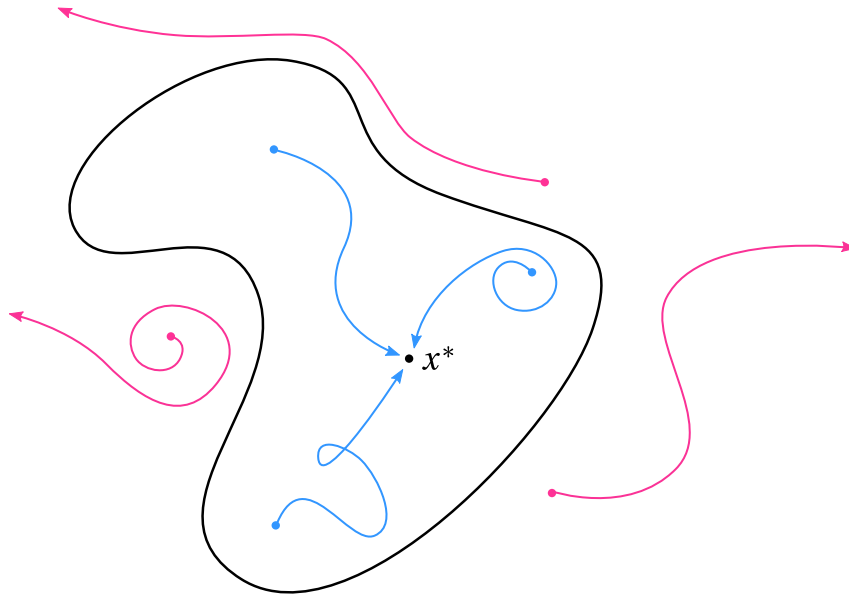


Figura 18 – Esquemático explicativo de Região de Estabilidade exemplificando sistema bidimensional.

O método Força Bruta

Métodos de caracterização de Regiões de Estabilidade são alvos de pesquisas recentes; não há método único conhecido que resolva o desafio de estimar ou obter a Região de Equilíbrio de qualquer sistema dinâmico. Larga atenção se dá aos métodos baseados na teoria de Lyapunov – em miúdos, a Região de Equilíbrio é estimada pelo conjunto de pontos para o qual a função energia $V(x)$ do sistema tem derivada negativa. No entanto, esbarra-se em problemas muito conhecidos como a estimação da própria função energia, que muitas vezes não existe para o sistema em estudo (HAMIDI; JERBI, 2009).

11.1

Descrição

Um método elementar de estimação da Região de Estabilidade é aquele conhecido como Força Bruta ou *Brute Force*. Define-se uma grade $G_r(\Omega)$ no domínio Ω e simula-se o sistema dinâmico partindo dos vários pontos definidos pela grade. Averigua-se assim quais pontos de $G_r(\Omega)$ a partir dos quais, solto o sistema, ele retorna ao equilíbrio x^* ; trata-se de uma estimativa da Região R_e , denotada por $E(R_e)$. Quanto mais fina a grade, quer dizer, mais pontos iniciais se utiliza para simular a trajetória do sistema, mais precisa será a estimativa.

É claro que esse método possui a capacidade de obter a região propriamente dita, ao passo que muitos métodos obtêm apenas uma parte dela ou um traço. No entanto, também é evidente que ao definir grades muito finas o tempo total de simulação atinge valores infactíveis.

Assim trata-se de uma escolha entre precisão dos resultados (definição da Região) e recurso computacional (tempo que se demora para tanto). A figura 19 mostra um sistema bidimensional cuja separatrix da Região de Estabilidade é demonstrada em linha preta. Os pontos correspondem à grade tomada; aqueles vermelhos foram retirados da estimativa da Região, enquanto os cinza foram incluídos. A linha azul mostra a estimativa da separatrix.

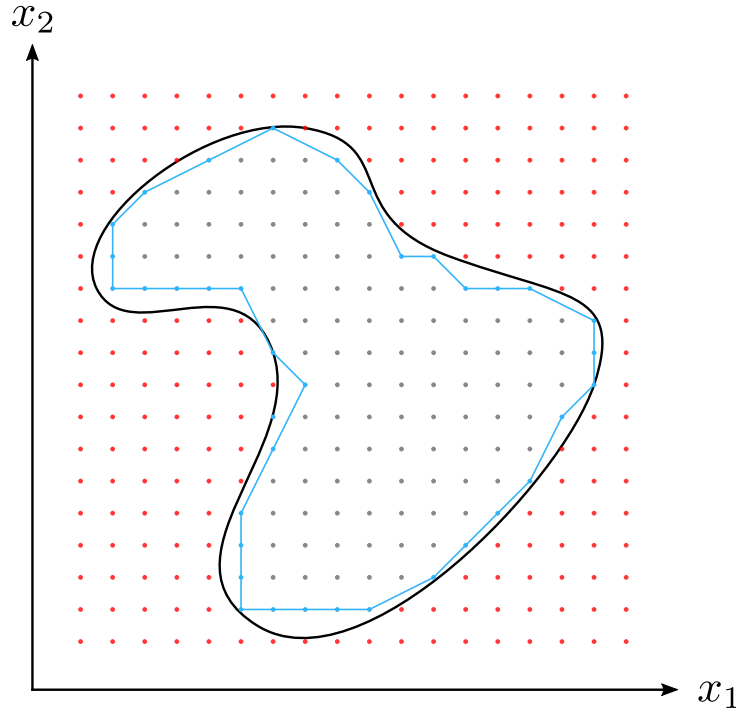


Figura 19 – Esboço da estimativa da Região de Estabilidade de um sistema bidimensional através do método Força Bruta.

11.2

Eficientização

Para efficientizar o método, alguns passos são tomados, esquematizados na figura 20:

1. Determina-se um tempo máximo de simulação, quer dizer, em todas as simulações o sistema será simulado de 0 a um tempo final qualquer;
2. Definem-se duas bolas, uma grande ϵ_{max} e outra pequena ϵ_{min} , de equações

$$\epsilon_{min} < \|x - x^*\| < \epsilon_{max} \quad (11.1)$$

3. Numa dada simulação, se a trajetória do sistema adentrar a bola pequena ϵ_{min} (curva amarela na figura 20), então assume-se que a condição inicial daquela trajetória pertence à R_e e esta simulação é cancelada, e a próxima começa. É importante observar que o raio da bola pequena deve ser menor do que a menor distância do equilíbrio aos pontos da grade, quer dizer;

$$\epsilon_{min} < \min_{x_g \in G(\Omega)} \|x^* - x_g\| \quad (11.2)$$

Naturalmente, como esse valor não é tão facilmente acessível, pode-se adotar metade da menor distância entre dois pontos da grade:

$$\epsilon_{min} = \frac{1}{2} \min_{(x_{g1}, x_{g2}) \in G_r(\Omega)} \|x_{g1} - x_{g2}\| \quad (11.3)$$

Porque, caso contrário, os pontos da grade mais próximos do equilíbrio podem ser erroneamente incluídos na estimativa. A bola pequena deve ser pequena para que este equívoco não ocorra; ao mesmo tempo, deve ser grande o suficiente para que pontos que de fato pertençam à R_e sejam incluídos sem que precisem ser simulados por muito tempo, diminuindo o tempo total de simulação.

4. Por outro lado, se numa dada simulação a trajetória do sistema extrapola a bola grande ϵ_{max} (curva azul claro na figura), então assume-se que a condição inicial dessa trajetória não pertence à R_e ; esta simulação é parada, e a próxima começa. Nota-se que, por suposto, $\epsilon_{max} > \epsilon_{min}$. Além disso, a bola grande deve ser grande o suficiente para que pontos pertencentes à Região não sejam descartados erroneamente (na ocorrência de *overshoot* por exemplo); ao mesmo tempo, deve ser pequena o suficiente para que os pontos que não pertencem a ela sejam descartados rapidamente, diminuindo consideravelmente o tempo de simulação.

Os pontos que não atingem nenhuma das bolas (curva verde) podem ser tratados como possíveis candidatos a órbita periódica. Pode-se tratá-los incluindo-os ou excluindo-os da estimativa ou ainda aumentando o tempo de simulação destes pontos em especial para poder concluir algo sobre eles.

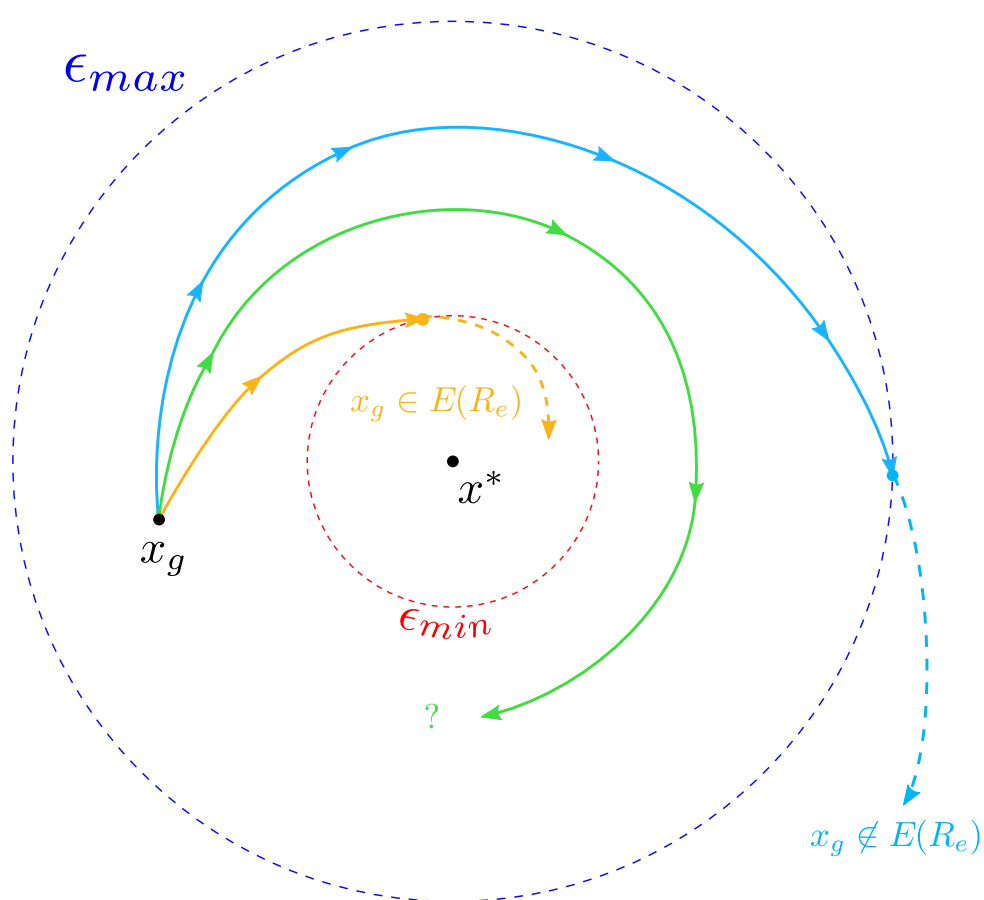


Figura 20 – Esquemático de trajetória explicativo do método Força Bruta.

Aplicando o MFB ao sistema em estudo

Tendo desenvolvido o método e explicado, então pode-se aplicá-lo ao caso em estudo, os sistemas controlados por AVR e PSS.

12.1

Implementação

O espaço de estados desses sistemas tem dimensão seis, e logo é impossível representar sua Região de Estabilidade graficamente. No entanto, pode-se tomar um corte dela e representá-lo tridimensionalmente, ou ainda bidimensaionalmente.

Além do espaço de estados, há a possibilidade de se verificar a influência dos parâmetros dos controladores (ganhos e constantes de tempo) na Região. Neste caso, o espaço de análise ganha mais dimensões, tantas quantas forem os parâmetros que se quer analisar.

Assim, o MFB foi aplicado ao sistema em estudo em duas instâncias.

12.1.1 Primeira implementação do MFB

Na primeira, a ideia foi retratar a Região de Estabilidade do sistema tridimensionalmente, no espaço $(x_1, x_2, x_3) = (E'_q, \omega, \delta)$. Para tanto, fixaram-se os parâmetros dos controladores, e tomou-se o corte $(x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0)$. A justificativa para tomar tal corte é que, no equilíbrio, não faz sentido dar energia inicial aos controladores porque, por definição, eles não agem no equilíbrio.

Assim, a partir do equilíbrio, variaram-se $x_1 \equiv E'_q$, $x_2 \equiv \omega$ e $x_3 \equiv \delta$ ao redor do equilíbrio:

- E'_q foi variado ao redor do valor de equilíbrio, de -10 a 10 ;
- ω também foi variado ao redor do valor de equilíbrio de -5 a 5 ;
- δ foi igualmente variado ao redor do valor de equilíbrio, de -1.5 a 2 .

Cada dimensão conteve trinta pontos linearmente espaçados, determinando vinte e sete mil simulações, e definindo assim $G_r(\Omega)$ uma matriz de três colunas por vinte e sete mil.

O tempo final de simulação adotado foi 100 segundos; a bola pequena corresponde a 95% da metade da menor distância entre dois pontos da grade. A bola maior foi adotada como mil vezes a bola menor.

As características do sistema (parâmetros da máquina, ganhos e tempos dos controladores, condição de equilíbrio e limites dos saturadores) foram mantidas as mesmas com relação às simulações dinâmicas da parte anterior.

12.1.2 Segunda implementação do MFB

Na segunda aplicação do MFB, mostrou-se como a variação dos ganhos K_e e K_{PSS} influencia a Região de Estabilidade do sistema controlado por AVR e PSS. Para tanto, tomou-se o corte $(x_1, x_4, x_5, x_6) = (E'_q, 0, 0, 0)$, e variaram-se aqueles ganhos.

Assim, traçou-se a Região de Estabilidade do sistema no plano $(x_2, x_3) = (\omega, \delta)$, em duas situações: na primeira, fixou-se K_e e variou-se K_{PSS} ; na segunda, o contrário. A grade utilizada teve duzentos pontos por cada uma das duas coordenadas.

O programa em MATLAB utilizado para estimar as Regiões de Estabilidade e gerar as figuras de ambas as implementações se encontra no apêndice A, seção A.7, página 172.

12.2

Resultados

Na primeira implementação do MFB no sistema, obtém-se os pontos do espaço (E'_q, ω, δ) pertencentes à estimativa da Região de Estabilidade do sistema, que é um sólido naquele espaço. Em seguida, utiliza-se o comando *boundary* para aferir quais dos pontos obtidos pertencem à fronteira do sólido, obtendo-se assim uma estimativa da separatrix da Região.

Analogamente, na segunda implementação, obtém-se os pontos do plano (ω, δ) pertencentes à estimativa da Região no corte tomado; o comando *boundary* resulta os pontos que pertencem à fronteira da estimativa, e que formam portanto uma estimativa da separatrix.

A seguir depictam-se as estimativas das regiões de estabilidade resultantes:

- Do sistema em malha aberta (figura 21), tridimensional e bidimensionalmente;
- Do sistema controlado apenas por AVR (figura 22), tridimensional e bidimensionalmente;
- Do sistema sem saturadores, tridimensionalmente e bidimensionalmente (figura 23);
- Idem para o sistema com saturadores (figura 24);

- Dos sistemas com saturação e sem saturação, superpostos para comparação (figura 25). A região do sistema com saturadores está denotada em preto para melhor denotá-la dentro da região do sistema sem saturadores; esta foi traçada transparente pelo mesmo motivo.

Para doravante exemplificar o efeito da excursão dos ganhos K_e e K_{PSS} na Região de Estabilidade do Sistema, plotam-se as Regiões de Estabilidade do sistema variando-se estes ganhos. Para melhor se representar as Regiões, fixou-se E'_q no valor de equilíbrio e variaram-se ω e δ ao redor dos seus valores de equilíbrio.

- A figura 26 mostra a Região de Estabilidade do sistema, no plano (ω, δ) . O ganho K_{PSS} foi mantido 20 e o ganho K_e variou nos valores 5, 10, 20;
- Já na figura 27, o ganho K_e foi fixado em 5 e o ganho K_{PSS} foi variado em 20, 50, 100.

Região de Estabilidade do sistema em malha aberta

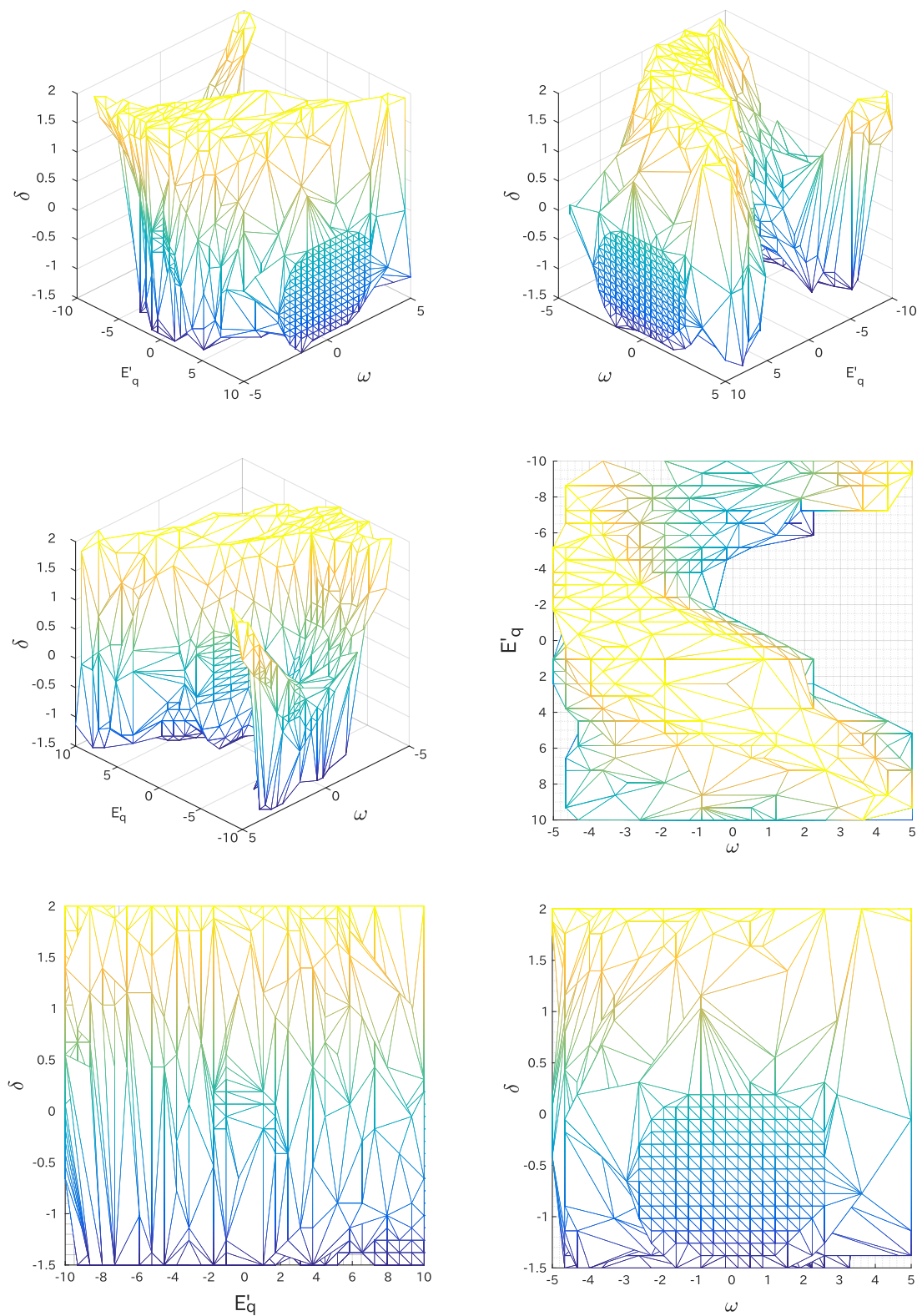


Figura 21 – Representações tridimensionais e bidimensionais da estimativa da Região de Estabilidade do sistema em malha aberta.

Região de estabilidade do sistema controlado por AVR

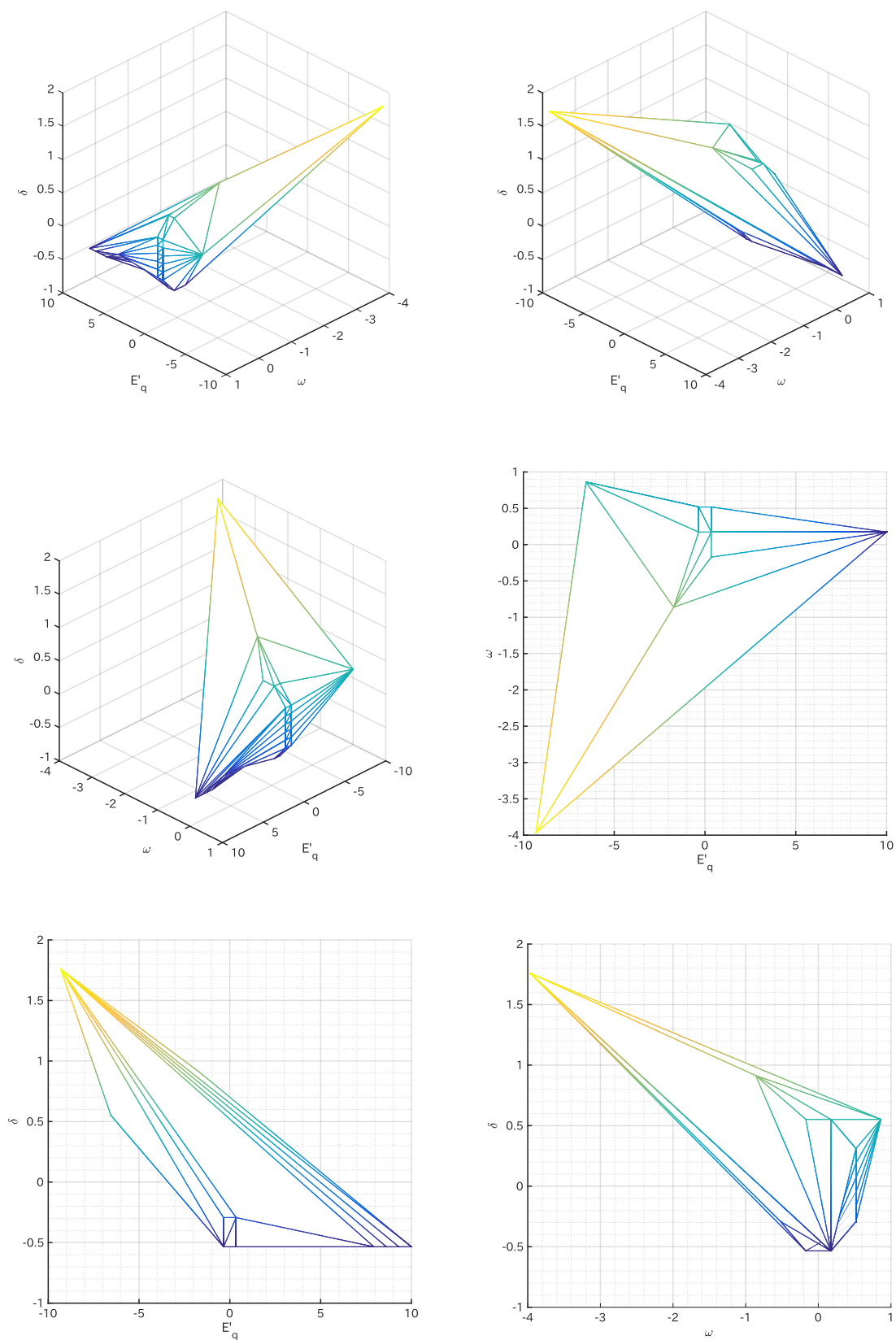


Figura 22 – Representações tridimensionais da estimativa da Região de Estabilidade do sistema livre.

Região de estabilidade do sistema sem saturadores

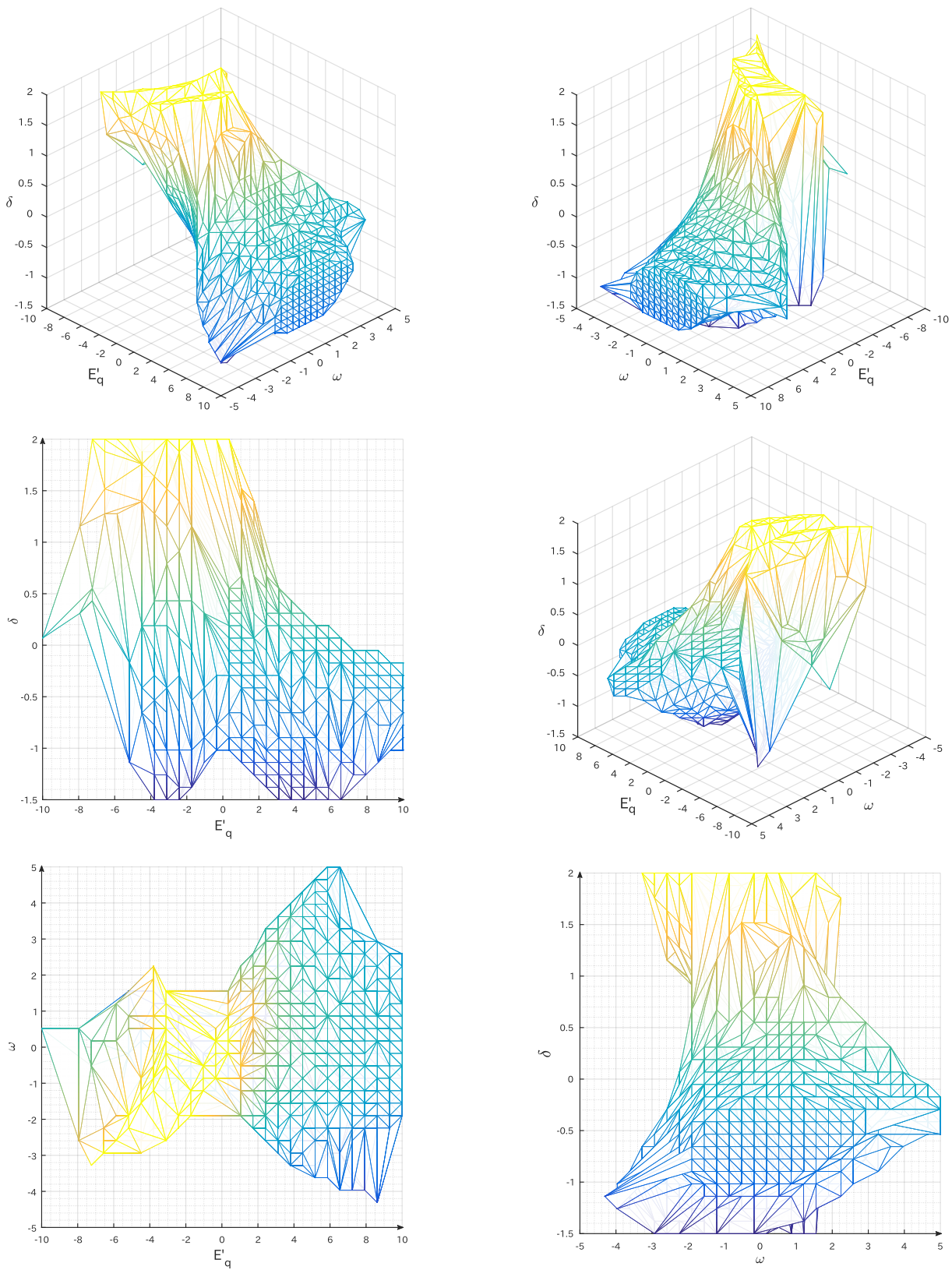


Figura 23 – Representações tridimensionais e bidimensionais da estimativa da Região de Estabilidade do sistema sem saturadores.

Região de estabilidade do sistema saturado

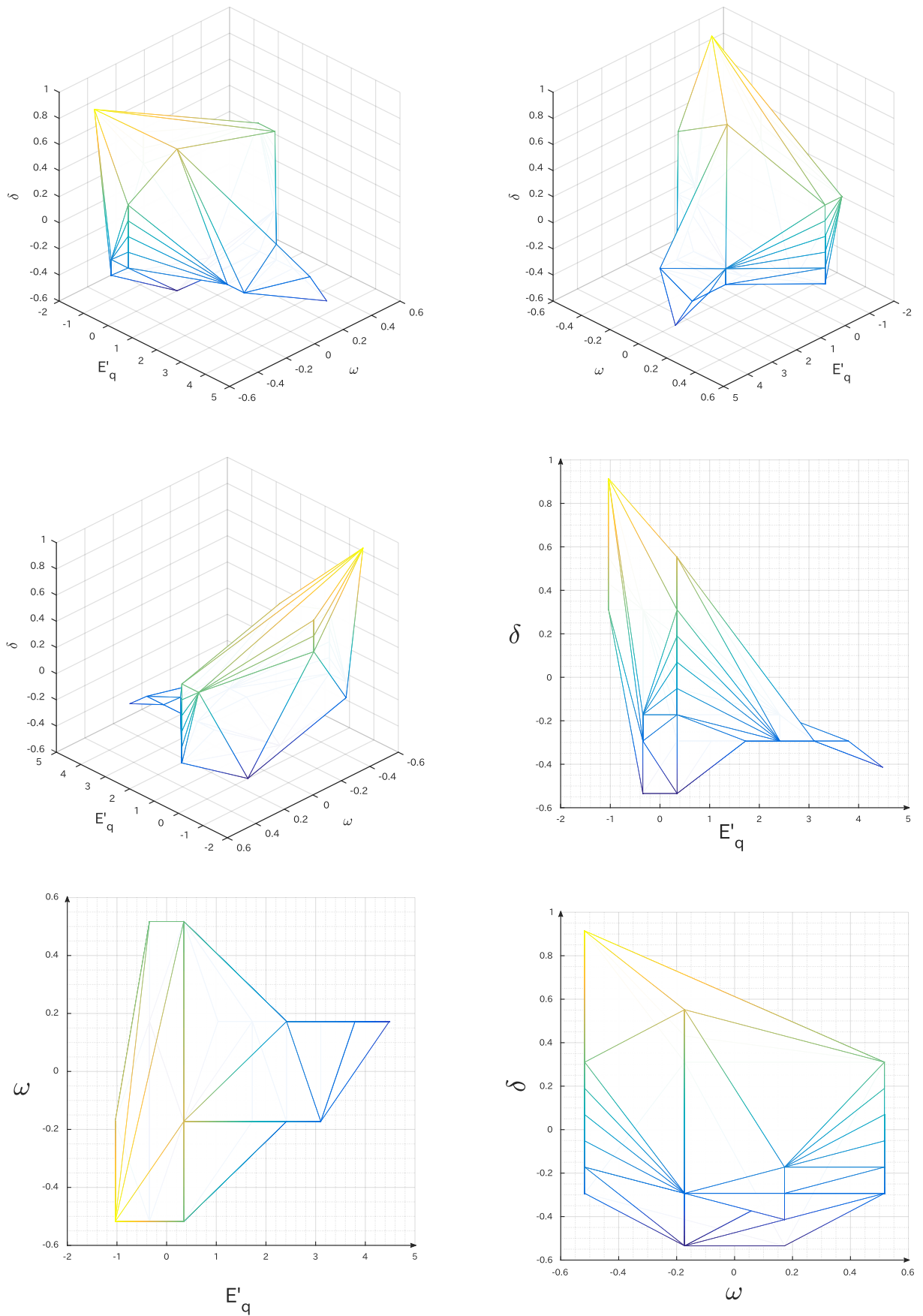


Figura 24 – Representações bidimensionais e tridimensionais da estimativa da Região de Estabilidade do sistema saturado.

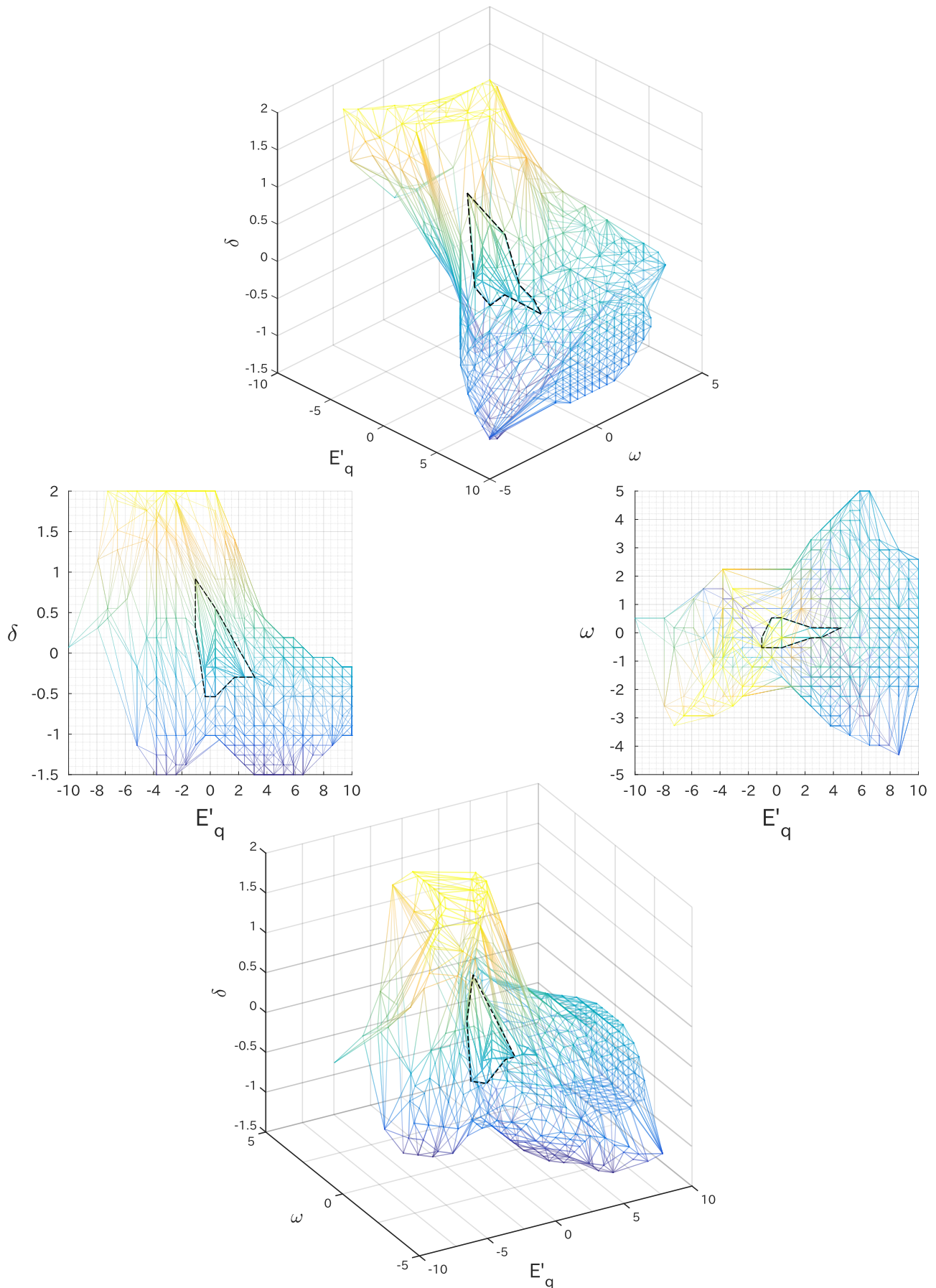


Figura 25 – Representações bidimensionais e tridimensionais das duas estimativas das Regiões de Estabilidade dos sistemas livre (região maior) e saturado (região menor destacada) superpostas.

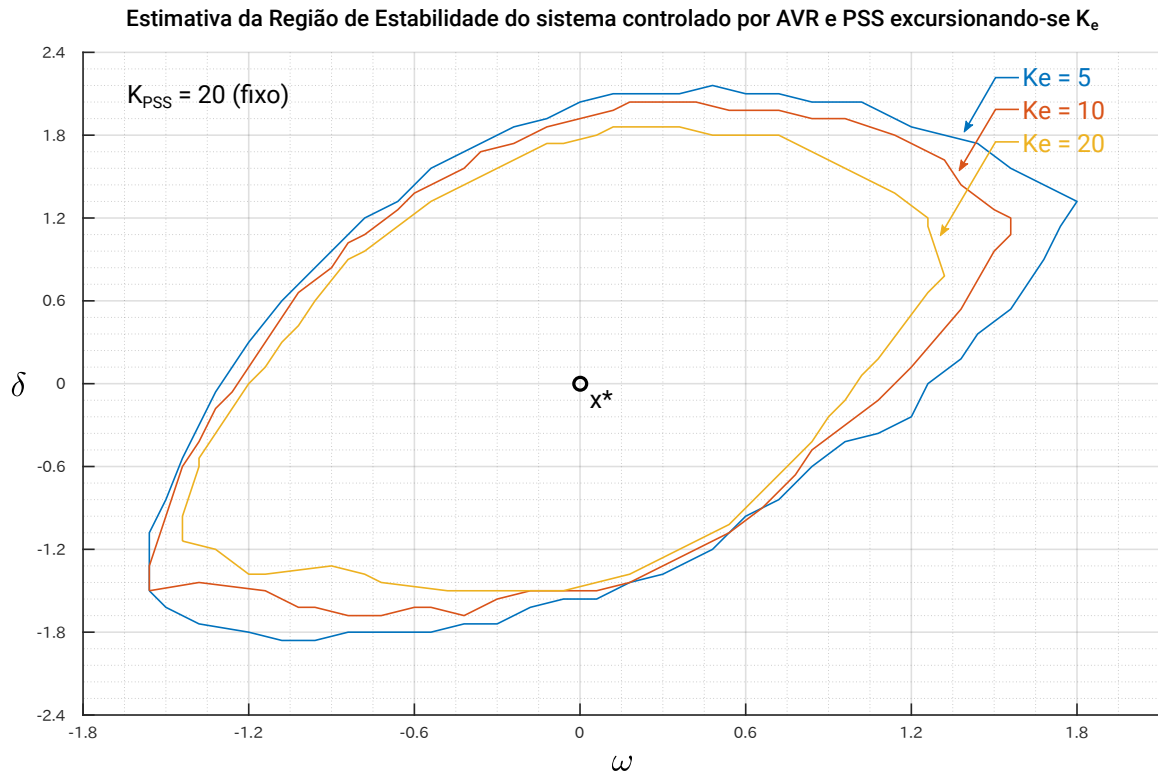


Figura 26 – Estimativa da Região de Estabilidade do sistema, no plano (ω, δ) , variando-se o ganho K_e .

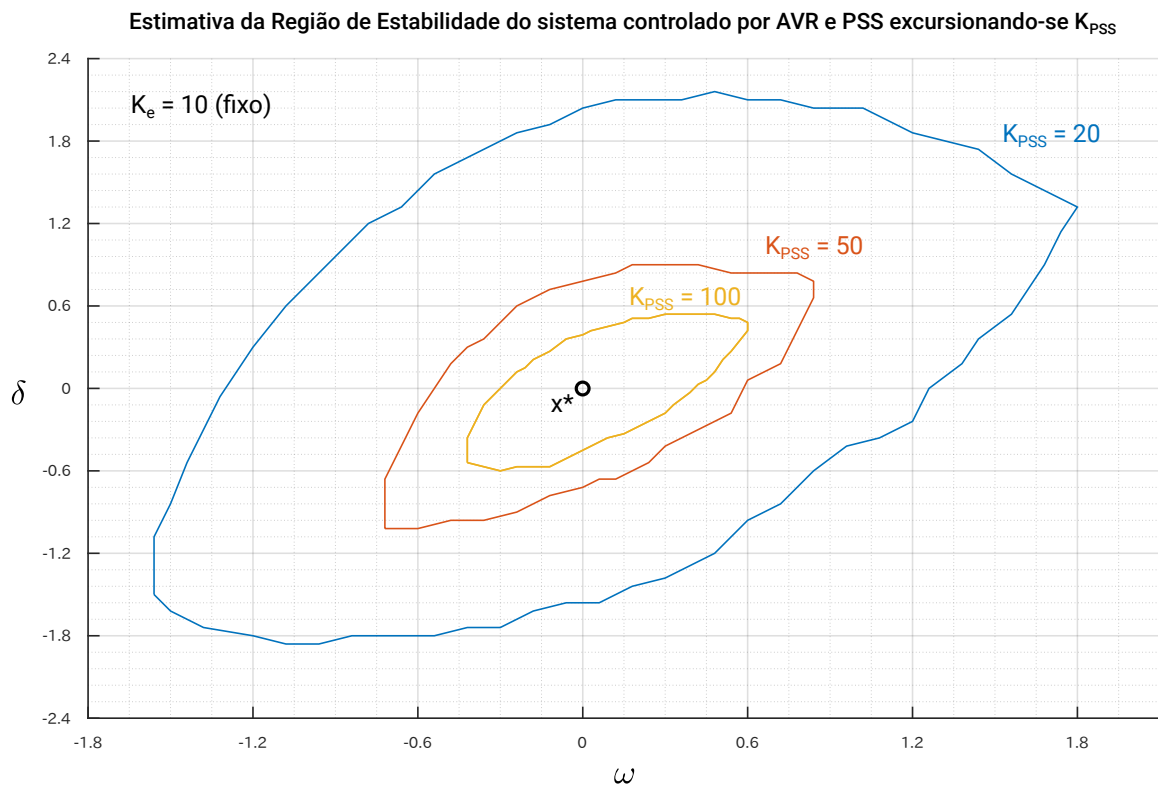


Figura 27 – Estimativa da Região de Estabilidade do sistema, no plano (ω, δ) , variando-se o ganho K_{PSS} .

Discussão e conclusão

Discussão

13.1

Sobre os traçados da Região de Estabilidade

Ficou claro como a introdução do AVR ou dos saturadores reduz singificativamente o tamanho da região de estabilidade do sistema. Para fins de comparação, calcularam-se os volumes das estimativas das Regiões:

1. Inicialmente, a região do sistema em malha aberta possui 323.04 unidades de volume;
2. Já depois da introdução do AVR a região passa a ter 17.97 unidades;
3. Em seguida, a introdução do PSS aumenta este volume para 169.89 unidades;
4. Finalmente, a introdução dos saturadores reduz o volume para 17.21 unidades.

As grandes disparidades entre os volumes do sistema em malha aberta e com AVR podem ser principalmente devido ao alto ganho do controlador, que instabiliza o sistema significativamente. Já a disparidade entre o volume dos sistemas controlados por AVR e PSS pode ser explicada pela pequena amplitude escolhida para os saturadores.

A análise e comparação das regiões de estabilidade conclui que a maior região de estabilidade foi, naturalmente, a do sistema em malha aberta. A conseguinte introdução do AVR diminuiu a região grandemente; em seguida, a introdução do PSS alargou-a, para então diminuir com a introdução dos saturadores.

Após ter traçadas as Regiões de Estabilidade do sistema nas quatro situações (malha aberta, controlado por AVR, controlado por AVR e PSS sem e com saturadores) dadas pelas figuras 21 a 25, pode-se comparar estas Regiões para se concluir sobre o impacto dos controladores na estabilidade transitória do sistema.

O sistema em malha aberta tem a maior Região de Estabilidade, significando que admite condições iniciais mais afastadas do equilíbrio sem instabilizar. Entretanto, o sistema em malha aberta é lento (tem tempos de acomodação muito extensos) e apresenta oscilações de altas amplitudes, além de baixa regulação de tensão.

Logo após a introdução do AVR, a Região é diminuída abruptamente. Isto corrobora com o fato que o AVR tem por único objetivo melhorar a regulação de tensões no sistema; no entanto, à medida que o faz, piora a sua estabilidade transitória, tornando-o mais susceptível a perturbações.

Quando da introdução do PSS, a Região aumenta significativamente. Assim, o PSS cumpre a função de aprimorar a resposta dinâmica do sistema a perturbações. Além disso, o PSS torna o sistema mais rápido (tempos de acomodação menores) e diminui as amplitudes das suas oscilações.

Finalmente, a introdução de saturadores diminui significativamente a Região de Estabilidade; isto se deve ao fato que impedem a atuação dos controladores. Presumivelmente, quando os controladores são incapazes de agir, o sistema fica à deriva da própria dinâmica.

Isto gera um questionamento: por vezes a introdução de saturadores tem por objetivo limitar a atuação dos controladores, sob a excusa de que a sobre- ou sub-excitação do sistema pode ser danosa à máquina. O fato de a introdução desses mesmos saturadores ser tão deletéria à Região (a ponto de diminuí-la cerca de 9.8 vezes) mostra que o pretexto de sobre/sub-excitação, mesmo que fundado (de fato, operar a máquina fora das condições de operação pode acarretar correntes e tensões prejudicialmente pequenas ou grandes ao equipamento) deve ser analisado mais profundamente, uma vez que o sistema também pode ser danificado se instabilizado.

Ademais, também há de se considerar que muitos parâmetros influenciam na região – a começar pelos parâmetros dos controladores, que são cinco: T_1 , T_2 , K_{PSS} do controlador PSS, e K_e , T_e , do AVR. Além de tudo, naturalmente, quanto mais largos os limites dos saturadores, mais próximas serão as regiões até que, se os limites forem infinitos, os sistemas livre e saturado equivalem. Assim, é mister que se analise não apenas a influência dos saturadores, mas também a influência destes parâmetros dos controladores naquela Região.

Apresenta-se assim um problema: dado que os limites de saturação limitam demais a resposta do sistema, diminuindo-lhe significativamente a Região de Estabilidade, é necessário tomar valores razoáveis para estes limites. Nesta monografia, os limites tomados foram escolhidos em função da resposta dinâmica do sistema, para mostrar o efeito da saturação na resposta do sistema frente perturbação; no artigo de onde se retiraram os parâmetros do sistema (DEMELLO; CONCORDIA, 1969) não havia especificação nenhuma acerca dos limites de corrente ou de tensão, de campo ou de armadura da máquina. Um possível avanço seria adotar um outro modelo de máquina, mais completo, que possua estes limites, de forma que se possa adotar limites mais verossímeis para os saturadores.

13.2

Sobre a performance do MFB

O programa A.7 demorou cerca de oitenta horas para gerar os gráficos mostrados. Ainda assim, percebe-se que tais gráficos são um pouco rudimentares devido à grade muito esparsa. Para melhor estimar essas regiões, é necessário refinar a grade, tendo-se em vista que o número de simulações que o método executa equivale ao tamanho da grade elevado ao cubo; isto quer dizer que mudanças na grade elevam o tempo de simulação em, no mínimo, ordem cúbica.

Fica claro como o Método Força Bruta é inadequado para sistemas de grande porte. Os sistemas aqui apresentados, um de dimensão quatro e outro de dimensão seis, são por si só simplificações de modelos de sistemas de potência mais sofisticados – alguns destes consideram duas ou três máquinas, acopladas a uma carga local e a um barramento infinito.

Visto que o equipamento utilizado consiste de um computador comercial convencional, uma solução seria utilizar soluções numéricas computacionais, como utilização de computação paralela ou ainda de *clusters* de alto poder computacional.

13.3

Sobre a investigação em bifurcações

Na investigação sobre Bifurcações, o resultado mais importante é que, no equilíbrio $\vec{S} = 1 + j0.5$, o sistema controlado por AVR é capaz de bifurcar, à medida que o sistema controlado por AVR e PSS, fixos os tempos (T_1, T_2, T_w, T_e) , não há par de ganhos (K_e, K_{PSS}) que o levem à bifurcação. Em outras palavras: para o equilíbrio considerado, no sistema controlado por AVR, para cada valor de T_e existe um K_{eB} correspondente que pode levar o sistema à bifurcação. Já no sistema controlado por AVR e PSS, fixas as constantes de tempo, nenhum par de ganhos pode bifurcar o sistema. Em última instância, no AVR a possibilidade de bifurcação é atrelada apenas ao ponto de operação \vec{S} escolhido, enquanto no sistema controlado por AVR e PSS, para o mesmo equilíbrio \vec{S} talvez se possa escolher constantes de tempo tais que o sistema não seja capaz de bifurcar para ganho algum.

Trata-se de uma constatação importantíssima porque reitera o PSS como um controlador de suma importância para a estabilidade do sistema, à medida que evita a possibilidade de bifurcações.

13.4

Possíveis desenvolvimentos futuros

Com os resultados e métodos apresentados, pode-se também averiguar a ocorrência de ciclos-limite em sistemas deste tipo, como reportado em (LI et al., 2002). Como, em geral, são ciclos instáveis, o método Força Bruta também é inviável porque é virtualmente impossível acertar uma grade que contenha uma condição inicial precisa que cause a um desses ciclos.

Partindo do que foi desenvolvido nesta monografia, pode-se ainda calcular os Tempos Críticos de Abertura do sistema naquelas quatro situações, o que também ilustraria a influência dos controladores e dos saturadores nas margens de estabilidade transitória do sistema.

Uma sugestão seria procurar, para o mesmo sistema, outro equilíbrio \vec{S} para o qual o sistema controlado por AVR e PSS seja passível de bifurcação. Poderia, ainda, adotar outro modelo de máquina que possa bifurcar quando controlada por AVR e PSS.

Outra sugestão é averiguar o comportamento do sistema quando bifurcado através do cálculo do primeiro coeficiente de Lyapunov, de onde se pode caracterizar a resposta dinâmica do sistema na bifurcação quando deslocado do equilíbrio.

Conclusão

O sistema OMIB foi estudado e caracterizado. Através dessa análise, foi possível deduzir as equações de fluxo de potência, que levam às equações de equilíbrio do sistema.

Em seguida, estudou-se a Região de Factibilidade dessas equações, ou seja, determinaram-se as condições que limitam a existência do equilíbrio.

Em posse das equações de equilíbrio e das equações da máquina em malha aberta, foi possível deduzir as equações algébrico-diferenciais que regem o sistema em quatro situações possíveis:

1. Sistema sem controladores (em malha aberta);
2. Sistema controlado por AVR;
3. Sistema controlado por AVR e PSS:
 - a) Sem saturadores (sistema “livre”);
 - b) Com saturadores (sistema saturado).

Desenvolvidas essas equações, os sistemas foram implementados em programas. Validaram-se os modelos desenvolvidos através de simulações de perturbação do sistema.

Finalmente, através do método de Força Bruta, averiguou-se o impacto dos controladores e dos saturadores na Região de Estabilidade do sistema; concluiu-se que, de fato, a introdução do controlador AVR é deletéria às margens de estabilidade transitória do sistema; além disso, a introdução de saturadores diminui enormemente essa Região.

Em seguida, pesquisou-se a ocorrência de Bifurcações de Hopf nos sistemas controlado por AVR e controlado por AVR e PSS. Concluiu-se que o sistema controlado apenas por AVR, no equilíbrio considerado, é capaz de bifurcação; determinou-se o Diagrama de Bifurcação do sistema

e calcularam-se os autovalores do sistema quando na bifurcação. Concluiu-se também que, no equilíbrio considerado, o sistema controlado por AVR e PSS não é passível de bifurcação.

Sugeriram-se alguns estudos de estabilidade, que serão desenvolvidos em projeto futuro. São eles:

1. Estudo da influência dos parâmetros dos controladores sobre aquela Região de Estabilidade, traçando-a para vários valores de parâmetros;
2. Pesquisa da ocorrência de ciclos-limite no sistema e tentativa de caracterizá-los;
3. Admissão de um modelo de máquina mais completo, que possibilite a adoção de valores factíveis de limites dos saturadores;
4. A procura de outro ponto de equilíbrio para o qual o sistema controlado por AVR e PSS seja passível de bifurcar;
5. A adoção de um modelo de máquina que possa bifurcar quando controlada por AVR e PSS.

Referências

ALBERTO, L. F. C.; RAMOS, R. A.; BRETAS, N. G. *Modelagem de Máquinas Síncronas Aplicada ao Estudo de Estabilidade de Sistemas Elétricos de Potência*. 1. ed. São Carlos: Editora da Escola de Engenharia de São Carlos, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 25, 29 e 30.

BRETAS, N. G.; ALBERTO, L. F. C. *Estabilidade Transitória em Sistemas Eletroenergéticos*. 1. ed. São Carlos: Editora da Escola de Engenharia de São Carlos, 2000. Citado na página 25.

CHIANG, H.-D.; ALBERTO, L. F. C. Characterization of stability region for general autonomous nonlinear dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 57, n. 6, p. 1564, 2012. Citado na página 25.

CHIANG, H.-D.; ALBERTO, L. F. C. *Stability Regions of Nonlinear Dynamical Systems*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 119.

DEMELLO, F.; CONCORDIA, C. Concepts of synchronous machine stability as affected by excitation control. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-88, n. 4, p. 316, 1969. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 140.

GAO, Y.; K.T.CHAU. Hopf bifurcation and chaos in synchronous reluctance motor drives. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, v. 1, n. 4, p. 296, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 83.

HAMIDI, F.; JERBI, H. A synthesis on lyapunov methods to the estimation and enlargement of attraction domain for nonlinear autonomous systems. *International Conference on Computational Intelligence, Modelling and Simulation*, v. 1, p. 87, 2009. Citado na página 123.

INSTITUTE OF ELECTRONICAL AND ELETRICAL ENGINEERS. *IEEE Guide for Synchronous Generator Modeling Practices and Applications in Power System Stability Analyses*: IEEE 1110-2002. New York, 2002. 95 p. Citado na página 25.

INSTITUTE OF ELECTRONICAL AND ELETRICAL ENGINEERS. *IEEE Recommended Practice for Excitation System Models for Power System Stability Studies*: IEEE 421.5-2005. New York, 2005. 95 p. Citado na página 25.

KHALIL, H. K. High-gain observers in nonlinear feedback control. *International Conference on Control, Automation and Systems 2008*, v. 1, 2008. Citado na página 24.

KUNDUR, P. *Power System Stability and Control*. 1. ed. New York: Editora McGraw-Hill Inc, 1994. Citado na página 25.

LI, Z. et al. Bifurcations and chaos in a permanent-magnet synchronous motor. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, v. 3, n. 3, p. 383, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 25, 83 e 142.

- LIMA, E. L. *Curso de Análise Real, volumes 1 e 2*. 1. ed. Rio de Janeiro: CNPq, 1981. Citado na página 25.
- LIMA, E. L. *Análise do Espaço R^n* . 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. Citado na página 25.
- LIMA, E. L. *Análise real, volumes 1 a 3*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. Citado na página 25.
- LUO, A. C. J. *Toward Analytical Chaos in Nonlinear Systems*. 1. ed. West Sussex: Wiley and Sons, 2014. Citado na página 119.
- PERKO, L. *Differential Equations Dynamical Systems*. 7. ed. Nova Iorque: Springer Science and Business, 2008. Citado na página 260.
- STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. 1. ed. Nova Iorque: The Perseus Books Group, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 83.
- THORP, J. S.; WANG, H. *Computer Simulation of Cascading Disturbances in Electric Power Systems*. [S.l.], 2010. Citado na página 34.
- TYRTYSHNIKOV, E. E. *A Brief Introduction to Numerical Analysis*. 1. ed. Moscou: Springer Science and Business, 1997. Citado na página 85.
- WANG, H. *Control of Bifurcations and Routes to Chaos in Dynamical Systems*. Tese (Doutorado) — Institute for Systems Research, Maryland, 1993. Disponível em: <http://drum.lib.umd.edu/bitstream/handle/1903/5446/PhD_93-10.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 6 ago. 2017. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 83.

Apêndices

Programas para MATLAB

Neste apêndice, são apresentados os códigos em MATLAB desenvolvidos segundo as equações e teoria desenvolvida na monografia.

A.1

Cálculo das condições iniciais do sistema

Listing A.1 – Código para cálculo e mostra das condições iniciais do sistema.

```

1 %% Código para cálculo das condições iniciais do sistema OMIB
2 %% Autor: Álvaro Augusto Volpato
3
4 clear all;
5 clc;
6 close all;
7 format long
8
9 %% Definindo os parâmetros da máquina
10 global xd xq xlinhad xlinhaq Tlinhado r re xe H S E Z X alpha phi deltaPm
    tempoDeltaPm Pm0 Efd0;
11
12 xd = 1.14; % Impedância equivalente de regime permanente de eixo direto
13 xq = 0.66; % Impedância equivalente de regime permanente de eixo em quadratura
14 xlinhad = 0.24; % Impedância transitória de eixo direto
15 xlinhaq = xlinhad; % Impedância transitória de eixo em quadratura
16 Tlinhado = 12; % Constante de tempo transitória de eixo direto
17 r = 0; % Resistência interna equivalente da máquina;
18 re = 0.01; % Resistência externa acoplada à máquina;
19 xe = 0.1; % Impedância externa acoplada à máquina;
20 xt = xe + xlinhaq; % Impedância "total";
21 rt = re + r; % Resistência "total"
22 H = 1.5; % Constante de inércia do rotor
23 P = 1; % Potência ativa inicial
24 Q = 0.5; % Potência reativa inicial
25 S = P + j*Q; % Potência aparente inicial
26 E = 1.0; % Tensão do barramento infinito (em PU!);
27 X = sqrt( (r+re)^2 + (xlinhaq + xe)^2 );
28 phi = atan((xlinhaq + xe)/(re + r) );

```

```

29 Z = sqrt(re^2 + xe^2);
30 alpha = atan(xe/re);
31
32 %% Calculando as condições iniciais (em PU)
33
34 % Resolvendo o sistema das correntes
35 a = E^2*(xt^2 + rt^2);
36 b = rt*E^3 + 2*xt*E*(Q*rt - P*xt);
37 c = (Q*rt - P*xt)^2 - rt*P*E^2;
38
39 Ir = (-b + sqrt(b^2 - 4*a*c))/(2*a);
40 Ii = (P*xt - Q*rt)/(E*rt) - xt/rt*Ir;
41 I = Ir + j*Ii;
42
43 clear x x0 a b c;
44
45 % Calculando as tensões através de Leis de Kirchhoff
46 V = E + (re + j*xe)*I;
47 EL = V + (r + j*xlinhad)*I;
48
49 % Obtendo os versores Q e D e o ângulo delta
50 Q = EL/norm(EL);
51 delta0 = phase(EL);
52 D = Q*exp(j*pi/2);
53
54 % Calculando as tensões e correntes no eixo do rotor
55 ELq0 = real(EL)*cos(delta0) + imag(EL)*sin(delta0);
56 ELd0 = real(EL)*-sin(delta0) + imag(EL)*cos(delta0);
57
58 Vq0 = real(V)*cos(delta0) + imag(V)*sin(delta0);
59 Vd0 = real(V)*-sin(delta0) + imag(V)*cos(delta0);
60
61 Iq0 = real(I)*cos(delta0) + imag(I)*sin(delta0);
62 Id0 = real(I)*-sin(delta0) + imag(I)*cos(delta0);
63
64 V0 = sqrt(Vq0^2 + Vd0^2);
65
66 Efd0 = ELq0 - Id0*(xd - xlinhad);
67 Pm0 = ELq0*Iq0 - Iq0*Id0*(xlinhad - xlinhaq);

```

A.2

Região de Factibilidade

Listing A.2 – Código para plotar a Região de Factibilidade do sistema em estudo (figura 5).

```

1 %% Código para plotar a Região de Factibilidade do Sistema OMIB
2 %% Autor: Álvaro Augusto Volpato
3
4 close all;
5 clear all;
6 clc;
7
8 rt = 0.01;
9 xt = 0.34;
10
11 E = 1;

```

```

12 z = xt/rt;
13
14 y = linspace(-4e1,4e1,1e4);
15
16 x = (-4*(1 + z^2).*y.^2 + (E^2/rt)^2)/(4*E^2*sqrt(1 + z^2)/(rt));
17
18 x0 = E^2/(4*rt*sqrt(1 + z^2));
19
20 y0 = 0;
21
22 figure(1)
23 plot(x,y);
24 hold on
25 grid on
26 grid minor
27 plot(x0,y0,'ro');
28 plot([x0,-1e3],[y0,y0]);
29
30 theta = atan(z);
31 theta = -theta;
32
33 P = x;
34 Q = y;
35
36 for i = 1:length(x)
37     P(i) = cos(theta)*x(i) - sin(theta)*y(i);
38     Q(i) = sin(theta)*x(i) + cos(theta)*y(i);
39 end
40
41 P0 = E^2/(4*rt*(1 + z^2));
42 Q0 = -z*E^2/(4*rt*(1 + z^2));
43
44 figure(2)
45 plot(P,Q)
46 grid on
47 grid minor
48 hold on
49 axis equal
50 plot(P0,Q0,'ro');
51
52 reta1 = cos(theta)*-500 - sin(theta)*y0;
53 reta2 = sin(theta)*-500 + cos(theta)*y0;
54
55 plot([P0,reta1],[Q0,reta2])

```

A.3

Simulação do sistema em malha aberta

Listing A.3 – Código utilizado para simular o sistema em malha aberta e resultar nos gráficos da figura 6.

```

1 %% Código para plotar a Região de Factibilidade do Sistema OMIB
2 %% Autor: Álvaro Augusto Volpato
3 clear all;
4 clc;
5 close all;

```

```

6 format long
7
8 %% Definindo os parâmetros da máquina
9 global xd xq xlinhad xlinhaq Tlinhado r re xe H S E Z X alpha phi deltaPm
   tempoDeltaPm Pm0 Efd0;
10
11 xd = 1.14; % Impedância equivalente de regime permanente de eixo direto
12 xq = 0.66; % Impedância equivalente de regime permanente de eixo em quadratura
13 xlinhad = 0.24; % Impedância transitória de eixo direto
14 xlinhaq = xlinhad; % Impedância transitória de eixo em quadratura
15 Tlinhado = 12; % Constante de tempo transitória de eixo direto
16 r = 0; % Resistência interna equivalente da máquina;
17 re = 0.01; % Resistência externa acoplada à máquina;
18 xe = 0.1; % Impedância externa acoplada à máquina;
19 xt = xe + xlinhaq; % Impedância "total";
20 rt = re + r; % Resistência "total"
21 H = 1.5; % Constante de inércia do rotor
22 P = 1; % Potência ativa inicial
23 Q = 0.5; % Potência reativa inicial
24 S = P + j*Q; % Potência aparente inicial
25 E = 1.0; % Tensão do barramento infinito (em PU!);
26 X = sqrt( (r+re)^2 + (xlinhaq + xe)^2 );
27 phi = atan((xlinhaq + xe)/(re + r) );
28 Z = sqrt(re^2 + xe^2);
29 alpha = atan(xe/re);
30
31 % Perturbação:
32 deltaPm = 0.1;
33 tempoDeltaPm = 5;
34
35 %% Calculando as condições iniciais (em PU)
36
37 % Resolvendo o sistema das correntes
38 a = E^2*(xt^2 + rt^2);
39 b = rt*E^3 + 2*xt*E*(Q*rt - P*xt);
40 c = (Q*rt - P*xt)^2 - rt*P*E^2;
41
42 Ir = ( -b + sqrt(b^2 - 4*a*c))/(2*a);
43 Ii = (P*xt - Q*rt)/(E*rt) - xt/rt*Ir;
44 I = Ir + j*Ii;
45
46 clear x x0 a b c;
47
48 % Calculando as tensões através de Leis de Kirchhoff
49 V = E + (re + j*xe)*I;
50 EL = V + (r + j*xlinhad)*I;
51
52 % Obtendo os versores Q e D e o ângulo delta
53 Q = EL/norm(EL);
54 delta0 = phase(EL);
55 D = Q*exp(j*pi/2);
56
57 % Calculando as tensões e correntes no eixo do rotor
58 ELq0 = real(EL)*cos(delta0) + imag(EL)*sin(delta0);
59 ELd0 = real(EL)*-sin(delta0) + imag(EL)*cos(delta0);
60
61 Vq0 = real(V)*cos(delta0) + imag(V)*sin(delta0);
62 Vd0 = real(V)*-sin(delta0) + imag(V)*cos(delta0);
63
64 Iq0 = real(I)*cos(delta0) + imag(I)*sin(delta0);

```

```

65 Id0 = real(I)*-sin(delta0) + imag(I)*cos(delta0);
66
67 V0 = sqrt(Vq0^2 + Vd0^2);
68
69 Efd0 = ELq0 - Id0*(xd - xlinhad);
70 Pm0 = ELq0*Iq0 - Iq0*Id0*(xlinhad - xlinhaq);
71
72 %% Plotando o diagrama fasorial das condições iniciais
73
74 figure(1)
75 hold on;
76 grid on;
77 axis equal;
78 title('Diagrama fasorial das condições iniciais');
79 ylabel('Im');
80 xlabel('Re');
81
82 % Elinha em azul
83 plot_arrow(0,0,real(EL),imag(EL),'headwidth',0.01,'headheight',0.01,'color','blue','facecolor','blue','edgecolor','blue');
84 txt = ' E''';
85 text(real(EL),imag(EL),txt,'color','blue')
86 % V em vermelho
87 plot_arrow(0,0,real(V),imag(V),'headwidth',0.01,'headheight',0.01,'color','red','facecolor','red','edgecolor','red');
88 txt = ' V';
89 text(real(V),imag(V),txt,'color','red')
90 % I em amarelo
91 plot_arrow(0,0,real(I),imag(I),'headwidth',0.01,'headheight',0.01,'color','magenta','facecolor','magenta','edgecolor','magenta');
92 txt = ' I';
93 text(real(I),imag(I),txt,'color','magenta')
94 % E em verde
95 plot_arrow(0,0,real(E),imag(E),'headwidth',0.01,'headheight',0.01,'color','green','facecolor','green','edgecolor','green');
96 txt = ' E_{inf}';
97 text(real(E),imag(E),txt,'color','green')
98 % Q e D em preto
99 plot_arrow(0,0,real(Q)/5,imag(Q)/5,'headwidth',0.01,'headheight',0.01,'color','black','facecolor','black','edgecolor','black');
100 txt = ' Q';
101 text(real(Q)/5,imag(Q)/5,txt,'color','black')
102 plot_arrow(0,0,real(D)/5,imag(D)/5,'headwidth',0.01,'headheight',0.01,'color','black','facecolor','black','edgecolor','black');
103 txt = ' D';
104 text(real(D)/5,imag(D)/5,txt,'color','black')
105
106 %% Descrevendo o sistema com controlador
107
108 x0 = [ELq0 - 0.43,0.6,delta0,Efd0]; % Ponto inicial para ciclo limite?
109 xE = [ELq0,0,delta0,Efd0];
110
111 % Parâmetros do controlador AVR
112 Ke = 15;
113 Te = 1;
114
115 % Tempo total de simulação:
116 tfinal = 300;
117 tstep = 10^(-2); % Passo de tempo para o solver numérico
118 tspan = 0:tstep:tfinal;

```

```

119
120 syms x1 x2 x3 x4 u
121 x0 = [ELq0,0,delta0]; % Ponto de operação
122
123 %Analisando a estabilidade do sistema através dos autovalores do jacobiano
124 % no ponto de operação
125
126 syms x1 x2 x3 x4 u
127 F = [ ( Efd0 - x1 + (xd - xlinhad)*Id( x1,x3 ) )/Tlinhado ;
128       ( u - x1*Iq( x1,x3 ) + (xlinhad - xlinhaq)*Iq( x1,x3 )*Id( x1,x3 ) )/(2*H);
129       x2 ];
130
131 F = symfun(F,[x1 x2 x3]);
132 F = jacobian(F, [x1, x2, x3]);
133 F = double(subs(F, [x1, x2, x3], x0));
134
135 fprintf('--> Autovalores do jacobiano do sistema sem controlador no ponto de operação:\n');
136 disp(eig(F))
137
138 %Descrevendo as equações diferenciais
139
140 f = @(t,x) [(Efd0 - x(1) + (xd - xlinhad)*Id( x(1),x(3) ) )/Tlinhado ;
141            ( Pm0 + deltaPm*(heaviside(t - tempoDeltaPm) - heaviside(t - tempoDeltaPm -
142            larguraDeltaPm)) - x(1)*Iq( x(1),x(3) ) + (xlinhad - xlinhaq)*Iq( x
143            (1),x(3) )*Id( x(1),x(3) ) )/(2*H);
144            x(2)];
145
146 % Resolvendo o sistema diferencial
147 options = odeset('OutputFcn',@odeplotterSistemaSemControladorAVR);
148 [t,x] = ode23(f,tspan,x0,options);
149
150 % Armazenando os resultados
151
152 ELqSem = x(:,1);
153 wSem = x(:,2);
154 deltaSem = x(:,3);
155 EfdSem = Efd0*ones(size(t));
156 VSem = Vt( ELqSem, deltaSem );
157 ISemVec = (ELqSem.*exp(deltaSem) - E)./((r+re) + j*(xlinhad + xe));
158 IqSem = real(ISemVec);
159 IdSem = imag(ISemVec);
160 ISem = abs(ISemVec);
161
162 %% Plotando os resultados
163
164 figure(2)
165 clf(figure(2));
166
167 subplot(2,4,1)
168 grid on
169 grid minor
170 plot(t,ELqSem,'r')
171 legend('Com controlador','Sem controlador');
172 title('E'_{q});
173
174 subplot(2,4,2)
175 grid on
176 grid minor

```



```

176 plot(t,wSem,'r')
177 title('\omega');
178
179 subplot(2,4,3)
180 grid on
181 grid minor
182 plot(t,deltaSem,'r')
183 title('\delta');
184
185 subplot(2,4,4)
186 grid on
187 grid minor
188 plot(t,EfdSem,'r')
189 title('E_{fd}');
190
191 subplot(2,4,5)
192 grid on
193 grid minor
194 plot(t,VSem,'r');
195 title('V_t');
196 legend('Com controlador','Sem controlador');
197
198 subplot(2,4,6)
199 grid on
200 grid minor
201 plot(t,IqSem,'r');
202 title('I_q');
203
204 subplot(2,4,7)
205 grid on
206 grid minor
207 plot(t,IdSem,'r');
208 title('I_d');
209
210 subplot(2,4,8)
211 grid on
212 grid minor
213 plot(t,ISem,'r');
214 title('|I|');
215
216 figure(3)
217 hold on
218 grid on
219 grid minor
220 axis square
221 plot3(Efd0,0,ELq0,'ro')
222 plot3(Efd0,0.6,ELq0 - 0.43,'ro')

```

A.4

Simulação do sistema controlado por AVR

Listing A.4 – Código para simulação do sistema OMIB em malha aberta e com AVR.

```

1 %% Programa simulador para simular o sistema OMIB em malha aberta e controlado por AVR
2 %% Autor: Álvaro Augusto Volpato
3

```

```

4 clear all;
5 clc;
6 close all;
7
8 %% Definindo os parâmetros da máquina
9 global xd xq xlinhad xlinhaq Tlinhado r re xe H S E Z X alpha phi deltaPm
   tempoDeltaPm Pm0 Efd0;
10
11 xd = 1.14; % Impedância equivalente de regime permanente de eixo direto
12 xq = 0.66; % Impedância equivalente de regime permanente de eixo em quadratura
13 xlinhad = 0.24; % Impedância transitória de eixo direto
14 xlinhaq = xlinhad; % Impedância transitória de eixo em quadratura
15 Tlinhado = 12; % Constante de tempo transitória de eixo direto
16 r = 0; % Resistência interna equivalente da máquina;
17 re = 0; % Resistência externa acoplada à máquina;
18 xe = 0.1; % Impedância externa acoplada à máquina;
19 H = 1.5; % Constante de inércia do rotor
20 P = 1;
21 Q = 0.5;
22 S = P + j*Q; % Potência inicial que a máquina gera
23 E = 1.0; % Tensão do barramento infinito (em PU!);
24 X = sqrt( (r+re)^2 + (xlinhaq + xe)^2 );
25 phi = atan((xlinhaq + xe)/(re + r) );
26 Z = sqrt(re^2 + xe^2);
27 alpha = atan(xe/re);
28
29 % Perturbação:
30 deltaPm = 0.1;
31 tempoDeltaPm = 1;
32
33 % Calculando as tensões através de Leis de Kirchhoff
34 V = E + (re + j*xe)*I;
35 EL = V + (r + j*xlinhad)*I;
36
37 % Obtendo os versores Q e D e o ângulo delta
38 Q = EL/norm(EL);
39 delta0 = phase(EL);
40 D = Q*exp(j*pi/2);
41
42 % Calculando as tensões e correntes no eixo do rotor
43 ELq0 = real(EL)*cos(delta0) + imag(EL)*sin(delta0);
44 ELd0 = real(EL)*-sin(delta0) + imag(EL)*cos(delta0);
45
46 Vq0 = real(V)*cos(delta0) + imag(V)*sin(delta0);
47 Vd0 = real(V)*-sin(delta0) + imag(V)*cos(delta0);
48
49 Iq0 = real(I)*cos(delta0) + imag(I)*sin(delta0);
50 Id0 = real(I)*-sin(delta0) + imag(I)*cos(delta0);
51
52 V0 = sqrt(Vq0^2 + Vd0^2);
53
54 Efd0 = ELq0 - Id0*(xd - xlinhad);
55 Pm0 = ELq0*Iq0 - Iq0*Id0*(xlinhad - xlinhaq);
56
57 %% Plotando o diagrama fasorial das condições iniciais
58
59 figure;
60 hold on;
61 grid on;
62 axis equal;

```

```

63 title('Diagrama fasorial das condições iniciais');
64 ylabel('Im');
65 xlabel('Re');
66
67 % E linha em azul
68 plot_arrow(0,0,real(EL),imag(EL),'headwidth',0.01,'headheight',0.01,'color','blue','
    facecolor','blue','edgecolor','blue');
69 txt = ' E''';
70 text(real(EL),imag(EL),txt,'color','blue')
71 % V em vermelho
72 plot_arrow(0,0,real(V),imag(V),'headwidth',0.01,'headheight',0.01,'color','red','
    facecolor','red','edgecolor','red');
73 txt = ' V';
74 text(real(V),imag(V),txt,'color','red')
75 % I em amarelo
76 plot_arrow(0,0,real(I),imag(I),'headwidth',0.01,'headheight',0.01,'color','magenta','
    facecolor','magenta','edgecolor','magenta');
77 txt = ' I';
78 text(real(I),imag(I),txt,'color','magenta')
79 % E em verde
80 plot_arrow(0,0,real(E),imag(E),'headwidth',0.01,'headheight',0.01,'color','green','
    facecolor','green','edgecolor','green');
81 txt = ' E_{inf}';
82 text(real(E),imag(E),txt,'color','green')
83 % Q e D em preto
84 plot_arrow(0,0,real(Q)/5,imag(Q)/5,'headwidth',0.01,'headheight',0.01,'color','black','
    facecolor','black','edgecolor','black');
85 txt = ' Q';
86 text(real(Q)/5,imag(Q)/5,txt,'color','black')
87 plot_arrow(0,0,real(D)/5,imag(D)/5,'headwidth',0.01,'headheight',0.01,'color','black','
    facecolor','black','edgecolor','black');
88 txt = ' D';
89 text(real(D)/5,imag(D)/5,txt,'color','black')
90
91 %% Descrevendo o sistema com controlador
92
93 x0 = [ELq0,0,delta0,Efd0]; % Ponto de operação
94
95 % Parâmetros do controlador AVR
96 Ke = 5;
97 Te = 1;
98
99 % Tempo total de simulação:
100 tfinal = 300;
101 tstep = 10^(-3); % Passo de tempo para o solver numérico
102 tspan = 0:tstep:tfinal;
103
104 %Analisando a estabilidade do sistema através dos autovalores do jacobiano
105 % no ponto de operação
106
107 syms x1 x2 x3 x4 u
108 F = [ ( x4 - x1 + (xd - xlinhad)*Id( x1,x3 ) )/Tlinhado ;
109       ( u - x1*Iq( x1,x3 ) + (xlinhad - xlinhaq)*Iq( x1,x3 )*Id( x1,x3 ) )/(2*H);
110       x2;
111       -( Ke*( Vt( x1,x3 ) - V0) + (x4 - Efd0) )/Te ];
112
113 F = symfun(F,[x1 x2 x3 x4]);
114 F = jacobian(F, [x1, x2, x3, x4]);
115 F = double(subs(F, [x1, x2, x3, x4, u], [x0, Pm0]));
116

```

```

117 fprintf('--> Autovalores do jacobiano do sistema com controlador no ponto de operação:\n');
118 eig(F)
119
120 %Descrevendo as equações diferenciais
121
122 f = @(t,x) [(x(4) - x(1) + (xd - xlinhad)*Id( x(1),x(3) ))/Tlinhado ;
123             ( Pm0 + deltaPm*heaviside(t - tempoDeltaPm) - x(1)*Iq( x(1),x(3) ) + (
124                 xlinhad - xlinhaq)*Iq( x(1),x(3) ) *Id( x(1),x(3) ) )/(2*H);
125             x(2);
126             - ( Ke*( Vt( x(1),x(3) ) - V0) + (x(4) - Efd0) )/Te];
127
128 % Resolvendo o sistema diferencial
129 [t,x] = ode23(f,tspan,x0);
130
131 % Armazenando os resultados
132
133 ELqCom = x(:,1);
134 wCom = x(:,2);
135 deltaCom = x(:,3);
136 EfdCom = x(:,4);
137
138 EL = zeros(size(ELqCom));
139 I = zeros(size(EL));
140
141 VCom = Vt( ELqCom, deltaCom );
142
143 %% Descrevendo o sistema sem controlador
144
145 x0 = [ELq0,0,delta0]; % Ponto de operação
146
147 %Analisando a estabilidade do sistema através dos autovalores do jacobiano
148 % no ponto de operação
149
150 syms x1 x2 x3 x4 u
151 F = [ ( Efd0 - x1 + (xd - xlinhad)*Id( x1,x3 ) )/Tlinhado ;
152       ( u - x1*Iq( x1,x3 ) - (xlinhad - xlinhaq)*Iq( x1,x3 ) *Id( x1,x3 ) )/(2*H);
153       x2 ];
154
155 F = symfun(F,[x1 x2 x3]);
156 F = jacobian(F, [x1, x2, x3]);
157 F = double(subs(F, [x1, x2, x3], x0));
158
159 fprintf('--> Autovalores do jacobiano do sistema sem controlador no ponto de operação:\n');
160 eig(F)
161
162 %Descrevendo as equações diferenciais
163
164 f = @(t,x) [(Efd0 - x(1) + (xd - xlinhad)*Id( x(1),x(3) ))/Tlinhado ;
165             ( Pm0 + deltaPm*heaviside(t - tempoDeltaPm) - x(1)*Iq( x(1),x(3) ) - (
166                 xlinhad - xlinhaq)*Iq( x(1),x(3) ) *Id( x(1),x(3) ) )/(2*H);
167             x(2)];
168
169 % Resolvendo o sistema diferencial
170 [t,x] = ode23(f,tspan,x0);
171
172 % Armazenando os resultados
173
174 ELqSem = x(:,1);

```

```

173 wSem = x(:,2);
174 deltaSem = x(:,3);
175 EfdSem = Efd0*ones(size(t));
176 VSem = Vt( ELqSem, deltaSem );
177
178 %% Plotando os resultados
179 figure(2)
180
181 subplot(3,2,1)
182 plot(t,ELqCom,'b')
183 hold on
184 grid on
185 grid minor
186 plot(t,ELqSem,'r')
187 legend('Com controlador','Sem controlador');
188 title('E'_{q}');
189
190 subplot(3,2,2)
191 plot(t,wCom,'b')
192 hold on
193 grid on
194 grid minor
195 plot(t,wSem,'r')
196 title('\omega');
197
198 subplot(3,2,3)
199 plot(t,deltaCom,'b')
200 hold on
201 grid on
202 grid minor
203 plot(t,deltaSem,'r')
204 title('\delta');
205
206 subplot(3,2,4)
207 plot(t,EfdCom,'b')
208 hold on
209 grid on
210 grid minor
211 plot(t,EfdSem,'r')
212 title('E_{fd}');
213
214 subplot(3,2,[5 6])
215 plot(t,VCom,'b');
216 hold on;
217 grid on
218 grid minor
219 plot(t,VSem,'r');
220 title('V_{t}');
221 legend('Com controlador','Sem controlador');

```

A.5

Simulação do sistema controlado por AVR e PSS

Listing A.5 – Código para simulação do sistema OMIB controlado por AVR e PSS com e sem

saturadores.

```

1 %% Programa simulador para simular o sistema OMIB cntrolado por AVR+PSS, com e sem
  saturadores
2 %% Autor: Álvaro Augusto Volpato
3
4 clear all;
5 clc;
6 close all;
7
8
9 addpath(' ./funcoes ');
10
11 %% Definindo os parâmetros da máquina
12 global xd xq xlinhad xlinhaq Tlinhado r re xe H S E Z X alpha phi deltaPm
  tempoDeltaPm Pm0 Efd0 EfdMax EfdMin VPssMax VPssMin Tw KPss Tl T2;
13
14 xd = 1.14; % Impedância equivalente de regime permanente de eixo direto
15 xq = 0.66; % Impedância equivalente de regime permanente de eixo em quadratura
16 xlinhad = 0.24; % Impedância transitória de eixo direto
17 xlinhaq = xlinhad; % Impedância transitória de eixo em quadratura
18 Tlinhado = 12; % Constante de tempo transitória de eixo direto
19 r = 0; % Resistência interna equivalente da máquina;
20 re = 0.01; % Resistência externa acoplada à máquina;
21 xe = 0.1; % Impedância externa acoplada à máquina;
22 H = 1.5; % Constante de inércia do rotor
23 P = 1;
24 Q = 0.5;
25 xt = xlinhaq + xe;
26 rt = r + re;
27 S = P + j*Q; % Potência inicial que a máquina gera
28 E = 1.0; % Tensão do barramento infinito (em PU!);
29 X = sqrt( (r+re)^2 + (xlinhaq + xe)^2 );
30 phi = atan((xlinhaq + xe)/(re + r) );
31 Z = sqrt(re^2 + xe^2);
32 alpha = atan(xe/re);
33
34 % Parâmetros dos saturadores
35 EfdMax = 2;
36 EfdMin = 0.5;
37
38 VPssMax = 2;
39 VPssMin = -0.2;
40
41
42 % Perturbação:
43 deltaPm = 0.1;
44 tempoDeltaPm = 1;
45
46 % Calculando as tensões através de Leis de Kirchhoff
47 V = E + (re + j*xe)*I;
48 EL = V + (r + j*xlinhad)*I;
49
50 % Obtendo os versors Q e D e o ângulo delta
51 Q = EL/norm(EL);
52 delta0 = phase(EL);
53 D = Q*exp(j*pi/2);
54
55 % Calculando as tensões e correntes no eixo do rotor
56 ELq0 = real(EL)*cos(delta0) + imag(EL)*sin(delta0);

```

```

57 ELd0 = real(EL)*-sin(delta0) + imag(EL)*cos(delta0);
58
59 Vq0 = real(V)*cos(delta0) + imag(V)*sin(delta0);
60 Vd0 = real(V)*-sin(delta0) + imag(V)*cos(delta0);
61
62 Iq0 = real(I)*cos(delta0) + imag(I)*sin(delta0);
63 Id0 = real(I)*-sin(delta0) + imag(I)*cos(delta0);
64
65 V0 = sqrt(Vq0^2 + Vd0^2);
66
67 Efd0 = ELq0 - Id0*(xd - xlinhad);
68 Pm0 = ELq0*Iq0 - Iq0*Id0*(xlinhad - xlinhaq);
69
70 figure;
71 hold on;
72 grid on;
73 axis equal;
74 title('Diagrama fasorial das condições iniciais');
75 ylabel('Im');
76 xlabel('Re');
77
78 % Elinha em azul
79 plot_arrow(0,0,real(EL),imag(EL),'headwidth',0.01,'headheight',0.01,'color','blue','facecolor','blue','edgecolor','blue');
80 txt = ' E''';
81 text(real(EL),imag(EL),txt,'color','blue')
82 % V em vermelho
83 plot_arrow(0,0,real(V),imag(V),'headwidth',0.01,'headheight',0.01,'color','red','facecolor','red','edgecolor','red');
84 txt = ' V';
85 text(real(V),imag(V),txt,'color','red')
86 % I em amarelo
87 plot_arrow(0,0,real(I),imag(I),'headwidth',0.01,'headheight',0.01,'color','magenta','facecolor','magenta','edgecolor','magenta');
88 txt = ' I';
89 text(real(I),imag(I),txt,'color','magenta')
90 % E em verde
91 plot_arrow(0,0,real(E),imag(E),'headwidth',0.01,'headheight',0.01,'color','green','facecolor','green','edgecolor','green');
92 txt = ' E_{inf}';
93 text(real(E),imag(E),txt,'color','green')
94 % Q e D em preto
95 plot_arrow(0,0,real(Q)/5,imag(Q)/5,'headwidth',0.01,'headheight',0.01,'color','black','facecolor','black','edgecolor','black');
96 txt = ' Q';
97 text(real(Q)/5,imag(Q)/5,txt,'color','black')
98 plot_arrow(0,0,real(D)/5,imag(D)/5,'headwidth',0.01,'headheight',0.01,'color','black','facecolor','black','edgecolor','black');
99 txt = ' D';
100 text(real(D)/5,imag(D)/5,txt,'color','black')
101
102 %% Descrevendo o sistema com saturador
103
104
105 x0 = [ELq0,0,delta0,0,0,0]; % Ponto de operação
106
107 % Parâmetros dos controladores
108 Ke = 5;
109 Te = 1;
110 KPss = 20;

```

```

111 T1 = 2;
112 T2 = 3;
113 Tw = 1;
114
115 % Tempo total de simulação:
116 tfinal = 60;
117 tstep = 10^(-3); % Passo de tempo para o solver numérico
118 tspan = 0:tstep:tfinal;
119
120
121 %% Descrevendo o sistema sem saturador
122
123 % Avaliando o jacobiano do sistema sem saturador no ponto de operação
124
125 syms x1 x2 x3 x4 x5 x6
126
127 F = [ ( Efd(x4,x6) - x1 + (xd - xlinhad)*Id( x1,x3) )/Tlinhado;
128       (Pm0 - x1*Iq(x1,x3) + (xlinhad - xlinhaq)*Id(x1,x3)*Iq(x1,x3))/(2*H);
129       x2;
130       x5;
131       (Tw*KPss*( T1*(...
132         - x1*dIq(x1,x2,x3,x4,x5,x6)...
133         - ( Efd(x4,x6) - x1 + (xd - xlinhad)*Id(x1,x3) ) *Iq(x1,x3)/Tlinhado...
134         - (xlinhad - xlinhaq)*( Iq(x1,x3)*dId(x1,x2,x3,x4,x5,x6) + Id(x1,x3)*dIq(x1,x2,x3,
135           x4,x5,x6)))/(2*H)) + (Pm0 - x1*Iq(x1,x3) + (xlinhad - xlinhaq)*Id(x1,x3)*Iq(x1,
136           x3))/(2*H) ) - x4 - (Tw + T2)*x5 )/(Tw*T2);
137       - (Ke*( Vt( x1,x3 ) - V0) + (Efd(x4,x6) - Efd0) )/Tel];
138
139 F = symfun(F,[x1 x2 x3 x4 x5 x6]);
140 F = jacobian(F, [x1, x2, x3, x4, x5, x6]);
141 F = double(subs(F, [x1, x2, x3, x4, x5, x6], x0));
142
143 fprintf('\n --> Autovalores do sistema sem saturador no ponto de operação: \n');
144 disp(eig(F));
145
146 f = @(t,x) [ ( (x(4) + x(6) + Efd0) - x(1) + (xd - xlinhad)*Id( x(1),x(3)) )/Tlinhado;
147             dw(x(1),x(3),t);
148             x(2);
149             x(5);
150             (Tw*KPss*( T1*ddw(x(1),x(2),x(3),x(4),x(5),x(6),t) + dw(x(1),x(3),t) ) - x(4) -
151               (Tw + T2)*x(5) )/(Tw*T2);
152             - (Ke*( Vt( x(1),x(3) ) - V0) + (Efd(x(4),x(6)) - Efd0) )/Tel];
153
154 % Resolvendo o sistema diferencial
155 options = odeset('OutputFcn',@odeplotterSistemaSemSaturador);
156 [t,x] = ode23(f,tspan,x0,options);
157
158 % Armazenando os resultados
159
160 ELqSem = x(:,1);
161 wSem = x(:,2);
162 deltaSem = x(:,3);
163 VSem = Vt( ELqSem,deltaSem );
164 VPssSem = x(:,4);
165 VAvrSem = x(:,6);
166 EfdSem = VPssSem + VAvrSem + Efd0*ones(size(t));
167 IdSem = Id(ELqSem,deltaSem);
168 IqSem = Iq(ELqSem,deltaSem);
169 ISem = (IdSem.^2 + IqSem.^2).^0.5;

```



```

168 %% Descrevendo o sistema com saturador
169 % Avaliando o jacobiano do sistema com saturador no ponto de operação
170 syms x1 x2 x3 x4 x5 x6
171
172 F = [ ( EfdSat(x4,x6) - x1 + (xd - xlinhad)*Id( x1,x3) )/Tlinhado;
173       (Pm0 - x1*Iq(x1,x3) + (xlinhad - xlinhaq)*Id(x1,x3)*Iq(x1,x3))/(2*H);
174       x2;
175       x5;
176       (Tw*KPss*( T1*((...
177       - x1*dIqSat(x1,x2,x3,x4,x5,x6)...
178       - ( EfdSat(x4,x6) - x1 + (xd - xlinhad)*Id(x1,x3) )*Iq(x1,x3)/Tlinhado...
179       - (xlinhad - xlinhaq)*( Iq(x1,x3)*dIdSat(x1,x2,x3,x4,x5,x6) + Id(x1,x3)*dIqSat(x1,
180       x2,x3,x4,x5,x6)))/(2*H)) + (Pm0 - x1*Iq(x1,x3) + (xlinhad - xlinhaq)*Id(x1,x3)*
181       Iq(x1,x3))/(2*H) ) - x4 - (Tw + T2)*x5 )/(Tw*T2);
182       -(Ke*( Vt( x1,x3 ) - V0) + (EfdSat(x4,x6) - Efd0 )/Te];
183
182 F = symfun(F,[x1 x2 x3 x4 x5 x6]);
183 F = jacobian(F, [x1, x2, x3, x4, x5, x6]);
184 F = double(subs(F, [x1, x2, x3, x4, x5, x6], x0));
185
186 fprintf('\n --> Autovalores do sistema com saturador no ponto de operação: \n');
187 disp(eig(F));
188
189 f = @(t,x) [ ( EfdSat(x(4),x(6)) - x(1) + (xd - xlinhad)*Id( x(1),x(3)) )/Tlinhado;
190             dw(x(1),x(3),t);
191             x(2);
192             x(5);
193             (Tw*KPss*( T1*ddwSat(x(1),x(2),x(3),x(4),x(5) ,x(6),t) + dw(x(1),x(3),t) ) - x
194             (4) - (Tw + T2)*x(5) )/(Tw*T2);
195             -(Ke*( Vt( x(1),x(3) ) - V0) + (EfdSat(x(4),x(6)) - Efd0 )/Te];
196
196 % Resolvendo o sistema diferencial
197 options = odeset('OutputFcn',@odeplotterSistemaComSaturador);
198 [t,x] = ode23(f,tspan,x0,options);
199
200 % Armazenando os resultados
201
202 ELqSat = x(:,1);
203 wSat = x(:,2);
204 deltaSat = x(:,3);
205 VSat = Vt( ELqSat,deltaSat );
206 VPssSat = sat(x(:,4),VPssMax,VPssMin);
207 VAvrSat = x(:,6);
208 EfdSat = sat(VPssSat + VAvrSat + Efd0*ones(size(t)),EfdMax,EfdMin);
209 IdSat = Id(ELqSat,deltaSat);
210 IqSat = Iq(ELqSat,deltaSat);
211 ISat = (IdSat.^2 + IqSat.^2).^0.5;
212
213
214 %% Plotando os resultados
215 figure(2)
216 clf(figure(2));
217
218 subplot(3,4,1)
219 plot(t,ELqSat,'b')
220 hold on
221 plot(t,ELqSem,'r')
222 grid on
223 grid minor
224 title('E'_{q});

```

```

225
226 subplot(3,4,2)
227 plot(t,wSat,'b')
228 hold on
229 plot(t,wSem,'r')
230 grid on
231 grid minor
232 title('\omega');
233
234 subplot(3,4,3)
235 plot(t,deltaSat,'b')
236 hold on
237 plot(t,deltaSem,'r')
238 grid on
239 grid minor
240 title('\delta');
241
242 subplot(3,4,4)
243 plot(t,EfdSat,'b')
244 hold on
245 plot(t,EfdSem,'r')
246 grid on
247 grid minor
248 title('E_{FD}');
249
250 wdssubplot(3,4,5)
251 plot(t,VSat,'b');
252 hold on
253 plot(t,VSem,'r');
254 grid on
255 grid minor
256 title('V_t');
257
258 subplot(3,4,6)
259 plot(t,VAvrSat,'b');
260 hold on
261 plot(t,VAvrSem,'r');
262 grid on
263 grid minor
264 title('V_{AVR}');
265
266 subplot(3,4,7)
267 plot(t,VPssSat,'b');
268 hold on
269 plot(t,VPssSem,'r');
270 grid on
271 grid minor
272 title('V_{PSS}');
273
274 subplot(3,4,8)
275 plot(t,ISat,'b')
276 hold on
277 plot(t,ISem,'r');
278 grid on
279 grid minor
280 title('|I|');
281
282 subplot(3,4,[9 10])
283 plot(t,IdSat,'b')
284 hold on

```

```

285 plot(t, IdSem, 'r');
286 grid on
287 grid minor
288 title('I_d');
289
290 subplot(3,4,[11 12])
291 plot(t, IqSat, 'b')
292 hold on
293 plot(t, IqSem, 'r');
294 grid on
295 grid minor
296 title('I_q');
297 legend('Sistema com saturador', 'Sistema sem saturador');

```

A.6

Estimativa das Regiões de Estabilidade

Listing A.6 – Código do método Força Bruta para estimação da Região de Estabilidade dos sistemas AVR e PSS com e sem saturadores.

```

1 %% Programa para estimar a região de estabilidade do sistema AVR + PSS através de brute
  force
2 %% Autor: Álvaro Augusto Volpato
3 clear all;
4 clc;
5 close all;
6
7 addpath('./funcoes');
8
9 %% -----
10 % Definindo os parâmetros da máquina
11 % -----
12 global xd xq xlinhad xlinhaq Tlinhado r re xe H S E Z X alpha phi deltaPm
    tempoDeltaPm Pm0 Efd0 EfdMax EfdMin VPssMax VPssMin Tw KPss T1 T2 bolaPequena
    bolaGrande vetorLimite contaSim tfinal vetorDeslocamento Te x0
13
14 xd = 1.14; % Impedância equivalente de regime permanente de eixo direto
15 xq = 0.66; % Impedância equivalente de regime permanente de eixo em quadratura
16 xlinhad = 0.24; % Impedância transitória de eixo direto
17 xlinhaq = xlinhad; % Impedância transitória de eixo em quadratura
18 Tlinhado = 12; % Constante de tempo transitória de eixo direto
19 r = 0; % Resistência interna equivalente da máquina;
20 re = 0.01; % Resistência externa acoplada à máquina;
21 xe = 0.1; % Impedância externa acoplada à máquina;
22 xt = xe + xlinhaq;
23 rt = r + re;
24 H = 1.5; % Constante de inércia do rotor
25 P = 1;
26 Q = 0.5;
27 S = P + j*Q; % Potência inicial que a máquina gera
28 E = 1.0; % Tensão do barramento infinito (em PU!);
29 X = sqrt( (r+re)^2 + (xlinhaq + xe)^2 );
30 phi = atan((xlinhaq + xe)/(re + r) );
31 Z = sqrt(re^2 + xe^2);
32 alpha = atan(xe/re);
33

```

```

34 % Perturbação:
35 deltaPm = 0;
36 tempoDeltaPm = 5;
37
38 %% -----
39 % Calculando a situação inicial
40 % -----
41
42 % Resolvendo o sistema das correntes
43 a = E^2*(xt^2 + rt^2);
44 b = rt*E^3 + 2*xt*E*(Q*rt - P*xt);
45 c = (Q*rt - P*xt)^2 - rt*P*E^2;
46
47 Ir = (-b + sqrt(b^2 - 4*a*c))/(2*a);
48 Ii = (P*xt - Q*rt)/(E*rt) - xt/rt*Ir;
49 I = Ir + j*Ii;
50
51 % Calculando as tensões através de Leis de Kirchhoff
52 V = E + (re + j*x*xe)*I;
53 EL = V + (r + j*xlinhad)*I;
54
55 % Obtendo os versores Q e D e o ângulo delta
56 Q = EL/norm(EL);
57 delta0 = phase(EL);
58 D = Q*exp(j*pi/2);
59
60 % Calculando as tensões e correntes no eixo do rotor
61 ELq0 = real(EL)*cos(delta0) + imag(EL)*sin(delta0);
62 ELd0 = real(EL)*-sin(delta0) + imag(EL)*cos(delta0);
63
64 Vq0 = real(V)*cos(delta0) + imag(V)*sin(delta0);
65 Vd0 = real(V)*-sin(delta0) + imag(V)*cos(delta0);
66
67 Iq0 = real(I)*cos(delta0) + imag(I)*sin(delta0);
68 Id0 = real(I)*-sin(delta0) + imag(I)*cos(delta0);
69
70 V0 = sqrt(Vq0^2 + Vd0^2);
71
72 Efd0 = ELq0 - Id0*(xd - xlinhad);
73 Pm0 = ELq0*Iq0 - Iq0*Id0*(xlinhad - xlinhaq);
74
75 % Parâmetros dos saturadores
76 EfdMax = Efd0 + 0.2;
77 EfdMin = Efd0 - 0.2;
78
79 VPssMax = 0.2;
80 VPssMin = -0.2;
81
82 %% -----
83 % Definindo os parâmetros da estimativa de Região de Atração
84 % -----
85
86 grade = 30; % Número de pontos em cada dimensão do gráfico da região
87
88 ELqCima = 10;
89 ELqBaixo = -10;
90 deslocamentoInicialELq = linspace(ELqBaixo, ELqCima, grade); % Vetor de deslocamento
    da condição inicial de ELq0
91
92 omegaBaixo = -5;

```

```

93 omegaCima = 5;
94 deslocamentoInicialOmega = linspace(omegaBaixo,omegaCima,grade);
95
96 deltaBaixo = -1.5;
97 deltaCima = 2;
98 deslocamentoInicialDelta = linspace(deltaBaixo , deltaCima , grade);
99
100 vetorLimite = zeros(6,1);
101
102 bolaPequena = 0.95*sqrt( (ELqCima - ELqBaixo)^2 + (omegaCima - omegaBaixo)^2 + (
    deltaCima - deltaBaixo)^2 )/grade;
103 bolaGrande = 1000*bolaPequena;
104
105 % Parâmetros dos controladores
106 Ke = 10;
107 Te = 0.1;
108 KPss = 20;
109 T1 = 2;
110 T2 = 3;
111 Tw = 1;
112
113 % Tempo total de simulação:
114 tfinal = 100;
115 tstep = 10^(-3); % Passo de tempo para o solver numérico
116 tspan = 0:tstep:tfinal;
117
118 x0 = [ELq0,0,delta0,Efd0]; % Ponto de operação inicial
119
120 %% -----
121 % Descrevendo o sistema em malha aberta
122 % -----
123
124 vetorLimite = zeros(6,1);
125
126 f = @(t,x) [(Efd0 - x(1) + (xd - xlinhad)*Id( x(1),x(3) ) )/Tlinhado ;
127             ( Pm0 + deltaPm*heaviside(t - tempoDeltaPm) - x(1)*Iq( x(1),x(3) ) + (
128                 xlinhad - xlinhaq)*Iq( x(1),x(3) ) *Id( x(1),x(3) ) )/(2*H);
129             x(2)
130             0];
131
132 options = odeset('OutputFcn',@odeplotterMABerta);
133
134 contaSim = 0;
135 for i = 1:grade
136     for j = 1:grade
137         for k = 1:grade
138
139             contaSim = contaSim + 1;
140             fprintf('\n Simulação número %d (%d,%d,%d)',contaSim,i,j,k)
141
142             vetorDeslocamento = [deslocamentoInicialELq(i),deslocamentoInicialOmega(j),
143                 deslocamentoInicialDelta(k),0,];
144             xInit = x0 + vetorDeslocamento;
145
146             [t,x] = ode23(f,tspan,xInit,options);
147
148             if (t(end) == tfinal)
149                 fprintf(': ATINGIU o tempo final! \n \n',contaSim);
150             else

```

```

150     fprintf(' : interrompida em t = %f',t(end));
151     end
152
153     end
154     end
155 end
156
157 % Rearranja o vetor limite para admitir apenas os valores de E'q, omega e
158 % delta
159 vetorLimite = vetorLimite(1:3,2:end);
160 vetorLimiteMAberta = vetorLimite;
161
162 figure(1)
163 plot3(vetorLimite(1,:),vetorLimite(2,:),vetorLimite(3:),'bo')
164 grid on
165 grid minor
166 xlabel('ELq')
167 ylabel('w')
168 zlabel('Delta')
169
170 %% -----
171 % Descrevendo o sistema com AVR
172 % -----
173
174 vetorLimite = zeros(4,1);
175 vetorDeslocamento = zeros(4,1);
176
177 f = @(t,x) [(x(4) - x(1) + (xd - xlinhad)*Id( x(1),x(3) ) )/Tlinhado ;
178             ( Pm0 + deltaPm*heaviside(t - tempoDeltaPm) - x(1)*Iq( x(1),x(3) ) + (
179                 xlinhad - xlinhaq)*Iq( x(1),x(3) ) *Id( x(1),x(3) ) )/(2*H);
180             x(2);
181             - ( Ke*( Vt( x(1),x(3) ) - V0) + (x(4) - Efd0) )/Te];
182
183 options = odeset('OutputFcn',@odeplotterMAberta);
184
185 contaSim = 0;
186 for i = 1:grade
187     for j = 1:grade
188         for k = 1:grade
189
190             contaSim = contaSim + 1;
191             fprintf('\n Simulação número %d (%d,%d,%d)',contaSim,i,j,k)
192
193             vetorDeslocamento = [deslocamentoInicialELq(i),deslocamentoInicialOmega(j),
194                                     deslocamentoInicialDelta(k),0,];
195             xInit = x0 + vetorDeslocamento;
196
197             [t,x] = ode23(f,tspan,xInit,options);
198
199             if (t(end) == tfinal)
200                 fprintf(' : ATINGIU o tempo final! \n \n',contaSim);
201             else
202                 fprintf(' : interrompida em t = %f',t(end));
203             end
204         end
205     end
206 end
207

```

```

208 vetorLimite = vetorLimite(1:3,2:end);
209 vetorLimiteAVR = vetorLimite;
210 save('vetorLimiteAVR27k.txt','vetorLimiteAVR','-ascii');
211 figure(1)
212 plot3(vetorLimite(1,:),vetorLimite(2,:),vetorLimite(3,:),'ro')
213 grid on
214 grid minor
215 xlabel('ELq')
216 ylabel('w')
217 zlabel('Delta')
218
219 %% -----
220 % Descrevendo o sistema sem saturador
221 % -----
222
223 % Rearranjando o vetor inicial para seis dimensões
224 x0 = [ELq0,0,delta0,0,0,0]; % Ponto de operação inicial
225
226 f = @(t,x) [ ( x(4) + x(6) + Efd0) - x(1) + (xd - xlinhad)*Id( x(1),x(3)) )/Tlinhado;
227             dw(x(1),x(3),t);
228             x(2);
229             x(5);
230             (Tw*KPss*( T1*ddw(x(1),x(2),x(3),x(4),x(5),x(6),t) + dw(x(1),x(3),t) ) - x(4) -
231               (Tw + T2)*x(5) )/(Tw*T2);
232             -(Ke*( Vt( x(1),x(3) ) - V0) + (Efd(x(4),x(6)) - Efd0) )/Te];
233
234 % Resolvendo o sistema diferencial
235 options = odeset('OutputFcn',@odeplotterSistemaSemSaturadorSemGrafico);
236
237 contaSim = 0;
238
239 for i = 1:grade
240     for j = 1:grade
241         for k = 1:grade
242             contaSim = contaSim + 1;
243             fprintf('\n Simulação número %d (%d,%d,%d)',contaSim,i,j,k)
244
245             vetorDeslocamento = [deslocamentoInicialELq(i),deslocamentoInicialOmega(j),
246                                   deslocamentoInicialDelta(k),0,0,0];
247             xInit = x0 + vetorDeslocamento;
248
249             [t,x] = ode23(f,tspan,xInit,options);
250
251             if (t(end) == tfinal)
252                 fprintf(': ATINGIU o tempo final! \n',contaSim);
253             else
254                 fprintf(': t = %f',t(end));
255             end
256
257         end
258     end
259 end
260
261 vetorLimite = vetorLimite(1:3,2:end);
262 vetorLimiteSemSaturacao = vetorLimite;
263
264 figure(2)
265 plot3(vetorLimite(1,:),vetorLimite(2,:),vetorLimite(3,:),'bo')

```

```

266 grid on
267 grid minor
268 xlabel('ELq')
269 ylabel('w')
270 zlabel('Delta')
271
272 %% -----
273 % Descrevendo o sistema com saturador
274 % -----
275
276 vetorLimite = zeros(6,1);
277 contaSim = 0;
278 clear x;
279
280 f = @(t,x) [ ( EfdSat(x(4),x(6)) - x(1) + (xd - xlinhad)*Id( x(1),x(3)) )/Tlinhado;
281             dw(x(1),x(3),t);
282             x(2);
283             x(5);
284             (Tw*KPss*( T1*ddwSat(x(1),x(2),x(3),x(4),x(5) ,x(6),t) + dw(x(1),x(3),t) ) - x
285             (4) - (Tw + T2)*x(5) )/(Tw*T2);
286             -(Ke*( Vt( x(1),x(3) ) - V0) + (EfdSat(x(4),x(6)) - Efd0) )/Te];
287
288 % Resolvendo o sistema diferencial
289 options = odeset('OutputFcn',@codeplotterSistemaComSaturadorSemGrafico);
290
291 for i = 1:grade
292     for j = 1:grade
293         for k = 1:grade
294
295             contaSim = contaSim + 1; %
296             Incrementa a contagem de iterações
297             fprintf('\n Simulação número %d (%d,%d,%d)',contaSim,i,j,k)
298
299             vetorDeslocamento = [deslocamentoInicialELq(i),deslocamentoInicialOmega(j),
300             deslocamentoInicialDelta(k),0,0,0];
301             xInit = x0 + vetorDeslocamento;
302
303             [t,x] = ode23(f,tspan,xInit,options);
304
305             if (t(end) == tfinal)
306                 fprintf(': ATINGIU o tempo final! \n \n',contaSim);
307             else
308                 fprintf(': interrompida em t = %f',t(end));
309             end
310
311         end
312     end
313 end
314
315 % Rearranja o vetor limite para admitir apenas os valores de E'q, omega e
316 % delta
317 vetorLimite = vetorLimite(1:3,2:end);
318 vetorLimiteComSaturacao = vetorLimite;
319
320 figure(2)
321 plot3(vetorLimite(1,:),vetorLimite(2,:),vetorLimite(3,:), 'ro')
322 grid on
323 grid minor
324 xlabel('ELq')

```



```

323 ylabel('w')
324 zlabel('Delta')

```

Aqui são apresentadas as funções I_d , I_q , $cis(x)$, $V_t(E_L)$ e $sistemainicial$ utilizadas no *script*.

Listing A.7 – Função I_d

```

1 %% Função Id que calcula um Id em função de Elinhaq
2 function Id = Id( EL )
3     global xd xq xlinhad xlinhaq Tlinhado r re xe H S E
4     I = (EL - E)/( (r + re) + j*( xlinhad + xe )); % I complexo na referência de â
        ngulo de Einf
5     EL = c2v(EL) ; % Passando os complexos para vetores
6     I = c2v(I); % Idem
7     Q = EL/norm(EL); % Vetor Id na referência de Einf
8     D = [-Q(2),Q(1)];
9     Id = dot(I,D);
10 end

```

Listing A.8 – Função I_q

```

1 %% Função Iq que calcula um Iq em função de Elinhaq
2 function Iq = Iq(EL)
3     global xd xq xlinhad xlinhaq Tlinhado r re xe H S E
4     I = (EL - E)/( (r + re) + j*( xlinhad + xe )); % I complexo na referência de â
        ngulo de Einf
5     EL = c2v(EL) ; % Passando os complexos para vetores
6     I = c2v(I); % Idem
7     Q = EL/norm(EL); % Vetor Id na referência de Einf
8     Iq = dot(I,Q);
9 end

```

Listing A.9 – Função V_t

```

1 function Vt = Vt(EL)
2 % Função que calcula a tensão terminal de uma máquina síncrona em função da
3 % sua tensão interna E'
4     global xlinhad r re xe E;
5     Vt = abs( E + (EL - E)*(re + j*xe)/( (re + r) + j*(xlinhad + xe) ));
6 end

```

Listing A.10 – Função $sistemainicial$

```

1 function F = sistema_inicial(x,re,xe,E,P,Q)
2     F(1) = -P + re*(x(1)^2 + x(2)^2) + E*x(1);
3     F(2) = -Q + xe*(x(1)^2 + x(2)^2) - E*x(2);
4 end

```

Listing A.11 – Função dI_d

```

1 function dId = dId( x1,x2,x3,x4,x5,x6)
2     global xd xlinhad Tlinhado E X phi Efd0 VPssMax VPssMin;
3     dId = (x2*Tlinhado*E*cos(x3 + phi) - (Efd(x4,x6) - x1 + (xd - xlinhad)*Id(x1,x3
        ))*\sin\left(\phi_m\right))/(X*Tlinhado);
4 end

```

Listing A.12 – Função dI_q

```

1 function dIq = dIq( x1,x2,x3,x4,x5,x6 )
2     global xd xlinhad Tlinhado E X phi VPssMax VPssMin
3     dIq = ((Efd(x4,x6) - x1 + (xd - xlinhad)*Id(x1,x3))*\cos\left(\phi_m\right) +
4           x2*Tlinhado*E*\sin(x3 + phi))/(X*Tlinhado);
5 end

```

A.7

Estimativa das Regiões de Estabilidade

Listing A.13 – Código do método Força Bruta para estimação da Região de Estabilidade dos sistemas AVR e PSS com e sem saturadores.

```

1 %% Programa para estimar a região de estabilidade do sistema AVR + PSS através de brute
  force
2 %% Autor: Álvaro Augusto Volpato
3 clear all;
4 clc;
5 close all;
6
7 addpath(' ./funcoes ');
8
9 %% -----
10 % Definindo os parâmetros da máquina
11 % -----
12 global xd xq xlinhad xlinhaq Tlinhado r re xe H S E Z X alpha phi deltaPm
    tempoDeltaPm Pm0 Efd0 EfdMax EfdMin VPssMax VPssMin Tw KPss T1 T2 bolaPequena
    bolaGrande vetorLimite contaSim tfinal vetorDeslocamento Te x0
13
14 xd = 1.14; % Impedância equivalente de regime permanente de eixo direto
15 xq = 0.66; % Impedância equivalente de regime permanente de eixo em quadratura
16 xlinhad = 0.24; % Impedância transitória de eixo direto
17 xlinhaq = xlinhad; % Impedância transitória de eixo em quadratura
18 Tlinhado = 12; % Constante de tempo transitória de eixo direto
19 r = 0; % Resistência interna equivalente da máquina;
20 re = 0.01; % Resistência externa acoplada à máquina;
21 xe = 0.1; % Impedância externa acoplada à máquina;
22 xt = xe + xlinhaq;
23 rt = r + re;
24 H = 1.5; % Constante de inércia do rotor
25 P = 1;
26 Q = 0.5;
27 S = P + j*Q; % Potência inicial que a máquina gera
28 E = 1.0; % Tensão do barramento infinito (em PU!);
29 X = sqrt( (r+re)^2 + (xlinhaq + xe)^2 );
30 phi = atan((xlinhaq + xe)/(re + r) );
31 Z = sqrt(re^2 + xe^2);
32 alpha = atan(xe/re);
33
34 % Perturbação:
35 deltaPm = 0;
36 tempoDeltaPm = 5;
37
38 %% -----
39 % Calculando a situação inicial

```

```

40 % -----
41
42 % Resolvendo o sistema das correntes
43 a = E^2*(xt^2 + rt^2);
44 b = rt*E^3 + 2*xt*E*(Q*rt - P*xt);
45 c = (Q*rt - P*xt)^2 - rt*P*E^2;
46
47 Ir = ( -b + sqrt(b^2 - 4*a*c))/(2*a);
48 Ii = (P*xt - Q*rt)/(E*rt) - xt/rt*Ir;
49 I = Ir + j*Ii;
50
51 % Calculando as tensões através de Leis de Kirchhoff
52 V = E + (re + j*xe)*I;
53 EL = V + (r + j*xlinhad)*I;
54
55 % Obtendo os versores Q e D e o ângulo delta
56 Q = EL/norm(EL);
57 delta0 = phase(EL);
58 D = Q*exp(j*pi/2);
59
60 % Calculando as tensões e correntes no eixo do rotor
61 ELq0 = real(EL)*cos(delta0) + imag(EL)*sin(delta0);
62 ELd0 = real(EL)*-sin(delta0) + imag(EL)*cos(delta0);
63
64 Vq0 = real(V)*cos(delta0) + imag(V)*sin(delta0);
65 Vd0 = real(V)*-sin(delta0) + imag(V)*cos(delta0);
66
67 Iq0 = real(I)*cos(delta0) + imag(I)*sin(delta0);
68 Id0 = real(I)*-sin(delta0) + imag(I)*cos(delta0);
69
70 V0 = sqrt(Vq0^2 + Vd0^2);
71
72 Efd0 = ELq0 - Id0*(xd - xlinhad);
73 Pm0 = ELq0*Iq0 - Iq0*Id0*(xlinhad - xlinhaq);
74
75 % Parâmetros dos saturadores
76 EfdMax = Efd0 + 0.2;
77 EfdMin = Efd0 - 0.2;
78
79 VPssMax = 0.2;
80 VPssMin = -0.2;
81
82 %% -----
83 % Definindo os parâmetros da estimativa de Região de Atração
84 % -----
85
86 grade = 30; % Número de pontos em cada dimensão do gráfico da região
87
88 ELqCima = 10;
89 ELqBaixo = -10;
90 deslocamentoInicialELq = linspace(ELqBaixo, ELqCima , grade); % Vetor de deslocamento
    da condição inicial de ELq0
91
92 omegaBaixo = -5;
93 omegaCima = 5;
94 deslocamentoInicialOmega = linspace(omegaBaixo, omegaCima, grade);
95
96 deltaBaixo = -1.5;
97 deltaCima = 2;
98 deslocamentoInicialDelta = linspace(deltaBaixo , deltaCima , grade);

```

```

99
100 vetorLimite = zeros(6,1);
101
102 bolaPequena = 0.95*sqrt( (ELqCima - ELqBaixo)^2 + (omegaCima - omegaBaixo)^2 + (
    deltaCima - deltaBaixo)^2 )/grade;
103 bolaGrande = 1000*bolaPequena;
104
105 % Parâmetros dos controladores
106 Ke = 10;
107 Te = 0.1;
108 KPss = 20;
109 Tl = 2;
110 T2 = 3;
111 Tw = 1;
112
113 % Tempo total de simulação:
114 tfinal = 100;
115 tstep = 10^(-3); % Passo de tempo para o solver numérico
116 tspan = 0:tstep:tfinal;
117
118 x0 = [ELq0,0,delta0,Efd0]; % Ponto de operação inicial
119
120 %% -----
121 % Descrevendo o sistema em malha aberta
122 % -----
123
124 vetorLimite = zeros(6,1);
125
126 f = @(t,x) [(Efd0 - x(1) + (xd - xlinhad)*Id( x(1),x(3) ) )/Tlinhado ;
    ( Pm0 + deltaPm*heaviside(t - tempoDeltaPm) - x(1)*Iq( x(1),x(3) ) + (
    xlinhad - xlinhaq)*Iq( x(1),x(3) ) *Id( x(1),x(3) ) )/(2*H);
    x(2)
    0];
129
130
131 options = odeset('OutputFcn',@odeplotterMABerta);
132
133 contaSim = 0;
134 for i = 1:grade
135     for j = 1:grade
136         for k = 1:grade
137
138             contaSim = contaSim + 1;
139             fprintf('\n Simulação número %d (%d,%d,%d)',contaSim,i,j,k)
140
141             vetorDeslocamento = [deslocamentoInicialELq(i),deslocamentoInicialOmega(j),
                deslocamentoInicialDelta(k),0,];
142             xInit = x0 + vetorDeslocamento;
143
144             [t,x] = ode23(f,tspan,xInit,options);
145
146             if (t(end) == tfinal)
147                 fprintf(': ATINGIU o tempo final! \n \n',contaSim);
148
149             else
150                 fprintf(': interrompida em t = %f',t(end));
151             end
152
153         end
154     end
155 end

```

```

156
157 % Rearranja o vetor limite para admitir apenas os valores de E'q, omega e
158 % delta
159 vetorLimite = vetorLimite(1:3,2:end);
160 vetorLimiteMABerta = vetorLimite;
161
162 figure(1)
163 plot3(vetorLimite(1,:),vetorLimite(2,:),vetorLimite(3,:), 'bo')
164 grid on
165 grid minor
166 xlabel('ELq')
167 ylabel('w')
168 zlabel('Delta')
169
170 %% -----
171 % Descrevendo o sistema com AVR
172 % -----
173
174 vetorLimite = zeros(4,1);
175 vetorDeslocamento = zeros(4,1);
176
177 f = @(t,x) [(x(4) - x(1) + (xd - xlinhad)*Id( x(1),x(3) ) )/Tlinhado ;
178             ( Pm0 + deltaPm*heaviside(t - tempoDeltaPm) - x(1)*Iq( x(1),x(3) ) + (
179                 xlinhad - xlinhaq)*Iq( x(1),x(3) ) *Id( x(1),x(3) ) )/(2*H);
180             x(2);
181             - ( Ke*( Vt( x(1),x(3) ) - V0) + (x(4) - Efd0) )/Te];
182
183 options = odeset('OutputFcn',@odeplotterMABerta);
184
185 contaSim = 0;
186 for i = 1:grade
187     for j = 1:grade
188         for k = 1:grade
189             contaSim = contaSim + 1;
190             fprintf('\n Simulação número %d (%d,%d,%d)', contaSim,i,j,k)
191
192             vetorDeslocamento = [deslocamentoInicialELq(i),deslocamentoInicialOmega(j),
193                                     deslocamentoInicialDelta(k),0,];
194             xInit = x0 + vetorDeslocamento;
195
196             [t,x] = ode23(f,tspan,xInit,options);
197
198             if (t(end) == tfinal)
199                 fprintf(': ATINGIU o tempo final! \n \n', contaSim);
200
201             else
202                 fprintf(': interrompida em t = %f',t(end));
203
204             end
205         end
206     end
207
208 vetorLimite = vetorLimite(1:3,2:end);
209 vetorLimiteAVR = vetorLimite;
210 save('vetorLimiteAVR27k.txt','vetorLimiteAVR','-ascii');
211 figure(1)
212 plot3(vetorLimite(1,:),vetorLimite(2,:),vetorLimite(3,:), 'ro')
213 grid on

```

```

214 grid minor
215 xlabel('ELq')
216 ylabel('w')
217 zlabel('Delta')
218
219 %% -----
220 % Descrevendo o sistema sem saturador
221 % -----
222
223 % Rearranjando o vetor inicial para seis dimensões
224 x0 = [ELq0,0,delta0,0,0,0]; % Ponto de operação inicial
225
226 f = @(t,x) [ ( x(4) + x(6) + Efd0) - x(1) + (xd - xlinhad)*Id( x(1),x(3)) )/Tlinhado;
227             dw(x(1),x(3),t);
228             x(2);
229             x(5);
230             (Tw*KPss*( T1*ddw(x(1),x(2),x(3),x(4),x(5),x(6),t) + dw(x(1),x(3),t) ) - x(4) -
231               (Tw + T2)*x(5) )/(Tw*T2);
232             -(Ke*( Vt( x(1),x(3) ) - V0) + (Efd(x(4),x(6)) - Efd0) )/Te];
233
234 % Resolvendo o sistema diferencial
235 options = odeset('OutputFcn',@codeplotterSistemaSemSaturadorSemGrafico);
236
237 contaSim = 0;
238
239 for i = 1:grade
240     for j = 1:grade
241         for k = 1:grade
242
243             contaSim = contaSim + 1;
244             fprintf('\n Simulação número %d (%d,%d,%d)',contaSim,i,j,k)
245
246             vetorDeslocamento = [deslocamentoInicialELq(i),deslocamentoInicialOmega(j),
247                                   deslocamentoInicialDelta(k),0,0,0];
248             xInit = x0 + vetorDeslocamento;
249
250             [t,x] = ode23(f,tspan,xInit,options);
251
252             if (t(end) == tfinal)
253                 fprintf(': ATINGIU o tempo final! \n',contaSim);
254             else
255                 fprintf(': t = %f',t(end));
256             end
257
258         end
259     end
260
261     vetorLimite = vetorLimite(1:3,2:end);
262     vetorLimiteSemSaturacao = vetorLimite;
263
264 figure(2)
265 plot3(vetorLimite(1,:),vetorLimite(2,:),vetorLimite(3,:), 'bo')
266 grid on
267 grid minor
268 xlabel('ELq')
269 ylabel('w')
270 zlabel('Delta')
271

```

```

272 %% -----
273 % Descrevendo o sistema com saturador
274 % -----
275
276 vetorLimite = zeros(6,1);
277 contaSim = 0;
278 clear x;
279
280 f = @(t,x) [ ( EfdSat(x(4),x(6)) - x(1) + (xd - xlinhad)*Id( x(1),x(3)) )/Tlinhado;
281             dw(x(1),x(3),t);
282             x(2);
283             x(5);
284             (Tw*KPss*( T1*ddwSat(x(1),x(2),x(3),x(4),x(5) ,x(6),t) + dw(x(1),x(3),t) ) - x
285               (4) - (Tw + T2)*x(5) )/(Tw*T2);
286             -(Ke*( Vt( x(1),x(3) ) - V0) + (EfdSat(x(4),x(6)) - Efd0) )/Tel];
287 % Resolvendo o sistema diferencial
288 options = odeset('OutputFcn',@odeplotterSistemaComSaturadorSemGrafico);
289
290
291 for i = 1:grade
292     for j = 1:grade
293         for k = 1:grade
294
295             contaSim = contaSim + 1; %
296             Incrementa a contagem de iterações
297             fprintf('\n Simulação número %d (%d,%d,%d)', contaSim,i,j,k)
298
299             vetorDeslocamento = [deslocamentoInicialELq(i),deslocamentoInicialOmega(j),
300                                   deslocamentoInicialDelta(k),0,0,0];
301             xInit = x0 + vetorDeslocamento;
302
303             [t,x] = ode23(f,tspan,xInit,options);
304
305             if (t(end) == tfinal)
306                 fprintf(': ATINGIU o tempo final! \n \n', contaSim);
307             else
308                 fprintf(': interrompida em t = %f', t(end));
309             end
310         end
311     end
312 end
313
314 % Rearranja o vetor limite para admitir apenas os valores de E'q, omega e
315 % delta
316 vetorLimite = vetorLimite(1:3,2:end);
317 vetorLimiteComSaturacao = vetorLimite;
318
319 figure(2)
320 plot3(vetorLimite(1,:),vetorLimite(2,:),vetorLimite(3,:), 'ro')
321 grid on
322 grid minor
323 xlabel('ELq')
324 ylabel('w')
325 zlabel('Delta')

```

A.8

Gráficos de margens de estabilidade do sistema controlado por AVR

Listing A.14 – Código para resolução dos sistemas que geram os gráficos de margens de estabilidade do sistema controlado por AVR.

```

1 clear all;
2 clc;
3 close all;
4 format long
5
6 addpath('./funcoes');
7 addpath('./funcoes/jacobiano');
8 %% Definindo os parâmetros da máquina
9 global xd xq xlinhad xlinhaq Tlinhado r re xe H S E Z X alpha phi deltaPm
   tempoDeltaPm Pm0 Efd0;
10
11 xd = 1.14; % Impedância equivalente de regime permanente de eixo direto
12 xq = 0.66; % Impedância equivalente de regime permanente de eixo em quadratura
13 xlinhad = 0.24; % Impedância transitória de eixo direto
14 xlinhaq = xlinhad; % Impedância transitória de eixo em quadratura
15 Tlinhado = 12; % Constante de tempo transitória de eixo direto
16 r = 0; % Resistência interna equivalente da máquina;
17 re = 0.01; % Resistência externa acoplada à máquina;
18 xe = 0.1; % Impedância externa acoplada à máquina;
19 xt = xe + xlinhaq; % Impedância "total";
20 rt = re + r; % Resistência "total"
21 H = 1.5; % Constante de inércia do rotor
22 P = 1; % Potência ativa inicial
23 Q = 0.5; % Potência reativa inicial
24 S = P + j*Q; % Potência aparente inicial
25 E = 1.0; % Tensão do barramento infinito (em PU!);
26 X = sqrt( (r+re)^2 + (xlinhaq + xe)^2 );
27 phi = atan((xlinhaq + xe)/(re + r) );
28 Z = sqrt(re^2 + xe^2);
29 alpha = atan(xe/re);
30
31
32 %% Calculando as condições iniciais (em PU)
33
34 % Resolvendo o sistema das correntes
35 a = E^2*(xt^2 + rt^2);
36 b = rt*E^3 + 2*xt*E*(Q*rt - P*xt);
37 c = (Q*rt - P*xt)^2 - rt*P*E^2;
38
39 Ir = ( -b + sqrt(b^2 - 4*a*c))/(2*a);
40 Ii = (P*xt - Q*rt)/(E*rt) - xt/rt*Ir;
41 I = Ir + j*Ii;
42
43 clear x x0 a b c;
44
45 % Calculando as tensões através de Leis de Kirchhoff
46 V = E + (re + j*xe)*I;
47 EL = V + (r + j*xlinhad)*I;
48
49 % Obtendo os versores Q e D e o ângulo delta
50 Q = EL/norm(EL);
51 delta0 = phase(EL);

```



```

52 D = Q*exp(j*pi/2);
53
54 % Calculando as tensões e correntes no eixo do rotor
55 ELq0 = real(EL)*cos(delta0) + imag(EL)*sin(delta0);
56 ELd0 = real(EL)*-sin(delta0) + imag(EL)*cos(delta0);
57
58 Vq0 = real(V)*cos(delta0) + imag(V)*sin(delta0);
59 Vd0 = real(V)*-sin(delta0) + imag(V)*cos(delta0);
60
61 Iq0 = real(I)*cos(delta0) + imag(I)*sin(delta0);
62 Id0 = real(I)*-sin(delta0) + imag(I)*cos(delta0);
63
64 V0 = sqrt(Vq0^2 + Vd0^2);
65
66 Efd0 = ELq0 - Id0*(xd - xlinhad);
67 Pm0 = ELq0*Iq0 - Iq0*Id0*(xlinhad - xlinhaq);
68
69 %% Descrevendo o sistema com controlador
70
71 x0 = [ELq0,0,delta0,Efd0];
72
73 % Parâmetros do controlador AVR
74 KeV = logspace(-2,2,1e3);
75 eigenVec = zeros(4,length(KeV));
76
77 doubleSubs = [J13(x0),J11,J21(x0),J23(x0),V3(x0),V1(x0)];
78 syms J13 V1 s V3 Tdo Te Ke J21 J11 Hs J23 w
79
80 N = Tdo*(Te*s + 1)*(V3*(J11 - s) - J13*V1)*((J11 - s)*(s^2 + J23) + J13*J21);
81 N = collect(N,s);
82
83 N = subs(N,[J13,J11,J21,J23,V3,V1],doubleSubs);
84 N = subs(N,Tdo,Tlinhado);
85
86 D = (Ke*(V1*(s^2 + J23) + J21*V3) + Tdo*(Te*s + 1)*((J11 - s)*(s^2 + J23) + J13*J21))
      *((J11 - s)*(s^2 + J23) + J13*J21);
87 D = 2*Hs*D;
88 D = collect(D,s);
89 D = subs(D,[J13,J11,J21,J23,V3,V1],doubleSubs);
90 D = subs(D,[Tdo Hs],[Tlinhado H]);
91
92 N = subs(N,s,1i*w);
93 D = subs(D,s,1i*w);
94
95 TeV = logspace(-2,2,9);
96
97 wG = zeros(length(TeV),length(KeV));
98 MG = wG;
99 options = optimoptions('fsolve','Display','off');
100 options2 = optimoptions('fsolve','Display','off');
101
102 for k = 1:length(TeV)
103     k
104     Ns = subs(N,Te,TeV(k));
105     Ds = subs(D,Te,TeV(k));
106
107     chute = [0 10];
108
109     for j = 1:length(KeV)
110         Nss = subs(Ns,Ke,KeV(j));

```

```

111     Dss = subs(Ds,Ke,KeV(j));
112
113     Nss = vpa(coeffs(Nss,w));
114     Dss = vpa(coeffs(Dss,w));
115
116     Nss = double(Nss);
117     Nss = real(Nss) + imag(Nss);
118     Dss = double(Dss);
119     Dss = real(Dss) + imag(Dss);
120     F = @(x) [x(1)^2*(-Dss(8)*(Dss(5) + x(2)*Nss(5)) + Dss(7)*(Dss(6) + x(2)*Nss(6)))
        + x(1)*(Dss(8)*(Dss(3) + x(2)*Nss(3)) - Dss(7)*(Dss(4) + x(2)*Nss(4))) + (-
        Dss(8)*(Dss(1) + x(2)*Nss(1)) + Dss(7)*(Dss(2) + x(2)*Nss(2)))];
121     x(1)^3 + x(1)^2*((Dss(6) + x(2)*Nss(6))*(Dss(3) + x(2)*Nss(3)) - (Dss
        (5) + x(2)*Nss(5))*(Dss(4) + x(2)*Nss(4))) + ((Dss(5) + x(2)*Nss(5))
        *(Dss(2) + x(2)*Nss(2)) - (Dss(6) + x(2)*Nss(6))*(Dss(1) + x(2)*
        Nss(1)))];
122
123     chute = [0.8 1.8];
124     if (j > 1)
125         chute = sol1;
126     end
127
128     sol1 = fsolve(F,chute,options);
129     betaG(k,j) = sol1(1);
130     MG(k,j) = sol1(2);
131
132     F = @(x) [x(1)^7*Dss(8) - x(1)^5*(Dss(6) - Nss(6)*cos(x(2))) - x(1)^4*Nss(5)*sin(
        x(2)) + x(1)^3*(Dss(4) - Nss(4)*cos(x(2))) + x(1)^2*Nss(3)*sin(x(2)) - x(1)
        *(Dss(2) - Nss(2)*cos(x(2))) - Nss(1)*sin(x(2))];
133     x(1)^6*Dss(7) + x(1)^5*Nss(6)*sin(x(2)) - x(1)^4*(Dss(5) - Nss(5)*cos(x
        (2))) - x(1)^3*Nss(4)*sin(x(2)) + x(1)^2*(Dss(3) - Nss(3)*cos(x(2))
        ) + x(1)*Nss(2)*sin(x(2)) - (Dss(1) + Nss(1)*cos(x(2)))];
134
135     chute = [1 0];
136     if (j > 1)
137         chute = sol2;
138     end
139
140     sol2 = fsolve(F,chute,options2);
141     wF(k,j) = sol2(1);
142     MF(k,j) = sol2(2);
143
144     end
145 end
146
147 wG = sqrt(betaG);
148
149 colors = hsv(length(TeV));
150 figure(1)
151 hold on
152
153 for k = 1:length(TeV)
154     plot(KeV,wG(k,:), 'color', colors(k,:))
155     legendInfo{k} = ['Te = 10^{ ' num2str(log10(TeV(k))) ' }'] ; % or whatever is
        appropriate
156 end
157
158 set(gca, 'XScale', 'log')
159 grid on
160 grid minor

```

```

161 title('\omega_G')
162 ylabel('\omega_G')
163 xlabel('K_e');
164 legend(legendInfo)
165
166 figure(2)
167 hold on
168
169 for k = 1:length(TeV)
170     plot(KeV,MG(k,:)./pi,'color',colors(k,:))
171     legendInfo{k} = ['Te = 10^{ ' num2str(log10(TeV(k))) ' }'] ; % or whatever is
        appropriate
172 end
173
174 set(gca, 'XScale', 'log')
175 grid on
176 grid minor
177 title('M_G')
178 ylabel('M_G')
179 xlabel('K_e');
180 legend(legendInfo)
181
182 figure(3)
183 hold on
184
185 for k = 1:length(TeV)
186     plot(KeV,wF(k,:), 'color',colors(k,:))
187     legendInfo{k} = ['Te = 10^{ ' num2str(log10(TeV(k))) ' }'] ; % or whatever is
        appropriate
188 end
189
190 set(gca, 'XScale', 'log')
191 grid on
192 grid minor
193 title('\omega_F')
194 ylabel('\omega_F')
195 xlabel('K_e');
196 legend(legendInfo)
197
198 figure(4)
199 hold on
200
201 for k = 1:length(TeV)
202     plot(KeV,MF(k,:)./pi,'color',colors(k,:))
203     legendInfo{k} = ['Te = 10^{ ' num2str(log10(TeV(k))) ' }'] ; % or whatever is
        appropriate
204 end
205
206 set(gca, 'XScale', 'log')
207 grid on
208 grid minor
209 title('M_F')
210 ylabel('M_F (x \pi)')
211 xlabel('K_e');
212 legend(legendInfo)
213
214 figure(5)
215 hold on
216
217 for k = 1:length(TeV)

```

```

218 plot(MG(k,:),MF(k,:)./pi,'color',colors(k,:))
219 legendInfo{k} = ['Te = 10^{ ' num2str(log10(TeV(k))) ' }'] ; % or whatever is
    appropriate
220 end
221
222 set(gca, 'XScale', 'log')
223 grid on
224 grid minor
225 title('M_F')
226 ylabel('M_F (x \pi)')
227 xlabel('M_G');
228 legend(legendInfo)
229
230 figure(6)
231 hold on
232
233 for k = 1:5
234     plot3(MG(k,:),MF(k,:)./pi,KeV,'color',colors(k,:))
235     legendInfo{k} = ['Te = 10^{ ' num2str(log10(TeV(k))) ' }'] ; % or whatever is
        appropriate
236 end
237
238 set(gca, 'XScale', 'log')
239 grid on
240 grid minor
241 title('M_F')
242 ylabel('M_F (x \pi)')
243 xlabel('M_G');
244 zlabel('K_e');
245 legend(legendInfo)
246 axis square

```

A.9

Gráficos de margens de estabilidade do sistema controlado por AVR e PSS

Listing A.15 – Código para resolução dos sistemas que geram os gráficos de margens de estabilidade do sistema controlado por AVR.

```

1 clear all;
2 clc;
3 close all;
4 format long
5
6 addpath('./funcoes');
7 addpath('./funcoes/jacobiano');
8 %% Definindo os parâmetros da máquina
9 global xd xq xlinhad xlinhaq Tlinhado r re xe H S E Z X alpha phi deltaPm
    tempoDeltaPm Pm0 Efd0;
10
11 xd = 1.14; % Impedância equivalente de regime permanente de eixo direto
12 xq = 0.66; % Impedância equivalente de regime permanente de eixo em quadratura
13 xlinhad = 0.24; % Impedância transitória de eixo direto
14 xlinhaq = xlinhad; % Impedância transitória de eixo em quadratura
15 Tlinhado = 12; % Constante de tempo transitória de eixo direto
16 r = 0; % Resistência interna equivalente da máquina;
17 re = 0.01; % Resistência externa acoplada à máquina;

```

```

18 xe = 0.1; % Impedância externa acoplada à máquina;
19 xt = xe + xlinhaq; % Impedância "total";
20 rt = re + r; % Resistência "total"
21 H = 1.5; % Constante de inércia do rotor
22 P = 1; % Potência ativa inicial
23 Q = 0.5; % Potência reativa inicial
24 S = P + j*Q; % Potência aparente inicial
25 E = 1.0; % Tensão do barramento infinito (em PU!);
26 X = sqrt( (r+re)^2 + (xlinhaq + xe)^2 );
27 phi = atan((xlinhaq + xe)/(re + r) );
28 Z = sqrt(re^2 + xe^2);
29 alpha = atan(xe/re);
30
31 % Perturbação:
32 deltaPm = 0.1;
33 tempoDeltaPm = 5;
34 larguraDeltaPm = 100;
35
36 %% Calculando as condições iniciais (em PU)
37
38 % Resolvendo o sistema das correntes
39 a = E^2*(xt^2 + rt^2);
40 b = rt*E^3 + 2*xt*E*(Q*rt - P*xt);
41 c = (Q*rt - P*xt)^2 - rt*P*E^2;
42
43 Ir = ( -b + sqrt(b^2 - 4*a*c))/(2*a);
44 Ii = (P*xt - Q*rt)/(E*rt) - xt/rt*Ir;
45 I = Ir + j*Ii;
46
47 clear x x0 a b c;
48
49 % Calculando as tensões através de Leis de Kirchhoff
50 V = E + (re + j*xe)*I;
51 EL = V + (r + j*xlinhad)*I;
52
53 % Obtendo os versores Q e D e o ângulo delta
54 Q = EL/norm(EL);
55 delta0 = phase(EL);
56 D = Q*exp(j*pi/2);
57
58 % Calculando as tensões e correntes no eixo do rotor
59 ELq0 = real(EL)*cos(delta0) + imag(EL)*sin(delta0);
60 ELd0 = real(EL)*-sin(delta0) + imag(EL)*cos(delta0);
61
62 Vq0 = real(V)*cos(delta0) + imag(V)*sin(delta0);
63 Vd0 = real(V)*-sin(delta0) + imag(V)*cos(delta0);
64
65 Iq0 = real(I)*cos(delta0) + imag(I)*sin(delta0);
66 Id0 = real(I)*-sin(delta0) + imag(I)*cos(delta0);
67
68 V0 = sqrt(Vq0^2 + Vd0^2);
69
70 Efd0 = ELq0 - Id0*(xd - xlinhad);
71 Pm0 = ELq0*Iq0 - Iq0*Id0*(xlinhad - xlinhaq);
72
73 %% Descrevendo o sistema com controlador
74
75 x0 = [ELq0,0,delta0,Efd0];
76

```

```

77 doubleSubs = [J13(x0), J11, J21(x0), J23(x0), V3(x0), V1(x0), 1, 1, 6.12049837248, Tlinhado, 2];
   % doubleSubs = [J13, J11, J21, J23, V3, V1, Tw, Te, Ke, Tlinhado, T1]
78 syms J13 V1 s V3 Tdo Te Ke J21 J11 s J23 w Ke Te T1 T2 KPss Tw
79
80 N = (V1*(s^2 - J23) + V3*J21)*(J13*V1*Ke + (s - J11)*(V3*Ke + (s^2*KPss*Tw*(1 + s*T1)
   *(1 + s*Te)))/((1 + s*T2)*(1 + s*Tw))) );
81
82 N = N/(Tdo*(1 + s*Te)*((s - J11)*(s^2 - J23) - J13*J21) - V1*Ke*(s^2 - J23) - J21*((V3*
   Ke + (s^2*KPss*Tw*(1 + s*T1)*(1 + s*T2))/((1 + s*T2)*(1 + s*Tw)))) );
83
84 N = N + V1*J13 + V3*(s - J11);
85
86 D = (s - J11)*(s^2 - J23) - J13*J21;
87 D = 2*H*D;
88
89 G = N/D;
90
91 [N,D] = numden(G);
92
93 %
94 N = subs(N, [J13, J11, J21, J23, V3, V1, Tw, Te, Ke, Tdo, T1], doubleSubs);
95 D = subs(D, [J13, J11, J21, J23, V3, V1, Tw, Te, Ke, Tdo, T1], doubleSubs);
96
97 N = subs(N, s, li*w);
98 D = subs(D, s, li*w);
99
100 T2V = [1 2 3 4 5 6];
101 KPssV = logspace(-2, 2, 1000);
102
103 wG = zeros(length(T2V), length(KPssV));
104 MG = wG;
105 %options = optimoptions('fsolve', 'Display', 'off', 'Algorithm', 'levenberg-marquardt');
106 options = optimoptions('fsolve', 'Display', 'final', 'Algorithm', 'levenberg-marquardt');
107 options2 = optimoptions('fsolve', 'Display', 'final');
108
109 % Resolvendo para a margem de ganho
110 %-----
111 for k = 1:length(T2V)
112     k
113     Ns = subs(N, T2, T2V(k));
114     Ds = subs(D, T2, T2V(k));
115
116     for j = 1:length(KPssV)
117         Nss = subs(Ns, KPss, KPssV(j));
118         Dss = subs(Ds, KPss, KPssV(j));
119
120         Nss = vpa(coeffs(Nss, w));
121         Dss = vpa(coeffs(Dss, w));
122
123         Nss = double(Nss);
124         Nss = real(Nss) + imag(Nss);
125         Dss = double(Dss);
126         Dss = real(Dss) + imag(Dss);
127
128         F = @(x) [x(1)^3*(Dss(9)*Dss(8) - Dss(7)*Dss(10) + x(2)*(Dss(9)*Nss(8) - Nss(7)*
           Dss(10))) + ...
129                 - x(1)^2*(Dss(9)*Dss(6) - Dss(5)*Dss(10) + x(2)*(Dss(9)
           *Nss(6) - Nss(5)*Dss(10))) + ...
130                 + x(1)*(Dss(9)*Dss(4) - Dss(3)*Dss(10) + x(2)*(Dss(9)*
           Nss(4) - Nss(3)*Dss(10))) + ...

```

```

131         - (Dss(9)*Dss(2) - Dss(1)*Dss(10) + x(2)*(Dss(9)*Nss(2)
132             - Nss(1)*Dss(10)));
133     Dss(9)*x(1)^4 - (Dss(7) + x(2)*Nss(7))*x(1)^3 + (Dss(5) + x(2)*Nss(5))*
134         x(1)^2 - (Dss(3) + x(2)*Nss(3))*x(1) + Dss(1) + x(2)*Nss(1)];
135     chute = [1 150];
136     if (j>1)
137         chute = sol1;
138     end
139     sol1 = fsolve(F,chute,options);
140     betaG(k,j) = sol1(1);
141     MG(k,j) = sol1(2);
142 end
143
144 %% Resolvendo para a margem de fase
145 for k = 1:length(T2V)
146     k
147     Ns = subs(N,T2,T2V(k));
148     Ds = subs(D,T2,T2V(k));
149
150     for j = 1:length(KPssV)
151         Nss = subs(Ns,KPss,KPssV(j));
152         Dss = subs(Ds,KPss,KPssV(j));
153
154         Nss = vpa(coeffs(Nss,w));
155         Dss = vpa(coeffs(Dss,w));
156
157         Nss = double(Nss);
158         Nss = real(Nss) + imag(Nss);
159         Dss = double(Dss);
160         Dss = real(Dss) + imag(Dss);
161
162         F = @(x)[Dss(10)*x(1)^9 + (Nss(8)*cos(x(2)) - Dss(8))*x(1)^7 - Nss(7)*sin(x
163             (2))*x(2)^6 + (Dss(6) - Nss(6)*cos(x(2)))*x(2)^5 + Nss(5)*sin(x(2))*x(1)
164             ^4 + (Nss(4)*cos(x(2)) - Dss(4))*x(1)^3 - Nss(3)*sin(x(2))*x(1)^2 + (Dss
165             (2) - Nss(2)*cos(x(2)))*x(1) + Nss(1)*sin(x(2));
166             Dss(9)*x(1)^8 + Nss(8)*sin(x(2))*x(1)^7 + (Nss(7)*cos(x
167             (2)) - Dss(7))*x(1)^6 - Nss(6)*sin(x(2))*x(1)^5 + (
168             Dss(5) - Nss(5)*cos(x(2)))*x(1)^4 + Nss(4)*sin(x(2)
169             )*x(1)^3 + (Nss(3)*cos(x(2)) - Dss(3))*x(1)^2 - Nss
170             (2)*sin(x(2))*x(2) + Dss(1) - Nss(1)*cos(x(2))];
171
172         chute = [1 0.3*pi];
173
174         sol2 = fsolve(F,chute,options);
175         wF(k,j) = sol2(1);
176         MF(k,j) = sol2(2);
177     end
178 end
179
180 %-----
181 %% Plotando os graficos
182
183 wG = sqrt(betaG);
184 wG = real(wG);
185
186 colors = hsv(length(T2V));
187 figure(1)
188 hold on

```

```

182
183 for k = 1:length(T2V)
184     plot(KPssV,wG(k,:), 'color', colors(k,:))
185     legendInfo{k} = ['T_2 = ' num2str(T2V(k)) ] ; % or whatever is appropriate
186 end
187
188 set(gca, 'XScale', 'log')
189 grid on
190 grid minor
191 title('\omega_G')
192 ylabel('\omega_G')
193 xlabel('K_e');
194 legend(legendInfo)
195
196 figure(2)
197 hold on
198
199 for k = 1:length(T2V)
200     plot(KPssV,abs(MG(k,:)), 'color', colors(k,:))
201     legendInfo{k} = ['T_2 = ' num2str(T2V(k)) ] ; % or whatever is appropriate
202 end
203
204 set(gca, 'XScale', 'log')
205 grid on
206 grid minor
207 title('M_G')
208 ylabel('M_G')
209 xlabel('K_{PSS}');
210 legend(legendInfo)
211
212 figure(3)
213 hold on
214
215 for k = 1:length(T2V)
216     plot(KPssV,wF(k,:), 'color', colors(k,:))
217     legendInfo{k} = ['T2 = ' num2str(T2V(k)) ] ; % or whatever is appropriate
218 end
219
220 set(gca, 'XScale', 'log')
221 grid on
222 grid minor
223 title('\omega_F')
224 ylabel('\omega_F')
225 xlabel('K_e');
226 legend(legendInfo)
227
228 figure(4)
229 hold on
230
231 for k = 1:length(T2V)
232     plot(KPssV,MF(k,:)./pi, 'color', colors(k,:))
233     legendInfo{k} = ['T2 = ' num2str(T2V(k))] ; % or whatever is appropriate
234 end
235
236 set(gca, 'XScale', 'log')
237 grid on
238 grid minor
239 title('M_F')
240 ylabel('M_F (x \pi)')
241 xlabel('K_e');

```



```

242 legend(legendInfo)
243 %
244 % figure(5)
245 % hold on
246 %
247 % for k = 1:length(TeV)
248 %     plot(MG(k,:),MF(k,:)./pi,'color',colors(k,:))
249 %     legendInfo{k} = ['Te = 10^{ ' num2str(log10(TeV(k))) ' }'] ; % or whatever is
        appropriate
250 % end
251 %
252 % set(gca, 'XScale', 'log')
253 % grid on
254 % grid minor
255 % title('M_F')
256 % ylabel('M_F (x \pi)')
257 % xlabel('M_G');
258 % legend(legendInfo)
259 %
260 % figure(6)
261 % hold on
262 %
263 % for k = 1:5
264 %     plot3(MG(k,:),MF(k,:)./pi,KeV,'color',colors(k,:))
265 %     legendInfo{k} = ['Te = 10^{ ' num2str(log10(TeV(k))) ' }'] ; % or whatever is
        appropriate
266 % end
267 %
268 % set(gca, 'XScale', 'log')
269 % grid on
270 % grid minor
271 % title('M_F')
272 % ylabel('M_F (x \pi)')
273 % xlabel('M_G');
274 % zlabel('K_e');
275 % legend(legendInfo)
276 % axis square

```


Análise local do sistema AVR

B.1

Cálculo do jacobiano

O sistema dinâmico que rege o sistema controlado por apenas AVR é 5.9 abaixo; já as fórmulas para \mathbf{I}_d e \mathbf{I}_q são 4.10 e 4.9, respectivamente.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{x_4 - x_1 + (x_d - x'_d)I_d}{T'_{do}} = F_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{P_m - x_1 I_q + (x'_d - x'_q) I_d I_q}{2H} = F_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 = F_3 \\ \dot{x}_4 = -\frac{K_e(V_t - V_{t0}) + (x_4 - E_{FD0})}{T_e} = F_4 \end{array} \right.$$

B.1.1 Primeira coluna

$$\begin{aligned} J_{1,1} &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = -\frac{1}{T'_{do}} + \left(\frac{x_d - x'_d}{T'_{do}} \right) \frac{\partial \mathbf{I}_d}{\partial x_1} = -\left(\frac{x_d - x'_d}{T'_{do}} \right) \frac{\sin(\phi)}{X} - \frac{1}{T'_{do}} \\ &= -\frac{1}{T'_{do}} \left[\frac{(x_d - x'_d) \sin(\phi)}{X} + 1 \right] \end{aligned}$$

$$J_{2,1} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{1}{2H} \left\{ -\left(\mathbf{I}_q + x_1 \frac{\partial \mathbf{I}_q}{\partial x_1} \right) + (x'_d - x'_q) \left(\mathbf{I}_q \frac{\partial \mathbf{I}_d}{\partial x_1} + \mathbf{I}_d \frac{\partial \mathbf{I}_q}{\partial x_1} \right) \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2H} \left(- \left[\frac{x_1 \cos(\phi) - E \cos(x_3 + \phi)}{X} + x_1 \frac{\cos(\phi)}{X} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(x'_d - x'_q)}{X^2} \left\{ -\sin(\phi) [x_1 \cos(\phi) - E \cos(x_3 + \phi)] + \cos(\phi) [E \sin(x_3 + \phi) - x_1 \sin(\phi)] \right\} \right) = \\
&= \frac{1}{2H} \left\{ \frac{E \cos(x_3 + \phi) - 2x_1 \cos(\phi)}{X} + \frac{(x'_d - x'_q)}{X^2} [E \sin(x_3 + 2\phi) - x_1 \sin(2\phi)] \right\} = \\
&= \frac{1}{2HX^2} \left\{ EX \cos(x_3 + \phi) - 2X x_1 \cos(\phi) + (x'_d - x'_q) [E \sin(x_3 + 2\phi) - x_1 \sin(2\phi)] \right\} = \\
&= \frac{1}{2HX^2} \left\{ E [X \cos(x_3 + \phi) + (x'_d - x'_q) \sin(x_3 + 2\phi)] - x_1 [2X \cos(\phi) + (x'_d - x'_q) \sin(2\phi)] \right\} \\
&\hspace{25em} (B.1)
\end{aligned}$$

$$J_{3,1} = \frac{\partial F_3}{\partial x_1} = 0 \quad (B.2)$$

$$\begin{aligned}
J_{4,1} &= \frac{\partial F_4}{\partial x_1} = -\frac{K_e}{T_e} \frac{\partial \mathbf{V}_t}{\partial x_1} = \\
&= -\frac{K_e}{T_e} \frac{[2x_1 - 2E \cos(x_3)] \left(\frac{Z}{X} \right)^2 + 2E \frac{Z}{X} \cos(x_3 + \alpha - \phi)}{2 \sqrt{[x_1^2 - 2E x_1 \cos(x_3) + E^2] \left(\frac{Z}{X} \right)^2 + 2E \frac{Z}{X} [x_1 \cos(x_3 + \alpha - \phi) - E \cos(\alpha - \phi)] + E^2}} = \\
&= -\frac{K_e}{T_e} \frac{Z}{X} \frac{[x_1 - E \cos(x_3)] \left(\frac{Z}{X} \right) + E \cos(x_3 + \alpha - \phi)}{2 \sqrt{[x_1^2 - 2E x_1 \cos(x_3) + E^2] \left(\frac{Z}{X} \right)^2 + 2E \frac{Z}{X} [x_1 \cos(x_3 + \alpha - \phi) - E \cos(\alpha - \phi)] + E^2}} \\
&\hspace{25em} (B.3)
\end{aligned}$$

B.1.2 Segunda coluna

$$J_{1,2} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0 \quad (B.4)$$

$$J_{2,2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 0 \quad (B.5)$$

$$J_{3,2} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2} = 1 \quad (\text{B.6})$$

$$J_{4,2} = \frac{\partial F_4}{\partial x_2} = 0 \quad (\text{B.7})$$

B.1.3 Terceira coluna

$$J_{1,3} = \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \frac{(x_d - x'_d)}{T'_{do}} \frac{\partial \mathbf{I}_d}{\partial x_3} = \frac{E(x_d - x'_d)}{X T'_{do}} \cos(x_3 + \phi) \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} J_{2,3} &= \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \frac{1}{2H} \left\{ -x_1 \frac{\partial \mathbf{I}_q}{\partial x_3} + (x'_d - x'_q) \left(\mathbf{I}_q \frac{\partial \mathbf{I}_d}{\partial x_3} + \mathbf{I}_d \frac{\partial \mathbf{I}_q}{\partial x_3} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2H} \left(-x_1 \frac{E \sin(x_3 + \phi)}{X} + (x'_d - x'_q) \left\{ \left[\frac{x_1 \cos(\phi) - E \cos(x_3 + \phi)}{X} \right] \frac{E \cos(x_3 + \phi)}{X} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[\frac{E \sin(x_3 + \phi) - x_1 \sin(\phi)}{X} \right] \frac{E \sin(x_3 + \phi)}{X} \right\} \right) = \\ &= \frac{1}{2H} \left\{ -x_1 \frac{E \sin(x_3 + \phi)}{X} + \frac{E(x'_d - x'_q)}{X^2} \left(x_1 [\cos(\phi) \cos(x_3 + \phi) - \sin(\phi) \sin(x_3 + \phi)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - E [\cos^2(x_3 + \phi) - \sin^2(x_3 + \phi)] \right) \right\} = \\ &= \frac{E}{2H X^2} \left\{ -x_1 X \sin(x_3 + \phi) + (x'_d - x'_q) [x_1 \cos(x_3 + 2\phi) - E \cos(2x_3 + 2\phi)] \right\} = \\ &= \frac{E}{2H X^2} \left\{ x_1 [(x'_d - x'_q) \cos(x_3 + 2\phi) - X \sin(x_3 + \phi)] - E (x'_d - x'_q) \cos(2x_3 + 2\phi) \right\} \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

$$J_{3,3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$J_{4,3} = \frac{\partial F_4}{\partial x_3} = -\frac{K_e}{T_e} \frac{\partial \mathbf{V}_t}{\partial x_3} =$$

$$= \frac{-x_1 E \frac{K_e}{T_e} \frac{Z}{X} \left[\sin(x_3) \left(\frac{Z}{X} \right) - \sin(x_3 + \alpha - \phi) \right]}{\sqrt{\left[x_1^2 - 2E x_1 \cos(x_3) + E^2 \right] \left(\frac{Z}{X} \right)^2 + 2E \frac{Z}{X} \left[x_1 \cos(x_3 + \alpha - \phi) - E \cos(\alpha - \phi) \right] + E^2}} \quad (\text{B.11})$$

B.1.4 Quarta coluna

$$J_{1,4} = \frac{\partial F_1}{\partial x_4} = \frac{1}{T'_{do}} \quad (\text{B.12})$$

$$J_{2,4} = \frac{\partial F_2}{\partial x_4} = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$J_{3,4} = \frac{\partial F_3}{\partial x_4} = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$J_{4,4} = -\frac{1}{T_e} \quad (\text{B.15})$$

B.1.5 Autovalores do jacobiano

Tem-se portanto o jacobiano do sistema em um ponto de operação qualquer. Para clareza, evidenciando os termos nulos,

$$J = \begin{pmatrix} J_{1,1} & 0 & J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{2,1} & 0 & J_{2,3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ J_{4,1} & 0 & J_{4,3} & J_{4,4} \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Assim, para calcular os autovalores do sistema,

$$\det(J - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} J_{1,1} - \lambda & 0 & J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{2,1} & -\lambda & J_{2,3} & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ J_{4,1} & 0 & J_{4,3} & J_{4,4} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{B.17})$$

Resta agora decompor este determinante. A ideia é utilizar os Teoremas de Jacobi e a multilinearidade do determinante para obter os coeficientes do polinômio característico nas formas de determinantes de matrizes independentes de λ .

$$\begin{vmatrix} J_{1,1} & 0 & J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{2,1} & -\lambda & J_{2,3} & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ J_{4,1} & 0 & J_{4,3} & J_{4,4}-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 & J_{1,3} & J_{1,4} \\ 0 & -\lambda & J_{2,3} & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & J_{4,3} & J_{4,4}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Decompondo a segunda linha do primeiro determinante, e aplicando a regra de Laplace na primeira coluna do segundo,

$$\begin{vmatrix} J_{1,1} & 0 & J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{2,1} & 0 & J_{2,3} & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ J_{4,1} & 0 & J_{4,3} & J_{4,4}-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{1,1} & 0 & J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{2,1} & -\lambda & J_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ J_{4,1} & 0 & J_{4,3} & J_{4,4}-\lambda \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & J_{2,3} & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & J_{4,3} & J_{4,4}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Aplicando Laplace na segunda coluna do segundo determinante,

$$\begin{vmatrix} J_{1,1} & 0 & J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{2,1} & 0 & J_{2,3} & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ J_{4,1} & 0 & J_{4,3} & J_{4,4}-\lambda \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,3} & J_{1,4} \\ 0 & -\lambda & 0 \\ J_{4,1} & J_{4,3} & J_{4,4}-\lambda \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & J_{2,3} & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & J_{4,3} & J_{4,4}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Aplicando a regra de Laplace na segunda linha do segundo determinante,

$$\begin{vmatrix} J_{1,1} & 0 & J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{2,1} & 0 & J_{2,3} & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ J_{4,1} & 0 & J_{4,3} & J_{4,4}-\lambda \end{vmatrix} + \lambda^2 \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} \\ J_{4,1} & J_{4,4}-\lambda \end{vmatrix} - \lambda(J_{4,4}-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & J_{2,3} \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Brevemente omitindo o determinante maior,

$$(\dots) + \lambda^2 \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} \\ J_{4,1} & J_{4,4} \end{vmatrix} - \lambda^2 \begin{vmatrix} J_{1,1} & 0 \\ J_{4,1} & \lambda \end{vmatrix} - \lambda(J_{4,4}-\lambda)(\lambda^2 - J_{2,3}) = 0$$

$$(\dots) + \lambda^2 \left(\begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} \\ J_{4,1} & J_{4,4} \end{vmatrix} - J_{2,3} \right) - \lambda^3(J_{1,1} + J_{4,4}) + \lambda^4 \lambda J_{4,4} J_{2,3} = 0$$

Agora desenvolvendo aquele,

$$\begin{vmatrix} J_{1,1} & 0 & J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{2,1} & 0 & J_{2,3} & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ J_{4,1} & 0 & J_{4,3} & J_{4,4}-\lambda \end{vmatrix} + (\dots) = 0$$

$$\begin{vmatrix} J_{1,1} & 0 & J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{2,1} & 0 & J_{2,3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ J_{4,1} & 0 & J_{4,3} & J_{4,4}-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{1,1} & 0 & 0 & J_{1,4} \\ J_{2,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ J_{4,1} & 0 & 0 & J_{4,4}-\lambda \end{vmatrix} + (\dots) = 0$$

$$\begin{vmatrix} J_{1,1} & 0 & J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{2,1} & 0 & J_{2,3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ J_{4,1} & 0 & J_{4,3} & J_{4,4} - \lambda \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} J_{1,1} & 0 & J_{1,4} \\ J_{2,1} & 0 & 0 \\ J_{4,1} & 0 & J_{4,4} - \lambda \end{vmatrix} + (\dots) = 0$$

$$- \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{2,1} & J_{2,3} & 0 \\ J_{4,1} & J_{4,3} & J_{4,4} - \lambda \end{vmatrix} + (\dots) = 0$$

$$- \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{2,1} & J_{2,3} & 0 \\ J_{4,1} & J_{4,3} & J_{4,4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,3} & 0 \\ J_{2,1} & J_{2,3} & 0 \\ J_{4,1} & J_{4,3} & \lambda \end{vmatrix} + (\dots) = 0$$

$$- \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{2,1} & J_{2,3} & 0 \\ J_{4,1} & J_{4,3} & J_{4,4} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,3} \\ J_{2,1} & J_{2,3} \end{vmatrix} + (\dots) = 0$$

Assim,

$$- \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{2,1} & J_{2,3} & 0 \\ J_{4,1} & J_{4,3} & J_{4,4} \end{vmatrix} + \lambda \left(\begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,3} \\ J_{2,1} & J_{2,3} \end{vmatrix} + J_{4,4} J_{2,3} \right) + \lambda^2 \left(\begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} \\ J_{4,1} & J_{4,4} \end{vmatrix} - J_{2,3} \right) - \lambda^3 (J_{1,1} + J_{4,4}) + \lambda^4 = 0$$

Arranjando,

$$\lambda^4 - \lambda^3 \begin{vmatrix} J_{1,1} & -1 \\ J_{4,4} & 1 \end{vmatrix} + \lambda^2 \left(\begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} \\ J_{4,1} & J_{4,4} \end{vmatrix} - J_{2,3} \right) + \lambda \left(\begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,3} \\ J_{2,1} & J_{2,3} \end{vmatrix} + J_{4,4} J_{2,3} \right) + \begin{vmatrix} J_{2,1} & J_{2,3} & 0 \\ J_{1,1} & J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{4,1} & J_{4,3} & J_{4,4} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{B.18})$$

Assim, em forma resumida, $\sum_{i=0}^4 a_i \lambda^i = 0$, com os coeficientes a_i

$$\left\{ \begin{array}{l} a_4 = 1 \\ a_3 = \begin{vmatrix} J_{1,1} & -1 \\ J_{4,4} & 1 \end{vmatrix} = -(J_{1,1} + J_{4,4}) \\ a_2 = \left(\begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} \\ J_{4,1} & J_{4,4} \end{vmatrix} - J_{2,3} \right) = J_{1,1}J_{4,4} - J_{1,4}J_{4,1} - J_{2,3} \\ a_1 = \left(\begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,3} \\ J_{2,1} & J_{2,3} \end{vmatrix} + J_{4,4}J_{2,3} \right) = J_{2,3}(J_{1,1} + J_{4,4}) - J_{1,3}J_{2,1} \\ a_0 = \begin{vmatrix} J_{2,1} & J_{2,3} & 0 \\ J_{1,1} & J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{4,1} & J_{4,3} & J_{4,4} \end{vmatrix} = J_{4,4}(J_{1,3}J_{2,1} - J_{1,1}J_{2,3}) + J_{1,4}(J_{2,3}J_{4,1} - J_{2,1}J_{4,3}) \end{array} \right.$$

Análise local do sistema AVR+PSS

Aqui apresentar-se-ão os cálculos analíticos da análise local (cálculo da matriz jacobiano e do polinômio característico) do sistema controlado por AVR e PSS.

C.1

Cálculo do jacobiano

O sistema controlado por AVR e PSS é regido pelo sistema diferencial

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{E_{FD}^{\text{sat}} - x_1 + (x_d - x'_d) \mathbf{I}_d}{T'_{do}} = F_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{P_m - x_1 \mathbf{I}_q + (x'_d - x'_q) \mathbf{I}_d \mathbf{I}_q}{2H} = F_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 = F_3 \\ \dot{x}_4 = x_5 = F_4 \\ \dot{x}_5 = \frac{T_w K_{PSS} (T_1 \dot{x}_2 + \dot{x}_2) - x_4 - (T_w + T_2) x_5}{T_w T_2} = F_5 \\ \dot{x}_6 = -\frac{K_e (\mathbf{V}_t - V_{t0}) + (E_{FD}^{\text{sat}} - E_{FD0})}{T_e} = F_6 \end{array} \right.$$

Com funções saturadas x_4^{sat} e E_{FD}^{sat} :

$$x_4^{\text{sat}} = S(x_4, V_{PSS}^{\text{max}}, V_{PSS}^{\text{min}})$$

$$E_{FD}^{\text{sat}} = S(x_4^{\text{sat}} + x_6 + E_{FD0}, E_{FD}^{\text{max}}, E_{FD}^{\text{min}})$$

Com equações algébricas

$$\mathbf{I}_q = \frac{x_1 \cos(\phi) - E \cos(x_3 + \phi)}{X}$$

$$\mathbf{I}_d = \frac{E \sin(x_3 + \phi) - x_1 \sin(\phi)}{X}$$

$$\mathbf{I}_q = \frac{\left[\mathbf{E}_{FD}^{\text{sat}} - x_1 + (x_d - x'_d) \mathbf{I}_d \right] \cos(\phi) + x_2 T'_{do} E \sin(x_3 + \phi)}{X T'_{do}}$$

$$\mathbf{I}_d = \frac{x_2 T'_{do} E \cos(x_3 + \phi) - \left[\mathbf{E}_{FD}^{\text{sat}} - x_1 + (x_d - x'_d) \mathbf{I}_d \right] \sin(\phi)}{X T'_{do}}$$

$$\mathbf{x}_2 = \frac{\dot{P}_m - \left\{ x_1 \mathbf{I}_q + \left[\frac{\mathbf{E}_{FD}^{\text{sat}} - x_1 + (x_d - x'_d) \mathbf{I}_d}{T'_{do}} \right] \mathbf{I}_q \right\} - (x'_d - x'_q) (\mathbf{I}_q \mathbf{I}_d + \mathbf{I}_d \mathbf{I}_q)}{2H}$$

$$\mathbf{V}_t = \sqrt{\left[x_1^2 - 2E x_1 \cos(x_3) + E^2 \right] \left(\frac{Z}{X} \right)^2 + 2E \frac{Z}{X} \left[x_1 \cos(x_3 + \alpha - \phi) - E \cos(\alpha - \phi) \right] + E^2}$$

$K_e, T_e, T_w, T_1, T_2, K_{PSS}$ são constantes referentes aos controladores; os dois primeiros referentes ao AVR e os últimos ao PSS.

C.1.1 Primeira coluna

$$\begin{aligned} J_{1,1} &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = -\frac{1}{T'_{do}} + \left(\frac{x_d - x'_d}{T'_{do}} \right) \frac{\partial \mathbf{I}_d}{\partial x_1} = -\left(\frac{x_d - x'_d}{T'_{do}} \right) \frac{\sin(\phi)}{X} - \frac{1}{T'_{do}} \\ &= -\frac{1}{T'_{do}} \left[\frac{(x_d - x'_d) \sin(\phi)}{X} + 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} J_{2,1} &= \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{1}{2H} \left\{ -\left(\mathbf{I}_q + x_1 \frac{\partial \mathbf{I}_q}{\partial x_1} \right) + (x'_d - x'_q) \left(\mathbf{I}_q \frac{\partial \mathbf{I}_d}{\partial x_1} + \mathbf{I}_d \frac{\partial \mathbf{I}_q}{\partial x_1} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2HX^2} \left\{ E \left[X \cos(x_3 + \phi) + (x'_d - x'_q) \sin(x_3 + 2\phi) \right] - x_1 \left[2X \cos(\phi) + (x'_d - x'_q) \sin(2\phi) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$J_{3,1} = \frac{\partial F_3}{\partial x_1} = 0 \quad (C.3)$$

$$J_{4,1} = 0 \quad (C.4)$$

$$J_{5,1} = \frac{K_{PSS}}{T_2} \left(T_1 \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} \right)$$

Calculando $\frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}_2}{\partial x_1}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}_2}{\partial x_1} (-2H) &= \dot{\mathbf{I}}_q + x_1 \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_q}{\partial x_1} + \dot{x}_1 \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_q}{\partial x_1} + J_{1,1} \dot{\mathbf{I}}_q + (x'_d - x'_q) \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_q}{\partial x_1} \dot{\mathbf{I}}_d + \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_d}{\partial x_1} \dot{\mathbf{I}}_q + \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_d}{\partial x_1} \dot{\mathbf{I}}_q + \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_q}{\partial x_1} \dot{\mathbf{I}}_d \right] = \\ &= \dot{\mathbf{I}}_q \left[1 + (x'_d - x'_q) \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_d}{\partial x_1} \right] + \dot{\mathbf{I}}_q \left[J_{1,1} + (x'_d - x'_q) \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_d}{\partial x_1} \right] + \\ &\quad + \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_q}{\partial x_1} \left[x_1 + (x'_d - x'_q) \dot{\mathbf{I}}_d \right] + \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_q}{\partial x_1} \left[\dot{x}_1 + (x'_d - x'_q) \dot{\mathbf{I}}_d \right] = \\ &= \dot{\mathbf{I}}_q \left[1 - \frac{(x'_d - x'_q) \sin(\phi)}{X} \right] + \dot{\mathbf{I}}_q \left[J_{1,1} - \frac{(x'_d - x'_q) \sin(\phi)}{X} J_{1,1} \right] + \\ &\quad + J_{1,1} \frac{\cos(\phi)}{X} \left[x_1 + (x'_d - x'_q) \dot{\mathbf{I}}_d \right] + \frac{\cos(\phi)}{X} \left[\dot{x}_1 + (x'_d - x'_q) \dot{\mathbf{I}}_d \right] = \\ &= (\dot{\mathbf{I}}_q + J_{1,1} \dot{\mathbf{I}}_q) \left[1 - \frac{(x'_d - x'_q) \sin(\phi)}{X} \right] + \frac{\cos(\phi)}{X} \left\{ J_{1,1} \left[x_1 + (x'_d - x'_q) \dot{\mathbf{I}}_d \right] + \left[\dot{x}_1 + (x'_d - x'_q) \dot{\mathbf{I}}_d \right] \right\} \end{aligned}$$

Sabe-se que $\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} \equiv J_{2,1}$; assim,

$$\begin{aligned} J_{5,1} &= \frac{K_{PSS}}{T_2} \left(T_1 \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} \right) = \\ &= -\frac{K_{PSS}}{2HT_2} \left(T_1 \left\{ (\dot{\mathbf{I}}_q + J_{1,1} \dot{\mathbf{I}}_q) \left[1 - \frac{(x'_d - x'_q) \sin(\phi)}{X} \right] + \frac{\cos(\phi)}{X} \left\{ J_{1,1} \left[x_1 + (x'_d - x'_q) \dot{\mathbf{I}}_d \right] + \left[\dot{x}_1 + (x'_d - x'_q) \dot{\mathbf{I}}_d \right] \right\} \right\} - 2H J_{2,1} \right) \quad (C.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{6,1} &= \frac{\partial F_6}{\partial x_1} = -\frac{K_e}{T_e} \frac{\partial \mathbf{V}_t}{\partial x_1} = \\ &= -\frac{K_e}{T_e} \frac{Z}{X} \frac{\left[x_1 - E \cos(x_3) \right] \left(\frac{Z}{X} \right) + E \cos(x_3 + \alpha - \phi)}{\sqrt{\left[x_1^2 - 2E x_1 \cos(x_3) + E^2 \right] \left(\frac{Z}{X} \right)^2 + 2E \frac{Z}{X} \left[x_1 \cos(x_3 + \alpha - \phi) - E \cos(\alpha - \phi) \right] + E^2}} \quad (C.6) \end{aligned}$$

C.1.2 Segunda coluna

$$J_{1,2} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0 \quad (C.7)$$

$$J_{2,2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 0 \quad (C.8)$$

$$J_{3,2} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2} = 1 \quad (C.9)$$

$$J_{4,2} = \frac{\partial F_4}{\partial x_2} = 0 \quad (C.10)$$

$$\begin{aligned} J_{5,2} &= \frac{\partial F_5}{\partial x_2} = \frac{K_{PSS} T_1}{T_2} \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}_2}{\partial x_2} = \\ &= -\frac{K_{PSS} T_1}{2H T_2} \left[x_1 \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_q}{\partial x_2} + (x'_d - x'_q) \left(\mathbf{I}_q \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_d}{\partial x_2} + \mathbf{I}_d \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_q}{\partial x_2} \right) \right] = \\ &= -\frac{K_{PSS} T_1}{2H T_2} \left[x_1 \frac{E \sin(x_3 + \phi)}{X} + (x'_d - x'_q) \left(\mathbf{I}_q \frac{E \cos(x_3 + \phi)}{X} + \mathbf{I}_d \frac{E \sin(x_3 + \phi)}{X} \right) \right] = \\ &= -\frac{E K_{PSS} T_1}{2H X T_2} \left[x_1 \sin(x_3 + \phi) + (x'_d - x'_q) (\mathbf{I}_q \cos(x_3 + \phi) + \mathbf{I}_d \sin(x_3 + \phi)) \right] \end{aligned} \quad (C.11)$$

$$J_{6,2} = 0 \quad (C.12)$$

C.1.3 Terceira coluna

$$J_{1,3} = \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \frac{(x_d - x'_d)}{T'_{do}} \frac{\partial \mathbf{I}_d}{\partial x_3} = \frac{E (x_d - x'_d)}{X T'_{do}} \cos(x_3 + \phi) \quad (C.13)$$

$$J_{2,3} = \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \frac{1}{2H} \left\{ -x_1 \frac{\partial \mathbf{I}_q}{\partial x_3} + (x'_d - x'_q) \left(\mathbf{I}_q \frac{\partial \mathbf{I}_d}{\partial x_3} + \mathbf{I}_d \frac{\partial \mathbf{I}_q}{\partial x_3} \right) \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2H} \left(-x_1 \frac{E \sin(x_3 + \phi)}{X} + (x'_d - x'_q) \left\{ \left[\frac{x_1 \cos(\phi) - E \cos(x_3 + \phi)}{X} \right] \frac{E \cos(x_3 + \phi)}{X} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[\frac{E \sin(x_3 + \phi) - x_1 \sin(\phi)}{X} \right] \frac{E \sin(x_3 + \phi)}{X} \right\} \right) = \\
&= \frac{1}{2H} \left\{ -x_1 \frac{E \sin(x_3 + \phi)}{X} + \frac{E(x'_d - x'_q)}{X^2} \left(x_1 [\cos(\phi) \cos(x_3 + \phi) - \sin(\phi) \sin(x_3 + \phi)] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - E [\cos^2(x_3 + \phi) - \sin^2(x_3 + \phi)] \right) \right\} = \\
&= \frac{E}{2HX^2} \left\{ -x_1 X \sin(x_3 + \phi) + (x'_d - x'_q) [x_1 \cos(x_3 + 2\phi) - E \cos(2x_3 + 2\phi)] \right\} = \\
&= \frac{E}{2HX^2} \left\{ x_1 [(x'_d - x'_q) \cos(x_3 + 2\phi) - X \sin(x_3 + \phi)] - E (x'_d - x'_q) \cos(2x_3 + 2\phi) \right\}
\end{aligned} \tag{C.14}$$

$$J_{3,3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = 0 \tag{C.15}$$

$$J_{4,3} = 0 \tag{C.16}$$

$$J_{5,3} = \frac{K_{PSS}}{T_2} \left(T_1 \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_2}{\partial x_3} \right)$$

Calculando $\frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}_2}{\partial x_3}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}_2}{\partial x_3} (-2H) &= x_1 \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_q}{\partial x_3} + J_{1,3} \dot{\mathbf{I}}_q + \dot{x}_1 \frac{\partial \mathbf{I}_q}{\partial x_3} + (x'_d - x'_q) \left(\mathbf{I}_q \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_d}{\partial x_3} + \dot{\mathbf{I}}_d \frac{\partial \mathbf{I}_q}{\partial x_3} + \mathbf{I}_d \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_q}{\partial x_3} + \dot{\mathbf{I}}_q \frac{\partial \mathbf{I}_d}{\partial x_3} \right) = \\
&= \frac{\partial \mathbf{I}_d}{\partial x_3} (x'_d - x'_q) \dot{\mathbf{I}}_q + \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_d}{\partial x_3} (x'_d - x'_q) \mathbf{I}_q + \frac{\partial \mathbf{I}_q}{\partial x_3} [\dot{x}_1 + (x'_d - x'_q) \mathbf{I}_d] + \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_q}{\partial x_3} [x_1 + (x'_d - x'_q) \mathbf{I}_d] + J_{1,3} \dot{\mathbf{I}}_q = \\
&= \frac{E \cos(x_3 + \phi)}{X} (x'_d - x'_q) \dot{\mathbf{I}}_q - \left(\frac{x_2 E \sin(\phi + x_3)}{X} - J_{1,3} \frac{\sin(\phi)}{X} \right) (x'_d - x'_q) \mathbf{I}_q + \\
&\quad + \frac{E \sin(x_3 + \phi)}{X} [\dot{x}_1 + (x'_d - x'_q) \dot{\mathbf{I}}_d] + \left(J_{1,3} \frac{\cos(\phi)}{X} + \frac{x_2 E \cos(x_3 + \phi)}{X} \right) [x_1 + (x'_d - x'_q) \mathbf{I}_d] + J_{1,3} \dot{\mathbf{I}}_q
\end{aligned}$$

$$J_{5,3} = \frac{K_{PSS}}{T_2} \left[J_{2,3} - \frac{T_1}{2HX} \left(\begin{aligned} &E \cos(x_3 + \phi) (x'_d - x'_q) \mathbf{I}_q - (x_2 E \sin(\phi + x_3) - J_{1,3} \sin(\phi)) (x'_d - x'_q) \mathbf{I}_q + \\ &+ (J_{1,3} \cos(\phi) + x_2 E \cos(x_3 + \phi)) [x_1 + (x'_d - x'_q) \mathbf{I}_d] + \\ &+ E \sin(x_3 + \phi) [\dot{x}_1 + (x'_d - x'_q) \mathbf{I}_d] + J_{1,3} X \mathbf{I}_q \end{aligned} \right) \right] \quad (C.17)$$

$$\begin{aligned} J_{6,3} &= \frac{\partial F_6}{\partial x_3} = -\frac{K_e}{T_e} \frac{\partial \mathbf{V}_t}{\partial x_3} = \\ &= \frac{-x_1 E \frac{K_e}{T_e} \frac{Z}{X} \left[\sin(x_3) \left(\frac{Z}{X} \right) - \sin(x_3 + \alpha - \phi) \right]}{\sqrt{\left[x_1^2 - 2E x_1 \cos(x_3) + E^2 \right] \left(\frac{Z}{X} \right)^2 + 2E \frac{Z}{X} [x_1 \cos(x_3 + \alpha - \phi) - E \cos(\alpha - \phi)] + E^2}} \end{aligned}$$

C.1.4 Quarta coluna

$$\begin{aligned} J_{1,4} &= \frac{\partial F_1}{\partial x_4} = \\ &= \frac{1}{T'_{do}} \frac{\partial E_{FD}^{\text{sat}}}{\partial x_4} = \frac{1}{T'_{do}} \frac{\partial x_4^{\text{sat}}}{\partial x_4} \prod_{E_{FD}^{\min}}^{E_{FD}^{\max}} (x_4^{\text{sat}} + x_6 + E_{FD0}) = \\ &= \frac{1}{T'_{do}} \left[\prod_{V_{PSS}^{\min}}^{V_{PSS}^{\max}} x_4 \right] \left[\prod_{E_{FD}^{\min}}^{E_{FD}^{\max}} (x_4^{\text{sat}} + x_6 + E_{FD0}) \right] \quad (C.18) \end{aligned}$$

$$J_{2,4} = \frac{\partial F_2}{\partial x_4} = 0 \quad (C.19)$$

$$J_{3,4} = \frac{\partial F_3}{\partial x_4} = 0 \quad (C.20)$$

$$J_{4,4} = 0 \quad (C.21)$$

$$J_{5,4} = \frac{1}{T_w T_2} \left(T_w K_{PSS} T_1 \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}_2}{\partial x_4} - 1 \right) \quad (C.22)$$

Calculando $\frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}_2}{\partial x_4}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}_2}{\partial x_4} &= -\frac{1}{2H} \left[x_1 \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_q}{\partial x_4} + \mathbf{I}_q J_{1,4} + (x'_d - x'_q) \left(\mathbf{I}_q \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_d}{\partial x_4} + \mathbf{I}_d \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_q}{\partial x_4} \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{2H} \left[x_1 \frac{\cos(\phi)}{X} J_{1,4} + \mathbf{I}_q J_{1,4} + (x'_d - x'_q) \left(-\mathbf{I}_q \frac{\sin(\phi)}{X} J_{1,4} + \mathbf{I}_d \frac{\cos(\phi)}{X} J_{1,4} \right) \right] = \\ &= -\frac{J_{1,4}}{2HX} \left[x_1 \cos(\phi) + X \mathbf{I}_q + (x'_d - x'_q) (\mathbf{I}_d \cos(\phi) - \mathbf{I}_q \sin(\phi)) \right]\end{aligned}$$

Assim,

$$J_{5,4} = -\frac{1}{T_w T_2} \left\{ J_{1,4} \frac{T_w K_{PSS} T_1}{2HX} \left[x_1 \cos(\phi) + X \mathbf{I}_q + (x'_d - x'_q) (\mathbf{I}_d \cos(\phi) - \mathbf{I}_q \sin(\phi)) \right] + 1 \right\} \quad (C.23)$$

$$J_{6,4} = -\frac{1}{T_e} \frac{\partial E_{FD}^{\text{sat}}}{\partial x_4} = -\frac{1}{T_e} \left[\prod_{V_{PSS}^{min}}^{V_{PSS}^{max}} x_4 \right] \left[\prod_{E_{FD}^{min}}^{E_{FD}^{max}} (x_4^{\text{sat}} + x_6 + E_{FD0}) \right] \quad (C.24)$$

C.1.5 Quinta coluna

$$J_{1,5} = 0 \quad (C.25)$$

$$J_{2,5} = 0 \quad (C.26)$$

$$J_{3,5} = 0 \quad (C.27)$$

$$J_{4,5} = 1 \quad (C.28)$$

$$J_{5,5} = -\frac{T_w + T_2}{T_w T_2} \quad (C.29)$$

$$J_{6,5} = 0 \quad (C.30)$$

C.1.6 Sexta coluna

$$J_{1,6} = \frac{1}{T'_{do}} \frac{\partial E_{FD}^{\text{sat}}}{\partial x_6} = \frac{1}{T'_{do}} \prod_{E_{FD}^{\min}}^{E_{FD}^{\max}} (x_4^{\text{sat}} + x_6 + E_{FD0}) \quad (\text{C.31})$$

$$J_{2,6} = 0 \quad (\text{C.32})$$

$$J_{3,6} = 0 \quad (\text{C.33})$$

$$J_{4,6} = 0 \quad (\text{C.34})$$

$$\begin{aligned} J_{5,6} &= \frac{K_{PSS} T_1}{T_2} \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}_2}{\partial x_6} = \\ &= -\frac{K_{PSS} T_1}{2H T_2} \left[x_1 \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_q}{\partial x_6} + J_{1,6} \mathbf{I}_q + (x'_d - x'_q) \left(\mathbf{I}_q \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_d}{\partial x_6} + \mathbf{I}_d \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_q}{\partial x_6} \right) \right] = \\ &= -\frac{K_{PSS} T_1}{2H T_2} \left[x_1 J_{1,6} \frac{\cos(\phi)}{X} + J_{1,6} \mathbf{I}_q + (x'_d - x'_q) \left(-\mathbf{I}_q \frac{\sin(\phi)}{X} + \mathbf{I}_d \frac{\cos(\phi)}{X} \right) \right] = \\ &= -J_{1,6} \frac{K_{PSS} T_1}{2H X T_2} \left[x_1 \cos(\phi) + X \mathbf{I}_q + (x'_d - x'_q) (\mathbf{I}_d \cos(\phi) - \mathbf{I}_q \sin(\phi)) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

$$J_{6,6} = -\frac{1}{T_e} \frac{\partial E_{FD}^{\text{sat}}}{\partial x_6} = -\frac{1}{T_e} \prod_{E_{FD}^{\min}}^{E_{FD}^{\max}} (x_4^{\text{sat}} + x_6 + E_{FD0}) \quad (\text{C.36})$$

C.2

Aproximação do Jacobiano com considerações sobre a função pulso

As fórmulas calculadas do jacobiano acima são genéricas, e podem ser calculadas sobre qualquer elemento no espaço de estados \mathbf{x} . No entanto, ao longo deste trabalho, o jacobiano é calculado sobre o equilíbrio estático do sistema, o que possibilita simplificar significativamente as fórmulas.

É inerente notar que a função pulso não faz sentido quando utilizada no equilíbrio, porque não é factível construir saturadores que já atinjam seus limites no equilíbrio do sistema. Valendo-se desta consideração, todas as funções Boxcar utilizadas podem ser substituídas pela unidade. Pelo mesmo princípio, a variável de excitação saturada E_{FD}^{sat} pode ser substituída por E_{FD0} .

Além disso, por definição, no equilíbrio estático, $x_4 \equiv V_{PSS}$ e $x_6 \equiv V_{AVR}$ são nulos, porque por construção os controladores não atuam no equilíbrio.

Dessa forma, para o equilíbrio estático, com essas considerações práticas, $J_{1,4} = \frac{1}{T'_{do}}$ e $J_{6,4} = -\frac{1}{T_e}$.

C.3

Polinômio característico

Evidenciando os termos nulos e unitários,

$$J = \begin{pmatrix} J_{1,1} & 0 & J_{1,3} & J_{1,4} & 0 & J_{1,6} \\ J_{2,1} & 0 & J_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ J_{5,1} & J_{5,2} & J_{5,3} & J_{5,4} & J_{5,5} & J_{5,6} \\ J_{6,1} & 0 & J_{6,3} & J_{6,4} & 0 & J_{6,6} \end{pmatrix} \quad (\text{C.37})$$

Calculando os autovalores, então

$$P(\lambda) = \det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} J_{1,1} - \lambda & 0 & J_{1,3} & J_{1,4} & 0 & J_{1,6} \\ J_{2,1} & -\lambda & J_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ J_{5,1} & J_{5,2} & J_{5,3} & J_{5,4} & J_{5,5} - \lambda & J_{5,6} \\ J_{6,1} & 0 & J_{6,3} & J_{6,4} & 0 & J_{6,6} - \lambda \end{vmatrix} \quad (\text{C.38})$$

Multiplicando a quarta linha por λ e somando com a quinta,

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} J_{1,1} - \lambda & 0 & J_{1,3} & J_{1,4} & 0 & J_{1,6} \\ J_{2,1} & -\lambda & J_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ J_{5,1} & J_{5,2} & J_{5,3} & J_{5,4} - \lambda^2 & J_{5,5} & J_{5,6} \\ J_{6,1} & 0 & J_{6,3} & J_{6,4} & 0 & J_{6,6} - \lambda \end{vmatrix} \quad (\text{C.39})$$

Multiplicando a terceira linha por λ e somando com a segunda,

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} J_{1,1} - \lambda & 0 & J_{1,3} & J_{1,4} & 0 & J_{1,6} \\ J_{2,1} & 0 & J_{2,3} - \lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ J_{5,1} & J_{5,2} & J_{5,3} & J_{5,4} - \lambda^2 & J_{5,5} & J_{5,6} \\ J_{6,1} & 0 & J_{6,3} & J_{6,4} & 0 & J_{6,6} - \lambda \end{vmatrix} \quad (\text{C.40})$$

Multiplicando a segunda coluna por λ e somando com a terceira,

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} J_{1,1} - \lambda & 0 & J_{1,3} & J_{1,4} & 0 & J_{1,6} \\ J_{2,1} & 0 & J_{2,3} - \lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ J_{5,1} & J_{5,2} & J_{5,3} + \lambda J_{5,2} & J_{5,4} - \lambda^2 & J_{5,5} & J_{5,6} \\ J_{6,1} & 0 & J_{6,3} & J_{6,4} & 0 & J_{6,6} - \lambda \end{vmatrix} \quad (\text{C.41})$$

Multiplicando a quinta coluna por λ e somando com a quarta,

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} J_{1,1} - \lambda & 0 & J_{1,3} & J_{1,4} & 0 & J_{1,6} \\ J_{2,1} & 0 & J_{2,3} - \lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ J_{5,1} & J_{5,2} & J_{5,3} + \lambda J_{5,2} & (J_{5,4} + \lambda J_{5,5} - \lambda^2) & J_{5,5} & J_{5,6} \\ J_{6,1} & 0 & J_{6,3} & J_{6,4} & 0 & J_{6,6} - \lambda \end{vmatrix} \quad (\text{C.42})$$

Aplicando a Regra de Laplace na terceira linha,

$$P(\lambda) = - \begin{vmatrix} J_{1,1} - \lambda & J_{1,3} & J_{1,4} & 0 & J_{1,6} \\ J_{2,1} & J_{2,3} - \lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ J_{5,1} & J_{5,3} + \lambda J_{5,2} & (J_{5,4} + \lambda J_{5,5} - \lambda^2) & J_{5,5} & J_{5,6} \\ J_{6,1} & J_{6,3} & J_{6,4} & 0 & J_{6,6} - \lambda \end{vmatrix} \quad (\text{C.43})$$

Aplicando a Regra de Laplace na quinta coluna,

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} J_{1,1} - \lambda & J_{1,3} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{2,1} & J_{2,3} - \lambda^2 & 0 & 0 \\ J_{5,1} & J_{5,3} + \lambda J_{5,2} & (J_{5,4} + \lambda J_{5,5} - \lambda^2) & J_{5,6} \\ J_{6,1} & J_{6,3} & J_{6,4} & J_{6,6} - \lambda \end{vmatrix} \quad (\text{C.44})$$

Aplicando a Regra de Laplace na segunda linha,

$$P(\lambda) = -J_{2,1} \begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,3} + \lambda J_{5,2} & (J_{5,4} + \lambda J_{5,5} - \lambda^2) & J_{5,6} \\ J_{6,3} & J_{6,4} & J_{6,6} - \lambda \end{vmatrix} + (J_{2,3} - \lambda^2) \begin{vmatrix} J_{1,1} - \lambda & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,1} & (J_{5,4} + \lambda J_{5,5} - \lambda^2) & J_{5,6} \\ J_{6,1} & J_{6,4} & J_{6,6} - \lambda \end{vmatrix} \quad (\text{C.45})$$

Divide-se o polinômio em duas parcelas, respectivamente, P_1 e P_2 , calculadas agora separadamente:

$$P(\lambda) = -J_{2,1}P_1(\lambda) + (J_{2,3} - \lambda^2)P_2(\lambda) \quad (\text{C.46})$$

C.3.1 Primeira parcela

$$\begin{aligned}
 P_1(\lambda) &= \begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,3} + \lambda J_{5,2} & (J_{5,4} + \lambda J_{5,5} - \lambda^2) & J_{5,6} \\ J_{6,3} & J_{6,4} & J_{6,6} - \lambda \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,3} & (J_{5,4} + \lambda J_{5,5} - \lambda^2) & J_{5,6} \\ J_{6,3} & J_{6,4} & J_{6,6} - \lambda \end{vmatrix} + \\
 &+ \begin{vmatrix} 0 & J_{1,4} & J_{1,6} \\ \lambda J_{5,2} & (J_{5,4} + \lambda J_{5,5} - \lambda^2) & J_{5,6} \\ 0 & J_{6,4} & J_{6,6} - \lambda \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,3} & (J_{5,4} + \lambda J_{5,5} - \lambda^2) & J_{5,6} \\ J_{6,3} & J_{6,4} & J_{6,6} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,4} & 0 \\ J_{5,3} & (J_{5,4} + \lambda J_{5,5} - \lambda^2) & 0 \\ J_{6,3} & J_{6,4} & -\lambda \end{vmatrix} + \\
 &- \lambda J_{5,2} \begin{vmatrix} J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{6,4} & J_{6,6} - \lambda \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,3} & (J_{5,4} + \lambda J_{5,5} - \lambda^2) & J_{5,6} \\ J_{6,3} & J_{6,4} & J_{6,6} \end{vmatrix} + \\
 &- \lambda \begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{5,3} & (J_{5,4} + \lambda J_{5,5} - \lambda^2) \end{vmatrix} - \lambda J_{5,2} \begin{vmatrix} J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{6,4} & J_{6,6} - \lambda \end{vmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,3} & J_{5,4} & J_{5,6} \\ J_{6,3} & J_{6,4} & J_{6,6} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{1,3} & 0 & J_{1,6} \\ J_{5,3} & \lambda(J_{5,5} - \lambda) & J_{5,6} \\ J_{6,3} & 0 & J_{6,6} \end{vmatrix} + \\
&\quad - \lambda \left[\begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{5,3} & (J_{5,4} + \lambda J_{5,5} - \lambda^2) \end{vmatrix} + J_{5,2} \left(\begin{vmatrix} J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{6,4} & J_{6,6} \end{vmatrix} - \lambda J_{1,4} \right) \right] = \\
&= \begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,3} & J_{5,4} & J_{5,6} \\ J_{6,3} & J_{6,4} & J_{6,6} \end{vmatrix} + \lambda(J_{5,5} - \lambda) \begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,6} \\ J_{6,3} & J_{6,6} \end{vmatrix} + \\
&\quad - \lambda \left[\begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{5,3} & J_{5,4} \end{vmatrix} + \lambda J_{1,3}(J_{5,5} - \lambda) + J_{5,2} \left(\begin{vmatrix} J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{6,4} & J_{6,6} \end{vmatrix} - \lambda J_{1,4} \right) \right] = \\
&= \begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,3} & J_{5,4} & J_{5,6} \\ J_{6,3} & J_{6,4} & J_{6,6} \end{vmatrix} + \\
&\quad + \lambda \left(J_{5,5} \begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,6} \\ J_{6,3} & J_{6,6} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{5,3} & J_{5,4} \end{vmatrix} - J_{5,2} \begin{vmatrix} J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{6,4} & J_{6,6} \end{vmatrix} \right) + \\
&\quad + \lambda^2 \left(\begin{vmatrix} J_{1,4} & J_{1,3} \\ J_{5,5} & J_{5,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{1,6} & J_{1,3} \\ J_{6,6} & J_{6,3} \end{vmatrix} \right) + \\
&\quad + \lambda^3 J_{1,3}
\end{aligned}$$

C.3.2 Segunda parcela

$$P_2(\lambda) = \begin{vmatrix} J_{1,1} - \lambda & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,1} & (J_{5,4} + \lambda J_{5,5} - \lambda^2) & J_{5,6} \\ J_{6,1} & J_{6,4} & J_{6,6} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} J_{1,1}-\lambda & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,1} & J_{5,4} & J_{5,6} \\ J_{6,1} & J_{6,4} & J_{6,6}-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{1,1}-\lambda & 0 & J_{1,6} \\ J_{5,1} & \lambda J_{5,5}-\lambda^2 & J_{5,6} \\ J_{6,1} & 0 & J_{6,6}-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} J_{1,1}-\lambda & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,1} & J_{5,4} & J_{5,6} \\ J_{6,1} & J_{6,4} & J_{6,6}-\lambda \end{vmatrix} + \lambda (J_{5,5}-\lambda) \begin{vmatrix} J_{1,1}-\lambda & J_{1,6} \\ J_{6,1} & J_{6,6}-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,1} & J_{5,4} & J_{5,6} \\ J_{6,1} & J_{6,4} & J_{6,6}-\lambda \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} J_{5,4} & J_{5,6} \\ J_{6,4} & J_{6,6}-\lambda \end{vmatrix} + \\
&+ \lambda (J_{5,5}-\lambda) \begin{vmatrix} J_{1,1}-\lambda & J_{1,6} \\ J_{6,1} & J_{6,6}-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,1} & J_{5,4} & J_{5,6} \\ J_{6,1} & J_{6,4} & J_{6,6} \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} J_{5,4} & J_{5,6} \\ J_{6,4} & J_{6,6}-\lambda \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} \\ J_{5,1} & J_{5,4} \end{vmatrix} + \\
&+ \lambda (J_{5,5}-\lambda) \begin{vmatrix} J_{1,1}-\lambda & J_{1,6} \\ J_{6,1} & J_{6,6}-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,1} & J_{5,4} & J_{5,6} \\ J_{6,1} & J_{6,4} & J_{6,6} \end{vmatrix} - \lambda \left(\begin{vmatrix} J_{5,4} & J_{5,6} \\ J_{6,4} & J_{6,6} \end{vmatrix} - \lambda J_{5,4} \right) - \lambda \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} \\ J_{5,1} & J_{5,4} \end{vmatrix} + \\
&+ \lambda (J_{5,5}-\lambda) \left[\begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,6} \\ J_{6,1} & J_{6,6} \end{vmatrix} - \lambda (J_{1,1} + J_{6,6}) + \lambda^2 \right] = \\
&= \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,1} & J_{5,4} & J_{5,6} \\ J_{6,1} & J_{6,4} & J_{6,6} \end{vmatrix} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda \left(\begin{vmatrix} J_{5,6} & J_{5,4} \\ J_{6,6} & J_{6,4} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} \\ J_{5,1} & J_{5,4} \end{vmatrix} + J_{5,5} \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,6} \\ J_{6,1} & J_{6,6} \end{vmatrix} \right) + \\
& + \lambda^2 \left[J_{5,4} - J_{5,5} (J_{1,1} + J_{6,6}) - \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,6} \\ J_{6,1} & J_{6,6} \end{vmatrix} \right] + \\
& + \lambda^3 (J_{5,5} + J_{1,1} + J_{6,6}) + \\
& - \lambda^4
\end{aligned}$$

C.3.3 Forma final do polinômio característico

Assim,

$$P(\lambda) = -J_{2,1}P_1(\lambda) + (J_{2,3} - \lambda^2)P_2(\lambda) =$$

$$= \sum_{n=0}^6$$

$$a_0 = J_{2,3} \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,1} & J_{5,4} & J_{5,6} \\ J_{6,1} & J_{6,4} & J_{6,6} \end{vmatrix} - J_{2,1} \begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,3} & J_{5,4} & J_{5,6} \\ J_{6,3} & J_{6,4} & J_{6,6} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,1} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{2,3} & J_{2,1} & 0 & 0 \\ J_{5,3} & J_{5,1} & J_{5,4} & J_{5,6} \\ J_{6,3} & J_{6,1} & J_{6,4} & J_{6,6} \end{vmatrix}$$

$$a_1 = \left[\begin{aligned} & J_{2,3} \left(\begin{vmatrix} J_{5,6} & J_{5,4} \\ J_{6,6} & J_{6,4} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} \\ J_{5,1} & J_{5,4} \end{vmatrix} + J_{5,5} \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,6} \\ J_{6,1} & J_{6,6} \end{vmatrix} \right) \\ & + J_{2,1} \left(\begin{vmatrix} J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,4} & J_{5,6} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,4} \\ J_{5,3} & J_{5,4} \end{vmatrix} + J_{5,5} \begin{vmatrix} J_{1,6} & J_{1,3} \\ J_{6,6} & J_{6,3} \end{vmatrix} \right) \end{aligned} \right]$$

$$= J_{5,5} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} & 0 \\ J_{1,3} & J_{1,1} & J_{1,6} \\ J_{6,3} & J_{6,1} & J_{6,6} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} & 0 \\ J_{1,3} & J_{1,1} & J_{1,4} \\ J_{5,3} & J_{5,1} & J_{5,4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} & 0 \\ J_{5,2}J_{1,6} & J_{5,6} & J_{6,6} \\ J_{5,2}J_{1,4} & J_{5,4} & J_{6,4} \end{vmatrix}$$

$$a_2 = -J_{2,1} \left(\begin{vmatrix} J_{1,4} & J_{1,3} \\ J_{5,4} & J_{5,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{1,6} & J_{1,3} \\ J_{6,6} & J_{6,3} \end{vmatrix} \right) + J_{2,3} \left[J_{5,4} - J_{5,5} (J_{1,1} + J_{6,6}) + \begin{vmatrix} J_{1,6} & J_{1,1} \\ J_{6,6} & J_{6,1} \end{vmatrix} \right] - \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,1} & J_{5,4} & J_{5,6} \\ J_{6,1} & J_{6,4} & J_{6,6} \end{vmatrix} =$$

$$= -J_{2,1} \begin{vmatrix} J_{1,4} & J_{1,3} \\ J_{5,4} & J_{5,3} \end{vmatrix} + J_{2,3} \begin{vmatrix} J_{5,4} & J_{5,5} & 0 \\ J_{1,1} & 1 & -1 \\ J_{6,6} & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,3} & J_{1,6} \\ J_{2,1} & J_{2,3} & 0 \\ J_{6,1} & J_{6,3} & J_{6,6} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,1} & J_{5,4} & J_{5,6} \\ J_{6,1} & J_{6,4} & J_{6,6} \end{vmatrix}$$

$$a_3 = -J_{2,1}J_{1,3} + J_{2,3}(J_{1,1} + J_{5,5} + J_{6,6}) - \left(\begin{vmatrix} J_{5,6} & J_{5,4} \\ J_{6,6} & J_{6,4} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} \\ J_{5,1} & J_{5,4} \end{vmatrix} + J_{5,5} \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,6} \\ J_{6,1} & J_{6,6} \end{vmatrix} \right)$$

$$a_4 = \left\{ J_{2,3} - J_{5,4} + J_{5,5}(J_{1,1} + J_{6,6}) + \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,6} \\ J_{6,1} & J_{6,6} \end{vmatrix} \right\}$$

$$a_5 = -(J_{1,1} + J_{5,5} + J_{6,6})$$

$$a_6 = 1$$

C.4

Identificando as dependências dos controladores

Sabe-se portanto que o Jacobiano do sistema tem a forma

$$J = \begin{pmatrix} J_{1,1} & 0 & J_{1,3} & J_{1,4} & 0 & J_{1,6} \\ J_{2,1} & 0 & J_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ J_{5,1} & J_{5,2} & J_{5,3} & J_{5,4} & J_{5,5} & J_{5,6} \\ J_{6,1} & 0 & J_{6,3} & J_{6,4} & 0 & J_{6,6} \end{pmatrix}$$

Os termos destacados mostram as componentes que dependem das constantes dos controladores. Estas componentes são reduzidas a seguir:

$$J_{5,1} = -\frac{\mathbf{K}_{\text{PSS}}}{\mathbf{T}_2} (\mathbf{T}_1 K_{5,1} - J_{2,1})$$

$$J_{6,1} = -\frac{\mathbf{K}_e}{\mathbf{T}_e} K_{6,1}$$

$$J_{5,2} = -\frac{\mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1}{\mathbf{T}_2} K_{5,2}$$

$$J_{5,3} = \frac{\mathbf{K}_{\text{PSS}}}{\mathbf{T}_2} (J_{2,3} - \mathbf{T}_1 K_{5,3})$$

$$J_{6,3} = -\frac{\mathbf{K}_e}{\mathbf{T}_e} K_{6,3}$$

$$J_{5,4} = -\frac{1}{T_2 T_w} \left(1 + T_w K_{PSS} T_1 K_{5,4} \right)$$

$$J_{6,4} = -\frac{1}{T_e}$$

$$J_{5,5} = -\frac{T_w + T_2}{T_2 T_w}$$

$$J_{5,6} = -\frac{K_{PSS} T_1}{T_2} K_{5,6}$$

$$J_{6,6} = -\frac{1}{T_e}$$

Agora, os $K_{i,j}$ denotados em negrito são funções apenas do estado sobre o qual o jacobiano é calculado. É doravante necessário escrever os coeficientes a_i do polinômio característico como funções destes parâmetros, mais especificamente a_0, a_1, a_3 e a_5 porque são determinantes no esboço do Diagrama de Bifurcações, como deduzido a partir da página 107. Além disso, o foco é isolar os ganhos do AVR K_e e do PSS K_{PSS} , uma vez que estas variáveis serão variadas enquanto as outras serão fixadas a partir daquela página.

C.4.1 Coeficiente a_0

$$a_0 = J_{2,3} \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,1} & J_{5,4} & J_{5,6} \\ J_{6,1} & J_{6,4} & J_{6,6} \end{vmatrix} - J_{2,1} \begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,3} & J_{5,4} & J_{5,6} \\ J_{6,3} & J_{6,4} & J_{6,6} \end{vmatrix}$$

Note-se que todas as linhas de baixo dos determinante são proporcionais a $-T_e^{-1}$.

$$-T_e a_0 = J_{2,3} \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,1} & J_{5,4} & J_{5,6} \\ K_e K_{6,1} & 1 & 1 \end{vmatrix} - J_{2,1} \begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ J_{5,3} & J_{5,4} & J_{5,6} \\ K_e K_{6,3} & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Nota-se também que as linhas do meio são inversamente proporcionais a T_2 , nota-se que a segunda e terceira colunas são idênticas nos determinantes, de forma que se possa somá-los:

$$-T_e T_2 a_0 = J_{2,3} \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ K_{PSS} (J_{2,1} - T_1 K_{5,1}) & -\frac{1 + T_w K_{PSS} T_1 K_{5,4}}{T_w} & -K_{PSS} T_1 K_{5,6} \\ K_e K_{6,1} & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& -J_{2,1} \begin{vmatrix} J_{1,3} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ \mathbf{K}_{\text{PSS}}(J_{2,3} - \mathbf{T}_1 K_{5,3}) & -\frac{1 + \mathbf{T}_w \mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1 K_{5,4}}{\mathbf{T}_w} & -\mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1 K_{5,6} \\ K_e K_{6,3} & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\
& = \begin{vmatrix} J_{1,1} J_{2,3} - J_{2,1} J_{1,3} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ \mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1 (J_{2,3} K_{5,1} - J_{2,1} K_{5,3}) & -\left(\frac{1}{\mathbf{T}_w} + \mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1 K_{5,4}\right) & -\mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1 K_{5,6} \\ \mathbf{K}_e (J_{2,3} K_{6,1} - J_{2,1} K_{6,3}) & 1 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Diminuindo a terceira coluna da segunda, e multiplicando a equação por -1 ,

$$\mathbf{T}_e \mathbf{T}_2 a_0 = \begin{vmatrix} J_{1,1} J_{2,3} - J_{2,1} J_{1,3} & J_{1,4} - J_{1,6} & J_{1,6} \\ \mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1 (J_{2,1} K_{5,3} - J_{2,3} K_{5,1}) & \frac{1}{\mathbf{T}_w} + \mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1 (K_{5,4} - K_{5,6}) & \mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1 K_{5,6} \\ \mathbf{K}_e (J_{2,3} K_{6,1} - J_{2,1} K_{6,3}) & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Isolando $\mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1$ da linha do meio e separando o elemento (2,2) da sua coluna:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{T}_e \mathbf{T}_2}{\mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1} a_0 &= \begin{vmatrix} J_{1,1} J_{2,3} - J_{2,1} J_{1,3} & J_{1,4} - J_{1,6} & J_{1,6} \\ J_{2,1} K_{5,3} - J_{2,3} K_{5,1} & \frac{1}{\mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_w} + (K_{5,4} - K_{5,6}) & K_{5,6} \\ \mathbf{K}_e (J_{2,3} K_{6,1} - J_{2,1} K_{6,3}) & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} J_{1,1} J_{2,3} - J_{2,1} J_{1,3} & J_{1,4} - J_{1,6} & J_{1,6} \\ J_{2,1} K_{5,3} - J_{2,3} K_{5,1} & K_{5,4} - K_{5,6} & K_{5,6} \\ \mathbf{K}_e (J_{2,3} K_{6,1} - J_{2,1} K_{6,3}) & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{1,1} J_{2,3} - J_{2,1} J_{1,3} & 0 & J_{1,6} \\ J_{2,1} K_{5,3} - J_{2,3} K_{5,1} & \frac{1}{\mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_w} & K_{5,6} \\ \mathbf{K}_e (J_{2,3} K_{6,1} - J_{2,1} K_{6,3}) & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= \mathbf{K}_e (J_{2,3} K_{6,1} - J_{2,1} K_{6,3}) \begin{vmatrix} J_{1,4} - J_{1,6} & J_{1,6} \\ K_{5,4} - K_{5,6} & K_{5,6} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{1,1} J_{2,3} - J_{2,1} J_{1,3} & J_{1,4} - J_{1,6} \\ J_{2,1} K_{5,3} - J_{2,3} K_{5,1} & K_{5,4} - K_{5,6} \end{vmatrix} + \\
&\quad - \frac{\mathbf{K}_e}{\mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_w} J_{1,6} (J_{2,3} K_{6,1} - J_{2,1} K_{6,3}) + \frac{1}{\mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_w} (J_{1,1} J_{2,3} - J_{2,1} J_{1,3}) = \\
&= \mathbf{K}_e \begin{vmatrix} J_{1,4} & J_{1,6} \\ K_{5,4} & K_{5,6} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ K_{6,3} & K_{6,1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} & 0 & 0 \\ J_{1,3} & J_{1,1} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ -K_{5,3} & -K_{5,1} & K_{5,4} & K_{5,6} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \\
&\quad - \frac{\mathbf{K}_e}{\mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_w} J_{1,6} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ K_{6,3} & K_{6,1} \end{vmatrix} + \frac{1}{\mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_w} \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,3} \\ J_{2,1} & J_{2,3} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Assim,

$$a_0 = \frac{\mathbf{K}_e \mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1}{\mathbf{T}_e \mathbf{T}_2} \begin{vmatrix} J_{1,4} & J_{1,6} \\ K_{5,4} & K_{5,6} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ K_{6,3} & K_{6,1} \end{vmatrix} + \frac{\mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1}{\mathbf{T}_e \mathbf{T}_2} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} & 0 & 0 \\ J_{1,3} & J_{1,1} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ -K_{5,3} & -K_{5,1} & K_{5,4} & K_{5,6} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$-\frac{\mathbf{K}_e}{\mathbf{T}_e \mathbf{T}_w \mathbf{T}_2} J_{1,6} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ K_{6,3} & K_{6,1} \end{vmatrix} + \frac{1}{\mathbf{T}_w \mathbf{T}_e \mathbf{T}_2} \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,3} \\ J_{2,1} & J_{2,3} \end{vmatrix}$$

Nota-se que

$$\begin{vmatrix} J_{1,4} & J_{1,6} \\ K_{5,4} & K_{5,6} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} & 0 & 0 \\ J_{1,3} & J_{1,1} & J_{1,4} & J_{1,6} \\ -K_{5,3} & -K_{5,1} & K_{5,4} & K_{5,6} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \because J_{1,4} \equiv J_{1,6}, K_{5,4} \equiv K_{5,6}$$

No primeiro caso, é fácil notar que as colunas são iguais, rendendo o determinante nulo. Já no segundo caso, percebe-se que a terceira coluna e a quarta também são iguais. Resulta que

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{\mathbf{K}_e}{\mathbf{T}_e \mathbf{T}_w \mathbf{T}_2} J_{1,6} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ K_{6,3} & K_{6,1} \end{vmatrix} + \frac{1}{\mathbf{T}_w \mathbf{T}_e \mathbf{T}_2} \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,3} \\ J_{2,1} & J_{2,3} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\mathbf{T}_e \mathbf{T}_w \mathbf{T}_2} \left(\begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,3} \\ J_{2,1} & J_{2,3} \end{vmatrix} - \mathbf{K}_e J_{1,6} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ K_{6,3} & K_{6,1} \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

Portanto o polinômio característico admite solução nula, isto é, o sistema tem autovalor nulo, se e somente se

$$\mathbf{K}_e = \frac{\begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,3} \\ J_{2,1} & J_{2,3} \end{vmatrix}}{J_{1,6} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ K_{6,3} & K_{6,1} \end{vmatrix}}$$

É interessante frisar que a_0 é nulo para apenas um valor específico do ganho do AVR, de forma que apenas um valor deste ganho provoca autovalor nulo no sistema e este valor seja função do estado em que o Jacobiano é calculado. Um corolário interessante é que há equilíbrios nos quais é impossível este evento porque o valor de ganho necessário é negativo; trata-se do caso do equilíbrio $\vec{S} = 1 + j0.5$, utilizado durante todo este trabalho.

C.4.2 Coeficiente a_1

$$a_1 = J_{5,5} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} & 0 \\ J_{1,3} & J_{1,1} & J_{1,6} \\ J_{6,3} & J_{6,1} & J_{6,6} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} & 0 \\ J_{1,3} & J_{1,1} & J_{1,4} \\ J_{5,3} & J_{5,1} & J_{5,4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} & 0 \\ J_{5,2} J_{1,6} & J_{5,6} & J_{6,6} \\ J_{5,2} J_{1,4} & J_{5,4} & J_{6,4} \end{vmatrix}$$

Como $J_{1,4} = J_{1,6}$, $K_{5,4} = K_{5,6}$ e $J_{6,6} = J_{6,4}$ diminue-se a segunda linha da terceira no última determinante:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= J_{5,5} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} & 0 \\ J_{1,3} & J_{1,1} & J_{1,6} \\ J_{6,3} & J_{6,1} & J_{6,6} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} & 0 \\ J_{1,3} & J_{1,1} & J_{1,4} \\ J_{5,3} & J_{5,1} & J_{5,4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} & 0 \\ J_{5,2}J_{1,6} & J_{5,6} & J_{6,6} \\ 0 & J_{5,4} - J_{5,6} & 0 \end{vmatrix} = \\
 &= J_{5,5} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} & 0 \\ J_{1,3} & J_{1,1} & J_{1,6} \\ J_{6,3} & J_{6,1} & J_{6,6} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} & 0 \\ J_{1,3} & J_{1,1} & J_{1,4} \\ J_{5,3} & J_{5,1} & J_{5,4} \end{vmatrix} - (J_{5,4} - J_{5,6}) J_{2,3} J_{6,6} = \\
 &= \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} & 0 \\ J_{1,3} & J_{1,1} & J_{1,6} \\ J_{5,5}J_{6,3} - J_{5,3} & J_{5,5}J_{6,1} - J_{5,1} & J_{5,5}J_{6,6} - J_{5,4} \end{vmatrix} - (J_{5,4} - J_{5,6}) J_{2,3} J_{6,6} = \\
 &= -J_{1,6} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ J_{5,5}J_{6,3} - J_{5,3} & J_{5,5}J_{6,1} - J_{5,1} \end{vmatrix} + (J_{5,5}J_{6,6} - J_{5,4}) \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ J_{1,3} & J_{1,1} \end{vmatrix} - (J_{5,4} - J_{5,6}) J_{2,3} J_{6,6} = \\
 &= J_{1,6} \left(\begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ J_{5,3} & J_{5,1} \end{vmatrix} - J_{5,5} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ J_{6,3} & J_{6,1} \end{vmatrix} \right) + (J_{5,5}J_{6,6} - J_{5,4}) \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ J_{1,3} & J_{1,1} \end{vmatrix} - (J_{5,4} - J_{5,6}) J_{2,3} J_{6,6} = \\
 &= J_{1,6} \left(-\frac{\mathbf{K}_{\text{PSS}}}{\mathbf{T}_2} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ \mathbf{T}_1 K_{5,3} - J_{2,3} & \mathbf{T}_1 K_{5,1} - J_{2,1} \end{vmatrix} - \frac{\mathbf{T}_w + \mathbf{T}_2}{\mathbf{T}_w \mathbf{T}_2} \frac{\mathbf{K}_e}{\mathbf{T}_e} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ K_{6,3} & K_{6,1} \end{vmatrix} \right) + \\
 &\quad + \left[\frac{\mathbf{T}_w + \mathbf{T}_2}{\mathbf{T}_w \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_e} + \frac{1}{\mathbf{T}_w \mathbf{T}_2} (1 + \mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_w \mathbf{T}_1 K_{5,4}) \right] \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ J_{1,3} & J_{1,1} \end{vmatrix} - \frac{J_{2,3}}{\mathbf{T}_e} \left(\frac{1}{\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_w} + \frac{\mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1}{\mathbf{T}_2} K_{5,4} - \frac{\mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1}{\mathbf{T}_2} K_{5,6} \right)
 \end{aligned}$$

No primeiro determinante, somando as duas linhas,

$$\begin{aligned}
 a_1 &= J_{1,6} \left(-\frac{\mathbf{K}_{\text{PSS}}}{\mathbf{T}_2} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ \mathbf{T}_1 K_{5,3} & \mathbf{T}_1 K_{5,1} \end{vmatrix} - \frac{\mathbf{T}_w + \mathbf{T}_2}{\mathbf{T}_w \mathbf{T}_2} \frac{\mathbf{K}_e}{\mathbf{T}_e} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ K_{6,3} & K_{6,1} \end{vmatrix} \right) + \\
 &\quad + \left[\frac{\mathbf{T}_w + \mathbf{T}_2}{\mathbf{T}_w \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_e} + \frac{1}{\mathbf{T}_w \mathbf{T}_2} (1 + \mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_w \mathbf{T}_1 K_{5,4}) \right] \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ J_{1,3} & J_{1,1} \end{vmatrix} - \frac{J_{2,3}}{\mathbf{T}_e} \left[\frac{1}{\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_w} + \frac{\mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1}{\mathbf{T}_2} (K_{5,4} - K_{5,6}) \right] = \\
 &= \mathbf{K}_{\text{PSS}} \frac{\mathbf{T}_1}{\mathbf{T}_2} \left(K_{5,4} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ J_{1,3} & J_{1,1} \end{vmatrix} - J_{1,6} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ K_{5,3} & K_{5,1} \end{vmatrix} - \frac{J_{2,3} (K_{5,4} - K_{5,6})}{\mathbf{T}_e} \right) - \mathbf{K}_e \frac{\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_w}{\mathbf{T}_w \mathbf{T}_e \mathbf{T}_2} J_{1,6} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ K_{6,3} & K_{6,1} \end{vmatrix} +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_w + \mathbf{T}_e}{\mathbf{T}_e \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_w} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ J_{1,3} & J_{1,1} \end{vmatrix} - \frac{J_{2,3}}{\mathbf{T}_e \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_w}$$

No primeiro termo, elimina-se a última parcela porque $K_{5,4} = K_{5,6}$. Agrupando os determinantes restantes,

$$a_1 = \mathbf{K}_{\text{PSS}} \frac{\mathbf{T}_1}{\mathbf{T}_2} \begin{vmatrix} K_{5,4} & K_{5,3} & K_{5,1} \\ 0 & J_{2,3} & J_{2,1} \\ J_{1,6} & J_{1,3} & J_{1,1} \end{vmatrix} - \mathbf{K}_e \frac{\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_w}{\mathbf{T}_w \mathbf{T}_e \mathbf{T}_2} J_{1,6} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ K_{6,3} & K_{6,1} \end{vmatrix} + \frac{\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_w + \mathbf{T}_e}{\mathbf{T}_e \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_w} \begin{vmatrix} J_{2,3} & J_{2,1} \\ J_{1,3} & J_{1,1} \end{vmatrix} - \frac{J_{2,3}}{\mathbf{T}_e \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_w}$$

Uma observação interessante é que, para o equilíbrio $\vec{S} = 1 + j0.5$, o determinante que multiplica \mathbf{K}_{PSS} é nulo.

C.4.3 Coeficiente a_3

$$\begin{aligned} a_3 &= -J_{2,1} J_{1,3} + J_{2,3} (J_{1,1} + \mathbf{J}_{5,5} + \mathbf{J}_{6,6}) - \left(\begin{vmatrix} \mathbf{J}_{5,6} & \mathbf{J}_{5,4} \\ \mathbf{J}_{6,6} & \mathbf{J}_{6,4} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} \\ \mathbf{J}_{5,1} & \mathbf{J}_{5,4} \end{vmatrix} + \mathbf{J}_{5,5} \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,6} \\ \mathbf{J}_{6,1} & \mathbf{J}_{6,6} \end{vmatrix} \right) = \\ &= -J_{2,1} J_{1,3} + J_{2,3} \left(J_{1,1} - \frac{\mathbf{T}_w + \mathbf{T}_2}{\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_w} - \frac{1}{\mathbf{T}_e} \right) - \frac{1}{\mathbf{T}_e \mathbf{T}_2} \begin{vmatrix} \mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1 K_{5,6} & \left(\frac{1}{\mathbf{T}_w} + \mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1 K_{5,4} \right) \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} \\ -\frac{\mathbf{K}_{\text{PSS}}}{\mathbf{T}_2} (\mathbf{T}_1 K_{5,1} - J_{2,1}) & -\frac{1}{\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_w} (1 + \mathbf{T}_w \mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1 K_{5,4}) \end{vmatrix} + \frac{\mathbf{T}_w + \mathbf{T}_2}{\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_w} \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,6} \\ -\frac{\mathbf{K}_e}{\mathbf{T}_e} K_{6,1} & -\frac{1}{\mathbf{T}_e} \end{vmatrix} = \\ &= -J_{2,1} J_{1,3} + J_{2,3} \left(J_{1,1} - \frac{\mathbf{T}_w + \mathbf{T}_2}{\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_w} - \frac{1}{\mathbf{T}_e} \right) - \frac{1}{\mathbf{T}_e \mathbf{T}_2} \left[\mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1 (K_{5,6} - K_{5,4}) - \frac{1}{\mathbf{T}_w} \right] + \\ &- \frac{1}{\mathbf{T}_2} \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} \\ \mathbf{K}_{\text{PSS}} (\mathbf{T}_1 K_{5,1} - J_{2,1}) & \left(\frac{1}{\mathbf{T}_w} + \mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1 K_{5,4} \right) \end{vmatrix} - \frac{\mathbf{T}_w + \mathbf{T}_2}{\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_w \mathbf{T}_e} \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,6} \\ \mathbf{K}_e K_{6,1} & 1 \end{vmatrix} = \\ &= -J_{2,1} J_{1,3} + J_{2,3} \left(J_{1,1} - \frac{\mathbf{T}_w + \mathbf{T}_2}{\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_w} - \frac{1}{\mathbf{T}_e} \right) - \frac{1}{\mathbf{T}_e \mathbf{T}_2} \left[\mathbf{K}_{\text{PSS}} \mathbf{T}_1 (K_{5,6} - K_{5,4}) - \frac{1}{\mathbf{T}_w} \right] + \\ &dad - \frac{1}{\mathbf{T}_2} \left[\mathbf{K}_{\text{PSS}} \left(\mathbf{T}_1 \begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} \\ K_{5,1} & K_{5,4} \end{vmatrix} + J_{2,1} J_{1,4} \right) + \frac{J_{1,1}}{\mathbf{T}_w} \right] - \frac{\mathbf{T}_w + \mathbf{T}_2}{\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_w \mathbf{T}_e} (J_{1,1} - \mathbf{K}_e K_{6,1} J_{1,6}) = \\ &= -\mathbf{K}_{\text{PSS}} \left[\frac{\mathbf{T}_1}{\mathbf{T}_2} \left(\begin{vmatrix} J_{1,1} & J_{1,4} \\ K_{5,1} & K_{5,4} \end{vmatrix} + \frac{K_{5,6} - K_{5,4}}{\mathbf{T}_e} \right) + \frac{J_{2,1} J_{1,4}}{\mathbf{T}_2} \right] + \mathbf{K}_e \frac{\mathbf{T}_w + \mathbf{T}_2}{\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_w \mathbf{T}_e} K_{6,1} J_{1,6} + \end{aligned}$$

$$-J_{2,1}J_{1,3} + J_{2,3}\left(J_{1,1} - \frac{\mathbf{T}_w + \mathbf{T}_2}{\mathbf{T}_2\mathbf{T}_w} - \frac{1}{\mathbf{T}_e}\right) + \frac{1}{\mathbf{T}_e\mathbf{T}_2\mathbf{T}_w} - J_{1,1}\frac{\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_w + \mathbf{T}_e}{\mathbf{T}_w\mathbf{T}_2}$$

Sintonia do sistema controlado por AVR

Logo após ter o sistema controlado por AVR equacionado, tendo suas EADs deduzidas, então é necessário sintonizar o controlador; em outras palavras, para poder simular o sistema controlado por AVR, é necessário escolher os valores de K_e e T_e que atendem a certos requisitos de estabilidade e de performance.

Assim, o objetivo deste apêndice, bem como do próximo que trata da sintonia do PSS, é exemplificar as técnicas lineares de sintonia de controladores empregadas, baseadas no princípio de pequenas perturbações.

A sintonia do AVR segue três passos bem-definidos. O primeiro, a obtenção da função de transferência entre a perturbação da potência mecânica ΔP_m e a tensão terminal ΔV_t . Depois, o traçado das margens de estabilidade relativa - margem de ganho e margem de fase - do sistema, parametrizadas pelos parâmetros K_e e T_e do controlador. Finalmente, o ajuste dos parâmetros que resultam numa combinação aceitável de margens de estabilidade do sistema.

D.1

Modelo linearizado do sistema

Acoplando o controlador AVR ao modelo linearizado da figura 2, resulta o modelo linearizado da figura 28.

A ideia é encontrar uma função de transferência que relaciona um desvio da tensão terminal V_t com uma perturbação na potência mecânica P_m , como na equação (D.1).

$$\frac{\Delta V_t}{\Delta P_m} = G(s) \quad (\text{D.1})$$

A partir desta função de transferência analisam-se os aspectos de estabilidade de $G(s)$ como lugar de raízes e margens de ganho e fase. Do diagrama linearizado, resulta o sistema (D.2).

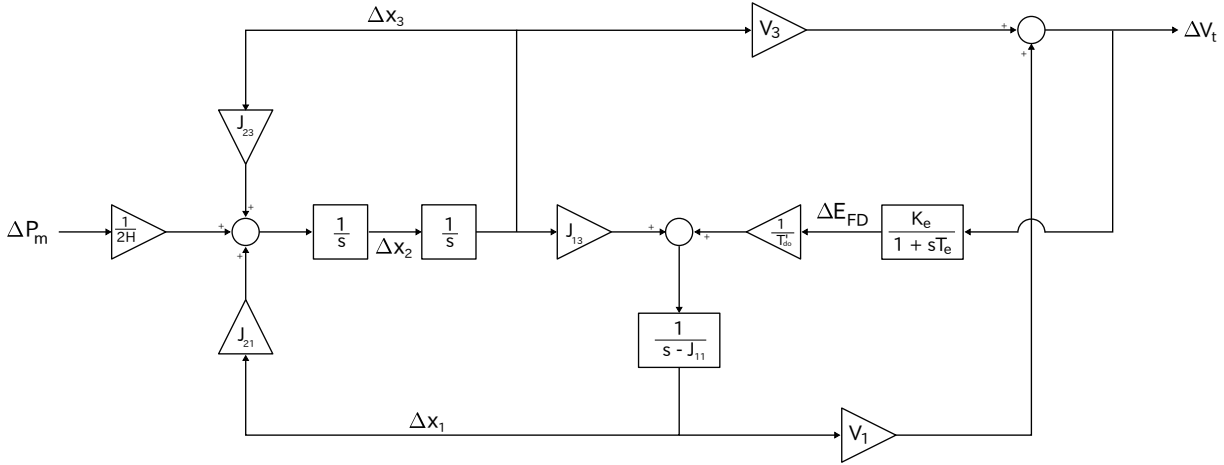


Figura 28 – Diagrama de blocos do sistema OMIB linearizado controlado por AVR.

$$\begin{cases} \Delta x_3 = \frac{1}{s^2} \left(J_{2,3} \Delta x_3 + J_{2,1} \Delta x_1 + \frac{\Delta P_m}{2H} \right) \\ \Delta V_t = V_1 \Delta x_1 + V_3 \Delta x_3 \\ \Delta x_1 = \frac{1}{s - J_{1,1}} \left(J_{1,3} \Delta x_3 + \frac{1}{T'_{do}} \frac{K_e}{1 + sT_e} \Delta V_t \right) \end{cases} \quad (D.2)$$

Às derivadas parciais de V_t avaliadas no equilíbrio denominam-se V_1 e V_3 , e valem

$$V_1 = \left. \frac{\partial V_t}{\partial x_1} \right|_{x_0} = \frac{Z}{X} \frac{\left[x_1 - E \cos(x_3) \right] \left(\frac{Z}{X} \right) + E \cos(x_3 + \alpha - \phi)}{\sqrt{\left[x_1^2 - 2E x_1 \cos(x_3) + E^2 \right] \left(\frac{Z}{X} \right)^2 + 2E \frac{Z}{X} \left[x_1 \cos(x_3 + \alpha - \phi) - E \cos(\alpha - \phi) \right] + E^2}} \quad (D.3)$$

$$V_3 = \left. \frac{\partial V_t}{\partial x_3} \right|_{x_0} = \frac{Z}{X} \frac{x_1 E \left[\sin(x_3) \left(\frac{Z}{X} \right) - \sin(x_3 + \alpha - \phi) \right]}{\sqrt{\left[x_1^2 - 2E x_1 \cos(x_3) + E^2 \right] \left(\frac{Z}{X} \right)^2 + 2E \frac{Z}{X} \left[x_1 \cos(x_3 + \alpha - \phi) - E \cos(\alpha - \phi) \right] + E^2}} \quad (D.4)$$

Agrupando as equações,

$$\begin{cases} \Delta x_3 = \frac{1}{s^2 - J_{2,3}} \left(J_{2,1} \Delta x_1 + \frac{\Delta P_m}{2H} \right) \\ \Delta V_t = V_1 \Delta x_1 + V_3 \Delta x_3 \\ \Delta x_1 = \frac{1}{s - J_{1,1}} \left(J_{1,3} \Delta x_3 + \frac{K_e}{T'_{do}} \frac{K_e}{1 + sT_e} \Delta V_t \right) \end{cases} \quad (D.5)$$

Substituindo a primeira equação na terceira,

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 &= \frac{J_{1,3}}{(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3})} \left(J_{2,1} \Delta x_1 + \frac{\Delta P_m}{2H} \right) + \frac{K_e}{T'_{do}(s - J_{1,1})(1 + s T_e)} \Delta V_t \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \Delta x_1 \left(1 - \frac{J_{1,3} J_{2,1}}{(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3})} \right) &= \frac{J_{1,3}}{2H(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3})} \Delta P_m + \frac{K_e}{T'_{do}(s - J_{1,1})(1 + s T_e)} \Delta V_t \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \Delta x_1 \left[(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1} \right] &= \frac{J_{1,3}}{2H} \Delta P_m + \frac{K_e (s^2 - J_{2,3})}{T'_{do}(1 + s T_e)} \Delta V_t \\
\therefore \Delta x_1 &= \frac{J_{1,3}}{2H \left[(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1} \right]} \Delta P_m + \frac{K_e (s^2 - J_{2,3})}{T'_{do}(1 + s T_e) \left[(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1} \right]} \Delta V_t \quad (D.6)
\end{aligned}$$

Substituindo este na equação de Δx_3 ,

$$\begin{aligned}
\Delta x_3 &= \frac{1}{s^2 - J_{2,3}} \left(\frac{J_{2,1} K_e (s^2 - J_{2,3})}{T'_{do}(1 + s T_e) \left[(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1} \right]} \Delta V_t + \frac{(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3})}{2H \left[(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1} \right]} \Delta P_m \right) = \\
&= \frac{J_{2,1} K_e}{T'_{do}(1 + s T_e) \left[(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1} \right]} \Delta V_t + \frac{(s - J_{1,1})}{2H \left[(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1} \right]} \Delta P_m \quad (D.7)
\end{aligned}$$

Substituindo as equações (D.6) e (D.7) na equação de ΔV_t , então

$$\Delta V_t = \frac{J_{1,3} V_1 + (s - J_{1,1}) V_3}{2H \left[(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1} \right]} \Delta P_m + \frac{K_e \left[J_{2,1} V_3 + (s^2 - J_{2,3}) V_1 \right]}{T'_{do}(1 + s T_e) \left[(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1} \right]} \Delta V_t \quad (D.8)$$

$$\therefore \frac{\Delta V_t}{\Delta P_m} = \frac{\left[J_{1,3} V_1 + (s - J_{1,1}) V_3 \right] T'_{do}(1 + s T_e) \left[(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1} \right]}{2H \left[(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1} \right] \left\{ T'_{do}(1 + s T_e) \left[(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1} \right] - K_e \left[J_{2,1} V_3 + (s^2 - J_{2,3}) V_1 \right] \right\}} \quad (D.9)$$

Denotam-se o numerador e denominador pelos vetores N e D . Numeram-se-os começando do índice nulo para que os índices dos vetores coincidam com os índices dos expoentes da variável de Laplace:

$$\frac{\Delta V_t}{\Delta P_m} = G(s) = \frac{\sum_{i=0}^{i=5} N_i s^i}{\sum_{i=0}^{i=7} D_i s^i}$$

Sendo o vetor de coeficientes do numerador $\{N_i\}$, $i \in \{0, 1, \dots, 5\}$, isto é, o primeiro termo corresponde ao expoente s^0 e o último a s^5 :

$$N = T'_{do} \begin{bmatrix} (-J_{11}J_{23} + J_{13}J_{21})(J_{11}V_3 - J_{13}V_1) \\ -(-J_{11}J_{23} + J_{13}J_{21})[V_3 - T_e(J_{11}V_3 - J_{13}V_1)] - J_{23}(J_{11}V_3 - J_{13}V_1) \\ J_{23}V_3 + (J_{11} + T_eJ_{23})(J_{11}V_3 - J_{13}V_1) - T_eV_3(J_{11}J_{23} + J_{13}J_{21}) \\ J_{23}T_eV_3 - J_{11}[V_3 - T_e(J_{11}V_3 - J_{13}V_1)] - (J_{11}V_3 - J_{13}V_1) \\ V_3 - T_e(2J_{11}V_3 - J_{13}V_1) \\ T_eV_3 \end{bmatrix} \quad (D.10)$$

E a sequência de coeficientes do denominador $\{D_i\}$, $i \in \{0, 1, \dots, 7\}$:

$$D = 2H \begin{bmatrix} (-J_{11}J_{23} + J_{13}J_{21})[K_e(J_{21}V_3 - J_{23}V_1) + T'_{do}(-J_{11}J_{23} + J_{13}J_{21})] \\ J_{23}K_e(J_{21}V_3 - J_{23}V_1) - T'_{do}(-J_{11}J_{23} + J_{13}J_{21})[-2J_{23} - T_e(-J_{11}J_{23} + J_{13}J_{21})] \\ J_{11}J_{21}V_3 + T'_{do}[2J_{2,3}^2 + (J_{1,1} + J_{2,3}T_e)(-J_{11}J_{23} + J_{13}J_{21})] + (-2J_{11}J_{23} + J_{13}J_{21})K_eV_1 \\ -K_e(J_{21}V_3 - 2J_{23}V_1) + T'_{do}[J_{2,3}^2T_e + 2(J_{11}T_e - 1)(-J_{11}J_{23} + J_{13}J_{21})] \\ J_{11}K_eV_1 + T'_{do}[-2J_{23} + J_{1,1}^2 - 2T_e(2J_{11}J_{23} + J_{13}J_{21})] \\ T'_{do}[T_e(-2J_{2,3} + J_{1,1}^2) - 2J_{11}] - K_eV_1 \\ T'_{do}(1 - 2J_{11}T_e) \\ T'_{do}T_e \end{bmatrix} \quad (D.11)$$

D.2

Calculando as margens de ganho e fase do sistema

Substituindo $s = j\omega$, então

$$G(j\omega) = \frac{(N_4\omega^4 - N_2\omega^2 + N_0) + j\omega(N_5\omega^4 - N_3\omega^2 + N_1)}{(-D_6\omega^6 + D_4\omega^4 - D_2\omega^2 + D_0) + j\omega(-D_7\omega^6 + D_5\omega^4 - D_3\omega^2 + D_1)} \quad (D.12)$$

A margem de ganho do sistema estima em quantas vezes o ganho do sistema deve ser multiplicado para que o sistema torne-se localmente instável. É definida como

$$\angle[G(\omega_p)] = \pi \Rightarrow G_m = |G(\omega_p)|^{-1} \quad (D.13)$$

Ou seja, trata-se do inverso do módulo calculado em uma frequência cuja fase é π radianos. Já a Margem de Fase é a medida do ângulo do sistema quando seu ganho é unitário, ou seja,

$$\left| G(\omega_G) \right| = 1 \Rightarrow \phi_m = \angle \left[G(\omega_G) \right] \quad (D.14)$$

Sejam portanto a margem de ganho desejada G_m e a margem de fase desejada ϕ_m . As definições das margens de estabilidade implicam que

$$\begin{cases} G(j\omega_G) = -\frac{1}{G_m} \\ G(j\omega_P) = e^{j\phi_m} \end{cases} \quad (D.15)$$

Deste sistema, resulta

$$\begin{cases} \frac{(\omega_G^4 N_4 - \omega_G^2 N_2 + N_0) + j\omega_G (\omega_G^4 N_5 - \omega_G^2 N_3 + N_1)}{(-\omega_G^6 D_6 + \omega_G^4 D_4 - \omega_G^2 D_2 + D_0) + j\omega_G (-\omega_G^6 D_7 + \omega_G^4 D_5 - \omega_G^2 D_3 + D_1)} = -\frac{1}{G_m} \\ \frac{(\omega_P^4 N_4 - \omega_P^2 N_2 + N_0) + j\omega_P (\omega_P^4 N_5 - \omega_P^2 N_3 + N_1)}{(-\omega_P^6 D_6 + \omega_P^4 D_4 - \omega_P^2 D_2 + D_0) + j\omega_P (-\omega_P^6 D_7 + \omega_P^4 D_5 - \omega_P^2 D_3 + D_1)} = e^{j\phi_m} \end{cases} \quad (D.16)$$

Em se tratando de sistema no corpo dos complexos, então pode-se dividir as duas equações em parte real e imaginária, originando quatro equações reais. Em tempo, nota-se que, dado o controlador (isto é, fixas as constantes K_e e T_e), o sistema possui quatro incógnitas: ω_G , ω_P , G_m , ϕ_m . As duas primeiras são determinadas resolvendo a primeira equação do sistema D.16, e as duas últimas são obtidas resolvendo-se a segunda.

D.3

Resolvendo a primeira equação do sistema (D.16)

Desenvolvendo a primeira equação do sistema (D.16), denota-se a parte real do numerador como N_R e a imaginária como N_I , analogamente para o denominador, para a primeira equação:

$$\frac{N_R + j\omega N_I}{D_R + j\omega D_I} = -\frac{1}{G_m} \Leftrightarrow -G_m (N_R + j\omega N_I) = D_R + j\omega D_I \quad (D.17)$$

E separando-a em partes reais e imaginárias,

$$\begin{cases} \omega_G^6 D_6 - \omega_G^4 (D_4 + G_m N_4) + \omega_G^2 (D_2 + G_m N_2) - (D_0 + G_m N_0) = 0 \\ \omega_G^6 D_7 - \omega_G^4 (D_5 + G_m N_5) + \omega_G^2 (D_3 + G_m N_3) - (D_1 + G_m N_1) = 0 \end{cases} \quad (D.18)$$

Multiplicando a primeira equação por D_7 e a segunda por D_6 :

$$\begin{cases} -G_m(\omega_G^4 N_4 - \omega_G^2 N_2 + N_0) = -\omega_G^6 D_6 + \omega_G^4 D_4 - \omega_G^2 D_2 + D_0 \\ -G_m(\omega_G^4 N_5 - \omega_G^2 N_3 + N_1) = -\omega_G^6 D_7 + \omega_G^4 D_5 - \omega_G^2 D_3 + D_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_G^6 D_6 D_7 - \omega_G^4 D_7 (D_4 + G_m N_4) + \omega_G^2 D_7 (D_2 + G_m N_2) - D_7 (D_0 + G_m N_0) = 0 \\ \omega_G^6 D_7 D_6 - \omega_G^4 D_6 (D_5 + G_m N_5) + \omega_G^2 D_6 (D_3 + G_m N_3) - D_6 (D_1 + G_m N_1) = 0 \end{cases} \quad (D.19)$$

Diminuindo uma da outra,

$$\omega_G^4 \left(\begin{vmatrix} D_7 & D_5 \\ D_6 & D_4 \end{vmatrix} + G_m \begin{vmatrix} D_7 & N_5 \\ D_6 & N_4 \end{vmatrix} \right) - \omega_G^2 \left(\begin{vmatrix} D_7 & D_3 \\ D_6 & D_2 \end{vmatrix} + G_m \begin{vmatrix} D_7 & N_3 \\ D_6 & N_2 \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} D_7 & D_1 \\ D_6 & D_0 \end{vmatrix} + G_m \begin{vmatrix} D_7 & N_1 \\ D_6 & N_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (D.20)$$

Agora tem-se um novo sistema equivalente a (D.19) adotando (D.20) com alguma das equações de (D.19), digamos, a primeira:

$$\begin{cases} \omega_G^6 D_6 - \omega_G^4 (D_4 + G_m N_4) + \omega_G^2 (D_2 + G_m N_2) - (D_0 + G_m N_0) = 0 \\ \omega_G^4 \left(\begin{vmatrix} D_7 & D_5 \\ D_6 & D_4 \end{vmatrix} + G_m \begin{vmatrix} D_7 & N_5 \\ D_6 & N_4 \end{vmatrix} \right) - \omega_G^2 \left(\begin{vmatrix} D_7 & D_3 \\ D_6 & D_2 \end{vmatrix} + G_m \begin{vmatrix} D_7 & N_3 \\ D_6 & N_2 \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} D_7 & D_1 \\ D_6 & D_0 \end{vmatrix} + G_m \begin{vmatrix} D_7 & N_1 \\ D_6 & N_0 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \quad (D.21)$$

A resolução do sistema pode ser ainda mais simplificada adotando-se $\beta_G = \omega_G^2$, reduzindo-se a ordem das equações:

$$\begin{cases} \beta_G^3 D_6 - \beta_G^2 (D_4 + G_m N_4) + \beta_G (D_2 + G_m N_2) - (D_0 + G_m N_0) = 0 \\ \beta_G^2 \left(\begin{vmatrix} D_7 & D_5 \\ D_6 & D_4 \end{vmatrix} + G_m \begin{vmatrix} D_7 & N_5 \\ D_6 & N_4 \end{vmatrix} \right) - \beta_G \left(\begin{vmatrix} D_7 & D_3 \\ D_6 & D_2 \end{vmatrix} + G_m \begin{vmatrix} D_7 & N_3 \\ D_6 & N_2 \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} D_7 & D_1 \\ D_6 & D_0 \end{vmatrix} + G_m \begin{vmatrix} D_7 & N_1 \\ D_6 & N_0 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \quad (D.22)$$

A figura 29 mostra os gráficos da frequência de corte ω_G e da Margem de Ganho parametrizados por K_e e T_e , para o sistema em estudo (tabela 1) no equilíbrio $\vec{S} = 1 + j0.5$.

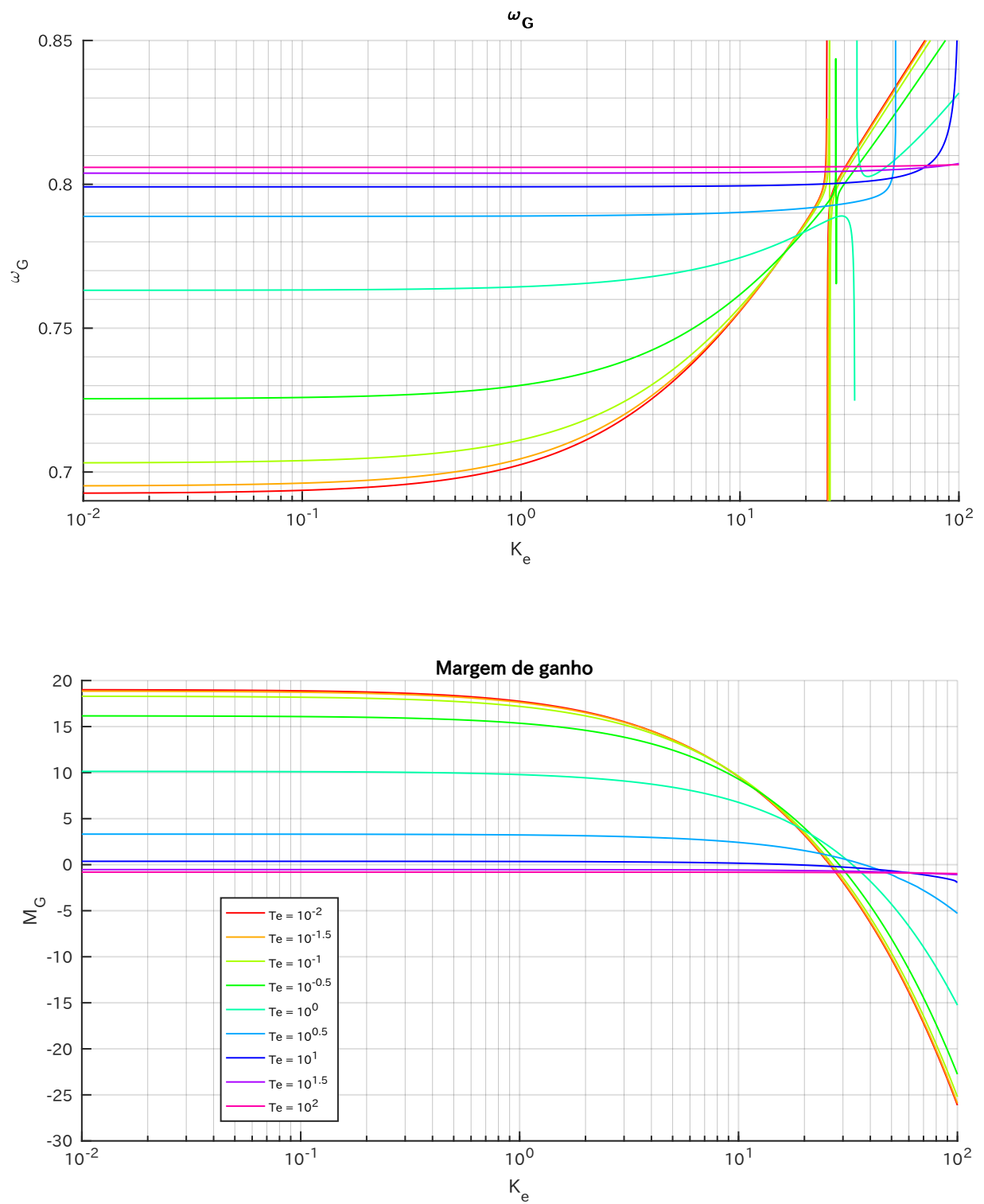


Figura 29 – Gráficos da frequência de corte ω_G e da margem de ganho do sistema controlado por AVR.

D.4

Resolvendo a segunda equação do sistema

Pela segunda equação,

$$\frac{(\omega_p^4 N_4 - \omega_p^2 N_2 + N_0) + j\omega_p (\omega_p^4 N_5 - \omega_p^2 N_3 + N_1)}{(-\omega_p^6 D_6 + \omega_p^4 D_4 - \omega_p^2 D_2 + D_0) + j\omega_p (-\omega_p^6 D_7 + \omega_p^4 D_5 - \omega_p^2 D_3 + D_1)} = e^{j\phi_m} \quad (D.23)$$

Daonde

$$\begin{aligned} N_R + j\omega_p N_I &= \cos(\phi_m) D_R - \omega_p \sin(\phi_m) D_I + j[\omega_p D_I \cos(\phi_m) + D_R \sin(\phi_m)] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} N_R = D_R \cos(\phi_m) - \sin(\phi_m) \omega_p D_I \\ \omega_p N_I = \cos(\phi_m) \omega_p D_I + \sin(\phi_m) D_R \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (\omega_p^4 N_4 - \omega_p^2 N_2 + N_0) = \cos(\phi_m) (-\omega_p^6 D_6 + \omega_p^4 D_4 - \omega_p^2 D_2 + D_0) + \\ \quad -\omega_p \sin(\phi_m) (-\omega_p^6 D_7 + \omega_p^4 D_5 - \omega_p^2 D_3 + D_1) \\ \omega_p (\omega_p^4 N_5 - \omega_p^2 N_3 + N_1) = \omega_p \cos(\phi_m) (-\omega_p^6 D_7 + \omega_p^4 D_5 - \omega_p^2 D_3 + D_1) + \\ \quad + \sin(\phi_m) (-\omega_p^6 D_6 + \omega_p^4 D_4 - \omega_p^2 D_2 + D_0) \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_p^7 D_7 \cos(\phi_m) + \omega_p^6 D_6 \sin(\phi_m) + \omega_p^5 [-D_5 \cos(\phi_m) + N_5] - \omega_p^4 D_4 \sin(\phi_m) + \\ \quad + \omega_p^3 [D_3 \cos(\phi_m) - N_3] + \omega_p^2 D_2 \sin(\phi_m) + \omega_p [-D_1 \cos(\phi_m) + N_1] - D_0 \sin(\phi_m) = 0 \\ \omega_p^7 D_7 \sin(\phi_m) - \omega_p^6 D_6 \cos(\phi_m) - \omega_p^5 D_5 \sin(\phi_m) + \omega_p^4 [D_4 \cos(\phi_m) - N_4] + \\ \quad + \omega_p^3 D_3 \sin(\phi_m) + \omega_p^2 [-D_2 \cos(\phi_m) + N_2] - \omega_p D_1 \sin(\phi_m) + [D_0 \cos(\phi_m) - N_0] = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (D.24)$$

Agora, tem-se um sistema de equações não-lineares nas variáveis ω_p e ϕ_m . No entanto, o sistema ainda é sofisticado o suficiente para apresentar problemas numéricos. Para tanto, combinar-se-ão as duas equações para facilitar a solução do sistema.

D.4.1 Primeira combinação

Multiplicando a primeira equação de (D.24) por $2 \sin(\phi_m)$ e a segunda por $2 \cos(\phi_m)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_p^7 D_7 \sin(2\phi_m) + \omega_p^6 D_6 2 \sin^2(\phi_m) + \omega_p^5 2 \sin(\phi_m) [-D_5 \cos(\phi_m) + N_5] - \omega_p^4 D_4 2 \sin^2(\phi_m) + \\ + \omega_p^3 2 \sin(\phi_m) [D_3 \cos(\phi_m) - N_3] + \omega_p^2 2 D_2 \sin^2(\phi_m) + \omega_p 2 \sin(\phi_m) [-D_1 \cos(\phi_m) + N_1] - D_0 2 \sin^2(\phi_m) = 0 \\ \omega_p^7 D_7 \sin(2\phi_m) - \omega_p^6 D_6 2 \cos^2(\phi_m) - \omega_p^5 D_5 \sin(2\phi_m) + \omega_p^4 2 \cos(\phi_m) [D_4 \cos(\phi_m) - N_4] + \\ + \omega_p^3 D_3 \sin(2\phi_m) + \omega_p^2 2 \cos(\phi_m) [-D_2 \cos(\phi_m) + N_2] - \omega_p D_1 \sin(2\phi_m) + 2 \cos(\phi_m) [D_0 \cos(\phi_m) + N_0] = 0 \end{array} \right. \quad (D.25)$$

Diminuindo uma equação da outra e dividindo por 2,

$$\begin{aligned} & \omega_p^6 D_6 + \omega_p^5 N_5 \sin(\phi_m) - \omega_p^4 [D_4 - N_4 \cos(\phi_m)] - \omega_p^3 N_3 \sin(\phi_m) + \\ & + \omega_p^2 [D_2 - N_2 \cos(\phi_m)] + \omega_p N_1 \sin(\phi_m) - [D_0 + N_0 \cos(\phi_m)] = 0 \end{aligned}$$

D.4.2 Segunda combinação

Analogamente, multiplicando a primeira equação de (D.24) por $2 \cos(\phi_m)$ e a segunda por $2 \sin(\phi_m)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_p^7 D_7 2 \cos^2(\phi_m) + \omega_p^6 D_6 \sin(2\phi_m) + \omega_p^5 2 \cos(\phi_m) [-D_5 \cos(\phi_m) + N_5] - \omega_p^4 D_4 \sin(2\phi_m) + \\ + \omega_p^3 2 \cos(\phi_m) [D_3 \cos(\phi_m) - N_3] + \omega_p^2 D_2 \sin(2\phi_m) + \omega_p 2 \cos(\phi_m) [-D_1 \cos(\phi_m) + N_1] - D_0 \sin(2\phi_m) = 0 \\ \omega_p^7 D_7 2 \sin^2(\phi_m) - \omega_p^6 D_6 \sin(2\phi_m) - \omega_p^5 D_5 2 \sin^2(\phi_m) + \omega_p^4 2 \sin(\phi_m) [D_4 \cos(\phi_m) - N_4] + \\ + \omega_p^3 D_3 2 \sin^2(\phi_m) + \omega_p^2 2 \sin(\phi_m) [-D_2 \cos(2\phi_m) + N_2] - \omega_p D_1 2 \sin^2(\phi_m) + 2 \sin(\phi_m) [D_0 \cos(\phi_m) - N_0] = 0 \end{array} \right. \quad (D.26)$$

E somando as duas equações, e dividindo por 2,

$$\begin{aligned} & D_7 \omega_p^7 - \omega_p^5 [D_5 - N_5 \cos(\phi_m)] - N_4 \omega_p^4 \sin(\phi_m) + \omega_p^3 [D_3 - N_3 \cos(\phi_m)] + \\ & + \omega_p^2 N_2 \sin(\phi_m) - \omega_p [D_1 - N_1 \cos(\phi_m)] - N_0 \sin(\phi_m) = 0 \end{aligned} \quad (D.27)$$

D.4.3 Novo sistema

Resulta assim um novo sistema, menos sofisticado computacionalmente e equivalente a (D.24):

$$\left\{ \begin{array}{l} D_7 \omega_p^7 - \omega_p^5 [D_5 - N_5 \cos(\phi_m)] - N_4 \omega_p^4 \sin(\phi_m) + \omega_p^3 [D_3 - N_3 \cos(\phi_m)] + \\ \quad + \omega_p^2 N_2 \sin(\phi_m) - \omega_p [D_1 - N_1 \cos(\phi_m)] - N_0 \sin(\phi_m) = 0 \\ \\ \omega_p^6 + \omega_p^5 N_5 \sin(\phi_m) - \omega_p^4 [D_4 - N_4 \cos(\phi_m)] - \omega_p^3 N_3 \sin(\phi_m) + \\ \quad + \omega_p^2 [D_2 - N_2 \cos(\phi_m)] + \omega_p N_1 \sin(\phi_m) - [D_0 - N_0 \cos(\phi_m)] = 0 \end{array} \right.$$

A figura 30 mostra os gráficos da frequência de corte ω_F e da Margem de Fase parametrizados por K_e e T_e , para o sistema em estudo (tabela 1) no equilíbrio $\vec{S} = 1 + j0.5$.

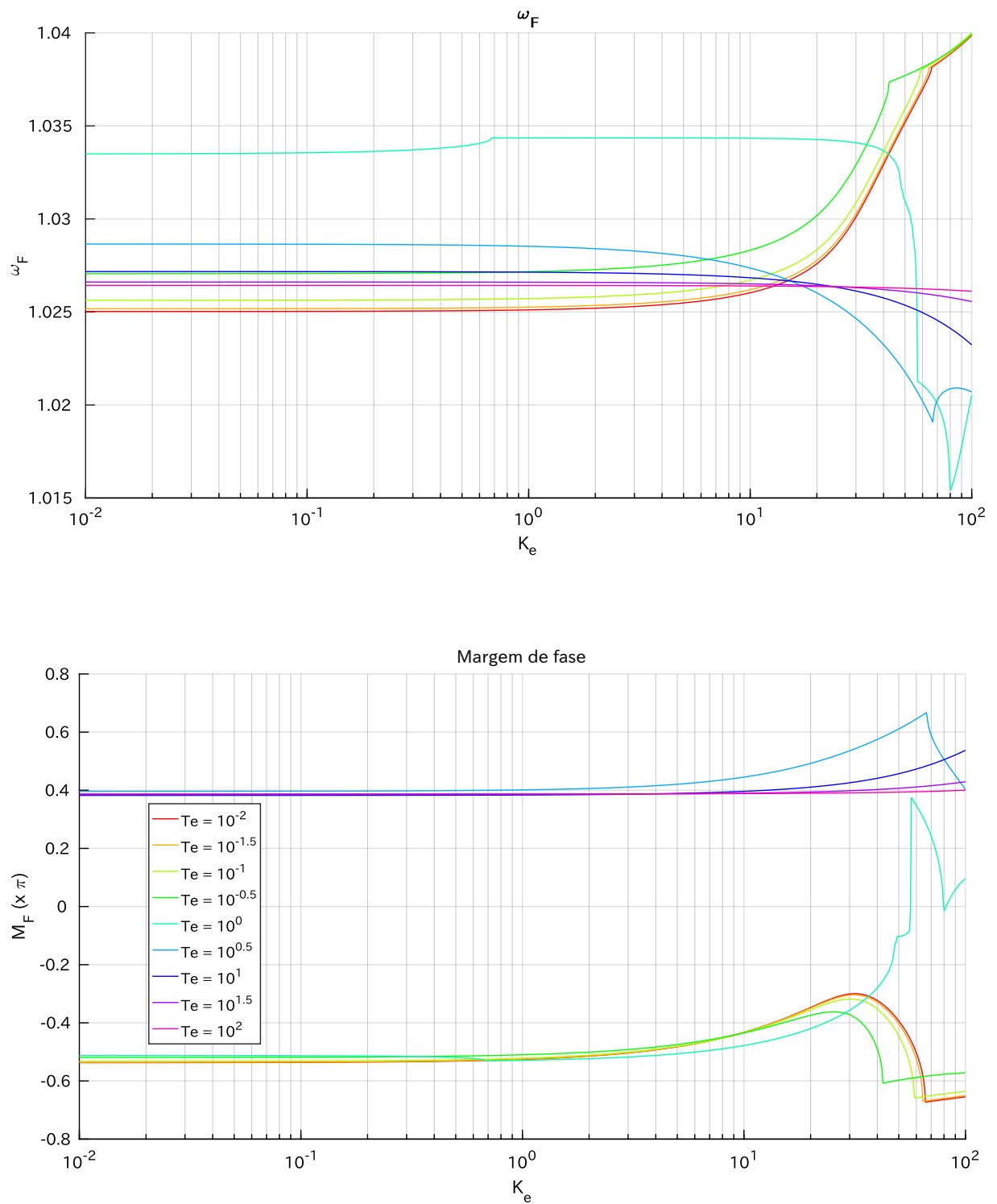


Figura 30 – Gráficos da frequência de corte ω_F e da margem de fase do sistema controlado por AVR.

D.5

Escolha dos parâmetros K_e e T_e

De posse dos gráficos das figuras 29 e 30 controem-se os gráficos da figura 31, que relacionam as margens de ganho e fase com os parâmetros K_e e T_e . Estes gráficos foram gerados pelo código no apêndice A, seção A.8, página 178. Ignoram-se as curvas tais que a margem de fase seja positiva e a margem de ganho seja negativa, pois nestas condições o sistema seria instável em malha fechada.

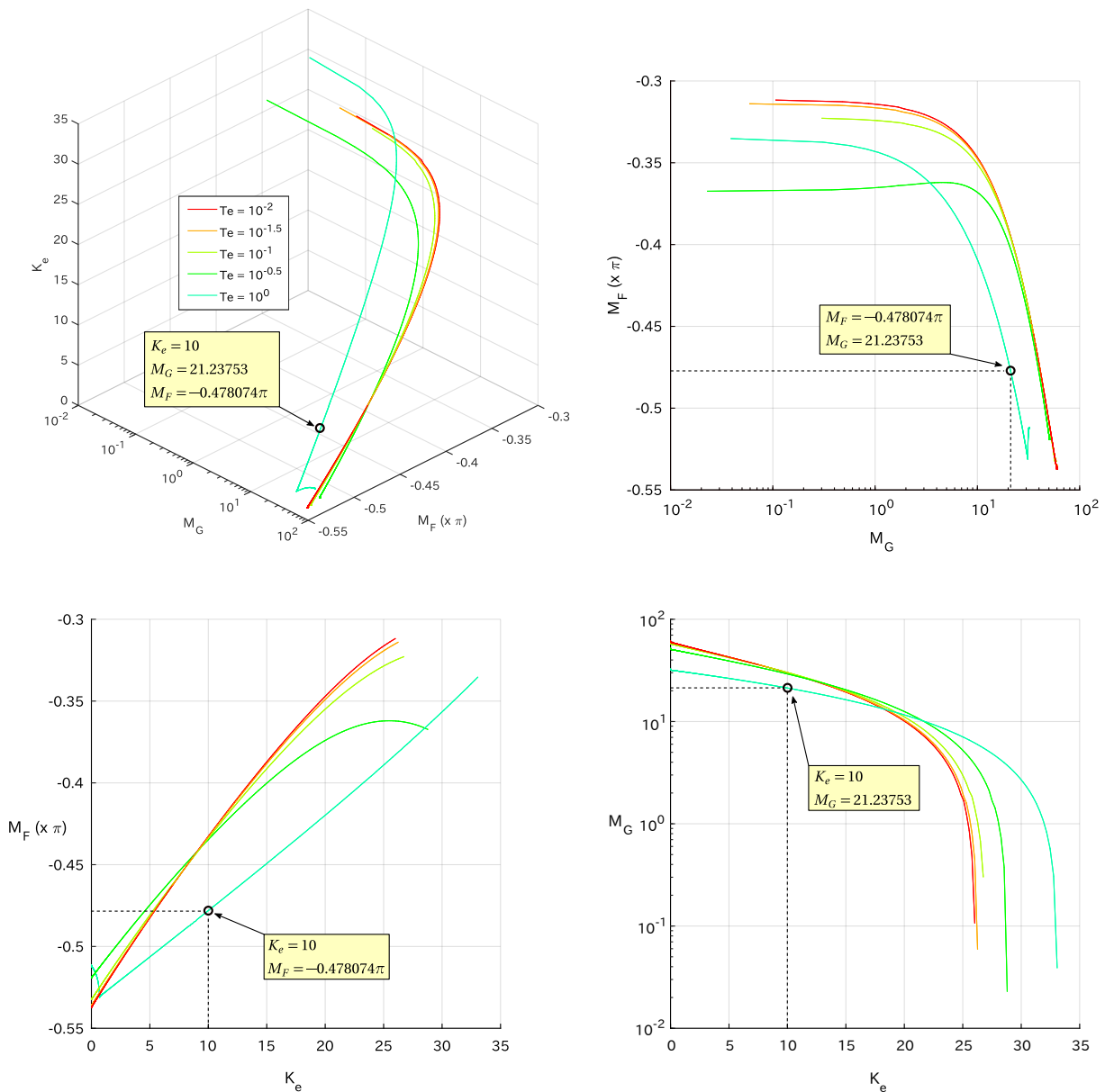


Figura 31 – Gráficos relacionando as margens de estabilidade do sistema controlado por AVR e os parâmetros K_e e T_e .

Escolhe-se $K_e = 10$ para a curva $T_e = 10^0$, tem-se $M_G = 21.237536$ e $M_F = -0.478074\pi$,

que são valores razoáveis para as margens de estabilidade do sistema.

Sintonia do sistema controlado por AVR e PSS

Analogamente ao sistema controlado apenas por AVR, determinam-se as constantes do controlador PSS: K_{PSS} , T_1 , T_2 , T_w através da análise de margens de estabilidade.

E.1

Modelo linearizado do sistema e função de transferência

A figura 32 mostra o esquemático linearizado do sistema controlado por AVR e PSS.

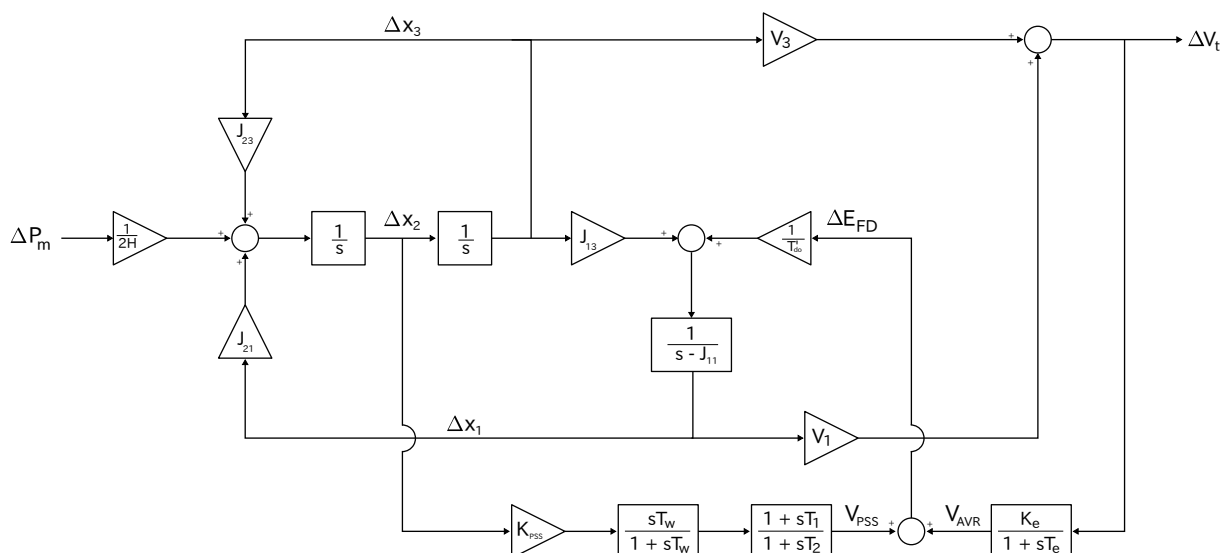


Figura 32 – Diagrama de blocos do sistema OMIB linearizado controlado por AVR e PSS.

As equações de V_1 e V_3 são novamente dadas por (D.3) e (D.4). Da figura, pode-se deduzir que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x_1 = \frac{1}{s - J_{1,1}} \left(J_{1,3} \Delta x_3 + \frac{1}{T'_{do}} \Delta E_{FD} \right) \\ \Delta x_2 = \frac{1}{s} \left(J_{2,1} \Delta x_1 + J_{2,3} \Delta x_3 + \frac{1}{2H} \Delta P_m \right) \\ \Delta x_3 = \frac{1}{s} \Delta x_2 \\ \Delta V_t = V_1 \Delta x_1 + V_3 \Delta x_3 \\ \Delta E_{FD} = \frac{K_e}{1 + s T_e} \Delta V_t + K_{PSS} \frac{1 + s T_1}{1 + s T_2} \frac{s T_w}{1 + s T_w} \Delta x_2 \end{array} \right. \quad (E.1)$$

A ideia é obter uma função de transferência

$$G(s) = \frac{\Delta V_t}{\Delta P_m} \quad (E.2)$$

Substituindo a terceira equação do sistema (E.1) na segunda:

$$s^2 \Delta x_3 = J_{2,1} \Delta x_1 + J_{2,3} \Delta x_3 + \frac{1}{2H} \Delta P_m \Leftrightarrow \Delta x_3 = \frac{1}{s^2 - J_{2,3}} \left(J_{2,1} \Delta x_1 + \frac{1}{2H} \Delta P_m \right) \quad (E.3)$$

Substituindo esta na primeira equação de (E.1):

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= \frac{1}{s - J_{1,1}} \left[\frac{J_{1,3}}{s^2 - J_{2,3}} \left(J_{2,1} \Delta x_1 + \frac{1}{2H} \Delta P_m \right) + \frac{1}{T'_{do}} \Delta E_{FD} \right] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Delta x_1 \left(1 - \frac{J_{1,3} J_{2,1}}{(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3})} \right) &= \frac{1}{s - J_{1,1}} \left(\frac{J_{1,3}}{s^2 - J_{2,3}} \frac{1}{2H} \Delta P_m + \frac{1}{T'_{do}} \Delta E_{FD} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Delta x_1 \frac{(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1}}{s^2 - J_{2,3}} &= \frac{J_{1,3}}{s^2 - J_{2,3}} \frac{1}{2H} \Delta P_m + \frac{1}{T'_{do}} \Delta E_{FD} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Delta x_1 &= \frac{J_{1,3}}{2H [(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1}]} \Delta P_m + \frac{s^2 - J_{2,3}}{T'_{do} [(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1}]} \Delta E_{FD} \end{aligned} \quad (E.4)$$

Substituindo esta em (E.3):

$$\Delta x_3 = \frac{1}{s^2 - J_{2,3}} \left(J_{2,1} \Delta x_1 + \frac{1}{2H} \Delta P_m \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{s^2 - J_{2,3}} \left[\frac{1}{2H} \left(1 + \frac{J_{2,1} J_{1,3}}{(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1}} \right) \Delta P_m + \frac{J_{2,1} (s^2 - J_{2,3})}{T'_{do} [(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1}]} \Delta E_{FD} \right] = \\
&= \frac{1}{2H} \frac{s - J_{1,1}}{(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1}} \Delta P_m + \frac{J_{2,1}}{T'_{do} [(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1}]} \Delta E_{FD} \quad (E.5)
\end{aligned}$$

Agora, substituem-se a terceira e quarta equações de (E.1) na última:

$$\begin{aligned}
\Delta E_{FD} &= \frac{K_e}{1 + s T_e} (V_1 \Delta x_1 + V_3 \Delta x_3) + \frac{s^2 K_{PSS} T_w (1 + s T_1)}{(1 + s T_2)(1 + s T_w)} \Delta x_3 = \\
&= \frac{V_1 K_e}{1 + s T_e} \Delta x_1 + \left[\frac{V_3 K_e}{1 + s T_e} + \frac{s^2 K_{PSS} T_w (1 + s T_1)}{(1 + s T_2)(1 + s T_w)} \right] \Delta x_3 \quad (E.6)
\end{aligned}$$

Substituindo (E.4) e (E.5) em (E.6):

$$\begin{aligned}
\Delta E_{FD} &= \frac{1}{2H} \frac{\frac{J_{1,3} V_1 K_e}{1 + s T_e} + (s - J_{1,1}) \left[\frac{V_3 K_e}{1 + s T_e} + \frac{s^2 K_{PSS} T_w (1 + s T_1)}{(1 + s T_2)(1 + s T_w)} \right]}{(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1}} \Delta P_m + \\
&\quad + \frac{1}{T'_{do}} \frac{\frac{V_1 K_e}{1 + s T_e} (s^2 - J_{2,3}) + J_{2,1} \left[\frac{V_3 K_e}{1 + s T_e} + \frac{s^2 K_{PSS} T_w (1 + s T_1)}{(1 + s T_2)(1 + s T_w)} \right]}{(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1}} \Delta E_{FD} \\
(1 + s T_e) [(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1}] \Delta E_{FD} &= \frac{1}{2H} \left\{ J_{1,3} V_1 K_e + (s - J_{1,1}) \left[V_3 K_e + \frac{s^2 K_{PSS} T_w (1 + s T_1)(1 + s T_e)}{(1 + s T_2)(1 + s T_w)} \right] \right\} \Delta P_m + \\
&\quad + \frac{1}{T'_{do}} \left\{ V_1 K_e (s^2 - J_{2,3}) + J_{2,1} \left[V_3 K_e + \frac{s^2 K_{PSS} T_w (1 + s T_1)(1 + s T_e)}{(1 + s T_2)(1 + s T_w)} \right] \right\} \Delta E_{FD} \\
\therefore \Delta E_{FD} &= \frac{\frac{1}{2H} \left\{ J_{1,3} V_1 K_e + (s - J_{1,1}) \left[V_3 K_e + \frac{s^2 K_{PSS} T_w (1 + s T_1)(1 + s T_e)}{(1 + s T_2)(1 + s T_w)} \right] \right\}}{(1 + s T_e) [(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1}] - \frac{1}{T'_{do}} \left\{ V_1 K_e (s^2 - J_{2,3}) + J_{2,1} \left[V_3 K_e + \frac{s^2 K_{PSS} T_w (1 + s T_1)(1 + s T_e)}{(1 + s T_2)(1 + s T_w)} \right] \right\}} \Delta P_m = \\
&= \frac{\frac{T'_{do}}{2H} \left\{ J_{1,3} V_1 K_e + (s - J_{1,1}) \left[V_3 K_e + \frac{s^2 K_{PSS} T_w (1 + s T_1)(1 + s T_e)}{(1 + s T_2)(1 + s T_w)} \right] \right\}}{T'_{do} (1 + s T_e) [(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1}] - V_1 K_e (s^2 - J_{2,3}) - J_{2,1} \left[V_3 K_e + \frac{s^2 K_{PSS} T_w (1 + s T_1)(1 + s T_e)}{(1 + s T_2)(1 + s T_w)} \right]} \Delta P_m \quad (E.7)
\end{aligned}$$

Da quarta equação do sistema (E.1):

$$\begin{aligned}\Delta V_t &= V_1 \Delta x_1 + V_3 \Delta x_3 = \\ &= \frac{1}{2H} \frac{V_1 J_{1,3} + V_3 (s - J_{1,1})}{(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1}} \Delta P_m + \frac{1}{T'_{do}} \frac{V_1 (s^2 - J_{2,3}) + V_3 J_{2,1}}{(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1}} \Delta E_{FD} = \\ &= \frac{\frac{1}{2H} [V_1 J_{1,3} + V_3 (s - J_{1,1})] \Delta P_m + \frac{1}{T'_{do}} [V_1 (s^2 - J_{2,3}) + V_3 J_{2,1}] \Delta E_{FD}}{(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1}}\end{aligned}$$

Combinando esta com (E.7):

$$\begin{aligned}\therefore G(s) &= \frac{\Delta V_t}{\Delta P_m} = \\ &= \frac{1}{2H} \frac{V_1 J_{1,3} + V_3 (s - J_{1,1}) + \frac{[V_1 (s^2 - J_{2,3}) + V_3 J_{2,1}] \left\{ J_{1,3} V_1 K_e + (s - J_{1,1}) \left[V_3 K_e + \frac{s^2 K_{PSS} T_w (1 + s T_1) (1 + s T_e)}{(1 + s T_2) (1 + s T_w)} \right] \right\}}{T'_{do} (1 + s T_e) [(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1}] - V_1 K_e (s^2 - J_{2,3}) - J_{2,1} \left[V_3 K_e + \frac{s^2 K_{PSS} T_w (1 + s T_1) (1 + s T_e)}{(1 + s T_2) (1 + s T_w)} \right]}}{(s - J_{1,1})(s^2 - J_{2,3}) - J_{1,3} J_{2,1}}\end{aligned}\quad (E.8)$$

Novamente separa-se $G(s)$ em numerador $N(s)$ e denominador $D(s)$, cujos coeficientes são numerados de s^0 a s^7 e s^0 a s^9 , respectivamente:

$$G(s) = \frac{\sum_{k=0}^{k=7} N_k s^k}{\sum_{k=0}^{k=9} D_k s^k} \quad (E.9)$$

Substituindo $s = j\omega$ em (E.9):

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{\overbrace{-N_6 \omega^6 + N_4 \omega^4 - N_2 \omega^2 + N_0}^{N_R} + j\omega \overbrace{(-N_7 \omega^6 + N_5 \omega^4 - N_3 \omega^2 + N_1)}^{N_I}}{\underbrace{D_8 \omega^8 - D_6 \omega^6 + D_4 \omega^4 - D_2 \omega^2 + D_0}_{D_R} + j\omega \underbrace{(D_9 \omega^8 - D_7 \omega^6 + D_5 \omega^4 - D_3 \omega^2 + D_1)}_{D_I}} = \\ &= \frac{N_R + j\omega N_I}{D_R + j\omega D_I}\end{aligned}\quad (E.10)$$

Agora, das definições das margens de estabilidade

$$\begin{cases} G(j\omega_G) = -\frac{1}{G_m} \\ G(j\omega_P) = e^{j\phi_m} \end{cases} \quad (\text{E.11})$$

Da primeira equação deste sistema,

$$-G_m(N_R + j\omega_G N_I) = D_R + j\omega_G D_I \Leftrightarrow \begin{cases} D_R + G_m N_R = 0 \\ D_I + G_m N_I = 0 \end{cases} \quad (\text{E.12})$$

Da segunda,

$$\begin{aligned} \frac{N_R + j\omega N_I}{D_R + j\omega D_I} &= \cos(\phi_m) + j\sin(\phi_m) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow N_R + j\omega N_I &= D_R \cos(\phi_m) - \omega D_I \sin(\phi_m) + j[D_R \sin(\phi_m) + \omega D_I \cos(\phi_m)] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} N_R = D_R \cos(\phi_m) - \omega_P D_I \sin(\phi_m) \\ \omega_P N_I = D_R \sin(\phi_m) + \omega_P D_I \cos(\phi_m) \end{cases} & \quad (\text{E.13}) \end{aligned}$$

Assim, de posse das constantes K_{PSS} , T_1 , T_2 , T_w do controlador PSS, então o sistema (E.12) é resolvido para obter-se a frequência de corte ω_G e a margem de ganho G_m , enquanto o segundo sistema (E.13) é resolvido para se obter ω_P e ϕ_m .

No entanto, há para este sistema um problema: o espaço das constantes tem dimensão quatro. Isso quer dizer que não se podem construir gráficos de margem de ganho e de fase *versus* parâmetro, como se fez para o sistema controlado apenas por AVR, porque este sistema tem apenas dois parâmetros: K_e e T_e .

Assim, para reduzir a dimensão do problema, deve-se tomar um corte no espaço (K_{PSS}, T_1, T_2, T_w) . O corte tomado será $T_1 = 1$, $T_w = 1$.

Do sistema (E.12) resulta

$$\begin{cases} D_8 \omega_G^8 - (D_6 + G_m N_6) \omega_G^6 + (D_4 + G_m N_4) \omega_G^4 - (D_2 + G_m N_2) \omega_G^2 + D_0 + G_m N_0 = 0 \\ D_9 \omega_G^8 - (D_7 + G_m N_7) \omega_G^6 + (D_5 + G_m N_5) \omega_G^4 - (D_3 + G_m N_3) \omega_G^2 + D_1 + G_m N_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{E.14})$$

Para simplificar o sistema, multiplica-se a primeira equação por D_9 e a última por D_8 e diminuem-se as duas para se obter:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{vmatrix} D_8 & D_9 \\ D_6 & D_7 \end{vmatrix} + G_m \begin{vmatrix} D_8 & D_9 \\ N_6 & N_7 \end{vmatrix} \right) \omega_G^6 - \left(\begin{vmatrix} D_8 & D_9 \\ D_4 & D_5 \end{vmatrix} + G_m \begin{vmatrix} D_8 & D_9 \\ N_4 & N_5 \end{vmatrix} \right) \omega_G^4 + \\ & + \left(\begin{vmatrix} D_8 & D_9 \\ D_2 & D_3 \end{vmatrix} + G_m \begin{vmatrix} D_8 & D_9 \\ N_2 & N_3 \end{vmatrix} \right) \omega_G^2 - \left(\begin{vmatrix} D_8 & D_9 \\ D_0 & D_1 \end{vmatrix} + G_m \begin{vmatrix} D_8 & D_9 \\ N_0 & N_1 \end{vmatrix} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Adotando esta equação e uma outra de (E.14), digamos, a primeira, e substituindo $\beta_G = \omega_G^2$ para diminuir a ordem do sistema tem-se:

$$\begin{cases} D_8 \beta_G^4 - (D_6 + G_m N_6) \beta_G^3 + (D_4 + G_m N_4) \beta_G^2 - (D_2 + G_m N_2) \beta_G + D_0 + G_m N_0 = 0 \\ \left(\begin{vmatrix} D_8 & D_9 \\ D_6 & D_7 \end{vmatrix} + G_m \begin{vmatrix} D_8 & D_9 \\ N_6 & N_7 \end{vmatrix} \right) \beta_G^3 - \left(\begin{vmatrix} D_8 & D_9 \\ D_4 & D_5 \end{vmatrix} + G_m \begin{vmatrix} D_8 & D_9 \\ N_4 & N_5 \end{vmatrix} \right) \beta_G^2 + \\ + \left(\begin{vmatrix} D_8 & D_9 \\ D_2 & D_3 \end{vmatrix} + G_m \begin{vmatrix} D_8 & D_9 \\ N_2 & N_3 \end{vmatrix} \right) \beta_G - \left(\begin{vmatrix} D_8 & D_9 \\ D_0 & D_1 \end{vmatrix} + G_m \begin{vmatrix} D_8 & D_9 \\ N_0 & N_1 \end{vmatrix} \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{E.16})$$

E.3

Resolvendo o sistema (E.13)

Do sistema (E.13) tem-se:

$$\begin{cases} D_9 \sin(\phi_m) \omega_p^9 - D_8 \cos(\phi_m) \omega_p^8 - D_7 \sin(\phi_m) \omega_p^7 + (D_6 \cos(\phi_m) - N_6) \omega_p^6 + D_5 \sin(\phi_m) \omega_p^5 + \\ (N_4 - D_4 \cos(\phi_m)) \omega_p^4 - D_3 \sin(\phi_m) \omega_p^3 + (D_2 \cos(\phi_m) - N_2) \omega_p^2 + D_1 \sin(\phi_m) \omega_p + N_0 - D_0 \cos(\phi_m) = 0 \\ D_9 \cos(\phi_m) \omega_p^9 + D_8 \sin(\phi_m) \omega_p^8 + (N_7 - D_7 \cos(\phi_m)) \omega_p^7 - D_6 \sin(\phi_m) \omega_p^6 + (D_5 \cos(\phi_m) - N_5) \omega_p^5 + \\ D_4 \sin(\phi_m) \omega_p^4 + (N_3 - D_3 \cos(\phi_m)) \omega_p^3 - D_2 \sin(\phi_m) \omega_p^2 + (D_1 \cos(\phi_m) - N_1) \omega_p + D_0 \sin(\phi_m) = 0 \end{cases} \quad (\text{E.17})$$

Agora, combinam-se as equações da seguinte forma:

1. Multiplica-se a primeira equação por $\cos(\phi_m)$, a segunda por $\sin(\phi_m)$, e somam-se as duas;

2. Multiplica-se a primeira equação por $\sin(\phi_m)$, a segunda por $\cos(\phi_m)$, e subtraem-se as duas.

Obtem-se assim um sistema equivalente e menos computacionalmente caro de se resolver:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_9 \omega_p^9 + (N_7 \cos(\phi_m) - D_7) \omega_p^7 - N_6 \sin(\phi_m) \omega_p^6 + (D_5 - N_5 \cos(\phi_m)) \omega_p^5 + \\ \quad + N_4 \sin(\phi_m) \omega_p^4 + (N_3 \cos(\phi_m) - D_3) \omega_p^3 - N_2 \sin(\phi_m) \omega_p^2 + (D_1 - N_1 \cos(\phi_m)) \omega_p + N_0 \sin(\phi_m) = 0 \\ D_8 \omega_p^8 + N_7 \sin(\phi_m) \omega_p^7 + (N_6 \cos(\phi_m) - D_6) \omega_p^6 - N_5 \sin(\phi_m) \omega_p^5 + \\ \quad + (D_4 - N_4 \cos(\phi_m)) \omega_p^4 + N_3 \sin(\phi_m) \omega_p^3 + (N_2 \cos(\phi_m) - D_2) \omega_p^2 - N_1 \sin(\phi_m) \omega_p + D_0 - N_0 \cos(\phi_m) = 0 \end{array} \right. \quad (E.18)$$

E.4

Escolha de K_{PSS} e T_2

A figura 33 mostra o gráfico de margem de ganho parametrizado por K_{PSS} e T_2 do sistema em estudo, substituindo-se os valores no sistema (E.16). Estes gráficos foram gerados pelo código no apêndice A, seção A.9, página 182.

Omitem-se os gráficos da margem de fase e frequência de corte ω_F porque, quando da solução do sistema (E.18) que as determina, o sistema teve margens de fase negativas para quase todos os valores dos parâmetros.

No gráfico da figura 33, escolhe-se a curva $T_e = 3$, com $K_{PSS} = 20$, que resulta numa margem de fase $M_G = 40.5768$.

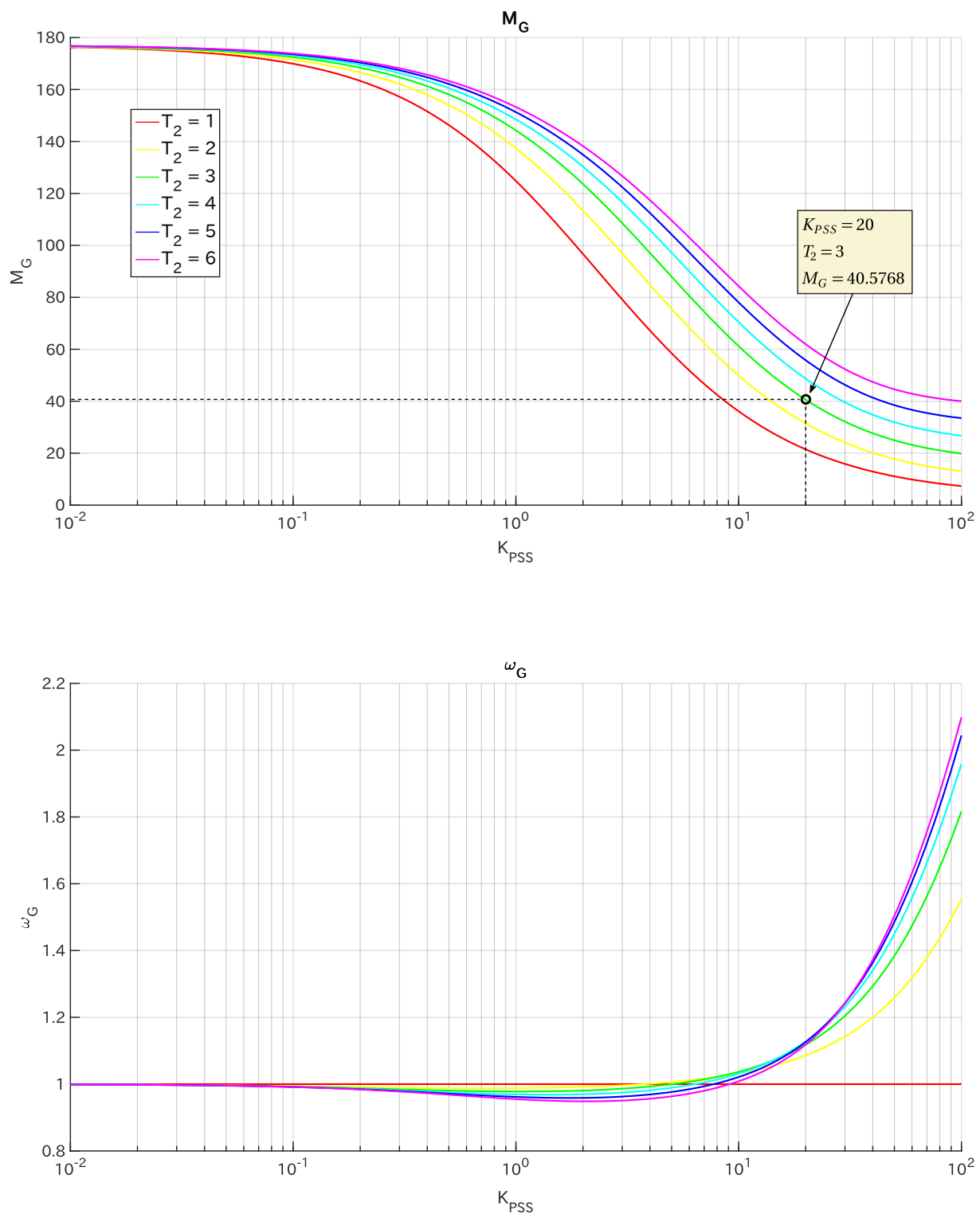


Figura 33 – Gráficos relacionando a margem de ganho e a frequência de corte ω_G sistema controlado por AVR e PSS parametrizados pelos parâmetros K_{PSS} e T_2 .

Prova do Teorema de Hartman-Grobman

O objetivo último deste apêndice é provar o Teorema de Hartman-Grobman (THG). Este Teorema é de suma importância para esta monografia porque endossa, ou melhor, justifica, o controle de sistemas não-lineares através de técnicas lineares.

F.1

Justificativa

Sistemas não lineares exibem comportamentos muito mais ricos e variados que os sistemas lineares – comportamentos como, por exemplo, caos ou . Por isso, a área de Controle de Sistemas Não Lineares ainda carece de alguns resultados importantes que já foram entendidos e implementados na teoria de Controle de Sistemas Lineares; com efeito, sistemas lineares observáveis e controláveis frequentemente encontram controladores lineares que garantem estabilidade e performance. Já para os sistemas não lineares em geral, apenas algum dos dois pode ser obtido. Além disso, os procedimentos para desenvolvimento e sintonia de controladores não lineares são abstrusos e sofisticados, enquanto os controladores lineares possuem técnicas relativamente frugais e bem conhecidas para sua obtenção. Disto seguem perguntas imediatas, como: é possível aplicar controladores lineares em sistemas não lineares? Como se dá o procedimento, uma vez que o desenvolvimento de um controlador linear pressupõe um sistema matricial do tipo $\dot{x} = Ax$? Qual resultado da Teoria de Sistemas Dinâmicos pode justificar o uso de controladores lineares para sistemas não-lineares e, finalmente, sob quais condições se pode fazê-lo?

Em geral, o procedimento para desenho de controladores lineares segue uma sequência bem definida de técnicas, como a análise de lugar de raízes, análise das margens de estabilidade, dos aspectos de performance como sobressinal e sub-sinal, estimativa do tempo de acomodação e erro em regime permanente, *et cetera*. Dado que a Teoria de Sistemas Lineares garante estabilidade e performance para sistemas deste tipo (desde que observáveis e controláveis), e dado que existem procedimentos bem-definidos para desenvolver controladores para sistemas lineares,

então lineariza-se o sistema não linear – através da ferramenta Jacobiano, que é a expansão do conceito de derivada para sistemas multifunções multivariáveis – e obtém-se um sistema linear associado. Este, por sua vez, é utilizado para desenvolver e sintonizar o controlador, baseado naquela teoria para sistemas lineares, e com os procedimentos supracitados.

Segundo o THG, também conhecido como “Teorema de Linearização”, o controlador desenvolvido para o sistema linear correspondente também se aplica ao sistema não-linear original, desde que algumas condições sejam cumpridas, notadamente, que as perturbações sejam as mínimas possíveis. Isto porque o THG afirma que o comportamento de um sistema não linear numa vizinhança de um equilíbrio hiperbólico (cujos todos autovalores são complexos não-reais) é qualitativamente semelhante à sua linearização naquele ponto. Outrossim, um sistema não-linear comporta-se similarmente ao sistema linearizado associado quando sob pequenas perturbações. Matematicamente, o Teorema consiste em provar que as trajetórias do sistema não-linear e do sistema linear equivalente são topologicamente equivalentes, isto é, existe um homeomorfismo (uma função contínua invertível de inversa contínua) que relaciona as trajetórias.

No entanto, o THG tem aplicação apenas numa vizinhança pequena do equilíbrio hiperbólico em questão (princípio de pequenas perturbações); isto posto, não se conhece teorema generalizado que preveja o comportamento em grandes perturbações. Esta problemática, aplicada ao contexto de Sistemas Elétricos de Potência, dá à luz esta monografia, que buscou analisar aquele comportamento a grandes perturbações e desenvolver uma técnica baseada no Método Força-Bruta para estimar a Região de Estabilidade de um sistema elétrico de potência conhecido como OMIB (*Máquina versus Barramento Infinito*).

Assim, a prova do Teorema de Hartman-Grobman e seu entendimento é fundamental para determinar o propósito desta monografia e afirmar a problemática em que se encaixa (a análise do comportamento de sistemas elétricos de potência a grandes perturbações).

Em suma, é doravante possível utilizar técnicas de Controle Linear para controlar sistemas não lineares; para tanto, utilizam-se o sistema linearizado correspondente e as técnicas de controle linear conhecidas, e o resultado que garante isto é o Teorema de Hartman-Grobman, segundo o qual o controle linear sobre o sistema não linear é válido desde que este seja perturbado minimamente ao redor de um equilíbrio hiperbólico. Desta limitação emerge a problemática desta monografia, cujo objetivo foi estudar o comportamento de sistemas elétricos de potência a grandes perturbações.

F.2

Visão geral do apêndice

Para provar o THG, são necessários três Lemas:

1. A Desigualdade Generalizada de Grönwall (Lema 2);

2. A Fórmula da Variação das Constantes (Lema 3);
3. O Teorema do Valor Médio para funções multivariáveis (Lema 4).

Naturalmente, estes Teoremas dependem de outros Lemas auxiliares, que também são provados. Além do THG e dos três Teoremas menores necessários para prová-los, também são provados dois teoremas importantes na Teoria de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos. O primeiro (Teorema 6) afirma que sistemas lineares não-autônomos são globalmente estáveis desde que a matriz associada tenha apenas autovalores de parte real negativa e desde que a dependência do tempo seja exponencialmente limitada com relação à inversa daquela matriz. Em seguida, no Teorema 7 prova-se que sistemas não-lineares não-autônomos cuja função diferencial seja de classe C^1 têm resposta assintoticamente estável e limitada numa vizinhança de equilíbrios hiperbólicos tipo zero, ou seja, equilíbrios cujos autovalores da matriz jacobiana têm parte real negativa.

Assim, apresenta-se a visão geral deste apêndice, que consiste nas provas e discussão dos seguintes Teoremas e Lemas:

1. A Desigualdade Generalizada de Grönwall (Lema 2);
2. A Fórmula da Variação das Constantes (Lema 3);
3. O Teorema do Valor Médio para funções multivariáveis (Lema 4), cuja prova depende outros três:
 - Teorema de Weierstrass (Teorema 3);
 - Teorema de Rolle (Teorema 4);
 - Teorema do Valor Médio para funções de uma variável (Teorema 5).
4. Finalmente, o último (Lema 6) estabelece que funções do tipo $f(t) = e^{At}$, com A uma matriz complexa de autovalores com parte real menor que zero, são limitadas por uma função do tipo exponencial decrescente. Esta seção também enuncia dois outros lemas:
 - O primeiro, segundo o qual funções do tipo $f(x) = e^{-\alpha t} P(t)$, com $\alpha > 0$ e $P(t)$ um polinômio qualquer, são limitadas em qualquer semirreta direita (lema 5);
 - O segundo (lema 7), consequência dos Lemas 5 e 6, afirma que funções do tipo $f(x) = e^{At} P(t)$, com A uma matrix complexa e $P(t)$ um polinômio qualquer, são limitadas e tendem a zero no infinito desde que A tenha autovalores de parte real negativa (uma versão matricial do lema anterior).
5. O Teorema 6 prova que sistemas lineares não-autônomos $\dot{x} = Ax + g(t)$ são globalmente estáveis se A tem apenas autovalores de parte real negativa e se $e^{-At} g(t)$ for limitada;

6. O Teorema 7 define que sistemas não-lineares do tipo $\dot{x} = f(x, t)$, com f de classe C^1 , são estáveis numa vizinhança de um equilíbrio hiperbólico de tipo zero.

Finalmente, enuncia-se e prova-se o Teorema de Hartman-Grobman (Teorema 8).

F.3

A Desigualdade de Grönwall Generalizada

Lema 2 (Desigualdade de Grönwall Generalizada). *Sejam $\phi, \alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas, com $\alpha(t)$ não-decrescente, tais que*

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s) \phi(s) ds, \quad \forall t \in [a, b] \quad (\text{F.1})$$

Então

$$\phi(t) \leq \alpha(t) e^{\left[\int_a^t \beta(u) du \right]}, \quad \forall t \in [a, b] \quad (\text{F.2})$$

Prova: adotando

$$V(t) = \int_a^t \beta(s) \phi(s) ds \quad (\text{F.3})$$

Então pela hipótese (F.1)

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \beta(t) \phi(t) \leq \beta(t) \left[\alpha(t) + \int_a^t \beta(s) \phi(s) ds \right] = \beta(t) \alpha(t) + \beta(t) V(t) \\ \therefore \dot{V}(t) - \beta(t) V(t) &\leq \beta(t) \alpha(t) \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Agora multiplica-se a equação por um fator integrante $e^{\left[-\int_a^t \beta(s) ds \right]}$:

$$\dot{V}(t)e^{\left[-\int_a^t \beta(s)ds\right]} - V(t)\beta(t)e^{\left[-\int_a^t \beta(s)ds\right]} \leq \beta(t)\alpha(t)e^{\left[-\int_a^t \beta(s)ds\right]} \quad (\text{F.5})$$

Nota-se que

$$\frac{\partial e^{\left[-\int_a^t \beta(s)ds\right]}}{\partial t} = -\beta(t)e^{\left[-\int_a^t \beta(s)ds\right]} \quad (\text{F.6})$$

Portanto integrar (F.5) resulta

$$e^{\left[-\int_a^t \beta(s)ds\right]} V(t) \leq \int_a^t \alpha(\tau)\beta(\tau)e^{\left[-\int_a^\tau \beta(s)ds\right]} d\tau \quad (\text{F.7})$$

Utilizando que $\alpha(\tau)$ é não-decrescente, então $\alpha(\tau) \leq \alpha(t) \forall \tau \in [a, t]$, e logo

$$e^{\left[-\int_a^t \beta(s)ds\right]} V(t) \leq \alpha(t) \int_a^t \beta(\tau)e^{\left[-\int_a^\tau \beta(s)ds\right]} d\tau \quad (\text{F.8})$$

Aplicando-se novamente (F.6),

$$e^{\left[-\int_a^t \beta(s)ds\right]} V(t) \leq \alpha(t) \left(1 - e^{\left[-\int_a^t \beta(s)ds\right]} \right) \quad (\text{F.9})$$

Multiplicando pelo inverso do fator integrante,

$$V(t) \leq \alpha(t) \left(e^{\left[-\int_a^t \beta(s)ds\right]} - 1 \right) \quad (\text{F.10})$$

Mas por hipótese $\phi(t) \leq \alpha(t) + V(t)$, de onde

$$\phi(t) \leq \alpha(t) e^{\left[\int_a^t \beta(u) du \right]} \quad \blacksquare. \quad (\text{F.11})$$

F.4

A Fórmula da Variação das constantes

Lema 3 (Fórmula da Variação das Constantes). *Seja um sistema dinâmico do tipo $\dot{x} = A(t)x + g(x, t)$, com $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, e $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua definidas num intervalo $I = [t_0, \beta)$ com a possibilidade de $\beta = +\infty$. Então*

$$x(t) = x_0 e^{\left[\int_{t_0}^t A(s) ds \right]} + \int_{t_0}^t e^{\left[\int_t^\tau A(s) ds \right]} g(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (\text{F.12})$$

Prova: tomando o sistema $\dot{x} = A(t)x + g(x, t)$ multiplica-se a equação pelo fator integrante $e^{-\int_{t_0}^t A(s) ds}$ à esquerda. Lançando mão do fato que A e o fator comutam, resulta

$$\begin{aligned} e^{\left[-\int_{t_0}^t A(s) ds \right]} \dot{x} - A e^{\left[-\int_{t_0}^t A(s) ds \right]} x &= e^{\left[-\int_{t_0}^t A(s) ds \right]} g(x, t) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{\left[-\int_{t_0}^t A(s) ds \right]} x(t) \right) &= e^{\left[-\int_{t_0}^t A(s) ds \right]} g(x, t) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \left(e^{\left[-\int_{t_0}^\tau A(s) ds \right]} x(\tau) \right) d\tau &= \int_{t_0}^t e^{\left[-\int_{t_0}^\tau A(s) ds \right]} g(x(\tau), \tau) d\tau \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow e^{-\left[\int_{t_0}^t A(s) ds\right]} x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t e^{-\left[\int_{t_0}^{\tau} A(s) ds\right]} g(x(s), s) ds \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow x(t) = e^{\left[\int_{t_0}^t A(s) ds\right]} x_0 + e^{-\left[\int_{t_0}^t A(s) ds\right]} \int_{t_0}^t e^{\left[\int_{t_0}^{\tau} A(s) ds\right]} g(x(\tau), \tau) d\tau \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow x(t) = e^{\left[\int_{t_0}^t A(s) ds\right]} x_0 + \int_{t_0}^t e^{-\left[\int_t^{\tau} A(s) ds\right]} g(x(\tau), \tau) d\tau \quad (F.13)
\end{aligned}$$

F.5

O Teorema do Valor Médio para funções multivariáveis

Teorema 1 (Teorema da Convergência Monótona). *Seja $\{x_n\}$ uma sequência real limitada e monótona. Se a sequência for crescente e limitada superiormente, então seu limite existe e é igual ao supremo; se for decrescente e limitada inferiormente, o limite existe e é igual ao ínfimo.* —

Prova: suponha a sequência crescente e limitada superiormente; logo o supremo x existe e $x_n < x \forall n$. Suponha um $\epsilon > 0$; para qualquer valor escolhido, existem algum k tal que $x_k > x - \epsilon$ porque, de outra forma, o supremo seria $x - \epsilon$. Agora, como a sequência é crescente, para todo $m > k$, $x_m > x_k$, de onde

$$0 < x_m - x_k < x_m - (x - \epsilon) \Leftrightarrow x - x_m = |x - x_m| < \epsilon \quad (F.14)$$

Logo, para todo ϵ escolhido, existe k tal que $m > k$ implica $|x - x_m| < \epsilon$, que é a precisa definição de $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Suponha agora a sequência decrescente e limitada inferiormente. O supremo x existe e $x_n > x \forall n$. Para qualquer escolha de $\epsilon > 0$ existe algum k tal que $x < x_k + \epsilon \Leftrightarrow x - x_k < \epsilon$. Como $x_m < x_k \forall m > k$, então

$$0 < x_m - x_k < x_m - (x - \epsilon) \Leftrightarrow x_m - x = |x - x_m| < \epsilon \quad (F.15)$$

Que também é a definição de $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

■

Teorema 2 (Teorema de Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência real limitada tem uma subsequência monótona convergente.* —

Prova: suponha uma sequência $\{x_n\}$ limitada. Sejam os *máximos* da sequência os valores de n tais que $m > n \Leftrightarrow x_m < x_n$, isto é, x_n é maior que todos os valores subsequentes.

Se a sequência tiver infinitos máximos n_k , $k \in \mathbb{N}$, então a subsequência $\{x_{n_k}\}$ é monotônica decrescente e, como a sequência é limitada, logo a subsequência converge pelo Teorema da Convergência Monótona.

Se por outro lado a sequência tiver um número finito de máximos, digamos, n_k , $k \in \{1, 2, \dots, j\}$, tome um $i_1 > j$ qualquer; logo, pela definição de máximo, não existe nenhum elemento x_p tal que $p > i_1$ e $x_p > x_{i_1}$. Agora tome $i_2 > i_1$: igualmente não pode existir termo subsequente maior que x_{i_2} . Repetindo este processo indefinidamente se obtém uma sequência x_{i_1}, x_{i_2}, \dots não-decrescente. Como a sequência $\{x_n\}$ é limitada, então a subsequência $\{x_{i_p}\}$ é limitada e não-decrescente. Aplica-se o Teorema da Convergência Monótona para concluir que é convergente.

■

Teorema 3 (Teorema de Weierstrass ou Teorema do Valor Extremo). *Seja $f(x)$ uma função real contínua num $[a, b]$ fechado limitado. Então f admite tanto um máximo quanto um mínimo neste intervalo.* —

Prova: suponha que f não tem máximo. Então existe uma sequência $\{x_n\}$ monótona crescente tal que $f(x_n) > f(x_m) \Leftrightarrow n > m$.

Como o intervalo $[a, b]$ é limitado, então pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass a sequência $\{x_n\}$ é limitada e, sendo crescente, seu limite existe – suponha x – tal que $f(x) = \alpha$, de onde $\alpha > f(x_p) \forall p$.

Sendo $[a, b]$ é fechado, contém x ; e como f é contínua, $f(\{x_n\})$ converge para α . Mas como f não tem máximo, dado um real positivo γ qualquer sempre existe algum k tal que $f(x_k) > \gamma$. Isto implica que $\alpha \rightarrow \infty$, porque α é maior que qualquer valor de $f(\{x_n\})$ e logo $\alpha > \gamma$, de forma que se possa escolher γ tão grande quanto se queira. Disto se depreende que $\{x_n\}$ não tem limite, contradizendo o Teorema de Bolzano-Weierstrass e incorrendo numa incongruência.

Assim, f possui máximo em $[a, b]$. Suponha agora que f não tem mínimo, implicando que existe subsequência $\{y_n\}$ monótona decrescente tal que $f(y_n) < f(y_m) \Leftrightarrow n > m$. Pelos mesmo motivos, $\{y_n\}$ é limitada com limite, digamos, β . Sendo f contínua, $n \rightarrow \infty \Rightarrow f(\{y_n\}) \rightarrow f(\beta)$; mas $f(\beta) < f(y_n) \forall n$; como f não tem mínimo, isso implica que para todo real negativo β pode-se encontrar k tal que $f(y_k) < \beta$ e logo $\beta \rightarrow -\infty$, e logo $\{y_n\}$ não tem limite, o que implica uma contradição.

■

Teorema 4 (Teorema de Rolle). *Seja $f(x)$, $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e diferenciável num $[a, b] \subset \Omega$ e tal que $f(a) = f(b)$. Então existe $c \in [a, b]$ tal que $f'(c) = 0$.* —

Prova: pelo Teorema de Weierstrass, f é limitada em $[a, b]$ apenas por ser contínua no intervalo. Então f admite tanto um máximo quanto um mínimo no $[a, b]$ (ou seja, como f é contínua no intervalo, apresenta apenas valores finitos dentro deste intervalo); se ambos máximo e mínimo são obtidos nos extremos do intervalo, conclui-se que f é uma função constante e $f'(c) = 0 \forall c \in [a, b]$, e o Teorema de Rolle é imediato. Suponha portanto $c \in (a, b)$, e que a e b não são mínimos e máximos ao mesmo tempo.

Suponhamos inicialmente $c \in (a, b)$ um máximo de f , a e b podem ser mínimos. Então seja a função

$$g(h) = \frac{f(h+c) - f(c)}{h}, \quad g : (a-c, b-c) \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{F.16})$$

Como c é um máximo de f no intervalo (a, b) , o numerador de $g(h)$ é sempre negativo e portanto $h > 0 \Leftrightarrow g(h) < 0$ e $h < 0 \Leftrightarrow g(h) > 0$. Por hipótese, sendo f diferenciável no intervalo (a, b) então também será g , de onde os limites laterais desta existem e obedecem

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} g(h) \leq 0 \quad (\text{F.17})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} g(h) \geq 0 \quad (\text{F.18})$$

Mas como g é diferenciável, então em $h = 0$ os limites laterais devem ser iguais entre si e ao limite; pelas inequações F.17 e F.18, só existe a possibilidade

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} g(h) = \lim_{h \rightarrow 0^-} g(h) = \lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+c) - f(c)}{h} = 0 \quad (\text{F.19})$$

Que é a precisa definição de $f'(c) = 0$. Agora, suponha c um mínimo de f em (a, b) , sendo que a e b podem ser máximos. Novamente, defina g como em F.16. Então as inequações de F.17 e F.18 se invertem; pelo mesmo argumento, conclui-se que $f'(c) = 0$.

Se, por outro lado, ambos a e b não são máximos e nem mínimos de f em $[a, b]$, então existem pelo menos um máximo de derivada nula no intervalo (a, b) e pelo menos um mínimo de derivada nula no (a, b) .

Teorema 5 (Teorema do Valor Médio para funções de uma variável). *Seja $f(x)$, $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e diferenciável no Ω . Então*

$$\forall [a, b] \subset \Omega, \exists c \in [a, b] \mid f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\text{F.20})$$

Prova: seja a equação da reta secante por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$:

$$y(x) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (x - a) + f(a) \quad (\text{F.21})$$

Agora defina $r(x) = f(x) - y(x)$; então $r(a) = r(b) = 0$. Também r é diferenciável, uma vez que ambas f e y o são. Assim, aplica-se o Teorema de Rolle para concluir que existe um $c \in [a, b]$ tal que $r'(c) = 0$. Mas

$$r'(x) = f'(x) - y'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\text{F.22})$$

$$\therefore r'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\text{F.23})$$

Lema 4 (Teorema do Valor Médio para funções multivariáveis). *Seja uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, Ω um aberto no \mathbb{R}^n . Sejam dois pontos $x, y \in \Omega$ tais que $0 < \|x - y\| < \delta$, com δ arbitrariamente pequeno. Então existe um $m > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq m\|x - y\|$.* —

Prova: tome uma função $g(t) = f((1-t)x + ty)$. Então g é a parametrização de uma linha contínua entre x e y se $t \in [0, 1]$; sendo f e $(1-t)x + ty$ diferenciáveis, então a composição g também o é (pela Regra da Cadeia). Pelo Teorema do Valor Médio para funções de uma variável, então existe $c \in [0, 1]$ tal que

$$g(1) - g(0) = g'(c) \quad (\text{F.24})$$

Computando $g'(c)$ explicitamente, e notando que $g(0) = f(x)$, $g(1) = f(y)$, então

$$f(x) - f(y) = \nabla f((1-c)x + cy) \cdot (x - y) \quad (\text{F.25})$$

O ponto (\cdot) nesta equação representa o produto interno. Pela Desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \left| \nabla f((1-c)x + cy) \right| \|x - y\| \quad (\text{F.26})$$

O Teorema ainda não está provado, porque o fato de f ser diferenciável não significa que ∇f seja limitada. Supondo que isto é verdade,

$$\exists m > 0 \mid m > |\nabla f(x)| \forall x \in \Omega \Leftrightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq m \|x - y\| \quad \blacksquare. \quad (\text{F.27})$$

Em particular, se f é de classe C^1 , i.e., ∇f é contínua no Ω , então pelo Teorema de Weierstrass ∇f é limitada no Ω e esta última passagem é válida.

F.6

Majorando a norma de matrizes exponenciais

Lema 5 (Limitação do produto de um polinômio com exponencial decrescente). *Seja $f = e^{-\alpha x} P(x)$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $\alpha > 0$ e $P(x)$ um polinômio de qualquer ordem. Então f é limitada em qualquer semirreta direita e, além disso, $f(x)$ tende a zero quando $x \rightarrow \infty$.* —

Prova para $x \geq 0$: suponha inicialmente $x \in (0, +\infty)$. Se $P(x)$ for um polinômio constante, então ambas as propriedades são imediatas. Suponha-se então $\deg(P(x)) \geq 1$. Fazendo a expansão de Taylor de $e^{\alpha x}$ em $x = 0$:

$$e^{\alpha x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{k!} > \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{k!} \quad \forall x > 0 \quad (\text{F.28})$$

A desigualdade se verifica porque todas as parcelas do somatório são positivas se $x > 0$. Supondo $x \neq 0$ e dividindo os dois lados por x^n ,

$$\frac{1}{x^n} e^{\alpha x} > \frac{\alpha^n}{n!} + \alpha^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\alpha x)^{k-n}}{k!} = \frac{\alpha^n}{n!} + \alpha^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha x)^m}{(m+n)!} \quad (\text{F.29})$$

Perceba-se que o somatório define um polinômio de grau infinito, sem termo independente, e cujos todos os coeficientes são positivos. Invertendo a desigualdade,

$$x^n e^{-\alpha x} < \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\frac{1}{n!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha x)^m}{(m+n)!}} \quad (\text{F.30})$$

Nota-se que muito embora a expressão fora deduzida supondo $x \neq 0$, ela ainda vale para x nulo, daonde pode-se incluir o zero no intervalo de x : $x \in [0, +\infty)$. Agora, podem-se provar facilmente tanto a limitação da função quanto o limite. Atine-se para o fato que $x^n e^{-\alpha x}$ é sempre positivo para $x > 0$. Atente-se também para o fato que como o polinômio do denominador tem

coeficientes positivos, o denominador é crescente para $x > 0$ e, logo, tende para o infinito quando x tende para infinito, de forma que o termo da direita na desigualdade tenda para zero. Pelo Teorema do Confronto,

$$0 < x^n e^{-\alpha x} < \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\frac{1}{n!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha x)^m}{(m+n)!}} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-\alpha x} = 0 \quad (\text{F.31})$$

Além disso,

$$x^n e^{-\alpha x} < \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\frac{1}{n!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha x)^m}{(m+n)!}} < \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\frac{1}{n!} + 0} = \frac{n!}{\alpha^n} \quad (\text{F.32})$$

Basta agora utilizar que a função $f(x)$, para a qual se quer provar o lema, consiste de combinações lineares de funções do tipo $x^n e^{-\alpha x}$; suponha que o polinômio $P(x)$ tem coeficientes p_i , ou seja: $P(x) = p_0 + \sum_{k=1}^n p_k x^k$. Assim,

$$f(x) = e^{-\alpha x} P(x) = p_0 e^{-\alpha x} + \sum_{k=1}^n p_k e^{-\alpha x} x^k \quad (\text{F.33})$$

Daonde, para $x > 0$, utilizando a desigualdade triangular e (F.32),

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| p_0 e^{-\alpha x} + \sum_{k=1}^n p_k e^{-\alpha x} x^k \right| \leq |p_0 e^{-\alpha x}| + \sum_{k=1}^n |p_k| |e^{-\alpha x} x^k| < \\ &< |p_0| + \sum_{k=1}^n |p_k| \frac{k!}{\alpha^n} \end{aligned} \quad (\text{F.34})$$

Ainda utilizando (F.33), e aplicando o limite dos dois lados,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e^{-\alpha x} P(x) = p_0 \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\alpha x} + \sum_{k=1}^n p_k \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\alpha x} x^k \quad (\text{F.35})$$

Por (F.31), todos os limites são nulos, o que sucede

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad (\text{F.36})$$

Prova para x numa semirreta direita fechada qualquer: agora, considera-se que x pode pertencer a qualquer semirreta direita fechada, digamos, $[x_0, +\infty)$ com $x_0 \in \mathbb{R}$. Sejam y e $g(y)$ definidos como

$$y = x - x_0 \quad (\text{F.37})$$

$$g(y) = e^{-\alpha y} Q(y) \quad (\text{F.38})$$

Onde α é exatamente o mesmo argumento da parcela exponencial de $f(x)$, e $Q(x)$ é um polinômio qualquer. Notadamente, y pertence à semirreta positiva fechada; assim, a $g(y)$ aplicam-se os resultados anteriores (isto é, é limitada e tem limite nulo no infinito). Sabe-se também que se $Q(x - x_0)$ é um polinômio de mesmo grau de $Q(x)$ e logo pode-se escolhê-lo tal que $P(x) \equiv Q(x - x_0)$. Além disso, pelo resultado anterior, $g(y)$ é limitada na semirreta positiva e seu limite no infinito é zero.

$$g(y) = e^{-\alpha(x-x_0)} Q(x-x_0) = \overbrace{e^{-\alpha x} P(x)}^{f(x)} e^{\alpha x_0} \Leftrightarrow f(x) = g(y) e^{\alpha x_0} \quad (\text{F.39})$$

Sendo $g(y)$ limitada, então $f(x)$ consiste daquela função multiplicada por um escalar, e logo também é limitada. Pelo mesmo raciocínio,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e^{\alpha x_0} \lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = 0 \quad \blacksquare \quad (\text{F.40})$$

Corolário: seja a função $s(x) = e^{-\alpha x} P(|x|)$, P definido como no lema anterior. Então s também é limitada e tende para zero no infinito.

Prova: se $x \geq 0$, então $|x| = x \Leftrightarrow P(|x|) \equiv P(x) \Leftrightarrow s(x) \equiv f(x)$ e o corolário é imediato. Suponha portanto $x < 0$. Neste caso, $P(x)$ e $P(|x|)$ são iguais a menos dos termos de potência ímpar. Para facilitar a notação, designar-se-á $P(|x|)$ por $Q(x)$:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k \Leftrightarrow Q(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k p_k x^k \because |x| = -x \quad (\text{F.41})$$

Assim, $Q(x)$ é um polinômio de coeficientes $q_i = (-1)^i p_i$, ou seja, $q_i = -p_i$ se i for ímpar e $q_i = p_i$ se par. Logo, a função $s(x)$ obedece às hipóteses do lema e portanto também é uma função limitada e de limite nulo no infinito.

Lema 6 (Limites superiores para a norma de matrizes exponenciais). *Seja uma matriz A valorada complexa, cujos todos os autovalores têm parte real negativa. Então existem $k, \alpha > 0$ tais que*

$$\left| e^{At} \right| \leq k e^{-\alpha t} \quad (\text{F.42})$$

Para t numa semirreta direita qualquer.

Prova para $t \geq 0$: seja J a forma canônica de Jordan de A e J_i , $i = 1, 2, \dots, k$ o i -ésimo bloco de Jordan correspondente ao i -ésimo autovalor λ_i . Cada J_i pode ser escrito como $J_i = \lambda_i I + B_i$, onde B_i é uma matriz nilpotente de diagonal nula correspondente a cada bloco. Dessa forma,

$$e^{J_i t} = e^{\left(I \lambda_i + B_i \right) t} = e^{\lambda_i t} e^{B_i t} = e^{\lambda_i t} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{t^m}{m!} B_i^m \quad (\text{F.43})$$

Seja um ϵ_i positivo arbitrário. Multiplicando e dividindo a parte direita da equação por $e^{\epsilon_i t}$

$$\begin{aligned} e^{J_i t} &= e^{(\lambda_i + \epsilon_i) t} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{t^m}{m!} B_i^m e^{-\epsilon_i t} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left| e^{J_i t} \right| &\leq \left| e^{(\lambda_i + \epsilon_i) t} \right| \left| \sum_{m=0}^{n-1} \frac{t^m}{m!} B_i^m e^{-\epsilon_i t} \right| \leq \left| e^{(\lambda_i + \epsilon_i) t} \right| \sum_{m=0}^{n-1} \frac{t^m}{m!} e^{-\epsilon_i t} \left| B_i^m \right| \end{aligned} \quad (\text{F.44})$$

Pelo lema 5, a função $\frac{t^m}{m!} e^{-\epsilon_i t} \left\| B_i^m \right\|$ é limitada no intervalo $t \geq 0$. Sucede que para cada termo do somatório existe um β_i positivo tal que

$$\begin{aligned} \frac{t^m}{m!} e^{-\epsilon_i t} \left| B_i^m \right| &< \beta_i \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left| e^{J_i t} \right| &\leq \left| e^{(\lambda_i + \epsilon_i) t} \right| \sum_{m=0}^{n-1} \beta_i = \left| e^{\left(\text{Re}(\lambda_i) + \epsilon_i \right) t} \right| \left| e^{j \text{Im}(\lambda_i) t} \right| \sum_{m=0}^{n-1} \beta_i = \left| e^{\left(\text{Re}(\lambda_i) + \epsilon_i \right) t} \right| \sum_{m=0}^{n-1} \beta_i \end{aligned} \quad (\text{F.45})$$

Esta última equação prova o lema para um bloco J_i : se $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ então pode-se escolher ϵ_i tal que $\epsilon_i + \text{Re}(\lambda_i) = \alpha_i < 0$, de onde $\left| e^{J_i t} \right|$ tende a zero no infinito porque é majorada por uma função que tende a zero no infinito. Basta doravante provar que dado este resultado pode-se prová-lo similarmente para A .

Dado que J é a forma canônica de Jordan de A , então existe alguma matriz P invertível tal que $A = P J P^{-1}$. Sejam V_i matrizes consistindo de J com todos os blocos de Jordan zerados exceto o i -ésimo. Então $J = \sum_{i=1}^k V_i$ e

$$e^{At} = P e^{Jt} P^{-1} = P \left[e^{\left(\sum_{i=1}^k V_i \right) t} \right] P^{-1} = P \left[\prod_{i=1}^k e^{V_i t} \right] P^{-1} \quad (\text{F.46})$$

De acordo com o resultado anterior, existem $k_i > 0, \alpha_i \in \mathbb{R}$ tais que

$$|e^{V_i t}| \leq k_i e^{\alpha_i t} \quad (\text{F.47})$$

Daonde

$$\begin{aligned} |e^{At}| &\leq |P| \left[\prod_{i=1}^k |e^{V_i t}| \right] |P^{-1}| \leq |P| \left\{ \left(\prod_{i=1}^k k_i \right) e^{\left[\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right) t \right]} \right\} |P^{-1}| \\ \therefore |e^{At}| &\leq |P| \left(\prod_{i=1}^k k_i \right) |P^{-1}| e^{\left[\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right) t \right]} = k e^{\alpha t} \end{aligned} \quad (\text{F.48})$$

Assim, se todos os autovalores de A têm parte real negativa, *ist est*, $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, então para todos eles pode-se escolher ϵ_i tal que $\epsilon_i + \text{Re}(\lambda_i) = \alpha_i < 0$. Se todos os α_i são negativos, sua soma é garantidamente negativa.

Prova para t numa semirreta direita qualquer: suponha $t \geq t_0, t_0 \in \mathbb{R}$ e $u = t - t_0$. Então

$$|e^{At}| = |e^{A(u+t_0)}| \quad (\text{F.49})$$

Como para duas matrizes M e N complexas quaisquer $|MN| \leq |M||N|$,

$$|e^{At}| \leq |e^{Au}| |e^{At_0}| \quad (\text{F.50})$$

O resultado é imediato porque, como u pertence à semirreta positiva, então o resultado anterior se aplica e existem $k, \alpha > 0$ tais que $|e^{Au}| < k e^{-\alpha t}$; consequentemente,

$$|e^{At}| \leq (|e^{At_0}| k) e^{-\alpha t} \quad (\text{F.51})$$

■

Corolário: se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tem todos os autovalores no semiplano esquerdo, então $|e^{At}|$ é limitada em qualquer semirreta direita e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{At}| = 0 \quad (\text{F.52})$$

Prova: pelo Lema 6, existem $k, \alpha > 0$ tais que

$$|e^{At}| \leq k e^{-\alpha t} \quad (\text{F.53})$$

O corolário é imediato pelo Teorema do Confronto.

Lema 7 (Versão matricial do lema 5). *Seja $f(x) = e^{Ax} P(x)$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, com $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ cujos autovalores todos têm parte real negativa, e $P(x)$ um polinômio de qualquer ordem de coeficientes complexos. Então $|f(x)|$ é limitada numa semirreta direita qualquer e, além disso, $|f(x)|$ tende a zero quando $x \rightarrow \infty$.* —

Prova: pelo lema 6, existem $k, \alpha > 0$ tais que $|e^{Ax}| < k e^{-\alpha x}$. Assim,

$$|f(x)| = |e^{Ax} P(x)| \leq k e^{-\alpha x} |P(x)| \quad (\text{F.54})$$

Se $P(x)$ for o polinômio constante, este lema é imediato por esta última equação. Logo, supõe-se que $P(x)$ tem grau $\deg(P(x)) = k \geq 1$ e coeficientes p_i , ou seja, $P(x) = \sum_{i=0}^k p_i x^i$. Então, pela Desigualdade Triangular,

$$|f(x)| \leq k e^{-\alpha x} \sum_{i=0}^k |p_i| |x|^i = k \sum_{i=0}^k |p_i| |x|^i e^{-\alpha x} \quad (\text{F.55})$$

Pelo lema 5 e seu corolário, as parcelas do somatório são limitadas, i.e., para todos os índices i existe um $\beta_i > 0$ tal que $|x|^i e^{-\alpha x} \leq \beta_i$, de onde

$$|f(x)| \leq k \sum_{i=0}^k |p_i| \beta_i \quad (\text{F.56})$$

Prova-se assim que $|f(x)|$ é limitada para $x \geq 0$. Agora, ainda por F.55,

$$0 < |f(x)| \leq e^{-\alpha x} \sum_{i=0}^k |p_i| |x|^i \quad (\text{F.57})$$

Ora, sendo a função da direita um polinômio multiplicado por uma exponencial decrescente, então também pelo lema 5 seu limite no infinito é nulo; logo, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = 0 \quad \blacksquare \quad (\text{F.58})$$

F.7

Estabilidade de sistemas

Teorema 6 (Estabilidade de sistemas lineares). *Seja um sistema linear do tipo $\dot{y} = Ay + h(t)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com equilíbrio y^* num tempo t_0 (isto é, $Ay^* + h(t_0) = 0$) e $h(t)$ tal que $e^{-At} h(t)$ é limitada para $t \geq t_0$. Então y^* é um equilíbrio assintoticamente estável do sistema e $\|y(t) - y^*\|$ é limitada para $t \geq t_0$.* —

Prova: seja a mudança de variável $x(t) = y(t) - y^*$. O sistema é reescrito por

$$\dot{x} = Ax + h(t) + Ay^* = Ax + g(t) \quad (\text{F.59})$$

Que, por sua vez, tem equilíbrio na origem. Note-se que como $e^{-At} h(t)$ é limitada para $t \geq t_0$, então também o é $g(t)$ porque existe um positivo γ tal que $\|e^{-At} h(t)\| \leq \gamma$:

$$e^{-At} g(t) = e^{At} (e^{-At} h(t)) + Ay^* \Leftrightarrow \|g(t)\| \leq |e^{At}| \overbrace{\|e^{-At} h(t)\|}^{\leq \gamma} + \|Ay^*\| \Leftrightarrow \quad (\text{F.60})$$

$$\Leftrightarrow \|g(t)\| \leq |e^{At}| \gamma + \|Ay^*\| \quad (\text{F.61})$$

Pelo lema 7, a primeira parcela do lado direito é limitada, que implica $g(t)$ ser limitada. Pela Fórmula da Variação das Constantes (lema 3),

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} g(\tau) d\tau \quad (\text{F.62})$$

Onde $x(t_0) = x_0$ é a condição inicial da qual o sistema é solto. Majorando esta equação e utilizando a Desigualdade Triangular,

$$\|x(t)\| \leq |e^{A(t-t_0)}| \|x_0\| + \int_{t_0}^t |e^{A(t-\tau)} g(\tau)| d\tau \quad (\text{F.63})$$

Por hipótese, o integrando é limitado; logo, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\|x(t)\| \leq |e^{A(t-t_0)}| \|x_0\| + |e^{At}| \int_{t_0}^t \alpha d\tau = \overbrace{|e^{A(t-t_0)}| \|x_0\|}^{\text{Lema 6}} + \overbrace{|e^{At}| \alpha (t-t_0)}^{\text{Lema 7}} \quad (\text{F.64})$$

Pelo Corolário F.52 do Lema 6, o primeiro termo é limitado e tende a zero para t tendendo a infinito. O segundo termo comunga destas mesmas propriedades pelo Lema 7. Assim, $\|x(t)\| = \|y(t) - y^*\|$ é limitada e, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - y^*\| = 0 \quad (\text{F.65})$$

E logo y^* é um equilíbrio assintoticamente estável do sistema linear $\dot{y} = Ay + h(t)$. ■

Teorema 7 (Estabilidade de sistemas não-lineares em equilíbrios hiperbólicos tipo zero). *Seja o sistema dinâmico não-linear $\dot{x} = f(x, t)$, com $f : \Omega \times \Psi \rightarrow \Omega$ de classe C^1 , $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $[t_0, \infty) \subseteq \Psi \subseteq \mathbb{R}$, com x^* um equilíbrio hiperbólico tipo zero (isto é, todos os autovalores da matriz jacobiana de f no ponto x^* têm parte real negativa). Então existe uma vizinhança $U(y^*) = \{y_0 \in \Omega \mid \|y_0 - y^*\| \leq \epsilon\}$ do equilíbrio y^* na qual $\|y(t) - y^*\|$ é sempre limitada para qualquer condição inicial nesta vizinhança e, além disso, y^* é um equilíbrio assintótico estável do sistema não-linear para qualquer condição inicial $y_0 \in U(y^*)$.* —

Prova: primeiramente, suponha que $x^* = 0$. Seja A a matriz jacobiana de f calculada em $x = 0$. Então existe $g(x, t)$ tal que $f(x, t) \equiv Ax + g(x, t)$; reescreve-se o sistema dinâmico não-linear como

$$\dot{x} = Ax + g(x, t). \quad (\text{F.66})$$

Atente-se para o fato que, sendo f de classe C^1 , então g também pertence à mesma classe. Pela Fórmula da Variação das Constantes (Lema 3),

$$x = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} g(x(s), s) ds \quad (\text{F.67})$$

Onde $x_0 = x(t_0)$ é o ponto inicial de onde o sistema é solto. Suponha $0 < \|x_0\| < \epsilon$, com ϵ arbitrariamente pequeno. A igualdade implica

$$\|x\| \leq \|e^{A(t-t_0)}\| \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|e^{A(t-s)}\| \|g(x(s), s)\| ds \quad (\text{F.68})$$

Como todos os autovalores de A têm parte real negativa, então pelo Lema 6 existem constantes k, α positivas tais que $\|e^{At}\| \leq k e^{-\alpha t} \forall t \geq 0$. Além disso, pelo Teorema do Valor Médio para funções multivariáveis (Lema 4), como g é C^1 então para qualquer $m > 0$ arbitrariamente pequeno, existe $\delta > 0$ tal que $\|g(x(t), t)\| < m \|x\|$ se $\|x\| < \delta$. Assim F.68 implica

$$\|x\| \leq k e^{-\alpha t} \|x_0\| + \int_{t_0}^t m k e^{-\alpha(t-s)} \|x(s)\| ds \quad (\text{F.69})$$

Multiplicando esta por $e^{\alpha t}$,

$$e^{\alpha t} \|x\| \leq k \|x_0\| + \int_{t_0}^t e^{\alpha s} \|x(s)\| ds \quad (\text{F.70})$$

Aplicando a Desigualdade de Gromwell Generalizada (Lema 2) para

$$\phi(t) = e^{\alpha t} \|x\| \quad (\text{F.71})$$

$$\alpha(t) = k \|x_0\| \quad (\text{F.72})$$

Resulta

$$\|x\| \leq k \|x_0\| e^{-(\alpha - km)t} \quad (\text{F.73})$$

Basta escolher m tal que $\alpha - km < 0$ porque então $e^{-(\alpha - km)t}$ será uma exponencial decrescente limitada:

$$\|x\| \leq k \|x_0\| e^{-(\alpha - km)t_0} \quad (\text{F.74})$$

Logo $\|x\| = \|y - y^*\|$ é limitada. Aplicando o Teorema do Confronto em F.73,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x\| = 0 \quad \blacksquare. \quad (\text{F.75})$$

Frise-se que o número δ , que imprime sobre $g(x, t)$ a condição $\|g(x(t), t)\| < m \|x\|$, deve ser maior que o fator ϵ , concernente à distância da condição inicial: $\|x_0\| \leq \epsilon$. Assim $\epsilon \leq \delta$, quer dizer, o espaço inicial de estados está condicionado a uma distância máxima δ do equilíbrio, atestando que os resultados só valem nesta vizinhança. Isto porque para um $\|x_0\|$ suficientemente grande não se pode garantir que haja m positivo que satisfaça ambas as equações $\|g(x_0(t), t)\| \leq m \|x_0\|$ e $\alpha - km < 0$, então não se pode depreender a equação (F.69).

Ademais, perceba-se que para sistemas lineares esta restrição não existe, isto é, dado que um sistema linear é estável (isto é, as condições de estabilidade são satisfeitas), então qualquer condição inicial o leva ao equilíbrio com trajetória limitada.

F.8

O Teorema de Hartman-Grobman

Esta prova é baseada naquela apresentada em (PERKO, 2008), e contém as explicações dos passos da prova.

Teorema 8 (Teorema de Hartman-Grobman). *Seja o sistema dinâmico autônomo não-linear $\dot{x} = f(x)$, com $f : \Omega \times \Psi \rightarrow \Omega$ de classe C^1 , $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $[t_0, \infty) \subseteq \Psi \subseteq \mathbb{R}$, com x^* um equilíbrio hiperbólico e fluxo $\phi(x_0, t)$. Seja também um sistema linear equivalente $\dot{x} = Ax$, com A o jacobiano de f em x^* . Então o fluxo do sistema não-linear é localmente homeomorfo ao fluxo do sistema linear em x^* ; em outras palavras, existe um homeomorfismo h tal que*

$$h(\phi(x_0, t)) = e^{At} h(x_0)$$

Para x_0 numa vizinhança suficientemente pequena de x^* , digamos, $x_0 \in U(x^*) \subset \Omega$. —

Prova: tomando a forma canônica de Jordan J de A , então existem duas matrizes P e Q tais que

$$J = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \quad (\text{F.76})$$

E também tais que P contenha todos os autovalores de parte real negativa e Q os de parte positiva. Em outras palavras, P é o grupo dos blocos de Jordan relativos aos autovalores de parte real negativa, e Q é o grupo dos blocos referentes aos autovalores de parte real positiva.

Considere agora que A pode ser separada em dois subespaços invariantes: um V^E estável (referente aos autovalores de parte real negativa) e outro V^I instável (refere-se aos autovalores de parte real positiva). Outrossim,

$$V^E = \text{span}(v_1, \dots, v_p) \quad (\text{F.77})$$

$$V^I = \text{span}(v_{p+1}, \dots, v_n) \quad (\text{F.78})$$

Onde os v_i , $i = 1, \dots, p$ são os autovetores associados aos autovalores de parte real negativa e v_i , $i = p+1, \dots, n$ são os autovetores associados aos autovalores de parte real positiva. Então o fluxo $\phi(x_0, t)$ pode ser separado em duas partes, uma estável $x_e \in V_E$ e outra instável $x_i \in V_I$:

$$\phi(x_0, t) = \begin{pmatrix} x_e(x_0, t) \\ x_i(x_0, t) \end{pmatrix} \quad (\text{F.79})$$

Naturalmente, os subespaços V_E e V_I podem ser expressos como parametrizações no tempo:

$$\begin{cases} (V^E): & v_E(x_{e0}, x_{i0}, t) = x_e(x_{e0}, x_{i0}, t) - e^{Pt} x_{e0} \\ (V^I): & v_I(x_{e0}, x_{i0}, t) = x_i(x_{e0}, x_{i0}, t) - e^{Qt} x_{i0} \end{cases} \quad (\text{F.80})$$

Sejam agora ξ e κ elementos respectivos de (V^E) e (V^I) obtidos ao avaliar o sistema (F.80) em $t = 1$:

$$\begin{cases} \xi(x_{e0}, x_{i0}) = x_e(x_{e0}, x_{i0}, 1) - e^P x_{e0} \\ \kappa(x_{e0}, x_{i0}) = x_i(x_{e0}, x_{i0}, 1) - e^Q x_{i0} \end{cases} \quad (\text{F.81})$$

Nota-se que como f é de classe C^1 em Ω , então também são ξ e κ . Decorre então pelo Teorema de Weierstrass que existe uma vizinhança da origem $|x_{e0}|^2 + |x_{i0}|^2 \leq \delta^2$, $\delta > 0$ na qual ambos os jacobianos de ξ e κ são limitados:

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial \xi}{\partial x_{e0}} \right| \leq \alpha \\ \left| \frac{\partial \kappa}{\partial x_{i0}} \right| \leq \beta \end{cases} \quad (\text{F.82})$$

Seja $\gamma = \max(\alpha, \beta)$. Defina duas funções F_1 e F_2 com derivadas contínuas tais que

$$\begin{cases} F_1(x_{e0}, x_{i0}) = F_2(x_{e0}, x_{i0}) = 0 & , \text{ se } |x_{e0}|^2 + |x_{i0}|^2 \geq \delta^2 > 0 \\ F_1(x_{e0}, x_{i0}) = \xi(x_{e0}, x_{i0}) \text{ e } F_2(x_{e0}, x_{i0}) = \kappa(x_{e0}, x_{i0}) & , \text{ se } 0 < |x_{e0}|^2 + |x_{i0}|^2 \leq \lambda^2 < \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \end{cases} \quad (\text{F.83})$$

Nota-se que como ξ e κ são C^1 , as duas F_1 e F_2 também são. Além disso,

$$|x_{e0}|^2 + |x_{i0}|^2 \leq \lambda^2 \Leftrightarrow \sqrt{|x_{e0}|^2 + |x_{i0}|^2} \leq \lambda < \frac{\delta}{2} \quad (\text{F.84})$$

Pela Desigualdade das Médias,

$$\frac{|x_{e0}| + |x_{i0}|}{2} < \sqrt{|x_{e0}|^2 + |x_{i0}|^2} \leq \lambda < \frac{\delta}{2} \therefore |x_{e0}| + |x_{i0}| \leq 2\lambda < \delta \quad (\text{F.85})$$

Decorre da definição de γ e pelo Teorema do Valor Médio para funções multivariáveis:

$$|F_1|, |F_2| \leq \gamma \sqrt{|x_{e0}|^2 + |x_{i0}|^2} \leq \gamma (|x_{e0}| + |x_{i0}|) \quad (\text{F.86})$$

Dadas as características dos autovalores de P e Q , então $\|e^P\| < 1$ e $\|e^{-Q}\| < 1$, pelo Corolário do Lema 6. Defina as transformações L , T e H :

$$\begin{cases} L = \begin{pmatrix} e^P x_e(x_0, t) \\ e^Q x_i(x_0, t) \end{pmatrix} = e^A x \\ T = \begin{pmatrix} e^P x_e(x_0, t) + F_1(x_e, x_i) \\ e^Q x_i(x_0, t) + F_2(x_e, x_i) \end{pmatrix} \\ H = \begin{pmatrix} \Theta(x_e, x_i) \\ \Lambda(x_e, x_i) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{F.87})$$

Onde Θ e Λ são funções hipotéticas que se quer encontrar. O Teorema está provado se $H \circ T = L \circ H$ e se Θ e Λ forem contínuas, porque então H será um homeomorfismo. Para encontrar estas funções, será utilizado o método de aproximações sucessivas. Aplicando $H \circ T = L \circ H$ às definições em (F.87), garante-se que Θ e Λ serão homeomorfismos se existirem:

$$e^P \Theta = \Theta \left(e^P x_e(x_0, t) + F_1(x_e, x_i), e^Q x_i(x_0, t) + F_2(x_e, x_i) \right) \quad (\text{F.88})$$

$$e^Q \Lambda = \Lambda \left(e^P x_e(x_0, t) + F_1(x_e, x_i), e^Q x_i(x_0, t) + F_2(x_e, x_i) \right) \quad (\text{F.89})$$

Assim, tomando as sequências recursivas Θ_k e Λ_k

$$\begin{cases} \Theta_0(x_e, x_i) = x_e \\ \Theta_{k+1} = e^{-P} \Theta_k \left(e^P x_e + F_1(x_e, x_i), e^Q x_i + F_2(x_e, x_i) \right) \end{cases} \quad (\text{F.90})$$

$$\begin{cases} \Lambda_0(x_e, x_i) = x_i \\ \Lambda_{k+1} = e^{-Q} \Lambda_k \left(e^P x_e + F_1(x_e, x_i), e^Q x_i + F_2(x_e, x_i) \right) \end{cases} \quad (\text{F.91})$$

Basta provar que estas sequências são sequências de Cauchy e que os elementos delas são funções contínuas, porque então

$$\Theta = \lim_{k \rightarrow \infty} \Theta_k \quad (\text{F.92})$$

$$\Lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_k \quad (\text{F.93})$$

Prova que as funções Λ_k e Θ_k são contínuas

A prova se dá por Princípio da Indução: por definição, Λ_0 e Θ_0 são C^1 . Como e^P e e^Q são constantes, F_1 e F_2 classe C^1 por construção, e x_e e x_i são C^2 por hipótese, então Λ_1 é C^1 por ser a composição de Θ_0 , de classe C^1 , com funções contínuas.

Agora, suponha Λ_k e Θ_k C^1 ; logo, Λ_{k+1} e Θ_{k+1} também o serão porque são a composição da iteração passada com x_e , x_i , F_1 e F_2 . Assim, se Λ_k e Θ_k forem C^1 , também serão Λ_{k+1} e Θ_{k+1} ; dado que a iteração inicial é daquela classe, então também são todas as subsequentes.

Prova que Λ_k e Θ_k são sequências de Cauchy

Esta prova também será feita por Princípio da Indução. Primeiramente para Λ , quer-se provar que a recorrência Λ_k é tal que existem constantes $\epsilon \in (0, 1)$, $r \in (0, 1)$ e $M > 0$ tais que

$$|\Lambda_k(x_e, x_i) - \Lambda_{k-1}(x_e, x_i)| \leq M r^k (|x_e| + |x_i|)^\epsilon \quad (\text{F.94})$$

Porque, desta forma, a sequência será uma sequência de Cauchy, implicando que o limite da sequência existe e é igual a um Λ , a função procurada: dado um μ suficientemente pequeno, há sempre um n tal que $|\Lambda_k(x_e, x_i) - \Lambda_{k-1}(x_e, x_i)| < \mu \forall k > n \in \mathbb{N}$, porque

$$M r^k (|x_e| + |x_i|)^\epsilon < \mu \Leftrightarrow k > \log_r \left[\frac{\mu}{M (|x_e| + |x_i|)^\epsilon} \right]$$

$$\therefore n = \left\lceil \log_r \left[\frac{\mu}{M (|x_e| + |x_i|)^\epsilon} \right] \right\rceil \quad (\text{F.95})$$

Assumindo que a proposição (F.94) vale para um Λ_k , então

$$\begin{aligned} |\Lambda_{k+1} - \Lambda_k| &= \left| e^{-Q} \Lambda_k (e^P x_e + F_1(x_e, x_i), e^Q x_i + F_2(x_e, x_i)) - e^{-Q} \Lambda_{k-1} (e^P x_e + F_1(x_e, x_i), e^Q x_i + F_2(x_e, x_i)) \right| \\ &\leq \|e^{-Q}\| M r^k (|e^P x_e + F_1(x_e, x_i)| + |e^Q x_i + F_2(x_e, x_i)|)^\epsilon \\ &\leq \|e^{-Q}\| M r^k (\|e^P\| |x_e| + \|F_1(x_e, x_i)\| + \|e^Q\| |x_i| + \|F_2(x_e, x_i)\|)^\epsilon \\ &\stackrel{(\text{F.86})}{\leq} \|e^{-Q}\| M r^k [\|e^P\| |x_e| + \|e^Q\| |x_i| + 2\gamma (|x_e| + |x_i|)]^\epsilon \end{aligned} \quad (\text{F.96})$$

Adotando $\zeta = \max(2\gamma, \|e^P\|, \|e^Q\|)$,

$$|\Lambda_{k+1} - \Lambda_k| \leq \|e^{-Q}\| M r^k \zeta^\epsilon (|x_e| + |x_i|)^\epsilon \quad (\text{F.97})$$

Escolhendo $r = \|e^{-Q}\| \zeta^\epsilon = \|e^{-Q}\| [\max(2\gamma, \|e^P\|, \|e^Q\|)]^\epsilon$ então

$$|\Lambda_{k+1} - \Lambda_k| \leq M r^{k+1} (|x_e| + |x_i|)^\epsilon \quad (\text{F.98})$$

Ou seja, se escolher r daquela forma, dado que a propriedade vale para um k então ela valerá para $k + 1$, o que prova a hipótese indutiva da prova por indução. Agora, para o caso inicial: para $k = 1$,

$$\begin{aligned} |\Lambda_1 - \Lambda_0| &= \left| e^{-Q} \Lambda_0 (e^P x_e + F_1(x_e, x_i), e^Q x_i + F_2(x_e, x_i)) - x_i \right| \\ &= \left| e^{-Q} (e^Q x_i + F_2(x_e, x_i)) - x_i \right| = \left| e^{-Q} F_2(x_e, x_i) \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|e^{-Q}\| |F_2(x_e, x_i)| \stackrel{(F.86)}{\leq} \|e^{-Q}\| \gamma(|x_e| + |x_i|) = \|e^{-Q}\| \gamma(|x_e| + |x_i|)^{1-\epsilon} (|x_e| + |x_i|)^\epsilon \leq \\
&\stackrel{(F.85)}{\leq} \|e^{-Q}\| \gamma(2\lambda)^{1-\epsilon} (|x_e| + |x_i|)^\epsilon = \frac{\|e^{-Q}\| \gamma(2\lambda)^{1-\epsilon}}{r} r (|x_e| + |x_i|)^\epsilon
\end{aligned} \tag{F.99}$$

$$\text{Adotando } M = \frac{\|e^{-Q}\| \gamma(2\lambda)^{1-\epsilon}}{r},$$

$$|\Lambda_1 - \Lambda_0| \leq M r (|x_e| + |x_i|)^\epsilon \tag{F.100}$$

Logo, ao escolher

$$\begin{cases} r = \|e^{-Q}\| [\max(2\gamma, \|e^P\|, \|e^Q\|)]^\epsilon \\ M = \frac{\|e^{-Q}\| \gamma(2\lambda)^{1-\epsilon}}{r} \end{cases} \tag{F.101}$$

A propriedade (F.94) vale para qualquer k natural. Ainda assim, não se provou que aquela equação necessariamente implica que Λ_k seja sequência de Cauchy porque r ainda não foi escolhido menor que 1. Para tanto, basta escolher um ϵ para o qual r esteja naquele intervalo, isto é:

$$r = \|e^{-Q}\| [\max(2\gamma, \|e^P\|, \|e^Q\|)]^\epsilon < 1 \tag{F.102}$$

Como todos os fatores são positivos, aplica-se o logaritmo dos dois lados da inequação:

$$\begin{aligned}
&\ln(\|e^{-Q}\|) + \epsilon \ln[\max(2\gamma, \|e^P\|, \|e^Q\|)] < 0 \\
&\therefore \epsilon < \frac{\ln(\|e^Q\|)}{\ln[\max(2\gamma, \|e^P\|, \|e^Q\|)]} = \log_\zeta(\|e^Q\|)
\end{aligned} \tag{F.103}$$

Desta equação pode surgir um problema: existe a possibilidade $\zeta = \|e^Q\| \Leftrightarrow \epsilon = 1$. Para evitar isto, basta corrigir a adoção de ζ para

$$\zeta' = 2 \max(\gamma, \|e^P\|, \|e^Q\|) \geq \max(2\gamma, \|e^P\|, \|e^Q\|) \tag{F.104}$$

$$\text{Porque então } r = \|e^{-Q}\| [2 \max(\gamma, \|e^P\|, \|e^Q\|)]^\epsilon$$

$$r < 1 \Leftrightarrow \epsilon < \frac{\ln(\|e^Q\|)}{\ln[2 \max(\gamma, \|e^P\|, \|e^Q\|)]} \leq \frac{\ln(\|e^Q\|)}{\ln 2 + \ln(\|e^Q\|)} < 1 \quad (\text{F.105})$$

E a prova está completa para a sequência Λ . Para a sequência Θ_k , na iteração inicial tem-se

$$\begin{aligned} |\Theta_1 - \Theta_0| &= \left| e^{-P} \Theta_0 \left(e^P x_e + F_1(x_e, x_i), e^Q x_i + F_2(x_e, x_i) \right) - x_e \right| \\ &= \left| e^{-P} \left(e^P x_e + F_1(x_e, x_i) \right) - x_e \right| = \left| e^{-P} F_1(x_e, x_i) \right| \leq \\ &\leq \|e^{-P}\| |F_1(x_e, x_i)| \stackrel{(\text{F.86})}{\leq} \|e^{-P}\| \gamma (|x_e| + |x_i|) = \|e^{-P}\| \gamma (|x_e| + |x_i|)^{1-\epsilon} (|x_e| + |x_i|)^\epsilon \leq \\ &\stackrel{(\text{F.85})}{\leq} \|e^{-P}\| \gamma (2\lambda)^{1-\epsilon} (|x_e| + |x_i|)^\epsilon = \underbrace{\frac{\|e^{-P}\| \gamma (2\lambda)^{1-\epsilon}}{r}}_M r (|x_e| + |x_i|)^\epsilon \end{aligned} \quad (\text{F.106})$$

Logo, basta adotar $M = \frac{\|e^{-P}\| \gamma (2\lambda)^{1-\epsilon}}{r}$. Já para a hipótese indutiva,

$$\begin{aligned} |\Theta_{k+1} - \Theta_k| &= \left| e^{-P} \Theta_k \left(e^P x_e + F_1(x_e, x_i), e^Q x_i + F_2(x_e, x_i) \right) - e^{-P} \Theta_{k-1} \left(e^P x_e + F_1(x_e, x_i), e^Q x_i + F_2(x_e, x_i) \right) \right| \\ &\leq \|e^{-P}\| M r^k \left(\left| e^P x_e + F_1(x_e, x_i) \right| + \left| e^Q x_i + F_2(x_e, x_i) \right| \right)^\epsilon \\ &\leq \|e^{-P}\| M r^k \left(\|e^P\| |x_e| + |F_1(x_e, x_i)| + \|e^Q\| |x_i| + |F_2(x_e, x_i)| \right)^\epsilon \\ &\stackrel{(\text{F.86})}{\leq} \|e^{-P}\| M r^k \left[\|e^P\| |x_e| + \|e^Q\| |x_i| + 2\gamma (|x_e| + |x_i|) \right]^\epsilon \end{aligned} \quad (\text{F.107})$$

Adotando ζ exatamente como no caso para a sequência Λ ,

$$|\Theta_{k+1} - \Theta_k| \leq \|e^{-P}\| M r^k \zeta^\epsilon (|x_e| + |x_i|)^\epsilon \quad (\text{F.108})$$

Basta portanto tomar

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \|e^{-P}\| \left[2 \max(\gamma, \|e^P\|, \|e^Q\|) \right]^\epsilon \\ M = \frac{\|e^{-P}\| \gamma (2\lambda)^{1-\epsilon}}{r} \\ \epsilon < \frac{\ln(\|e^P\|)}{\ln \left[2 \max(\gamma, \|e^P\|, \|e^Q\|) \right]} < 1 \end{array} \right. \quad (\text{F.109})$$

Desta forma, $\{\Theta_k\}$ e $\{\Lambda_k\}$ são sequências de Cauchy e as funções

$$\Theta = \lim_{k \rightarrow \infty} \Theta_k \quad (\text{F.110})$$

$$\Lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_k \quad (\text{F.111})$$

Existem, são contínuas e são homeomorfismos. ■