

RAQUEL MARTINS FIGUEIREDO DE CASTRO

**MÉTODO KRIGING PARA ESTIMAÇÃO DO VALOR EM RISCO  
CONDICIONAL**

Trabalho de Formatura apresentado à  
Escola Politécnica da Universidade de  
São Paulo para obtenção do diploma de  
Engenheiro de Produção.

São Paulo  
2011



RAQUEL MARTINS FIGUEIREDO DE CASTRO

**MÉTODO KRIGING PARA ESTIMAÇÃO DO VALOR EM RISCO  
CONDICIONAL**

Trabalho de Formatura apresentado à  
Escola Politécnica da Universidade de  
São Paulo para obtenção do diploma de  
Engenheiro de Produção.

Orientadora:  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Celma de Oliveira Ribeiro

São Paulo  
2011

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

**Castro, Raquel Martins Figueiredo de**  
**Método Kriging para estimação do valor em risco condicional / R.M.F. de Castro. -- São Paulo, 2011.**  
**83 p.**

**Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Produção.**

**1. Pesquisa operacional 2. Finanças 3. Gestão de portfólio**  
**I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Produção II. t.**

---

*Dedico este trabalho à minha mãe e ao meu irmão.*



## **AGRADECIMENTOS**

À professora Dra. Celma de Oliveira Ribeiro pela constante orientação e incentivo durante todo o ano, pelos conhecimentos compartilhados e conselhos para meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Ao meu irmão, pelo carinho, paciência e aconselhamento, principalmente durante os anos do curso de Engenharia de Produção da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo e à minha mãe pelo amor, paciência e incentivo em todos os momentos.

Aos amigos que fiz na faculdade, e espero levar para a vida, pelo companheirismo durante esses anos.

Também ao Leandro, pelo carinho, apoio e compreensão dedicados.

E a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a execução deste trabalho.



## **RESUMO**

O trabalho propõe a utilização de um modelo baseado em aproximação estocástica para solucionar o problema de composição de carteiras de ativos de mínimo risco. A medida de risco proposta para tal análise é o Valor em Risco Condicional (CVAR). O CVAR tem seu uso proposto na literatura atual pois surge como uma solução para as deficiências apontadas para a variância e para o Valor em Risco (VAR), sendo uma medida de risco coerente. São considerados cenários futuros, e utilizando um horizonte de tempo de um dia determina-se o risco e o retorno associado a diferentes composições de portfólio através da construção de fronteiras eficientes para os três modelos de seleção de portfólio apresentados: Modelo de Markowitz, Modelo CVAR e Método Kriging. É feita uma análise dos resultados obtidos, da complexidade e necessidade de capacidade computacional dos diferentes modelos. O Método Kriging não utiliza simulação de Monte Carlo na resolução do problema de composição ótima de portfólio. A partir de dados do passado modela-se a cauda da distribuição de probabilidade dos retornos de diversas carteiras e a partir desta aproximação é determinada a carteira ótima. Permite que a determinação da solução ótima da carteira de mínimo valor em risco condicional resulte em um modelo de resolução simples.

Palavras-chave: Pesquisa Operacional. Otimização. Gestão de Portfólio. Finanças.



## **ABSTRACT**

This paper proposes the use of a model based on stochastic approximation that makes possible to find a solution for the minimum risk portfolio problem. The risk measure proposed for this analysis is the Conditional Value at Risk (CVAR). The CVAR, considered a coherent measure of risk, appears in the literature as a solution for the weaknesses of risk measures such as variance and Value at Risk (VAR). Future one day ahead scenarios are used, and then risk and return are calculated for different portfolio compositions through the construction of efficient frontiers for the three presented portfolio selection methods: Markowitz's Model, CVAR Model and Kriging Method. We analyze the results, the complexity and need for computational power for the three different models. The Kriging Method does not use Monte Carlo Simulation to solve portfolio optimization problems. Using historical performance it is possible to model the tail of the probability distribution of the different portfolio returns and by this approximation it is possible to determine the optimum portfolio. The proposed model is a simple way to determine the optimal solution for the minimum conditional value at risk portfolio problem.

**Keywords:** Operational Research. Optimization. Portfolio Management. Finance.



**LISTA DE FIGURAS**

Figura 1: Fronteira Eficiente - Modelo Markowitz .....	20
Figura 2: Função densidade de probabilidade e VAR .....	24
Figura 3: Comparação CVAR e VAR .....	26
Figura 4: Tipos de curva de utilidade para um investidor $\rho_1$ avesso ao risco, $\rho_2$ indiferente ao risco e $\rho_3$ amante do risco .....	30
Figura 5: Curva risco X retorno.....	32
Figura 6: Comportamento da correlação em função da variação de $\theta_h$ .....	39
Figura 7: Histograma e Função Densidade de Probabilidade Cosan e Itau-Unibanco...	44
Figura 8: Histograma e Função Densidade de Probabilidade BMFBovespa e Gerdau..	44
Figura 9: Evolução dos preços das ações .....	46
Figura 10: Simulação de preços para o cenário 1 .....	48
Figura 11: Simulação de preços para o cenário 2 .....	48
Figura 12: Simulação de preços para o cenário 3 .....	49
Figura 13: Fronteira Eficiente do Modelo de Markowitz para os 3 cenários .....	52
Figura 14: Curvas de risco e retorno do Modelo de Markowitz tomando o cenário 1 como base .....	52
Figura 15: Curvas de risco e retorno do Modelo de Markowitz tomando o cenário 2 como base .....	53
Figura 16: Curvas de risco e retorno do Modelo de Markowitz tomando o cenário 3 como base .....	53
Figura 17: Alocação ótima para o Modelo de Markowitz.....	55
Figura 18: Fronteira eficiente do Modelo CVAR para os 3 cenários .....	57



## **Lista de Figuras**

---

Figura 19: Curvas de risco e retorno do Modelo CVAR tomando o cenário 1 como base	57
Figura 20: Curvas de risco e retorno do Modelo CVAR tomando o cenário 2 como base	58
Figura 21: Curvas de risco e retorno do Modelo CVAR tomando o cenário 3 como base	58
Figura 22: Alocação ótima para o Modelo CVAR	60
Figura 23: Seleção de dados pelo critério aleatório e determinístico respectivamente..	63
Figura 24: Comportamento do CVAR calculado para a amostra aleatória e determinística.....	64
Figura 25: Aproximação gerada pelo método Kriging para a amostra aleatória e determinística.....	65
Figura 26: Erro cometido na aproximação gerada pelo método Kriging para a amostra aleatória e determinística .....	66
Figura 27: Aproximação gerada pelo método Kriging para a função CVAR .....	69
Figura 28:Fronteira eficiente pelo Método Kriging para os 3 cenários.....	70
Figura 29: Curvas de risco e retorno tomando o cenário 1 como base.....	71
Figura 30: Curvas de risco e retorno tomando o cenário 2 como base.....	71
Figura 31: Curvas de risco e retorno tomando o cenário 3 como base.....	72
Figura 32: Alocação ótima fornecida pelo Método Kriging.....	73



**LISTA DE TABELAS**

Tabela 1: Ativos que compõe a carteira. ....	43
Tabela 2: Matriz de Correlação. ....	43
Tabela 3: Teste de Hipótese ....	46
Tabela 4: Rentabilidade média dos cenários ....	47
Tabela 5: Preço das Ações em 29/09/2011.....	47
Tabela 6: Média dos retornos simulados dos ativos.....	50
Tabela 7: Matriz de covariância do cenário 1.....	51
Tabela 8: Matriz de covariância do cenário 2.....	51
Tabela 9: Matriz de covariância do cenário 3.....	51
Tabela 10: Relação Risco Retorno para o Modelo de Markowitz.....	54
Tabela 11: Relação risco e retorno para o Modelo CVAR.....	59
Tabela 12: Erro de estimação gerado pelo método Kriging em função da correlação utilizada .....	67
Tabela 13: Relação risco e retorno pelo Método Kriging .....	72



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>13</b>
1.1	MOTIVAÇÃO.....	13
1.2	OBJETIVOS.....	15
1.3	A EMPRESA .....	15
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	16
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>18</b>
2.1.	GESTÃO DE PORTFÓLIO .....	18
2.2.	RISCO .....	20
2.2.1	Variância .....	21
2.2.2	<i>Value-at-Risk (VAR)</i> .....	23
2.2.3	<i>Conditional Value-at-Risk (CVAR)</i> .....	25
<b>3.</b>	<b>MODELOS DE SELEÇÃO DE PORTFÓLIO.....</b>	<b>28</b>
3.1.	MODELO DE MARKOWITZ .....	29
3.2.	MODELO CVAR .....	32
3.3.	MODELO PROPOSTO: O AJUSTE DACE .....	36
<b>4.</b>	<b>ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DOS MODELOS DE SELEÇÃO DE PORTFÓLIO.....</b>	<b>42</b>
4.1.	ATIVOS QUE IRÃO COMPOR O PORTFÓLIO .....	42
4.2.	CENÁRIOS .....	46
4.3.	APLICAÇÃO DOS MODELOS NOS DIFERENTES CENÁRIOS .....	50
4.3.1.	Aplicação dos cenários ao Modelo de Markowitz .....	50
4.3.2.	Aplicação dos cenários ao Modelo CVAR .....	56
<b>5.</b>	<b>MODELO PROPOSTO .....</b>	<b>61</b>
5.1.	DETERMINAÇÃO DO CVAR .....	62



5.2. SELEÇÃO DA AMOSTRA .....	63
5.3. ESCOLHA DA FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO .....	66
5.4. APLICAÇÃO DO MÉTODO KRIGING .....	67
5.5. ESTIMAÇÃO DA FRONTEIRA EFICIENTE .....	69
6. CONCLUSÕES .....	74
6.1. CONCLUSÕES DO TRABALHO .....	74
6.2. FUTURAS EXTENSÕES .....	76
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>77</b>
<b>ANEXO I – MODELO DE MARKOWITZ .....</b>	<b>79</b>
<b>ANEXO II – MODELO CVAR .....</b>	<b>81</b>
<b>ANEXO III – MODELO PROPOSTO .....</b>	<b>83</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo sugerir a aplicação do método Kriging em problemas de composição de portfólios de mínimo risco. A cauda da distribuição de probabilidade dos retornos de carteiras é aproximada por uma curva suave e a otimização é realizada com base nesta aproximação.

Há duas abordagens comuns na literatura para tratar problemas de composição de portfólios, essas diferem em função da medida de risco utilizada. A primeira, e mais antiga, consiste em empregar a variância como medida de risco e recai em modelos de otimização quadrática. A segunda considera a média das caudas de distribuições de probabilidade, e fornece uma medida de risco mais robusta, denominada medida coerente de risco. Esta última abordagem permite que o problema recaia em um modelo de programação linear, porém com o inconveniente de depender de dados simulados além de gerar um número significativo de restrições. O que se propõe neste trabalho é uma nova abordagem, a qual visa reduzir alguns dos problemas encontrados em cada uma dos modelos tradicionais. Não são empregados dados simulados e a função objetivo considerada possui boas propriedades em termos de avaliação de risco.

O método analisado fornece uma aproximação da função que descreve o risco, utilizando uma metodologia de superfície de resposta (Response Surface Methodology) (RIBEIRO e FERREIRA, 2004). O método, também chamado de ajuste DACE (Design and Analysis of Computer Experiments), busca empregar uma medida de risco coerente sem aumentar de maneira expressiva a complexidade do modelo. Até onde se tenha conhecimento, esta abordagem ainda não foi utilizada na literatura, e mostra-se bastante promissora em termos conceituais e práticos.

### 1.1 MOTIVAÇÃO

O sucesso de uma empresa está ligado à sua capacidade de assumir riscos com os quais possa lidar na busca por maiores retornos sobre seu capital investido. Essa busca pela mensuração do risco vem incentivando pesquisadores e tomadores de decisão a estudar e propor medidas mais confiáveis, que levem em consideração as particularidades de cada distribuição das variáveis aleatórias associadas ao retorno do investimento.

No entanto, a minimização desses riscos não é uma atividade simples. Cada investidor tem um perfil diferente de risco que deve ser levado em consideração para determinar sua expectativa de retorno. Além disso, muitas vezes, o risco total associado a um investimento é composto por diversos tipos de risco, como de mercado, de liquidez e operacional, por exemplo, dificultando a sua mensuração.

Empresas não financeiras, em geral, têm o objetivo de minimizar ao máximo os riscos das suas operações. No entanto, empresas financeiras fazem disso seu principal *core* na busca por investimentos que possam dar maiores retornos. Ou seja, buscam uma melhor administração dos riscos associados aos seus investimentos para tornarem-se mais competitivas frente aos seus concorrentes.

O trabalho desenvolvido por Markowitz, publicado em 1952 despertou um maior interesse ao estudo de uma função que considerasse risco e retorno. A partir daí, diversas metodologias relacionadas a risco foram sendo desenvolvidas com o intuito de suprir as deficiências dos modelos anteriores na mensuração e controle dos riscos.

Nos últimos anos houve então uma rápida evolução da área de modelagem em finanças, aliada a um expressivo aumento da capacidade computacional e também da disponibilidade de produtos financeiros no mercado. Essas características levaram ao desenvolvimento de complexos problemas matemáticos, que visam determinar uma carteira de ativos de mínimo risco.

O grande problema está no fato de que a maioria desses modelos depende de dados incertos de previsão do comportamento futuro das variáveis. Nos modelos de otimização do risco financeiro essa preocupação é de fundamental importância dada a grande variabilidade e incerteza em relação ao retorno futuro dos ativos.

Destaca-se também a importância de analisar a cauda da distribuição de probabilidade de forma a identificar a chamada *fat tail*. Essa preocupação tornou-se maior ainda após a crise dos *subprime* em 2007, com auge após a quebra do Banco *Lehman Brothers*, quando diversos investidores foram surpreendidos por grandes perdas em seus investimentos.

## 1.2 OBJETIVOS

A literatura vem apontando o Valor em Risco Condisional como uma medida de risco que fornece resultados mais confiáveis frente às demais. Trabalhos como os desenvolvidos por Artzner et al. (1999), Pflug (2000), Rockafellar e Uryasev (2000) (2002) apontam o CVAR como uma medida de risco coerente, que fornece informações sobre a cauda da distribuição e que pode ser expresso por uma formulação matemática.

Rockafellar e Uryasev (2002) propuseram uma formulação matemática que transforma esse problema em um modelo de programação linear. Apesar de mostrar-se bastante eficiente, esse modelo requer um elevado esforço e capacidade computacional à medida que a quantidade de ativos que compõe a carteira aumenta, o que não é desejável do ponto de vista da otimização.

Mesmo com as novas abordagens desenvolvidas recentemente, o conceito de fronteira eficiente desenvolvido por Markowitz, em seu trabalho publicado em 1952, representa uma boa representação para a função utilidade do investidor e seu impacto na elaboração de estratégias de investimento.

Portanto, esse trabalho de formatura visa aplicar o método Kriging para modelar a cauda da distribuição de probabilidade e aproximar a função que descreve o comportamento do CVAR. Esse método representa uma alternativa para solucionar problemas de grandes dimensões e números de variáveis, evitando simulações que aumentam o trabalho computacional e complexidade do problema.

Posteriormente, a partir da função aproximada, busca-se construir uma fronteira eficiente, semelhante à proposta pelo modelo de Markowitz, utilizando ao invés da variância o CVAR como medida de mensuração do risco.

## 1.3 A EMPRESA

O Banco UBS é um banco de investimento com sua estratégia focada na área de gestão de grandes riquezas. Com a crise, em 2009, o banco se viu obrigado a encerrar suas operações no país como forma de diminuir seus níveis de risco e atingir valores para tal, determinados por sua política de risco e *compliance*. O banco retomou suas operações em 2010 com a compra de uma corretora no país.

O estágio na área de Produtos e Serviços de Investimento, que vem se estruturando e crescendo desde meados de 2010, possibilitou uma visão geral do universo de operações bancárias. Além disso, a proximidade com a área de risco, presente em todas as operações e propostas de produtos e serviços de investimento, despertou o interesse no estudo de modelos de avaliação que buscam a minimização das perdas dos portfólios.

A necessidade de apresentar uma maior diferenciação frente aos concorrentes já instalados no país surgiu como um dos incentivos à realização desse trabalho. Desenvolver métodos de análise do risco associado às carteiras propostas para os clientes, frente às condições de mercado, aplicando conceitos aprendidos em Estatística, Simulação e Pesquisa Operacional, mostrou-se uma grande contribuição para toda a equipe de gestão de ativos.

#### **1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

O trabalho está dividido em seis partes, como forma de desenvolver os conceitos necessários para posterior aplicação e análise do objetivo proposto.

No primeiro capítulo é apresentado o tema. Justifica-se a importância do seu desenvolvimento e estudo, situando-o no contexto atual de literatura existente, condições de mercado e possíveis aplicações.

O segundo capítulo apresenta uma revisão bibliográfica relacionada aos conceitos necessários à compreensão deste trabalho, fundamentando e dando embasamento teórico ao modelo que será proposto. Inicialmente é estabelecida uma base conceitual sobre gestão de portfólio, citando seu marco na literatura e descrevendo algumas definições importantes que caracterizam um portfólio. Em seguida discute-se sobre a definição de risco, os tipos existentes de acordo com Philippe Jorion e as três medidas principais que serão utilizadas nos modelos descritos posteriormente.

Dois modelos clássicos de seleção de portfólio são discutidos no capítulo três: o Modelo de Markowitz e o Modelo CVAR, que utilizam respectivamente a variância e o valor em risco condicional (CVAR). Em seguida é proposto um modelo que utiliza a técnica Kriging, inicialmente aplicada a problemas da Geologia e também chamada de ajuste DACE.

O quarto capítulo faz uma análise de sensibilidade dos modelos nos diferentes cenários escolhidos. Primeiro define-se os ativos que irão compor o portfólio em questão. Baseado na série histórica dos preços dos ativos identifica-se tendências que definirão os cenários a serem escolhidos. Esses são gerados utilizando a média e a matriz de covariância dos retornos de cada período que representa uma tendência distinta, assumindo que o comportamento passado descreve o que irá acontecer no futuro. Segue-se com a aplicação dos modelos de Markowitz e CVAR nos três cenários para posterior análise dos resultados fornecidos pelos modelos de simulação.

No quinto capítulo há a aplicação do modelo proposto. Descreve-se o modo de cálculo do CVAR e do VAR, sendo esse último necessário para a determinação do primeiro. Em seguida é feita uma análise dos processos de geração de pontos da amostra e seu efeito sobre a qualidade e eficiência do ajuste DACE. O método de correlação escolhido, dentre os apresentados por Lophaven, Nielsen e Sondegaard (2002), é aquele que induz aos menores erros de aproximação. Após a definição dos parâmetros de entrada para o problema, para cada um dos cenários definidos no item anterior, é feito o ajuste DACE e utiliza-se a função aproximada fornecida para construir uma fronteira eficiente de um modelo de otimização.

Por fim, são apresentadas as conclusões e futuras extensões do trabalho. As referências bibliográficas e os apêndices encerram o documento.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica, base para os estudos que serão desenvolvidos, está dividida em dois blocos principais.

No primeiro, serão apresentados conceitos sobre a gestão de portfólio e sua evolução desde a publicação dos trabalhos de Markowitz em 1952 até os dias atuais, após a crise do *sub-prime*.

O segundo, após uma introdução sobre risco, se dividirá em três tópicos que tratam das principais medidas de risco que serão consideradas aqui: variância, *value-at-risk* (VAR) e *conditional value-at-risk* (CVAR). Essa última é o foco de estudo do presente trabalho.

### 2.1. GESTÃO DE PORTFÓLIO

O marco da gestão de portfólio ocorreu quando Harry Markowitz, em 1952, publicou seu artigo ‘Portfolio Selection’, momento esse que alguns autores consideram como o nascimento da economia financeira moderna (RUBINSTEIN, 2002). As idéias publicadas pelo autor nesse artigo o levaram a ganhar o Prêmio Nobel da Economia em 1990.

No primeiro parágrafo, Markowitz (1952) afirma que o processo de investimento e seleção de ativos, consiste, na verdade, em duas partes: na primeira observam-se os ativos disponíveis e suas rentabilidades históricas, usando esses dados para fazer uma estimativa da rentabilidade futura; a segunda parte é a escolha desses e consequente composição do portfólio, ou carteira, de investimento.

Markowitz defende a premissa da diversificação do investimento em ativos que possuem baixa covariância entre si como forma de proteção entre os componentes do portfólio e diminuição do risco; ativos que têm alta correlação entre si tendem a responder de maneira semelhante aos estímulos de mercado, o que não ocorre com aqueles com baixa correlação, ou seja, enquanto um tem uma rentabilidade negativa em um determinado cenário, o outro tenderá a ter uma rentabilidade positiva ou menos negativa, evitando grandes perdas. Essa estratégia é muito importante principalmente para investidores com perfil de aversão a risco e passou a ser utilizada como referência por gestores de investimento.

Algumas definições importantes, que caracterizam um portfólio são a correlação entre os ativos que o compõe, o retorno e o risco associado a ele (tema que será apresentado na próxima seção).

A correlação entre dois ativos é adimensional e varia entre -1 e +1 (COSTA NETO, 2002); pode ser definida como:

$$r_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii} * \sigma_{jj}}}$$

Onde  $\sigma_{ii}$  e  $\sigma_{jj}$  são os desvios padrão  $\sigma_{ij}$  é a covariância entre  $R_i$  e  $R_j$  respectivamente.

Uma carteira de investimento pode ser formada por N ativos. Considerando  $X_0$  o montante total para aplicação,  $X_{0i}$  é o valor investido em cada ativo  $i$  que compõe a carteira, portanto pode-se escrever:

$$X_{0i} = w_i X_0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Em que:

$w_i$  é o peso do ativo  $i$  na carteira e  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ .

O retorno de cada ativo que compõe a carteira é uma variável aleatória, dado pelo logaritmo Neperiano do quociente entre os preços no instante  $t_1$  e  $t_2$ :

$$R_i = \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right)$$

Dessa forma, o retorno total obtido também é uma variável aleatória, pois é a soma das variáveis aleatórias e é definido pela seguinte expressão:

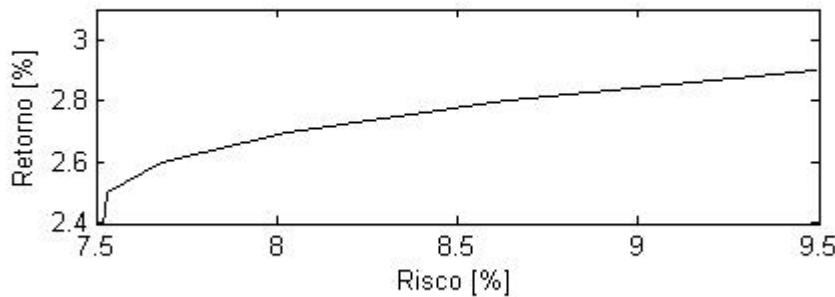
$$R(w) = \sum_{i=1}^n E(R_i) w_i$$

Em que:

$\mu_i = E(R_i)$  é a média do retorno no ativo  $i$ .

O problema de gestão de portfólio é baseado na relação risco e retorno (RIBEIRO e FERREIRA, 2004). O objetivo é conseguir um maior retorno a um risco aceitável pelo

investidor ou, fixado o retorno esperado, encontrar uma composição que minimize o risco. Portanto, a composição de cada portfólio varia de acordo com o perfil de risco do investidor.



**Figura 1: Fronteira Eficiente - Modelo Markowitz**

Fonte: Elaboração do Autor

## 2.2. RISCO

Devido aos últimos acontecimentos que abalaram a economia mundial desde a crise *sub-prime* em 2007, que culminou na recessão econômica ocorrida em 2009 e as novas regras das instituições de regulamentação financeira, o monitoramento do risco das operações financeiras ganhou importância ainda maior no cenário econômico global.

Segundo Jorion (1997) risco pode ser definido como a volatilidade de resultados inesperados, tanto de preços de ações, taxas de câmbio, taxas de juros, etc. Artzner et al. (1999) enfatiza que o risco está relacionado à variabilidade dos valores futuros (não só entre duas datas determinadas), das posições de um portfólio devido às mudanças de mercado e efeitos nas variáveis aleatórias que compõem e caracterizam os investimentos. Portanto, pode-se confirmar que todas as operações estão expostas a riscos em maior ou menor grau.

Após os anos 1970, com as diversas mudanças ocorridas no cenário mundial (como por exemplo, o fim do regime de taxa de câmbio fixa e introdução do sistema de taxa de câmbio flutuante) e a crescente globalização, que mudou parâmetros econômicos e sócio-culturais, as economias dos países tornaram-se mais dependentes umas das outras. Os efeitos locais de guerra, inflação, mudanças políticas e desastres naturais passaram a ser sentidos em maior intensidade em outras economias, de países e continentes diferentes daquele que os originou. Esse fato criou a necessidade das instituições financeiras diminuírem sua exposição aos

efeitos externos, que não podem controlar, fazendo com que a mensuração e estudo de medidas de risco fossem ganhando mais importância.

Ainda segundo Jorion (1997), existem quatro possíveis classificações para o risco:

Risco de mercado: relacionado à volatilidade dos preços dos ativos; pode ser direcional – quando relacionado à exposição do portfólio a determinados tipos de investimento - ou não direcional;

Risco de liquidez: relativo à capacidade das instituições de captação e disponibilização de recursos para obedecer ao fluxo de caixa e cobrir ativos sem liquidez;

Risco de crédito: decorrente da possibilidade das contrapartes não honrarem seus compromissos de dívida;

Risco operacional: está ligada à probabilidade de perda resultante de falha ou ineficiência dos processos internos ou mesmo falha humana.

Os riscos devem ser devidamente monitorados e administrados para poder antecipar e evitar eventos de desastres financeiros. A teoria da gestão de portfólio introduzida por Markowitz chama a atenção para a quantificação do risco através da Variância - medida do desvio dos retornos em relação à média- que será apresentada a seguir, criando nos gestores de portfólio a concepção de importância das medidas de risco e análise das suas restrições. No entanto, muitos autores consideram essa medida de risco ineficiente, pois só considera distribuições simétricas, o que não condiz com a realidade dos investimentos, além de considerar apenas a correlação linear entre os ativos, que, se usada para distribuições não elípticas, pode levar a resultados incorretos (SZEGÖ, 2002).

Devido às limitações apresentadas acima e à recente preocupação com as caudas das distribuições, estudiosos foram desenvolvendo medidas para quantificar o risco. Dentre elas, será apresentado nesse trabalho também o *value-at-risk* e o *conditional value-at-risk*, medida utilizada pelo presente trabalho.

### 2.2.1 Variância

Utilizada no modelo proposto de Markowitz, a variância indica a média do desvio quadrático entre a variável aleatória e a média da distribuição. Em gestão de portfólio, pode-se dizer que ela mede o grau de desvio entre os retornos e o retorno esperado dos ativos.

Para uma variável aleatória  $x$ , a variância é definida como:

$$var(x) = E[(x - \bar{x})^2]$$

Em que:

$$E(x) = \text{Valor esperado de } x$$

A variância é comumente representada pelo símbolo  $\sigma^2$ , que será usado para as próximas vezes que nos referirmos a ela.

Dependendo da natureza da variável aleatória, se ela é discreta ou contínua, calcula-se a variância da seguinte forma (COSTA NETO, 2002):

$$\sigma^2 = \sum (x - E(x))^2 \times p(x), \text{ para variáveis aleatórias discretas}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 \times f(x) d(x), \text{ para variáveis aleatórias contínuas}$$

Em que:

$$p(x) = \text{probabilidade de } x$$

$$f(x) = \text{função densidade de probabilidade de } x$$

Essa medida é largamente utilizada para mensuração do risco e, no caso de uma carteira composta por vários ativos, pode ser calculada com a ajuda da matriz de covariância. No entanto, ela possui algumas restrições em relação ao seu uso e só pode ser usada se a distribuição for simétrica (SZEGÖ, 2002). Portanto, pode-se usar o modelo da variância apenas para análise de distribuições elípticas, como as distribuições normais e t de Student, que não representam a maior parte das distribuições existentes.

Duas características principais da variância dificultam sua utilização como medida de risco eficiente na gestão de portfólio:

- a. Não considera a diferença existente entre desvios negativos e positivos em relação ao retorno esperado, que têm impactos opostos na rentabilidade dos investimentos e na percepção dos investidores, que dão prioridade àqueles ativos que apresentam retorno acima do valor esperado;

- b. Não analisa a cauda da distribuição de probabilidade (RIBEIRO e FERREIRA, 2004) o que pode representar grandes perdas em cenários de estresse, pois uma distribuição pode ter uma cauda menos pesada que outra e ser melhor para o investidor em cenários como o que ocorreu com a crise dos *subprime* que atingiu seu auge no final de 2008;

À medida que se ia chegando a essas conclusões, alguns acadêmicos foram apresentando estudos sobre outras medidas de risco que solucionassem os problemas apresentados pela variância. E em 1994 foi disseminado o conceito de *Value at Risk* (VAR) (SZEGÖ, 2002).

### 2.2.2 *Value-at-Risk* (VAR)

O VAR tem suas origens no modelo desenvolvido por Markowitz em 1952 (JORION, 1997). É uma medida de risco regulamentada e passou a ser bastante usada por instituições financeiras, gestores de portfólio e bancos centrais (HULL, 1999). De acordo com Hull (1999), o VAR foi criado como uma tentativa de resumir, em um só número, o risco envolvido em uma determinada carteira de ativos financeiros.

Essa medida envolve a definição de percentis, nível de confiabilidade e horizonte de tempo. Pode ser definido como o valor que representa a maior perda que poderá ocorrer com  $\alpha\%$  de probabilidade em um determinado horizonte de tempo.

Dependendo do tipo de empresa e das características da carteira a ser analisada, o horizonte de tempo para análise do VAR deverá variar. Para uma empresa que possui um alto giro de seus ativos, o horizonte de tempo deve ser curto, por exemplo, um dia. Já nas organizações em que os ativos são pouco negociados, o horizonte de tempo poderá ser maior, como um mês (RIBEIRO e FERREIRA, 2004).

De acordo com Quaranta e Zaffaroni (2008), considerando  $K$  uma variável aleatória e  $F$  sua função de distribuição,  $F(h) = P\{K \leq h\}$  e  $F^{-1}(w) = \min\{h: F(h) \geq w\}$ , para um valor fixo de confiabilidade ( $\alpha$ ), temos que:

$$VAR_{\alpha}(K) = F^{-1}(\alpha)$$

Jorion (1997) apresenta duas maneiras principais para cálculo do VAR, a paramétrica e a não paramétrica. Além disso, pode-se calcular essa medida por simulação Monte Carlo.

O método não paramétrico, também chamado de método da série histórica, considera os  $N$  retornos da carteira ordenados, e o VAR consiste no  $((1-\alpha)-N)$ ésimo pior valor da série. Ele pressupõe que a rentabilidade futura está atrelada à passada.

O método paramétrico considera que o retorno do portfólio em questão apresenta distribuição normal, o que simplifica o seu cálculo. Chama-se dessa forma pois estima parâmetros ao invés de identificar os percentis; nele o VAR deriva diretamente do desvio padrão, usando um fator de multiplicação que depende do nível de confiança (JORION, 1997):

$$VAR = \mu - Z_\alpha * \sigma$$

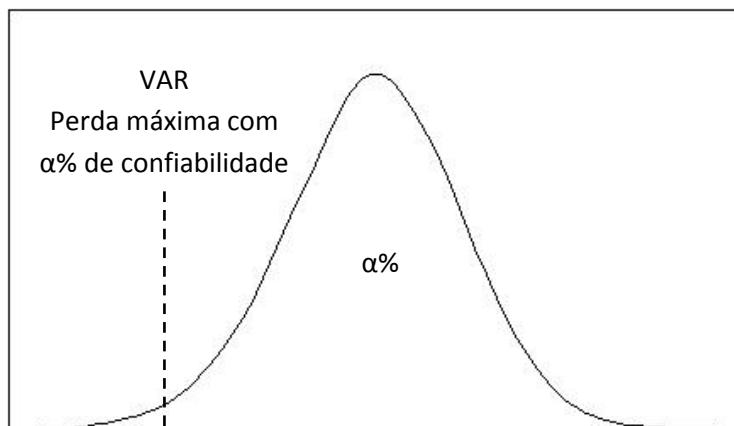
Em que:

$\mu$  é a média dos retornos

$\sigma$  é o desvio padrão dos retornos

$Z_\alpha$  é o valor que representa o inverso da distribuição cumulativa normal

Por último, o método que utiliza a simulação Monte Carlo se baseia no histórico de rentabilidade passado da carteira para construir uma gama de cenários e fazer uma previsão dos resultados futuros para cada um deles.



**Figura 2: Função densidade de probabilidade e VAR**  
Fonte: Elaboração do Autor

Apesar de o VAR fornecer informações sobre a cauda da distribuição dos retornos, Seigö (2002) apresenta diversos problemas relacionados ao uso da medida em questão, dentre eles, podemos citar os principais:

- a. não mede as perdas que excedem o VAR, ou seja, ele não consegue passar informações sobre a dispersão da cauda da distribuição além do seu valor a um determinado nível de confiança;
- b. pode dar resultados conflitantes para diferentes níveis de confiança;
- c. não é uma medida de risco coerente.

Artzner (1999) define as propriedades para uma medida de risco ser considerada coerente, são elas:

- a) Invariância sobre translações:  $\rho(x + \alpha \bullet r') = \rho(x) - \alpha, \forall \alpha \in R, \forall X \in G$
- b) Subaditividade:  $\rho(x_1 + x_2) = \rho(x_1) + \rho(x_2), \forall x_1, x_2 \in G$
- c) Homogeneidade positiva:  $\rho(\lambda x) = \lambda \rho(x), \forall \lambda \geq 0, \forall x \in G$
- d) Monotonicidade:  $\rho(y) \leq \rho(x), \forall y, x \in G, y \leq x$

O VAR não apresenta a propriedade da subaditividade, ou seja, não se pode garantir que o risco de um portfólio composto por dois ativos com  $VAR_1$  e  $VAR_2$  seja igual a  $VAR_1 + VAR_2$ , ou menor. O risco desse portfólio não pode ser previsto, e isso dificulta a sua otimização (QUARANTA e ZAFFARONI, 2008).

### 2.2.3 *Conditional Value-at-Risk (CVAR)*

As medidas de risco apresentadas acima não são convexas, ou seja, se aplicadas a distribuições não elípticas, fornecem resultados errados. Além disso, não analisam a cauda da distribuição para cenários extremos.

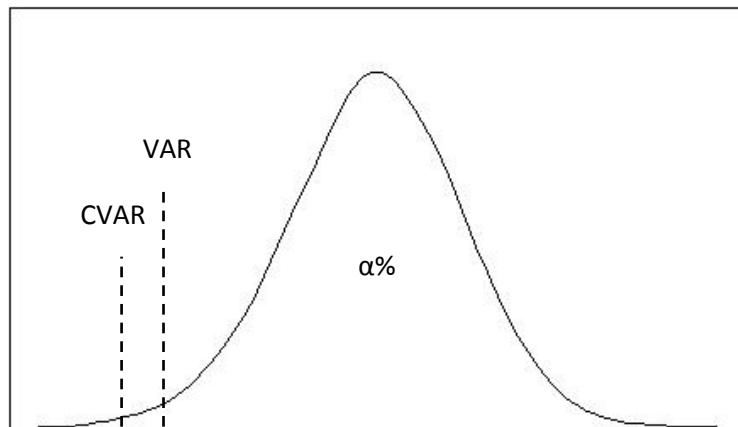
A fim de sanar esses problemas, a literatura vem dando importância ao *Condition Value-at-Risk* (CVAR), uma medida de risco coerente que pode ser definida como a média dos valores que excedem o VAR, para um determinado nível de confiança. Ou seja, considerando que o pior cenário ocorreu, ele fornece o valor médio da cauda. Essa definição garante que o VAR nunca é maior que o CVAR em valor absoluto (ROCKAFELLAR e URYASEV, 2000).

Sendo  $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^N$  um vetor de decisão representando um portfólio e  $\mathbf{y} \in Y \subset \mathbb{R}^N$  os valores futuros das rentabilidades dos ativos que compõe essa carteira,  $z = f(X, Y)$  a função de perdas do portfólio; o CVAR será dado por (QUARANTA e ZAFFARONI, 2008):

$$\Psi(x, a) = P\{y | f(x, y) \leq a\}$$

Em que:

a é o VAR do portfólio.



**Figura 3: Comparação CVAR e VAR**  
Fonte: Elaboração do Autor

Em princípio, o *value-at-risk* e o *conditional value-at-risk* medem propriedades diferentes da distribuição, pois o primeiro refere-se à percentil e o segundo à média da cauda (PFLUG, 2000). O CVAR apresenta consistência com o VAR apenas para distribuições normais (ou elípticas) (ROCKAFELLAR e URYASEV, 2002).

Apesar de o CVAR depender da determinação do VAR, é possível definir simultaneamente essas duas medidas de risco através da seguinte função (ROCKAFELLAR e URYASEV, 2002):

$$F_\alpha(x, a) = a + \frac{1}{1 - \alpha} E\{[f(x, y) - a]^+\}$$

Em que:

$$[t]^+ = \max\{0, t\}.$$

Assim, pode-se afirmar que o CVAR apresenta inúmeras vantagens frente ao VAR:

- É uma medida coerente, obedecendo a todos os axiomas propostos por Artzner (1999);
- Fornece informações sobre a cauda das distribuições, analisando cenários de estresse;
- Pode ser expresso matematicamente por uma formulação que busca transformar o problema de composição de portfólio em um problema de programação linear, o qual será apresentado no item a seguir.

Apesar de geralmente ser considerado como unidade monetária, nesse trabalho usaremos o CVAR em termos de porcentagem, admitindo que haja uma correspondência de um pra um entre o retorno monetário e o retorno em percentual.

### 3. MODELOS DE SELEÇÃO DE PORTFÓLIO

A determinação da composição de um portfólio está diretamente ligada ao risco associado àquela carteira e ao retorno gerado. Como citado anteriormente, o objetivo de um gestor de portfólio é, pra um determinado nível de risco, maximizar o retorno, ou, para um dado retorno, minimizar o risco.

No entanto, essa questão não é simples, pois os ativos financeiros estão expostos a diversos tipos de riscos, como riscos de mercado, de liquidez, de crédito ou operacional. Por exemplo, uma única ação está sujeita a riscos relacionados à imagem da empresa, à reputação de seus dirigentes além de riscos de mercado e de liquidez. Essa separação de acordo com a sua fonte geradora e consequente ação de diversos tipos de risco em um mesmo ativo torna sua mensuração não trivial e difícil. No caso da composição de carteiras, o problema é agravado pelas correlações existentes entre os diversos ativos que a compõe.

O interesse em desenvolver métodos que auxiliem na seleção de portfólio não é recente. A evolução nesses estudos tem seu marco na publicação do trabalho de Markowitz (1952), que tratou do problema de composição de carteiras de mínimo risco através de um modelo de otimização. Após sua publicação, diversos autores foram se aprofundando no tema, com o intuito de propor novos modelos matemáticos, muitas vezes com relativa complexidade, que suprissem as deficiências apontadas no modelo anterior.

Nesse tópico serão apresentados três modelos de seleção de portfólio, usados com o intuito de determinar o risco e o retorno associado a diferentes composições de portfólio através da construção de fronteiras eficientes. Em cada modelo, são estabelecidas restrições que devem ser obedecidas pelas soluções propostas, essas levam em consideração as limitações da carteira e o cenário analisado.

Para tal, será apresentado o modelo de Markowitz, mais conhecido, que utiliza a variância como medida de risco; o modelo CVAR proposto por Rockafellar e Uryasev, que utiliza o CVAR para medir o risco através de uma formulação matemática de programação linear e o modelo proposto, que utiliza o método Kriging para estimação de uma função da superfície do CVAR que possibilite sua minimização.

### 3.1. MODELO DE MARKOWITZ

Proposto por Harry Markowitz em 1952, consiste em uma solução matemática que permite ao investidor, com base nos dados históricos, resolver o problema de constituir uma carteira de investimentos com vários ativos financeiros diferentes, de modo a escolher a melhor relação risco-retorno de acordo com o seu perfil de aversão ao risco.

A teoria é também conhecida como Teoria Moderna da Gestão de Carteiras (MPT - *Modern Portfolio Theory*) ou análise média – variância. Considera que a diversificação do investimento em ativos negativamente relacionados diminui o nível de risco.

A formulação original utiliza dados históricos e propõe a construção de uma fronteira eficiente em que, para um mesmo risco, deve-se escolher a carteira com maior retorno ou, para um mesmo retorno, deve-se escolher a carteira de menor risco.

O retorno futuro de um ativo é em geral desconhecido. Pode ser definido como uma variável aleatória que possui certa distribuição de probabilidade. Por isso, costuma-se definir o retorno de um ativo em termos da média e do desvio padrão da sua distribuição de probabilidade.

O modelo de Markowitz utiliza a variância como medida de risco e a média dos retornos como retorno da carteira, considerando o efeito da diversificação dos ativos através da análise da correlação entre eles.

Para uma carteira composta por  $n$  ativos, cada um com um retorno esperado dado por  $E(R_i)$ , uma variável aleatória, seu retorno também será uma variável aleatória e pode ser dado pela seguinte expressão:

$$R(X) = \sum_{i=1}^n E(R_i)x_i$$

Em que:

$E(R_i)$  é a média do retorno no ativo  $i$ .

A variância da carteira pode ser definida por:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}x_i x_j$$

Em que:

$x_i$  é o peso do ativo  $i$  na carteira

$x_j$  é o peso do ativo  $j$  na carteira

$\sigma_{ij}$  é a covariância entre os investimentos  $i$  e  $j$

A variância também pode ser determinada vetorialmente:

$$\sigma^2 = X' \Sigma X$$

Em que:

$\Sigma$  é a matriz de covariância

O desvio padrão, dado por  $\sigma = (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j)^{\frac{1}{2}}$ , é a medida de risco associada à carteira e indica a probabilidade de se obter valores acima ou abaixo do retorno esperado. Ou seja, quanto mais for o desvio padrão, maior será essa probabilidade.

O modelo reforça o conceito de função utilidade, a qual propõe uma maneira de ordenar os investimentos de acordo com o perfil de risco do investidor (LUENBERGER, 1998). A Figura 4 apresenta um gráfico retorno *versus* risco onde são ilustradas as curvas correspondentes à função utilidade para três diferentes perfis de risco. A curva  $\rho_1$  representa o comportamento de um investidor avesso ao risco, em que, para um incremento de risco  $\Delta\sigma$ , exige um aumento do retorno tal que  $\Delta\mu > \Delta\sigma$ . A curva  $\rho_2$  ilustra o comportamento de um investidor indiferente ao risco o qual, para incremento de risco  $\Delta\sigma$  exige apenas que  $\Delta\mu = \Delta\sigma$ . A curva  $\rho_3$  representa o comportamento de um amante do risco, que age contrariamente àquele descrito pela curva  $\rho_1$ .

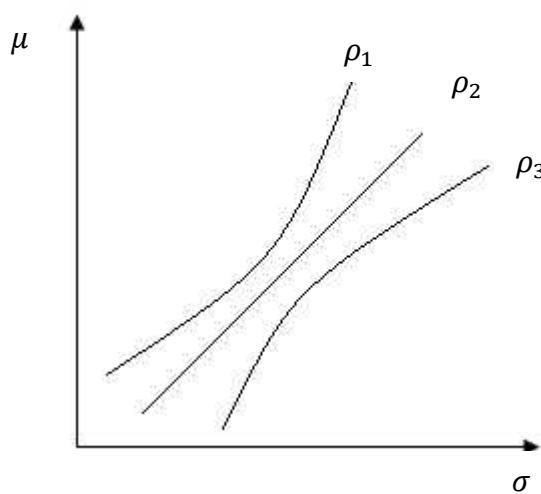


Figura 4: Tipos de curva de utilidade para um investidor  $\rho_1$  avesso ao risco,  $\rho_2$  indiferente ao risco e  $\rho_3$  amante do risco  
Fonte: Elaboração do Autor

Dentre o conjunto de carteiras disponíveis é necessário definir uma que seja adequada ao perfil do investidor. Considerando essa necessidade, destaca-se a importância de formulações que resolvem problemas de otimização para auxiliar na escolha de uma composição ótima para o portfólio.

O problema de otimização proposto para uma dada rentabilidade desejada pode ser formulado da seguinte forma:

$$\text{Min} \quad f(X) = X' \Sigma X$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^n E(R_i)x_i \geq G$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$x_i \geq 0; i = 1, \dots, n$$

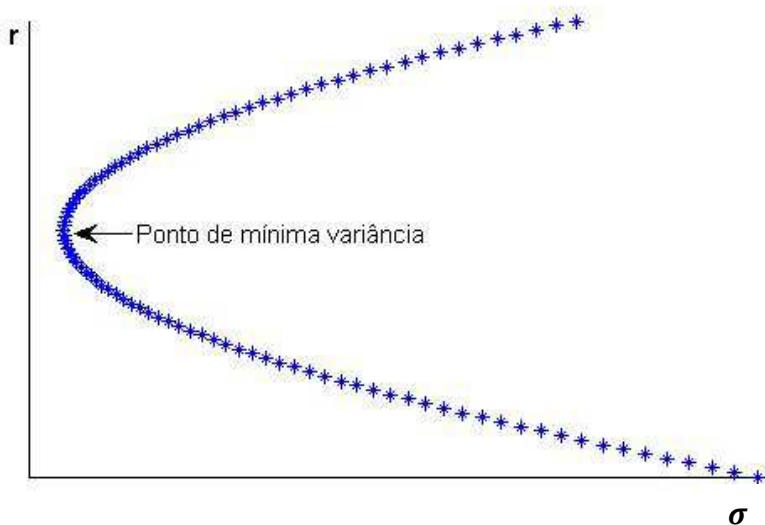
A primeira restrição refere-se à limitação do modelo em relação ao retorno médio do portfólio, que dever ser maior ou igual a um mínimo estipulado pelo investidor.

A segunda garante que não será investido mais do que o capital disponível, e também que todo o dinheiro será alocado nos ativos disponíveis.

Por fim, a última restrição cuida para que alocação de recursos nos ativos propostos seja positiva, ou seja, garante que nenhum ativo tenha composição inferior à zero, o que seria considerado uma venda a descoberto.

Esse modelo representa um problema de otimização quadrática com restrições lineares (LUENBERGER, 1998). Minimizar a variância ao invés do desvio padrão simplifica o problema e não altera a solução, pois as duas medidas são positivas.

Para construir a fronteira eficiente com essa formulação, basta variar os valores do retorno mínimo exigido e minimizar a variância para esse retorno. Fazendo isso, encontra-se a curva de risco x retorno:



**Figura 5: Curva risco X retorno.**  
Fonte: Elaboração do Autor

Existe um ponto de mínima variância nessa curva e a porção acima dele representa a fronteira eficiente. O ponto de mínima variância corresponde à composição do portfólio para um investidor avesso ao risco. Os outros pontos situados sob a fronteira eficiente correspondem a composições de portfólio para investidores que aceitam riscos maiores.

### 3.2. MODELO CVAR

O modelo de Markowitz é criticado por assumir a premissa que o retorno do ativo tem uma distribuição normal, o que nem sempre é verdade. Muitas vezes as distribuições são assimétricas e possuem caudas pesadas. Consequentemente, os portfólios gerados pela utilização do critério da MTP podem não ser eficientes se a distribuição de retorno dos ativos for não-elíptica, causando prejuízos para o investidor.

As críticas ao modelo média-variância somadas à busca por uma medida de risco coerente fizeram com que o modelo que será denominado de CVAR ganhasse destaque na literatura. Parecido com a Teoria Moderna da Gestão de Carteiras que utiliza a variância como medida de risco, nele a função  $f(X) = X' \Sigma X$  será substituída por uma que represente o CVAR, que é uma medida de risco coerente (ARTZNER, DALBAEN, *et al.*, 1999).

Esse modelo é baseado no Valor em Risco Condisional da carteira e leva a resultados mais confiáveis sobre o risco associado a um portfólio. Ele gera a mesma fronteira eficiente que o anterior quando a distribuição em questão é normal. A diferença aparece no caso de

distribuições não normais e não simétricas, que representam o comportamento de muitas variáveis aleatórias. Outra grande diferença entre esse modelo e o de Markowitz consiste no fato de que esse último considera os desvios da média, tanto os mais positivos quanto os mais negativos, da mesma forma, o que não condiz com o comportamento do investidor, que tem percepção diferente quanto aos lados da cauda. No modelo CVAR, considera-se apenas a cauda da distribuição que constitui perda para análise do risco.

Como apresentado no item 2.2.3, o cálculo do CVAR depende da determinação do VAR da carteira, o que pode ser um pouco complicado na prática. No entanto, Rockafellar e Uryasev (2000) propuseram uma abordagem mais simples para o CVAR, em que o VAR é calculado e ao mesmo tempo o CVAR é minimizado.

Ainda segundo Rockafellar e Uryasev (2000), sendo  $f(X, Y)$  a função perda associada a um vetor de decisão  $X \in R^n$  e a um vetor aleatório  $Y \in R^m$ , para cada vetor  $X$ , a perda  $f(X, Y)$  é uma variável aleatória de distribuição em  $R$  induzida pelo vetor  $Y$ , o qual possui densidade  $p(Y)$ .

O retorno de um portfólio é calculado através do somatório do produto entre o peso dos ativos e seus retornos individuais. A função perda é o negativo desse retorno

$$f(X, Y) = -[x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n] = -X^T Y$$

e quando negativa, representa um ganho.

Portanto, pode-se definir a média e a variância da função perda associado ao portfólio  $X$  em termos da média  $m$  e da matriz de covariância  $\Sigma$  dos retornos:

$$\mu = -X^T m$$

$$\sigma^2 = X^T \Sigma X$$

A probabilidade de que  $f(X, Y)$  não exceda um nível  $a = VAR$  é:

$$\Psi(X, a) = \int_{f(X, Y) \leq a} p(Y) dy$$

Assume-se que  $\Psi(X, a)$  é não decrescente e contínua em relação ao VAR, para simplificar a formulação matemática que segue para o cálculo do CVAR. Essa função determina o comportamento da variável aleatória e é fundamental para determinação do risco.

A um nível de probabilidade  $\alpha$  entre (0,1), em que  $\alpha$  pode assumir valores como  $\alpha = 0.90$  ou  $\alpha = 0.99$ , por exemplo, o VAR e o CVAR podem ser definidos como:

$$a = VAR(X, \alpha) = \min \{a \in R: \Psi(X, a) \geq \alpha\}$$

$$F_\alpha(X, a) = CVAR(X, a) = a + \frac{1}{(1 - \alpha)} \int_{Y \in R^m} [f(X, Y) - a]^+ p(Y) dy$$

Em que:

$$[f(X, Y) - a]^+ = [t]^+ = \max\{0, t\}.$$

Rockafellar e Uryasev (2002) propuseram uma formulação matemática que transforma o problema do cálculo do CVAR em um problema de programação linear. O que o modelo propõe é uma maneira de discretizar a integral para facilitar uma aproximação do CVAR. Para isso, Rockafellar e Uryasev sugerem o uso de amostras da distribuição de probabilidade de  $Y$ , de acordo com sua densidade  $p(Y)$ , que gerem vários vetores  $y_1, y_2, \dots, y_q$ . Além disso, associado à criação de cenários base, pode-se aplicá-lo para analisar e otimizar o risco de um portfólio com um grande número de ativos, tanto financeiros quanto não financeiros, sem muitos recursos computacionais. Portanto, levando em consideração a quantidade de cenários gerados ( $q$ ) uma aproximação para a função  $F_\alpha(X, a)$ , é dada por:

$$F_\alpha(X, a) = CVAR(X, a) = a + \frac{1}{q(1 - \alpha)} \sum_{k=1}^q [f(X, Y_k) - a]^+$$

Substituindo o termo  $[f(X, Y_k) - a]^+$  por variáveis auxiliares  $\mu_k$  que obedece restrições que garantem que seu valor também seja igual a  $\max\{0, t\}$ , transforma-se a resolução do modelo em um problema de programação linear.

Pode ser descrito da seguinte forma:

$$\text{Min} \quad \tilde{F}_\alpha(X, a) = a + \frac{1}{q(1-\alpha)} \sum_{k=1}^q \mu_k$$

Sujeito a:

$$x_j \geq 0 \text{ para } j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1$$

$$X^T Y \geq G$$

$$\mu_k + X^T Y_k + a \geq 0$$

$$\mu_k \geq 0, \quad k \in \{1, 2, \dots, q\}$$

Em que:

$q$  é o número de cenários gerados

$G$  é o retorno mínimo admitido

$\mu_k$  são as variáveis auxiliares que substituem  $[X^T Y_k - a]^+$

A primeira restrição refere-se à exigência de que a alocação dos recursos nos ativos seja positiva, ou seja, não são consideradas posições vendidas.

A segunda garante que todo capital disponível será investido.

A terceira restrição impõe que só serão considerados portfólios que tenham um retorno mínimo  $R$ .

Por fim, a quarta e quinta restrições tratam da variável  $\mu_k$  que deve ser positiva, obedecendo a relação descrita na quarta restrição.

A solução para o problema é a aproximação de  $F_\alpha(X, a)$  por  $\tilde{F}_\alpha(X, a)$  e posterior minimização dessa, que é uma função convexa, linear e diferenciável em relação a  $X$  e ao VAR e pode ser minimizada com métodos usuais de programação linear, o que torna sua implementação atrativa.

Apesar de não voltar atenção para o VAR diretamente, como o  $CVAR \geq VAR$ , o portfólio que minimiza esse primeiro tende a ser uma boa solução para o problema de minimização do último.

A transformação para uma programação linear do problema de minimização do  $CVAR$  não depende de que  $Y$  tenha uma distribuição normal previamente conhecida, o que torna o modelo vantajoso frente ao de Markowitz.

### 3.3. MODELO PROPOSTO: O AJUSTE DACE

Uma desvantagem do modelo apresentado acima é que, para tornar o modelo em um problema de programação linear é necessária a inclusão de mais variáveis e restrições de acordo com o número de cenários, número esse que aumentam à medida que o tamanho da amostra gerada por simulação de Monte Carlo também cresce.

O presente trabalho tem como objetivo propor um modelo de otimização que deixa de ser baseado em simulação de Monte Carlo, diminuindo o número de variáveis e o trabalho computacional para obter a composição da carteira ótima. Esse método busca a criação de uma superfície aproximada da função  $CVAR_\alpha(x)$ .

Nos modelos apresentados nos itens anteriores utiliza-se o comportamento passado dos retornos dos ativos para representar o que acontecerá no futuro, considerando a matriz de covariância constante na geração e análise de cenários. Esse princípio também é utilizado nesse modelo, pois ele modela a cauda da distribuição, propondo uma aproximação da função da superfície, baseado nos dados históricos que servem de variável de entrada para a solução do problema.

Sabe-se que, para aproximar uma função, deve-se fazer uma escolha apropriada dos pontos da malha, ou seja, dos pontos que irão representar os dados no espaço. Existem diversas técnicas para aproximar a função de interesse, mas nesse trabalho será proposto o uso do ajuste DACE (*Design and Analysis of Computer Experiments*). Essa técnica teve origem no estudo de problemas oriundos da geologia e é conhecida como Kriging (RIBEIRO e FERREIRA, 2004), que é um método de regressão usado em geoestatística para aproximar ou interpolar dados (YIN, NG e NG, 2011), também conhecido como “Processo Gaussiano de Regressão”.

Apesar desse método não ser tradicionalmente aplicado para problemas financeiros e inicialmente ter sido usado em problemas de concentração de minerais no solo, acredita-se que existem semelhanças nas duas aplicações que justificam o seu uso nesse trabalho. No caso da composição do solo há dificuldade de obtenção dos valores reais de composição em toda a região pesquisada. No problema do cálculo do CVAR, apesar de ser possível determinar seu valor para grande parte das configurações de carteira, o comportamento da função teórica dificulta sua otimização, sendo muitas vezes necessário um grande trabalho computacional de acordo com os modelos hoje existentes na literatura.

O método DACE propõe o ajuste da superfície de resposta dos dados coletados avaliando a função objetivo e as restrições do problema em alguns pontos determinados. Essa superfície de resposta é usada para análise das relações entre as variáveis de entrada e saída do problema bem como para a estimação do seu ótimo (JONES, SCHONLAU e WELCH, 1998).

Essa técnica tem sua função objetivo tratada como o resultado de um processo estocástico previamente definido, caracterizado por uma função de correlação entre os valores calculados em diferentes pares de pontos (JONES, SCHONLAU e WELCH, 1998). Costuma ser usada em casos em que o custo do cálculo da função objetivo é alto, não sendo esse, necessariamente, o caso do CVAR.

Considerando o vetor  $X^i \in R^n$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) e o vetor  $Y = \{y^1, y^2, \dots, y^q\} \in R^q$ , em que  $n$  representa o número de ativos que compõe a carteira e  $q$  o número de pontos observados na malha, o ajuste DACE fornece uma aproximação polinomial da função  $y^i = f(X^i)$  interpolando-a nos pontos observados através da equação:

$$y(X^i) = \mu + e(X^i)$$

Onde  $e(X)$  são os erros aleatórios, correlacionados, normalmente distribuídos, com média zero e variância constante,  $\sigma^2$ .

A correlação entre  $e(X^i)$  e  $e(X^j)$ , citada acima, depende da distância entre os pontos. Ela será maior quando  $X^i$  e  $X^j$  forem próximos, ou seja, tenderá a um quando a distância for pequena e a zero se esses pontos da malha forem muito distantes. A covariância entre os erros é da forma:

$$cov(e(X^i), e(X^j)) = \sigma^2 \Sigma_{ij}$$

Em que  $\Sigma_{ij}$  é a correlação entre dois erros ( $\Sigma_{ij} = R(\theta, d_h) = \text{corr}(X^j, X^j)$ ).

Consideram-se as seguintes funções de correlação (LOPHAVEN, NIELSEN e SONDERGAARD, 2002):

Exponencial:  $R(\theta, d_h) = \exp(-\theta_h |d_h|)$

Gaussiana:  $R(\theta, d_h) = \exp(-\theta_h d_h^2)$

Linear:  $R(\theta, d_h) = \max\{0, 1 - \theta_h |d_h|\}$

Esférica:  $R(\theta, d_h) = 1 - 1,5\xi_h + 0,5\xi_h^3$ ,  $\xi_h = \min\{1, \theta_h |d_h|\}$

Spline:  $R(\theta, d_h) = \varsigma(\xi_h)$ ,  $\xi_h = \theta_h |d_h|$

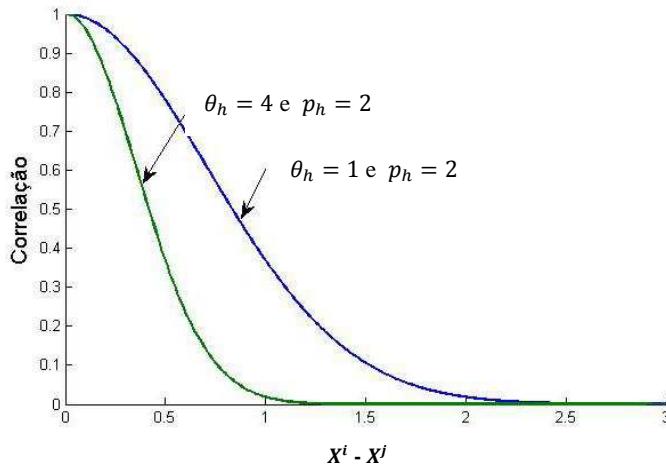
O termo  $d(X^i, X^j)$  refere-se à distância entre os pontos e não é baseado no modelo Euclidiano ( $\sqrt{\sum_1^n (x_h^i - x_h^j)^2}$ ), como forma de tratar todos os pontos com o mesmo peso.

A medida dessa distância entre os dois pontos é uma função de parâmetros  $\theta_h$  e  $p_h$ .

$$d(X_i, X_j) = \sum_{h=1}^n \theta_h |x_h^i - x_h^j|^{p_h}$$

De acordo com Jones et al (1998), o parâmetro  $\theta_h$  mede a influência ou “atividade” da variável  $x_h$ , ou seja, se a variável é “ativa”, isso significa que mesmo valores pequenos de  $|x_h^i - x_h^j|$  podem influenciar em grandes diferenças nos valores das funções em  $X^i$  e  $X^j$ . Estatisticamente, quer dizer que mesmo valores pequenos de  $|x_h^i - x_h^j|$  devem implicar em uma menor correlação entre os pontos  $X^i$  e  $X^j$  quanto maior o valor de  $\theta_h$ .

Ainda segundo o mesmo autor, o expoente  $p_h$  está relacionado à suavidade da função em relação aos pontos  $h$ . Valores de  $p_h = 1$  correspondem a funções menos suaves e  $p_h = 2$  a funções mais suaves.



**Figura 6: Comportamento da correlação em função da variação de  $\theta_h$**

Fonte: Elaboração do Autor

Em uma abordagem similar a Queipo et al. (2002), adotaremos  $\theta_h = 1$  e  $p_h = 2$ . E portanto, o estimador não viesado de mínimos quadrados para  $\hat{f}(X^*)$  é dado por (RIBEIRO e FERREIRA, 2004), (LOPHAVEN, NIELSEN e SONDERGAARD, 2002).

$$\hat{f}(X^*) = \sum_{j=1}^m \beta_j^* f^j(X^*) + r' \Sigma^{-1} (y - F\beta^*)$$

Em que:

$$\beta = (F^T \Sigma^{-1} F)^{-1} F^T \Sigma^{-1} y$$

$r$  é o vetor de correlações entre erros em relação ao ponto  $X^*$  e os demais pontos da amostra

$\Sigma$  é a matriz de correlação entre os pontos da amostra

$y$  é o vetor dos valores observados para o CVAR

$F$  é a matriz com os valores das funções calculados nos pontos da amostra

O primeiro passo para a aplicação do modelo proposto relaciona-se a obtenção de uma amostra apropriada para o experimento. Como o objetivo do trabalho é analisar o problema de composição de portfólio, os pontos da malha representam a porcentagem de alocação do capital investido em cada ativo. Por isso, esses assumem valores tal que  $x_j \in [0,1]$ .

A decisão do modo de geração dos pontos que serão utilizados para análise é importante como forma de aumentar a eficiência do método e reduzir a incerteza estatística desse. Pode-se citar três métodos principais para geração da amostra:

- Geração aleatória: os pontos gerados são normalmente distribuídos no intervalo  $[0; 1]$ , tendo a sequência média zero e variância unitária;
- Geração determinística: cada face do hipercubo  $[0; 1]^n$  é subdividida em um determinado número de intervalos que dão origem a outros cubos cujos vértices são os pontos da amostra (RIBEIRO e FERREIRA, 2004);
- Geração por hipercubo latino: garante que todas as porções do espaço estão sendo representadas. Primeiro determinam-se  $m$  intervalos não sobrepostos e com mesma probabilidade, depois é gerada uma amostra aleatória, uniformemente distribuída, em cada intervalo e em todas as dimensões para posterior seleção aleatória destes para compor o grupo de pontos para análise.

Lophaven, Nielsen e Søndergaard (2002) apresentam três modelos de regressão que podem ser utilizados para aproximar a superfície de resposta do problema. No primeiro aproxima-se a superfície ao valor de uma constante através de um polinômio de grau zero, a segunda opção é aproximá-la por um polinômio de grau um, representando uma regressão linear, ou, por último, uma regressão quadrática, utilizando um polinômio de grau dois. A abordagem proposta nesse trabalho irá utilizar a regressão linear, de forma a diminuir a complexidade do problema e facilitar a sua representação gráfica, portanto:

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x_1, \dots, \quad f_{n+1}(x) = x_n$$

Definida a metodologia de geração da amostra, de correlação e regressão que serão utilizadas, o modelo segue com os seguintes passos:

- Um conjunto de pontos  $\{X^i\}_{i=1}^q$  é gerado, de acordo com um dos métodos apresentados acima, obedecendo as seguintes restrições:

$$X^i \in \mathbb{R}^n \text{ e } 0 \leq x_j^i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n$$

- Para cada vetor  $X^i$  calcula-se  $y^i = \text{CVAR}$ ;
- Para o conjunto de pontos  $X^i$  e  $y^i$ , determina-se a função aproximadora através do método DACE, de acordo com o modelo de regressão e correlação escolhidos e também dos parâmetros  $\theta_h, p_h$  e  $\sigma^2$ ;
- Gera-se um novo conjunto de pontos  $\{X^i\}_{i=1}^q$  obedecendo às mesmas restrições de forma a analisar o erro de estimativa entre o valor dado pela função aproximada  $\hat{f}$  e o valor do CVAR de cada carteira.

De acordo com Queipo et al (2002), os benefícios de utilizar essa abordagem probabilística para modelar funções determinísticas consistem no fato de o modelo utilizar um estimador imparcial para a representação do problema e por fornecer o erro estimado da aproximação.

## 4. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DOS MODELOS DE SELEÇÃO DE PORTFÓLIO

No item acima, foram apresentados os modelos de Markowitz, Rockafellar e Uryasev e o método proposto, o ajuste DACE para estimação do CVAR. De modo geral, esses modelos não levam em consideração o risco relacionado às estimativas de retorno futuro dos ativos que compõem o portfólio.

O modelo de Rockafellar e Uryasev propõe a utilização da simulação de Monte Carlo para a geração de cenários. Será feita, portanto, para os dois primeiros modelos, uma análise de sensibilidade para cada um desses métodos variando as estimativas do retorno esperado para cada ação. A partir disso, será possível estudar a relação entre os diferentes resultados na análise do risco associado à carteira.

Serão definidos os ativos que irão compor os portfólios e o método de geração de cenários para posterior aplicação e análise dos modelos.

### 4.1. ATIVOS QUE IRÃO COMPOR O PORTFÓLIO

Para compor o portfólio em questão e analisar a sensibilidade dos modelos quanto à variação das estimativas de retorno, serão utilizadas ações negociadas na BM&FBOVESPA.

Ações são valores mobiliários, e de acordo com Assaf Neto (2009) podem ser definidas como uma fração do capital social de uma sociedade anônima.

São negociadas na bolsa ações de diversos setores e sub-setores. A fim de diminuir a correlação entre os ativos, foram escolhidas ações de setores e/ou sub-setores diferentes da bolsa, levando em consideração conhecimentos prévios acerca da relação e evolução dos retornos dos ativos no mercado financeiro. Também foram levantadas informações, do próprio site da BM&FBOVESPA, acerca da quantidade de negociações do papel nos pregões diários, de forma a priorizar aquelas com maior liquidez diária. A Tabela 1 apresenta as ações escolhidas e os setores e sub-setores aos quais pertencem.

**Tabela 1: Ativos que compõe a carteira.**

Ação	Código	Setor	Sub-setor
Cosan LTD	CZLT11	Consumo não Cíclico	Alimentos Processados
Itaú Unibanco PN	ITUB4	Financeiro e Outros	Intermediários Financeiros
BMFBovespa ON	BVMF3	Financeiro e Outros	Serviços Financeiros Diversos
Gerdau PN	GGBR4	Materiais Básicos	Siderurgia e Metalurgia

Foram utilizados dados de retorno diário para as ações acima entre outubro de 2009 e agosto de 2011, totalizando uma amostra de 474 rentabilidades diárias. Os retornos ajustados para proventos foram extraídos do sistema Económática.

A partir da série de retornos dos ativos, foi possível calcular a correlação amostral entre eles, dada pela seguinte expressão (COSTA NETO, 2002):

$$Cov(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{n - 1}$$

Em que:

$x_t$  e  $y_t$  são os valores de  $x$  e  $y$  observados

$\bar{x}$  e  $\bar{y}$  são os valores esperados para as variáveis

$n$  é o numero de observações

A matriz de correlação é uma matriz quadrada  $n \times n$ , onde  $n$  representa o número de ativos que compõe a carteira, e que possui os valores da diagonal principal igual a um. Na Tabela 2 é apresentada a matriz de correlação entre os retornos das quatro ações em questão.

**Tabela 2: Matriz de Correlação.**

	CZLT11	ITUB4	BVMF3	GGBR4
CZLT11	1	0,4221	0,3468	0,4108
ITUB4	0,4221	1	0,5329	0,6208
BVMF3	0,3468	0,5329	1	0,4902
GGBR4	0,4108	0,6208	0,4902	1

Foram elaborados o histograma e o gráfico da função densidade de probabilidade para as séries históricas de retorno das ações com a ajuda do software MATLAB, mostrados na Figura 7 e Figura 8.

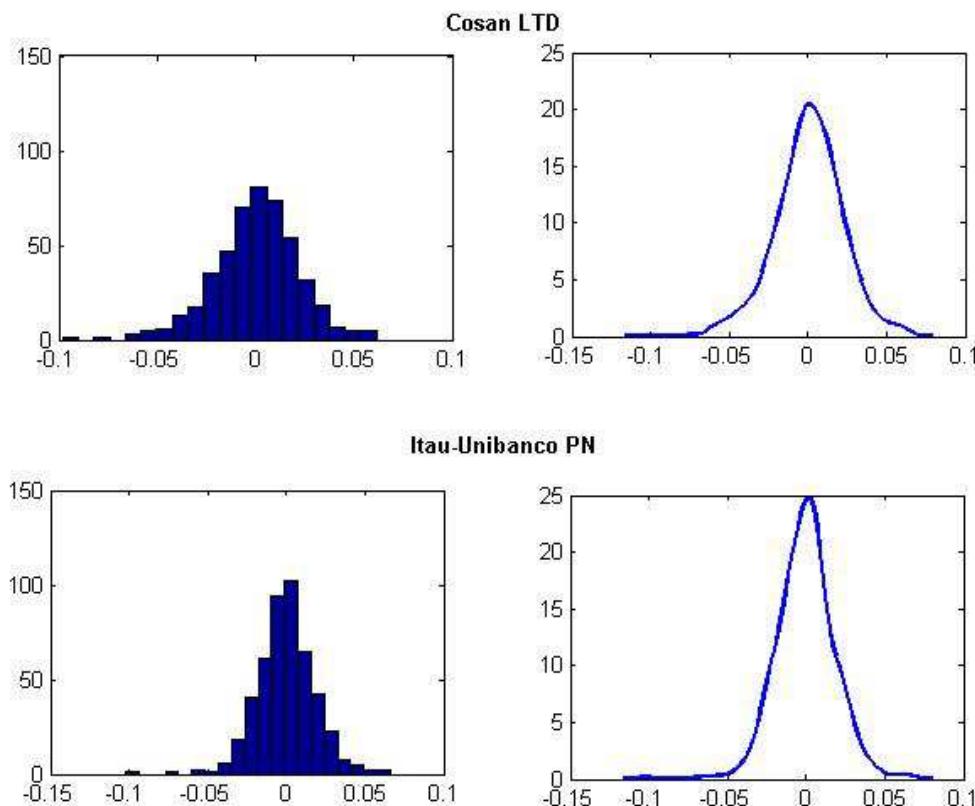


Figura 7: Histograma e Função Densidade de Probabilidade Cosan e Itau-Unibanco

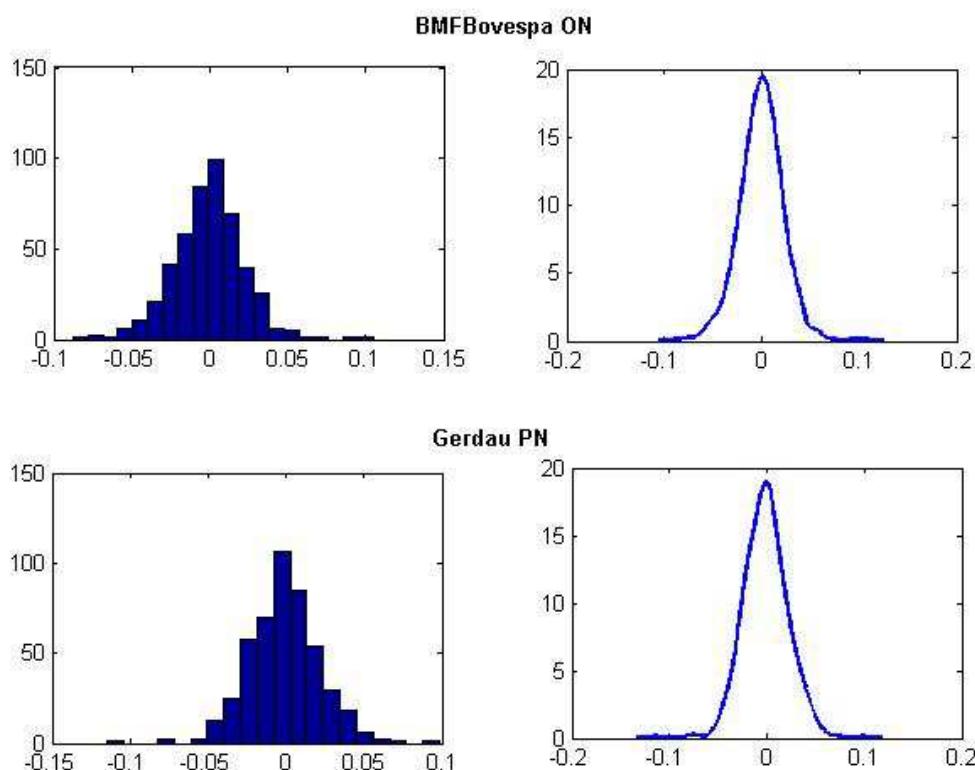


Figura 8: Histograma e Função Densidade de Probabilidade BMFBovespa e Gerdau

Para montar o histograma definiu-se a amplitude total dos valores da série e a dividiu em 10 classes igualmente espaçadas. A função densidade de probabilidade é estimada pelo método de Kernel. A densidade é avaliada em 100 pontos igualmente espaçados que cobrem todo o intervalo de dados em  $x$ . Sendo  $F(x)$  a função de densidade de probabilidade acumulada, essa segue a expressão (MONTGOMERY e RUNGER, 2003):

$$F(x) = \int_a^b f(x)dx$$

Em seguida, foi feito um teste de aderência para saber se as distribuições das taxas de retorno das ações eram normalmente distribuídas. Foi utilizado um nível de significância de 5% para os testes das seguintes hipóteses nula e alternativa:

H0: As taxas de retorno das ações são normalmente distribuídas.

H1: As taxas de retorno das ações não são normalmente distribuídas.

O teste de ajuste distribucional foi baseado na estatística qui-quadrado, cuja estatística de teste é (SHESKIN, 2004):

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Em que:

$O_i$  é o valor observado

$E_i$  é o valor esperado

$n$  é a quantidade de observações da amostra

$k$  é o numero de intervalos de classe

Se os retornos seguem uma distribuição normal,  $\chi_0^2$  terá aproximadamente uma distribuição qui-quadrado com  $k - p - 1$  graus de liberdade, tal que  $p$  é o número de parâmetros estimados.

Foram usados os valores de  $p = 2$ , pois os parâmetros estimados foram média e desvio padrão e  $k = 10$ , ou seja, utilizou-se uma distribuição qui-quadrado com 7 graus de liberdade para comparação. Com o software MATLAB obteve-se o resultado mostrado na Tabela 3.

Tabela 3: Teste de Hipótese

	CZLT11	ITUB4	BVMF3	GGBR4
h	1	0	1	0
p-value	0,0493	0,2363	0,0449	0,0981

Conclui-se que não se pode rejeitar a hipótese de que os retornos históricos de ITUB4 e GGBR4 são normais e rejeita-se a hipótese de que os retornos históricos de CZLT11 e BVMF3 são normais, a um nível de significância de 5%.

## 4.2. CENÁRIOS

Definidos os ativos que irão compor o portfólio, o próximo passo foi a determinação de cenários para os preços futuros das ações. A criação de cenários visa avaliar a sensibilidade dos modelos de geração de portfólio diante das incertezas associadas ao retorno esperado dos ativos.

Primeiramente fez-se uma análise da evolução dos preços dos ativos no intervalo de tempo considerado, de outubro de 2009 a agosto de 2011. Foram identificadas três tendências gerais, distintas, em relação à trajetória dos preços: uma em que o valor das ações manteve-se relativamente estável, uma de crescimento e outra de queda. Essas características podem ser observadas na Figura 9 e na Tabela 6, que mostram respectivamente a evolução dos preços dos ativos no tempo e a rentabilidade média das ações nos intervalos que caracterizam cada tendência.

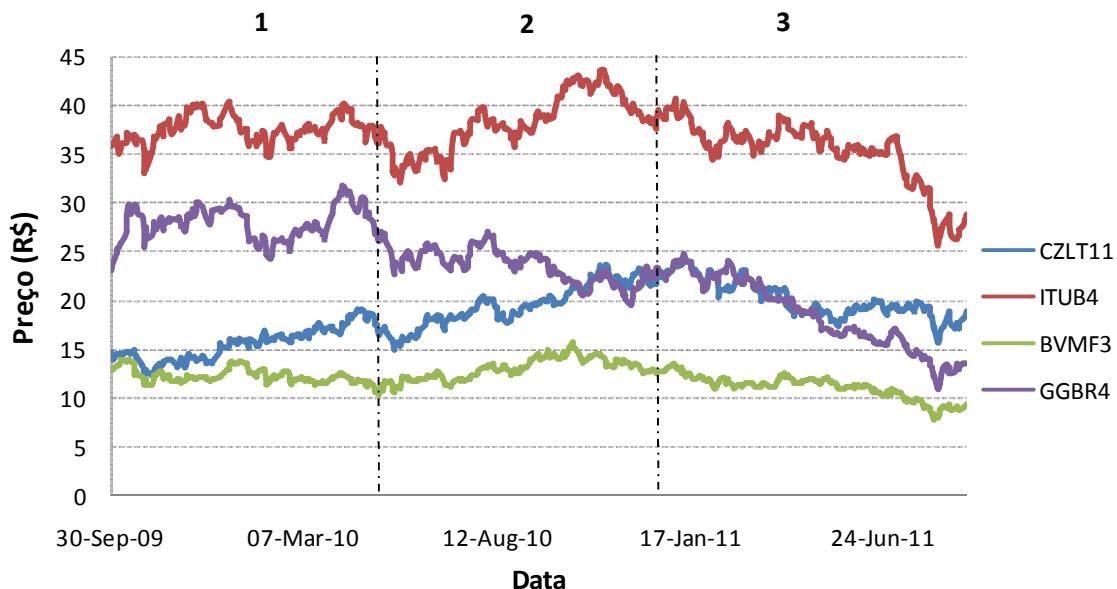


Figura 9: Evolução dos preços das ações

**Tabela 4: Rentabilidade média dos cenários**

	Rentabilidade Média			
	CZLT11	ITUB4	BVMF3	GGBR4
Intervalo 1	0.03%	-0.06%	-0.09%	0.00%
Intervalo 2	0.28%	0.15%	0.10%	0.04%
Intervalo 3	-0.15%	-0.20%	-0.16%	-0.37%

Portanto, as 474 observações foram divididas em três grupos, cada um composto por 158 observações de rentabilidade diária.

Escolheu-se fazer a projeção dos retornos através da simulação de Monte Carlo, por essa ser uma das técnicas mais utilizadas e conhecidas para simulações estocásticas.

Utilizando a média dos retornos históricos e a matriz de covariância, de cada um dos três intervalos identificados, para a simulação de Monte Carlo, algumas hipóteses foram adotadas:

- Um ativo não apresenta autocorrelação;
- Os ativos são correlacionados e a matriz de covariância é constante ao longo do intervalo de simulação;
- O retorno histórico representa adequadamente o que poderá ocorrer no futuro;
- A geração foi realizada usando uma distribuição normal para a determinação das observações futuras.

Para um período de 30 dias úteis foram geradas 100 simulações, definindo a sequência dos preços das ações. Foram utilizados os preços de 29 de setembro de 2011 como valores iniciais das ações.

**Tabela 5: Preço das Ações em 29/09/2011**

Ação	Preço Inicial (R\$)
CZLT11	18,41
ITUB4	29,49
BVMF3	8,87
GGBR4	13,83

As simulações foram geradas no software MATLAB e com elas os ativos tiveram as seguintes evoluções de preço durante a janela de 30 dias.

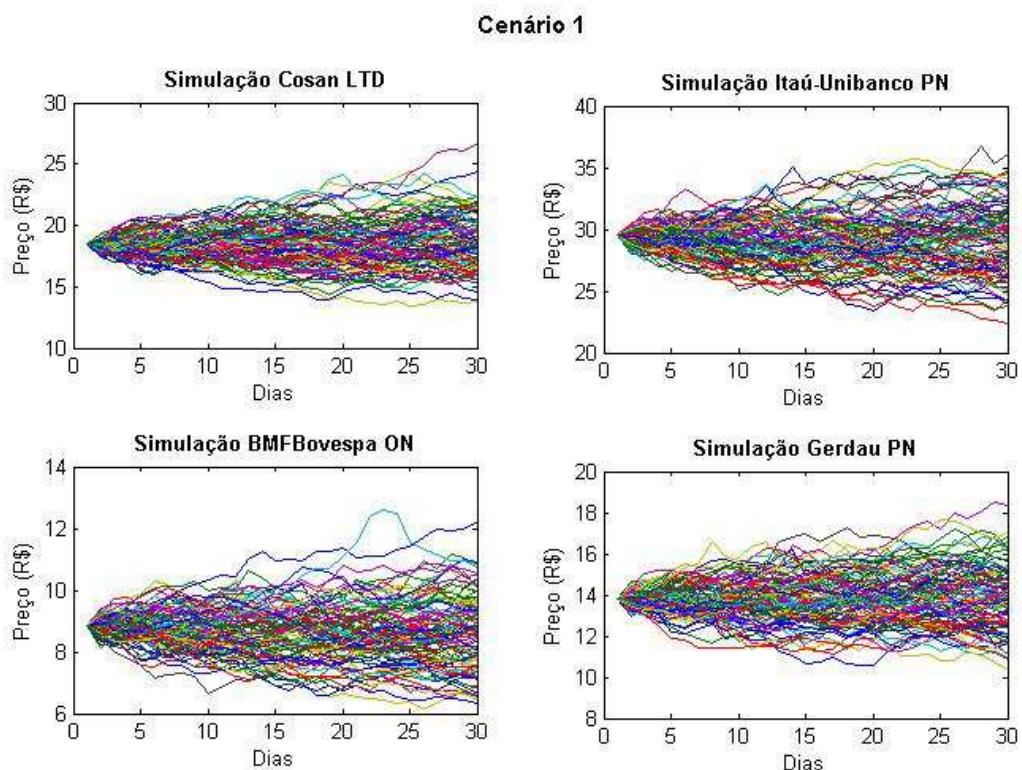


Figura 10: Simulação de preços para o cenário 1

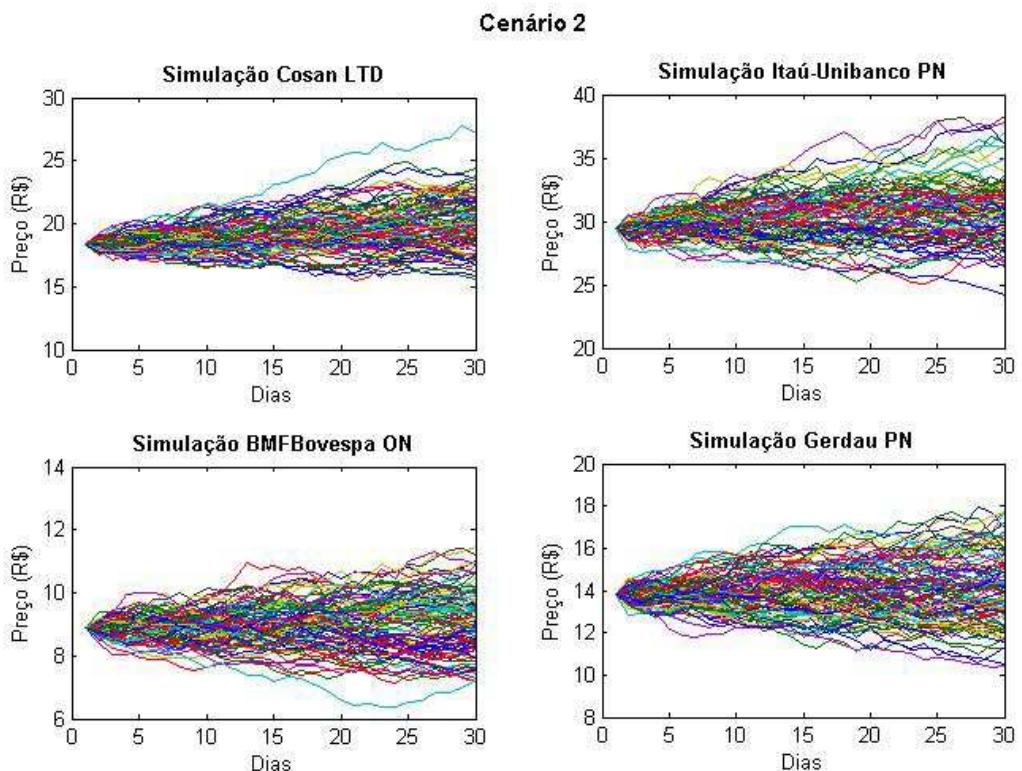
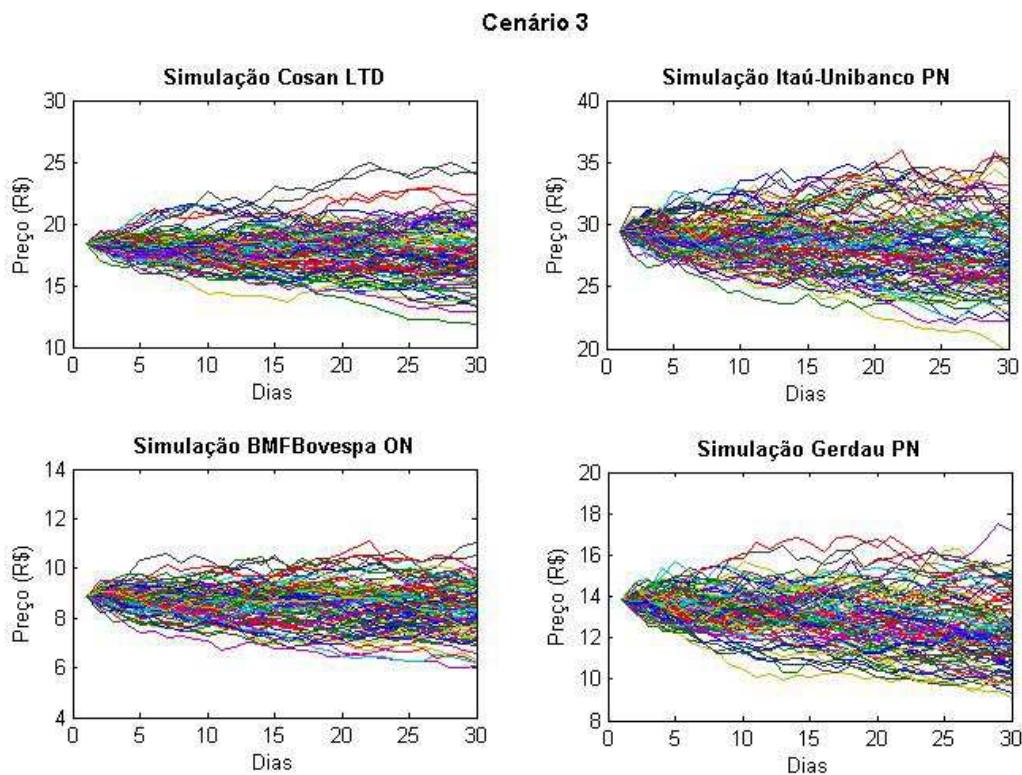


Figura 11: Simulação de preços para o cenário 2



**Figura 12: Simulação de preços para o cenário 3**

Não é intuito desse trabalho avaliar de maneira mais aprofundada questões relacionadas à simulação da trajetória de preços das ações. Os retornos serão considerados apenas como possíveis passeios aleatórios, dado a característica de grande imprevisibilidade desses no mercado de ações.

Vale ressaltar que a escolha dos cenários para análise tem o intuito de apenas ilustrar o comportamento do modelo frente à incerteza dos retornos das ações. Para as análises que seguem serão utilizadas as rentabilidades de um horizonte de tempo diário..

A seguir será feita a implementação dos modelos apresentados no item 2 para os cenários obtidos pela simulação de Monte Carlo, com o objetivo de analisar o impacto das incertezas nos modelos de composição de portfólio.

### 4.3. APLICAÇÃO DOS MODELOS NOS DIFERENTES CENÁRIOS

Foram apresentados três modelos de seleção de portfólio que levam em consideração como principal fator de decisão o risco associado à carteira. A seguir, será feita a aplicação dos modelos nos diferentes cenários determinados no item anterior. O objetivo de tal estudo é analisar o comportamento de cada uma das medidas de risco frente às variações no parâmetro retorno futuro dos ativos.

Para cada modelo, em cada cenário, será possível calcular uma solução ótima, definindo os portfólios ótimos, bem como construir a sua fronteira eficiente e superfície de risco. Também será possível realizar uma análise do comportamento da solução ótima dos cenários em caso de concretização dos demais.

Os modelos de otimização foram implementados no software MATLAB.

#### 4.3.1. Aplicação dos cenários ao Modelo de Markowitz

O modelo de Markowitz, também chamado de modelo de média-variância, utiliza a variância como medida de risco e busca sua minimização para um determinado nível de retorno esperado.

Para aplicar a formulação apresentada no item 3.1, é preciso a determinação dos seguintes parâmetros: a média dos retornos e a matriz de covariância entre os quatro ativos para os três cenários construídos.

Para calcular o retorno médio das ações, utilizou-se a média aritmética das séries dos retornos diários. A matriz de covariância foi calculada a partir da expressão citada no item 4.1:

$$Cov(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{n - 1}$$

**Tabela 6: Média dos retornos simulados dos ativos**

	Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3
CZLT11	-0.54%	0.27%	-0.25%
ITUB4	-0.30%	0.10%	-0.22%
BVMF3	-0.28%	-0.02%	0.07%
GGBR4	-0.15%	-0.08%	-0.15%

Tabela 7: Matriz de covariância do cenário 1

Cenário1				
	CZLT11	ITUB4	BVMF3	GGBR4
CZLT11	0.00055	0.00012	0.00019	0.00021
ITUB4	0.00012	0.00036	0.00031	0.00031
BVMF3	0.00019	0.00031	0.00065	0.00036
GGBR4	0.00021	0.00031	0.00036	0.00057

Tabela 8: Matriz de covariância do cenário 2

Cenário2				
	CZLT11	ITUB4	BVMF3	GGBR4
CZLT11	0.00034	0.00012	0.00011	0.00013
ITUB4	0.00012	0.00027	0.00015	0.00018
BVMF3	0.00011	0.00015	0.00042	0.00014
GGBR4	0.00013	0.00018	0.00014	0.00042

Tabela 9: Matriz de covariância do cenário 3

Cenário3				
	CZLT11	ITUB4	BVMF3	GGBR4
CZLT11	0.00052	0.00026	0.00021	0.00027
ITUB4	0.00026	0.00040	0.00021	0.00029
BVMF3	0.00021	0.00021	0.00048	0.00026
GGBR4	0.00027	0.00029	0.00026	0.00056

Como citado anteriormente, a covariância é considerada constante nos cenários simulados.

Utilizando esses dados, aplicou-se formulação proposta por Markowitz (1952). Foram traçadas as fronteiras eficientes com base nos retornos simulados por Monte Carlo. Para cada cenário base, também foram traçadas as curvas de risco-retorno dos demais cenários no caso de um deles se materializar.

A Figura 13 mostra a fronteira eficiente para cada um dos cenários escolhidos. A Figura 14 apresenta a fronteira eficiente do cenário 1 e as curvas de risco e retorno para os portfólios ótimos dos cenários 2 e 3. A Figura 15 e Figura 16 ilustram a mesma situação, porém quando o cenário 2 e 3 se concretiza, respectivamente. Para destacar a fronteira eficiente e facilitar sua identificação nas figuras, essa foi representada por uma linha mais espessa que as demais.

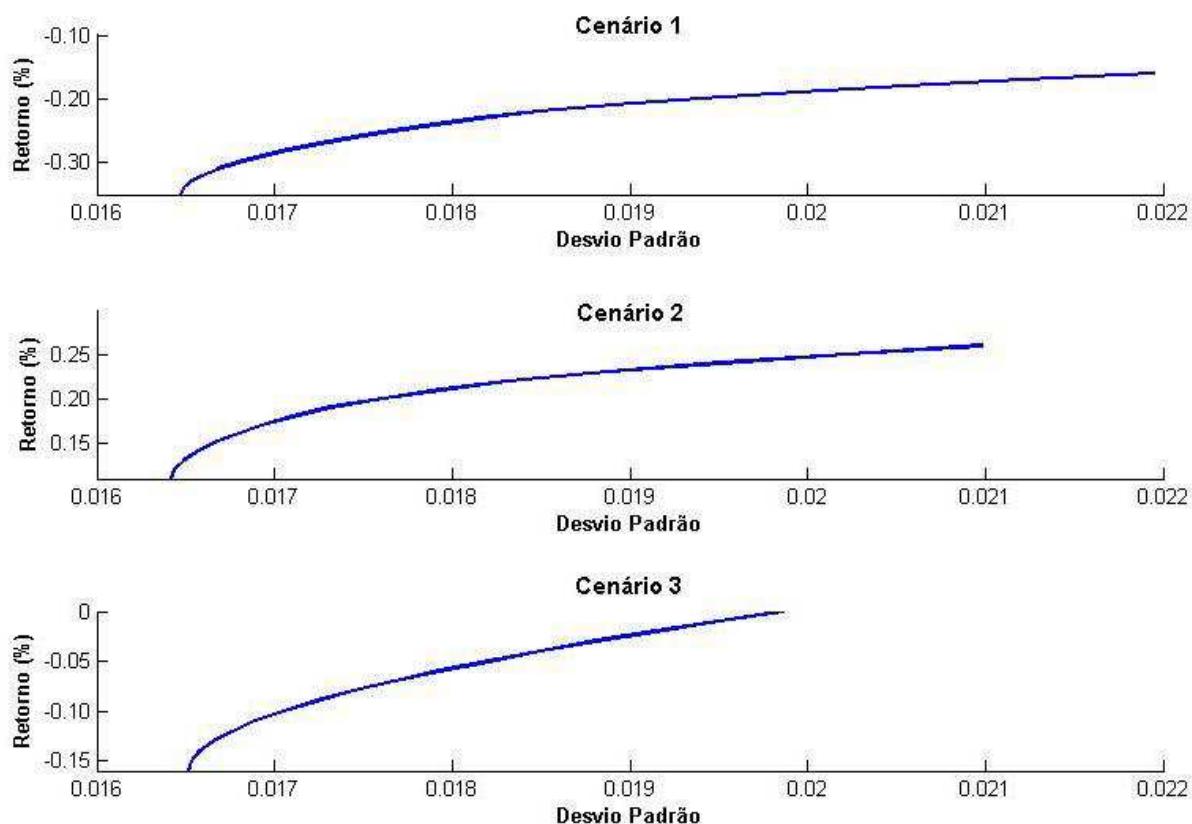


Figura 13: Fronteira Eficiente do Modelo de Markowitz para os 3 cenários

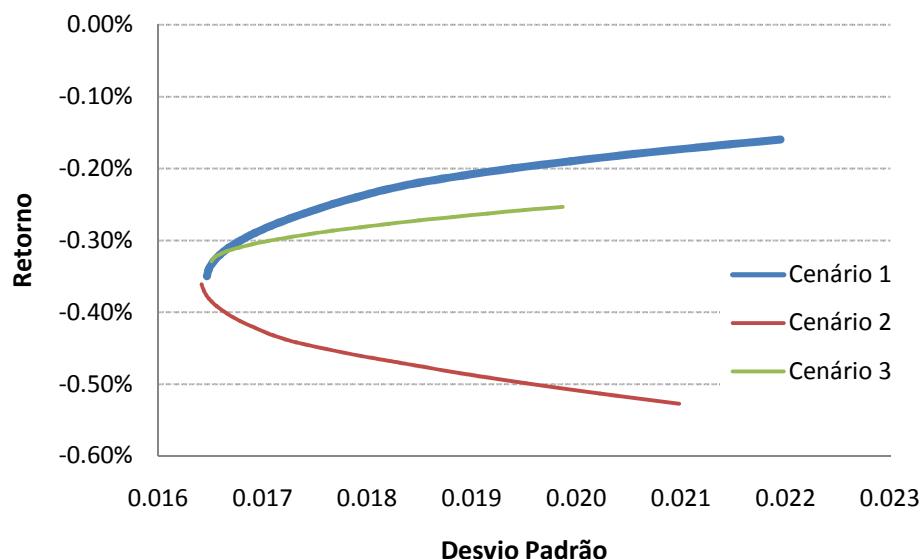


Figura 14: Curvas de risco e retorno do Modelo de Markowitz tomando o cenário 1 como base

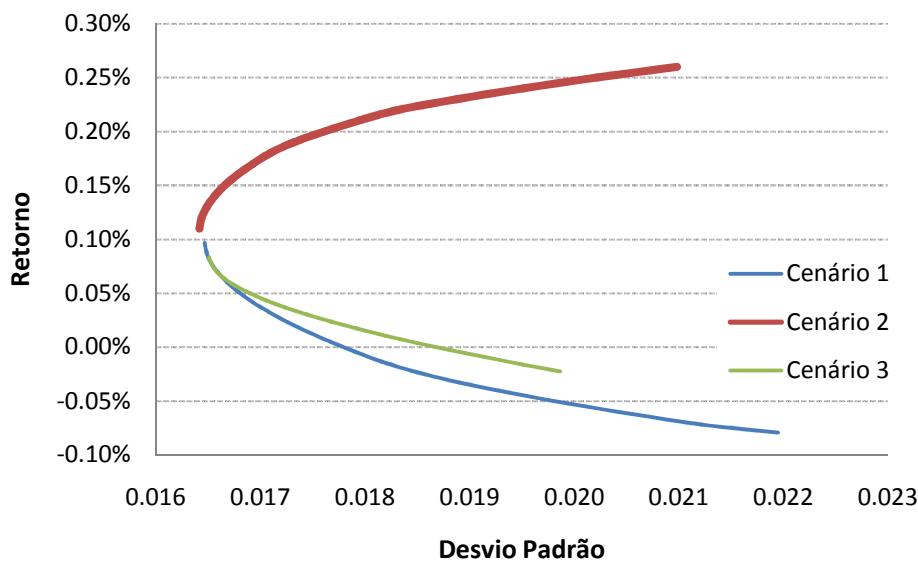


Figura 15: Curvas de risco e retorno do Modelo de Markowitz tomando o cenário 2 como base

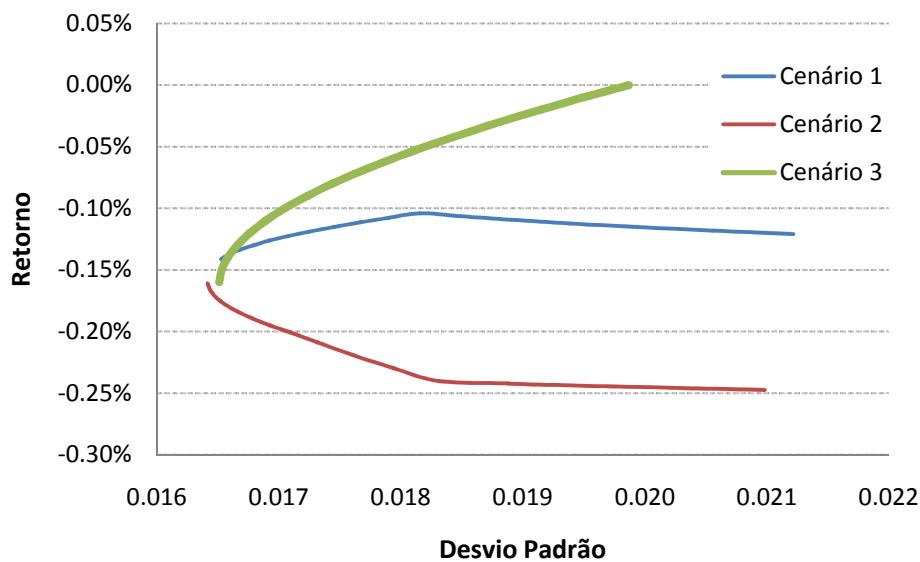


Figura 16: Curvas de risco e retorno do Modelo de Markowitz tomando o cenário 3 como base

As figuras apresentadas mostram que os portfólios que são ótimos para um cenário não o são em outro. Quando se varia o cenário base, as outras carteiras apresentam uma relação risco-retorno bem inferior às apresentadas na fronteira eficiente em seu cenário base.

Por exemplo, a fronteira eficiente apresenta uma rentabilidade diária de 0.23% e um desvio padrão de 1,88% para o cenário 2, caso esse se concretize. No entanto, se ao invés disso o cenário 1 se concretizar, para a mesma solução, a rentabilidade do portfólio já seria de

0.03% negativo. De modo análogo, caso o cenário 3 se concretizasse, a rentabilidade do portfólio dada pela solução ótima do cenário 3 seria de nula, para um mesmo nível de risco.

Para um gestor de portfólio, isso significa que a escolha de um cenário base para tomada de decisão pode acarretar perdas caso esse não se materialize. A Tabela 10 apresenta os valores do retorno dos portfólios para um dado nível de risco em cada cenário.

**Tabela 10: Relação Risco Retorno para o Modelo de Markowitz**

Cenário 1 base					
	Risco	Retorno	Risco	Retorno	Risco
Cenário 1	0.0165	-0.33%	0.0171	-0.28%	0.0188
Cenário 2	0.0165	-0.38%	0.0171	-0.43%	0.0188
Cenário 3	0.0165	-0.33%	0.0171	-0.30%	0.0188
Cenário 2 base					
	Risco	Retorno	Risco	Retorno	Risco
Cenário 1	0.0165	0.08%	0.0171	0.03%	0.0188
Cenário 2	0.0165	0.13%	0.0171	0.18%	0.0188
Cenário 3	0.0165	0.08%	0.0171	0.04%	0.0188
Cenário 3 base					
	Risco	Retorno	Risco	Retorno	Risco
Cenário 1	0.0165	-0.14%	0.0171	-0.12%	0.0188
Cenário 2	0.0165	-0.17%	0.0171	-0.20%	0.0188
Cenário 3	0.0165	-0.16%	0.0171	-0.10%	0.0188

Analizando a tabela acima nota-se que o cenário 3 apresentou rentabilidade bem próxima da sua fronteira eficiente quando o cenário 1 se materializa. Nos demais casos, erros de previsão relativos à rentabilidade esperada levaram a portfólios com risco-retorno ruim, ou até mesmo negativo, se comparados à fronteira eficiente.

Como cada cenário tem uma expectativa de retorno diferente. Essa diferença de rentabilidade deve-se à mudança dessa expectativa e à variação da contribuição dos ativos na composição do portfólio. Cada cenário possui estimativas de evolução dos preços distintas, o que pode tornar uma determinada ação mais vantajosa que em um cenário e não vantajosa em outro. Esse fato pode ser ilustrado na Figura 17, que mostra, para cada nível de risco, a composição ótima da carteira em relação aos quatro ativos que a compõe.

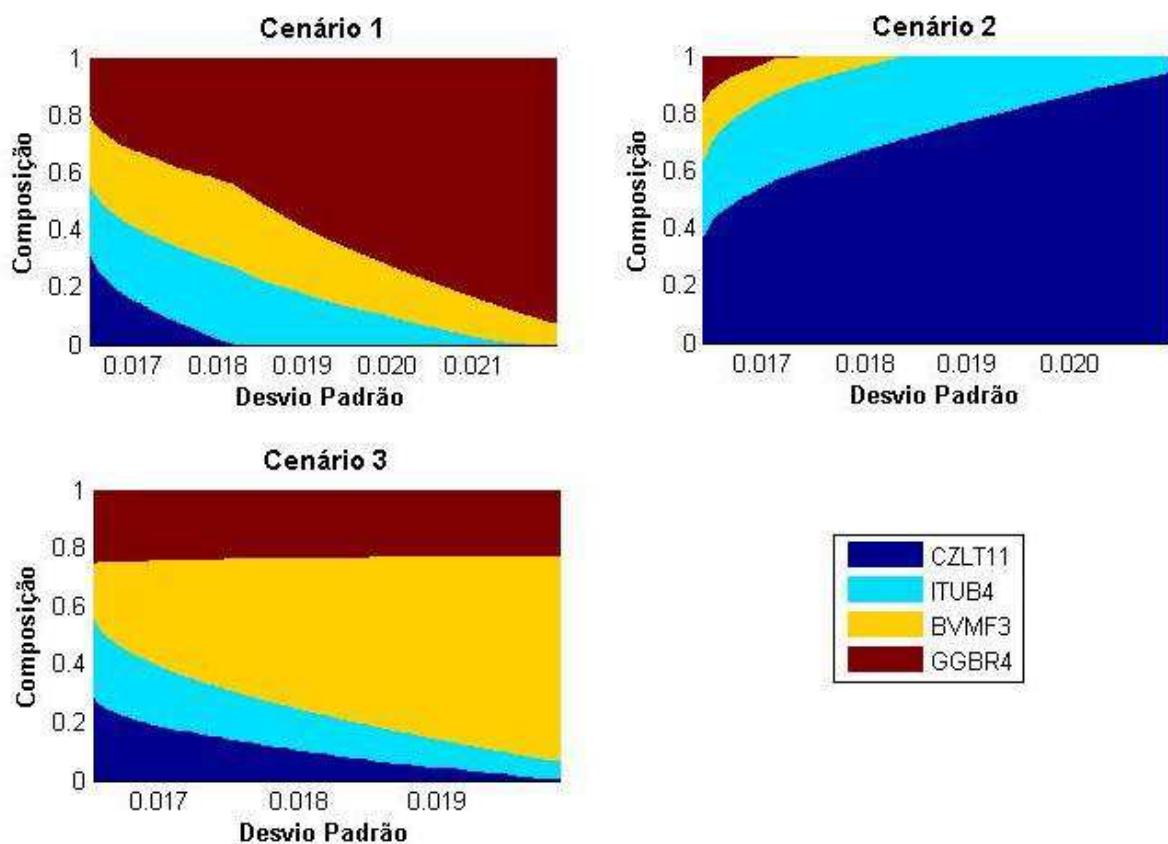


Figura 17: Alocação ótima para o Modelo de Markowitz

Pode-se notar que uma carteira eficiente do cenário 1 tem uma composição bastante diferente daquela apresentada para o cenário 2 ou 3. Por esse motivo, para um mesmo nível de risco, a composição dos ativos na proporção considerada ótima no cenário 1, não é a mesma para os demais cenários.

Na fronteira eficiente do cenário 1, pelo modelo de Markowitz, recomenda-se a alocação de 33.1% do total a ser investido em GGBR4, já no cenário 2, pra o mesmo nível de risco, recomenda-se alocar apenas 1.2% do montante nessa ação e 56.5% em CZLT11. E para o cenário 3 a recomendação já é bem diferente, a fronteira eficiente aponta uma alocação ótima correspondente a 24.4% em GGBR4, 18.3% em CZLT11, 20.1% em ITUB4 e 37.2% em BVMF3. De modo geral, enquanto no cenário 1, a recomendação é de maior alocação em GGBR4, no 2 é em CZLT11 e no 3 em BVMF3, para grande parte do intervalo de nível de risco da carteira, porque esses papéis têm maior expectativa de retorno em cada cenário.

Dessa maneira uma alocação previamente definida e baseada em pressupostos que não se concretizem perde seu caráter eficiente e não atinge os níveis ótimos de rentabilidade.

#### 4.3.2. Aplicação dos cenários ao Modelo CVAR

O modelo denominado CVAR, proposto por Rockafellar e Uryasev (2000), propõe uma formulação matemática que transforma o problema da composição de portfólio de mínimo risco em um problema de programação linear através da introdução de variáveis auxiliares que obedecem a determinadas restrições, como explicado no item 3.2. Outra vantagem do modelo é o fato de minimizar o CVAR e ao mesmo tempo fornecer o VAR da carteira a um determinado nível de confiança.

Foi utilizado um nível de confiança de 90% para determinação das medidas de risco, considerando um horizonte de tempo de um dia. Além disso, a fim de facilitar a utilização dos dados, os resultados foram gerados e analisados considerando o lado direito da distribuição, prática comum na literatura sobre o tema.

Utilizou-se a formulação proposta para, variando o retorno mínimo exigido, minimizar o risco e encontrar as composições ótimas dos pontos que formam a fronteira eficiente de cada cenário selecionado. Além disso, de modo análogo ao item anterior, foi possível traçar a fronteira eficiente relativa a cada um dos cenários e as curvas de risco-retorno das soluções dos demais quando um cenário diferente do definido no modelo se concretiza.

A Figura 18 ilustra a fronteira eficiente para cada um dos cenários. Em seguida, a Figura 19 apresenta a fronteira eficiente do cenário 1 e as curvas de risco e retorno para os portfólios ótimos definidos para os cenários 2 e 3 quando o cenário 1 se concretiza. Da mesma forma, a Figura 20 e a Figura 21 representam a mesma situação quando o cenário 2 e 3 se concretizam, respectivamente.

No modelo CVAR o risco é função da composição da carteira e do seu retorno esperado. Com isso, os valores do CVAR para os carteiras com composição ótima variam com a concretização de outro cenário base, o que torna a comparação menos óbvia que no modelo apresentado anteriormente.

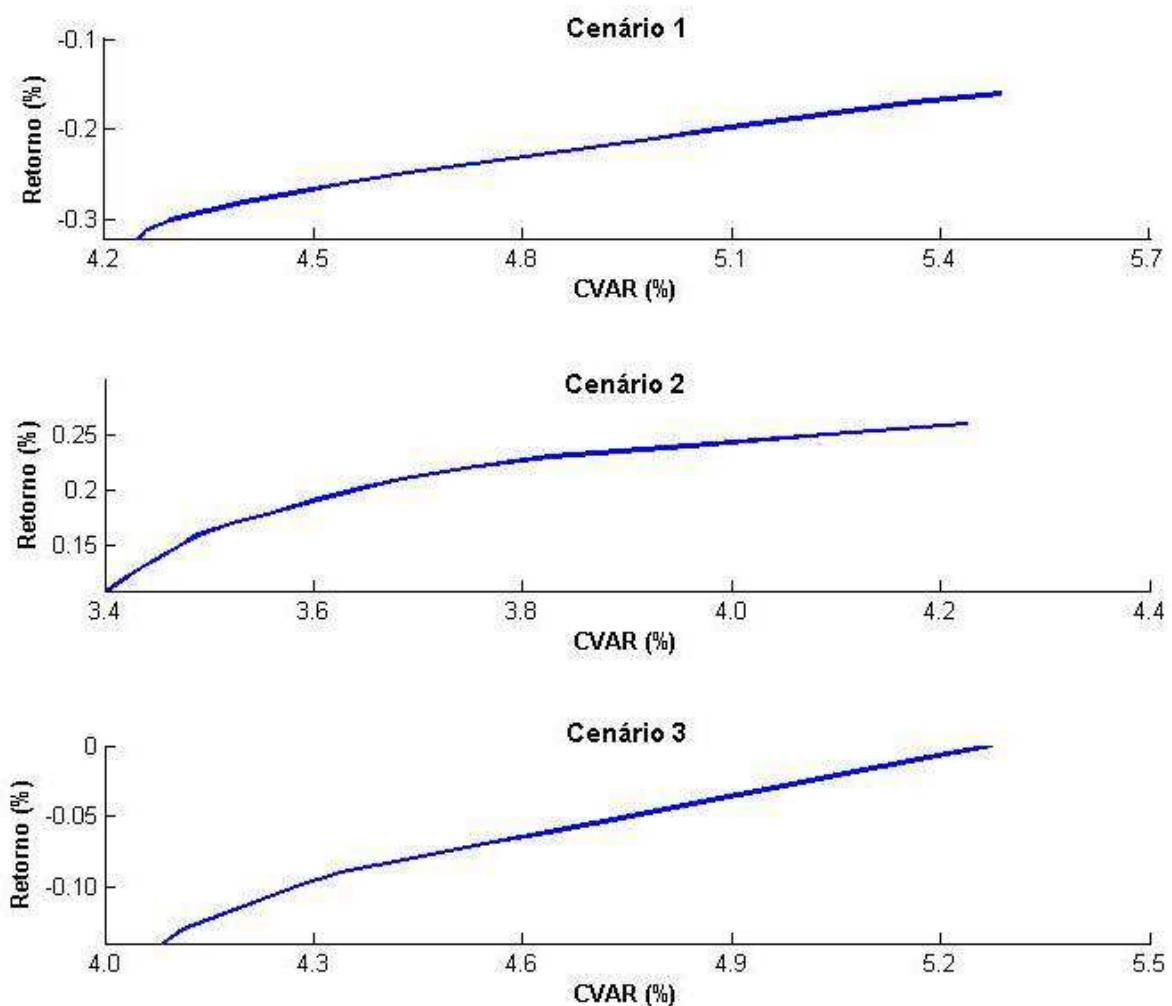


Figura 18: Fronteira eficiente do Modelo CVAR para os 3 cenários

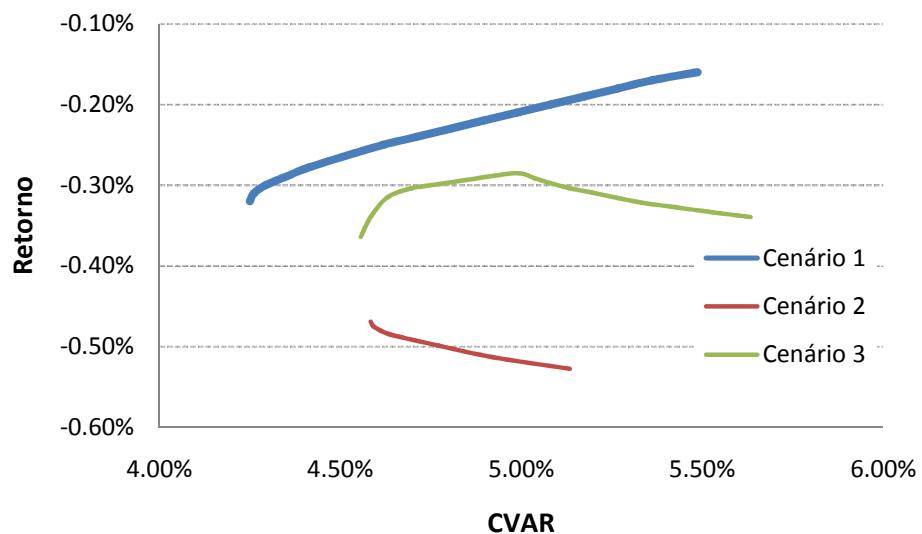


Figura 19: Curvas de risco e retorno do Modelo CVAR tomando o cenário 1 como base

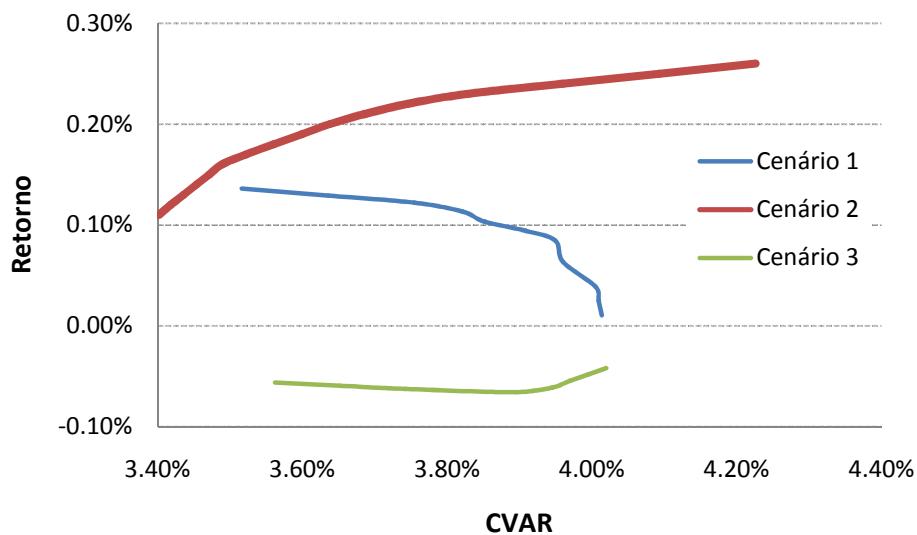


Figura 20: Curvas de risco e retorno do Modelo CVAR tomando o cenário 2 como base

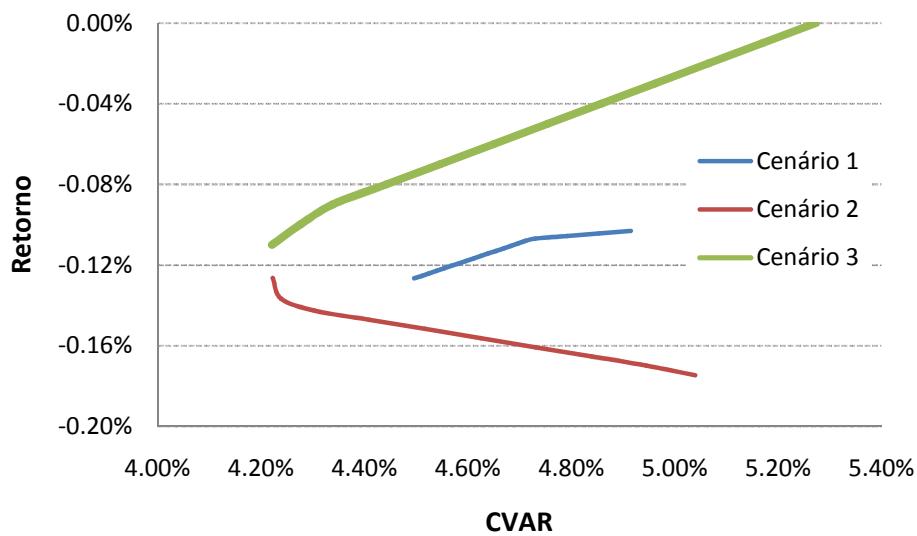


Figura 21: Curvas de risco e retorno do Modelo CVAR tomando o cenário 3 como base

É possível analisar o desempenho das carteiras em cada cenário agrupando os valores do CVAR encontrados pelo modelo de simulação. Pode-se perceber que o cenário 2 possui valores do CVAR bem menores se comparados aos valores dessa medida encontrados para compor a fronteira eficiente dos cenários 1 e 3. Isso deve-se ao fato de esse cenário representar uma tendência de alta dos preços das ações, ou seja, de rentabilidade positiva.

De modo análogo aos resultados mostrados no item anterior, mudanças na expectativa de retorno resultaram na composição de portfólios com relação risco-retorno bem inferior à fronteira eficiente.

Por exemplo, a fronteira eficiente apresenta uma rentabilidade diária da carteira de 0.19% para um valor em risco condicional de 3,6% para cenário 2 caso esse se concretize. No entanto, se o cenário 1 se concretizar, para um mesmo nível de risco, a rentabilidade cairia para 0,13%. Da mesma forma, se fosse o cenário 3 que se materializasse, a rentabilidade desse portfólio, dada pela solução ótima, seria de 0.04% negativo para um CVAR de 3.6%. A Tabela 11 apresenta os valores de risco e retorno correspondentes a cada cenário quando variamos o cenário base.

**Tabela 11: Relação risco e retorno para o Modelo CVAR**

Cenário 1 base						
	Risco	Retorno	Risco	Retorno	Risco	Retorno
Cenário 1	4.63%	-0.25%	4.75%	-0.23%	4.91%	-0.21%
Cenário 2	4.63%	-0.34%	4.75%	-0.50%	4.91%	-0.51%
Cenário 3	4.63%	-0.31%	4.75%	-0.30%	4.91%	-0.29%

Cenário 2 base						
	Risco	Retorno	Risco	Retorno	Risco	Retorno
Cenário 1	3.48%	0.16%	3.60%	0.13%	4.20%	-0.03%
Cenário 2	3.48%	0.16%	3.60%	0.19%	4.20%	0.26%
Cenário 3	3.48%	-0.05%	3.60%	-0.04%	4.20%	

Cenário 3 base						
	Risco	Retorno	Risco	Retorno	Risco	Retorno
Cenário 1	4.63%	-0.12%	4.75%	-0.11%	4.91%	-0.10%
Cenário 2	4.63%	-0.16%	4.75%	-0.16%	4.91%	-0.17%
Cenário 3	4.63%	-0.06%	4.75%	-0.05%	4.91%	-0.04%

As composições das carteiras eficientes geradas pela simulação proposta por Rockafellar e Uryasev podem ser observadas na Figura 22. Nota-se uma maior tendência do modelo, quando comparado com o modelo de Markowitz, em não alocar em ativos que possuem rentabilidade mais negativa em relação aos demais. Para o Cenário 3, por exemplo, o ativo BVMF3 nem sequer é recomendado, para nenhum nível de risco da fronteira eficiente. Esse fato pode ser justificado observando a Tabela 6 a qual mostra que o retorno médio dessa ação é o mais negativo frente às demais. Ainda em relação ao mesmo cenário, observa-se que é

recomendada uma pequena alocação em CZLT11, somente para níveis baixos de risco. À medida que o apetite de risco do investidor aumenta, não há recomendação de investimento nesse ativo.

A Figura 22 apresenta a alocação ótima da carteira de mínimo risco dada pela fronteira eficiente. Assim como mostrado na Figura 17, relativa à alocação ótima dada pelo modelo de Markowitz, pode-se notar na figura abaixo que, à medida que aumenta o nível de risco, a sugestão é para um maior investimento em GGBR4, CZLT11 e BVMF3, para os cenários 1, 2 e 3 respectivamente.

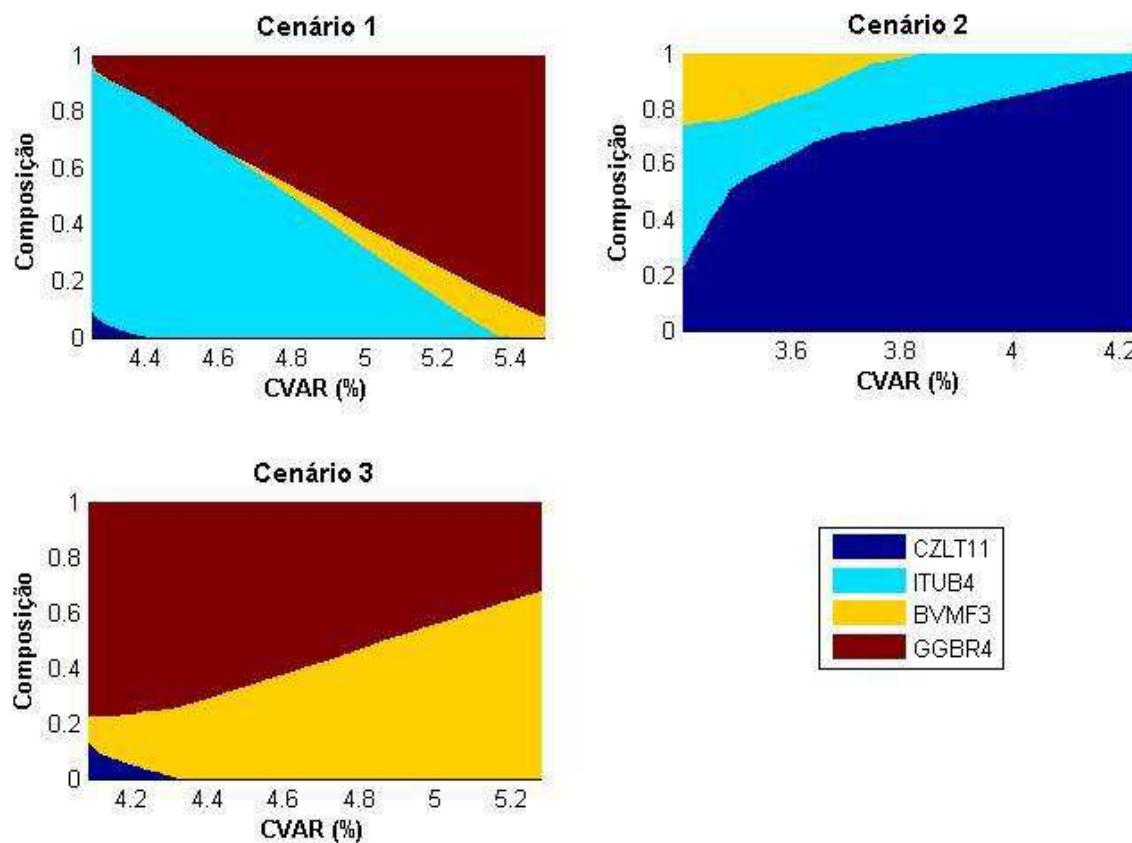


Figura 22: Alocação ótima para o Modelo CVAR

Apesar de as composições ótimas para os portfólios apresentarem características gerais próximas nos dois modelos, as diferenças dos resultados apresentados pelo que utiliza o CVAR e o anterior, que utiliza a variância, podem ser explicadas pelo fato de o CVAR ser uma medida de risco coerente (ARTZNER, DALBAEN, *et al.*, 1999) que leva em consideração características da cauda da distribuição (RIBEIRO e FERREIRA, 2004) (ROCKAFELLAR e URYASEV, 2000). Além disso, como citado anteriormente, a variância, medida de risco utilizada pelo modelo de Markowitz, não faz distinção entre desvios negativos e positivos em relação ao retorno esperado.

## 5. MODELO PROPOSTO

O ajuste DACE fornece uma maneira de aproximar a função que descreve o comportamento da superfície de resposta. Ou seja, a partir de estimativas do CVAR em diferentes composições de carteira pode-se construir uma superfície que estima o valor da medida de risco utilizada. Esse método ajudará a encontrar uma função  $\hat{f}(X)$ , em que  $X \in R^n$ , para os valores de CVAR da carteira composta pela combinação de quatro ações previamente escolhidas. Através da modelagem da cauda da distribuição é possível encontrar a composição ótima do portfólio para um dado nível de risco que é definido de acordo com o perfil do investidor em questão.

A diferença dele frente aos demais é que não faz uso de simulação e mesmo assim consegue fornecer uma função que descreve o comportamento aproximado da medida de risco do portfólio do investidor, seja ela qual for. No entanto, como apresentado anteriormente, o foco desse trabalho é aplicar o Valor em Risco Condisional para encontrar composições ótimas da carteira.

Com a técnica Kriging, a simulação de Monte Carlo é substituída pela utilização dos valores históricos de rentabilidade para descrever o comportamento futuro dos retornos dos ativos, o que diminui consideravelmente a necessidade de capacidade computacional e também do tempo de processamento. Uma das dificuldades encontradas na utilização da simulação de Monte Carlo é o aumento expressivo do número de variáveis e de restrições à medida que se aumenta o número simulações. Isso dificulta a utilização dessa medida de risco em rotinas operacionais diárias nas empresas financeiras, por exemplo.

No item 3.3 foram apresentados os parâmetros de entrada e os passos necessários para o Kriging. Primeiramente será feita uma análise dos processos de geração de amostra para escolher a que melhor se adapta ao modelo e fornece resultados mais confiáveis. Posteriormente, será escolhido o modelo de correlação que também melhor se adéqua ao problema proposto.

Definidos os processos de geração de pontos da amostra e o modelo de correlação a ser utilizado, tendo previamente definido o modelo de regressão linear, os valores de  $\theta_h$  e  $p_h$ , esse último dado pela função de correlação escolhida, será possível realizar o ajuste DACE.

Por fim, numa abordagem similar à apresentada aos modelos de Markowitz e CVAR, a fronteira eficiente será construída.

## 5.1. DETERMINAÇÃO DO CVAR

O modelo de Rockafellar e Uryasev já fornece a formulação necessária para obtenção dos valores das duas medidas de risco, tanto o VAR quanto o CVAR. O que não ocorre nesse modelo.

O primeiro passo consiste na obtenção dos valores do VAR para posterior cálculo do valor do CVAR do portfólio formado pela combinação dos ativos. Esses valores do CVAR e da composição do portfólio servirão de dados de entrada para o ajuste DACE.

No item 2.2.2 foram apresentadas três maneiras de calcular o Valor em Risco da carteira: não-paramétrico, paramétrico e por simulação de Monte Carlo. Será utilizada a primeira maneira, que consiste na determinação do VAR através de um percentil da série histórica da carteira.

A decisão de não utilizar o método paramétrico reflete a preocupação de não assumir hipóteses que não podem ser consideradas como verdadeiras em todos os casos, como a de normalidade da distribuição. Como já falado, o comportamento de grande parte das distribuições presentes não pode ser aproximado por uma normal. O método por simulação de Monte Carlo também não foi escolhido por representar uma maneira que pode exigir um grande trabalho computacional à medida que o número de ativos cresce.

Um percentil de ordem  $p$  da variável aleatória  $K$  é definido como o valor  $v$  tal que a probabilidade de que a variável assuma valores inferiores a  $v$  é maior ou igual a  $p$ , ou seja  $P(K \leq v) \geq p$ . Foi utilizada uma probabilidade de 10% e um horizonte de tempo de um dia. Para os valores da rentabilidade histórica, foram utilizados os dados de retorno diário para as ações entre outubro de 2009 e agosto de 2011, totalizando 474 observações. Ou seja, utilizou-se a mesma amostra citada no item 2.

O CVAR pode ser calculado como o valor médio dos retornos menores que aquele definido para o VAR. Assim como já mostrado no item 2.2.3, de acordo com Quaranta e Zaffaroni (2008):

$$CVAR = \Psi(x,a) = P\{y|f(x,y) \leq a\}$$

Em que:

$a$  é o VAR do portfólio.

## 5.2. SELEÇÃO DA AMOSTRA

Foram descritos três métodos principais para geração da amostra de pontos necessários para aplicação do experimento: aleatória, determinística e por hipercubo latino. Devido à semelhança dos dois últimos, será feira uma análise entre o ajuste fornecido por uma amostra aleatória e uma determinística. Essa análise visa determinar a influência da seleção de pontos do *grid* na eficiência da solução do método proposto.

Na primeira, as proporções de cada um dos 4 ativos foram geradas de maneira aleatória, tal que  $0 \leq x_j^{(i)} \leq 1$ , formando uma amostra composta por 100 composições diferentes de portfólio. Na segunda, os valores de  $x_j^{(i)}$  foram obtidos de forma que estivessem distribuídos igualmente espaçados em toda a região analisada. A condição  $\sum_{j=1}^4 x_j^{(i)} = 1$  foi relaxada com o intuito de facilitar a representação gráfica. A Figura 23 representa o conjunto de valores de  $x_j^{(i)}$  que serão utilizados referente aos ativos ITUB4 e CZLT11. Essas ações foram escolhidas, entre as quatro que serão consideradas para compor o portfólio, de modo arbitrário para facilitar a representação da amostra em  $\mathbb{R}^2$ .

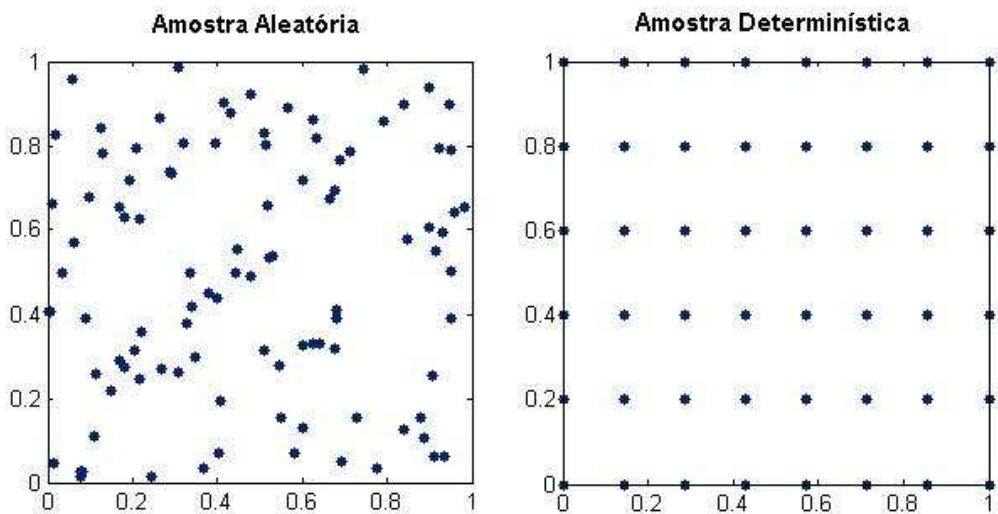


Figura 23: Seleção de dados pelo critério aleatório e determinístico respectivamente

Seguiu-se com a determinação dos valores do CVAR para as carteiras geradas pelos dois métodos. O CVAR foi calculado como a média dos valores menores que o VAR, sendo esse último determinado por percentil a um nível de confiabilidade de 90% e um horizonte de tempo de um dia. As superfícies de resposta geradas para as duas amostras, aleatória e

determinística, são mostradas na Figura 24. Essas foram projetadas de  $\mathcal{R}^4$  para  $\mathcal{R}^2$ . No caso da superfície determinística, para facilitar sua ilustração, selecionou-se apenas pontos em que a alocação em BVMF3 e GGBR4 era de 25% e 50% respectivamente.

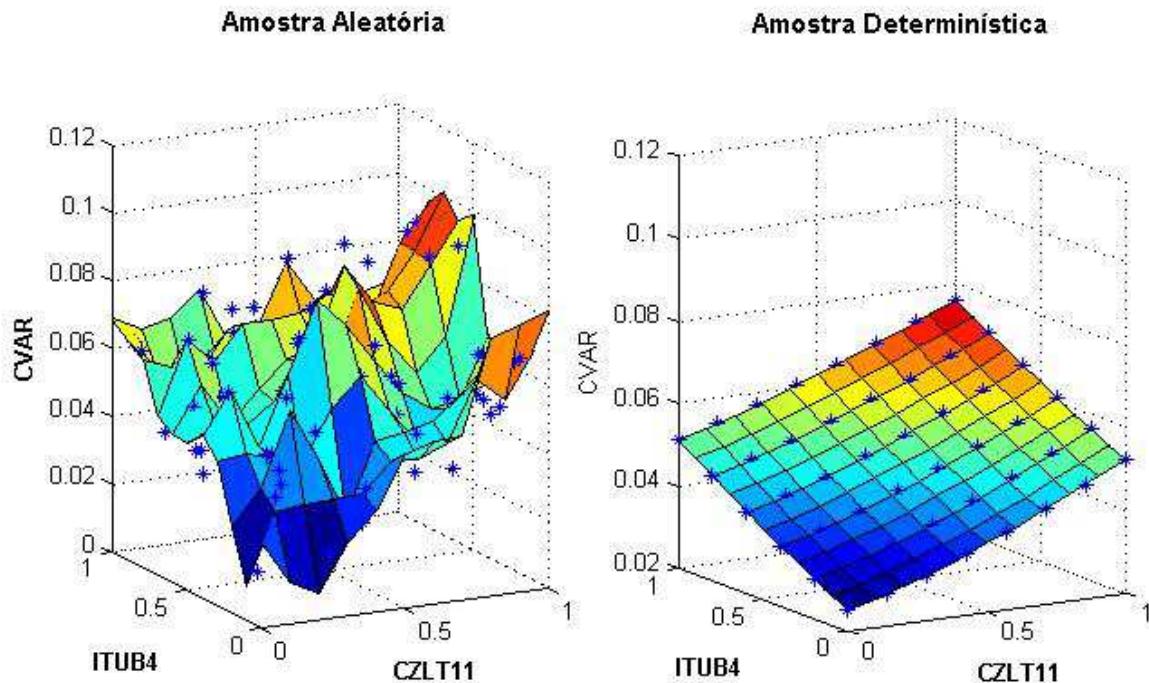


Figura 24: Comportamento do CVAR calculado para a amostra aleatória e determinística

Pode-se perceber uma superfície mais irregular na figura correspondente à amostra aleatória. Essa característica pode ser explicada pela concentração de pontos em determinadas regiões, o que pode vir a prejudicar a construção de uma superfície que represente o comportamento do CVAR em todo o intervalo da amostra.

Seguiu-se com a aproximação dos valores em risco condicional segundo o método DACE. O modelo de regressão utilizado foi o linear (como já explicado no item 3.3). Para efeito de teste inicial sobre o comportamento dessa medida de risco, será utilizada a correlação gaussiana. No próximo item será feita uma análise para definir qual a função de correlação deve ser utilizada para aproximar a função do CVAR.

Como esperado, o método interpolou todos os pontos da amostra. Com ele foi possível uma suavização da superfície de resposta, principalmente para a amostra com o conjunto de pontos aleatórios. A Figura 25 apresenta os gráficos da aproximação do CVAR para as duas amostras

segundo o método do ajuste DACE. Os asteriscos apresentados na malha indicam os pontos da amostra que foram utilizados. De modo análogo ao que foi explicado anteriormente, para facilitar a representação da superfície, na amostra determinística foram fixados os pesos correspondentes à alocação em BVMF3 e GGBR4 para os pontos utilizados no gráfico.

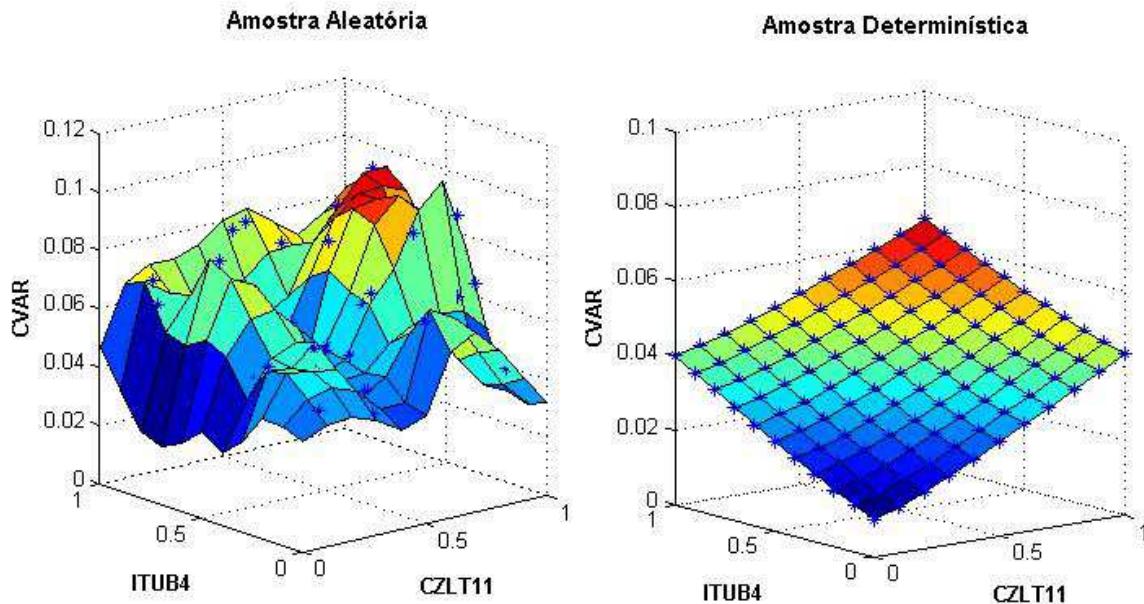


Figura 25: Aproximação gerada pelo método Kriging para a amostra aleatória e determinística

As diferenças em relação ao critério de seleção dos pontos que representam a composição de cada ativo na carteira também podem ser observadas pelo erro dado por:

$$\hat{f}(X) - CVAR(X)$$

Em que:

$\hat{f}(X)$  representa o valor do CVAR aproximado dado pelo ajuste DACE.

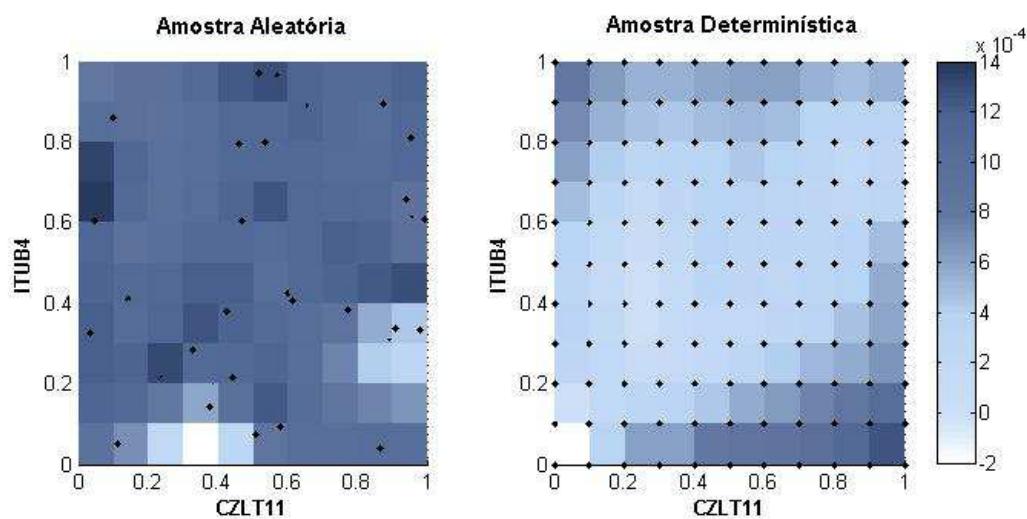


Figura 26: Erro cometido na aproximação gerada pelo método Kriging para a amostra aleatória e determinística

Percebe-se que o método Kriging é sensível ao critério de seleção da amostra utilizada para o ajuste. A Figura 26 mostra que quando aplicado a uma amostra de pontos aleatórios, o método apresenta erros maiores se comparados à sua aplicação a um conjunto de pontos eqüidistantes que têm o intuito de abranger todo o espaço da malha.

Visto isso, serão utilizados apenas conjuntos de pontos gerados pelo método determinístico para a aproximação da função do CVAR que será utilizada nos modelos de otimização.

### 5.3. ESCOLHA DA FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO

No item anterior foi utilizada a função de correlação gaussiana para aplicar o ajuste DACE. No entanto, dentre os métodos de correlação possíveis, apresentados por Lophaven, Nielsen e Sondegaard (2002) e citados no item 3.3, faz-se necessária uma análise de qual função de correlação melhor se ajusta ao modelo proposto.

Dessa forma, busca-se avaliar qual método de correlação acarreta um menor erro de estimativa da forma:

$$\frac{\sum_{h=1}^q (\hat{y}^{(h)} - y^{(h)})}{q}$$

Em que:

$q$  é o número de pontos da amostra nos quais a função foi calculada

$y^{(h)}$  é o valor do CVAR para a carteira  $h$

$\hat{y}^{(h)}$  é o valor do CVAR para a carteira  $h$  dado pela função aproximada dada pelo ajuste DACE

Calculou-se então a aproximação da função utilizando cada uma das cinco funções de correlação definindo  $\theta = 1$ . Os pontos da malha utilizados foram os mesmos da amostra determinística apresentada no item anterior. A regressão seguiu o modelo linear.

A Tabela 12 apresenta o erro quadrático médio das aproximações pelo método Kriging onde se alterou a função de correlação utilizada. Conclui-se que o erro foi reduzido ao utilizar a correlação gaussiana, considerando-se então essa a mais indicada para a aproximação de CVAR(X).

**Tabela 12: Erro de estimação gerado pelo método Kriging em função da correlação utilizada**

Modelo de Regressão	Erro de Estimação
Exponencial	2.12E-06
Gaussiana	2.80E-07
Linear	2.21E-06
Esférica	3.71E-06
<i>Spline</i>	4.76E-06

## 5.4. APLICAÇÃO DO MÉTODO KRIGING

Nos itens anteriores foi possível um estudo para definir os melhores parâmetros de entrada para a aplicação do método em questão.

Sabe-se que esse modelo que interpola os dados é função da amostra de pontos da malha que serão utilizados e respectivos valores de resposta (CVAR(X)), do tipo de regressão e correlação escolhida e do valor de  $\theta$ . Definimos os parâmetros de entrada tais que:

- A amostra composta pela combinação dos quatro ativos anteriormente escolhidos no item 4.1 foi gerada por um processo determinístico o qual divide o *grid* em  $n$  intervalos eqüidistantes, definindo o que é chamado de passo, ou seja, a distância entre dois valores consecutivos para  $x_j^{(i)}$ ;
- O CVAR foi calculado como sendo a média dos valores menores que o definido para o VAR, sendo esse último determinado segundo o método da série histórica;

- O método de regressão escolhido foi o linear, o qual utiliza um polinômio de grau um para aproximar a função;
- O modelo de correlação escolhido foi o de Gauss, pois esse fornece uma melhor aproximação da função, baseado na análise do valor do erro quadrático médio;
- A definição do modelo de correlação implica na determinação do valor de  $p_h$ , que no caso da correlação gaussiana equivale a 2;
- Numa abordagem similar a Queipo (2002), será utilizado  $\theta = 1$ .

Utilizando o software MATLAB, ao realizar o ajuste, o método proposto fornece uma aproximação da função na seguinte forma (LOPHAVEN, NIELSEN e SONDERGAARD, 2002):

$$\hat{f}(X) = F(X)^T \beta^* + r(X)^T \gamma^*$$

Em que:

$F(X)$  é a matriz com os valores das funções calculados no pontos da amostra

$\beta^*$  estimativa de mínimos quadrados

$r(X)$  vetor de correlação entre os erros em  $X^*$  e os erros nos pontos da amostra

$\gamma^*$  vetor dos fatores de correlação

Dessa forma é possível utilizar a função descrita acima como uma boa aproximação para representar o comportamento da superfície de resposta. A Figura 27 apresenta essa superfície aproximada para os três cenários analisados.

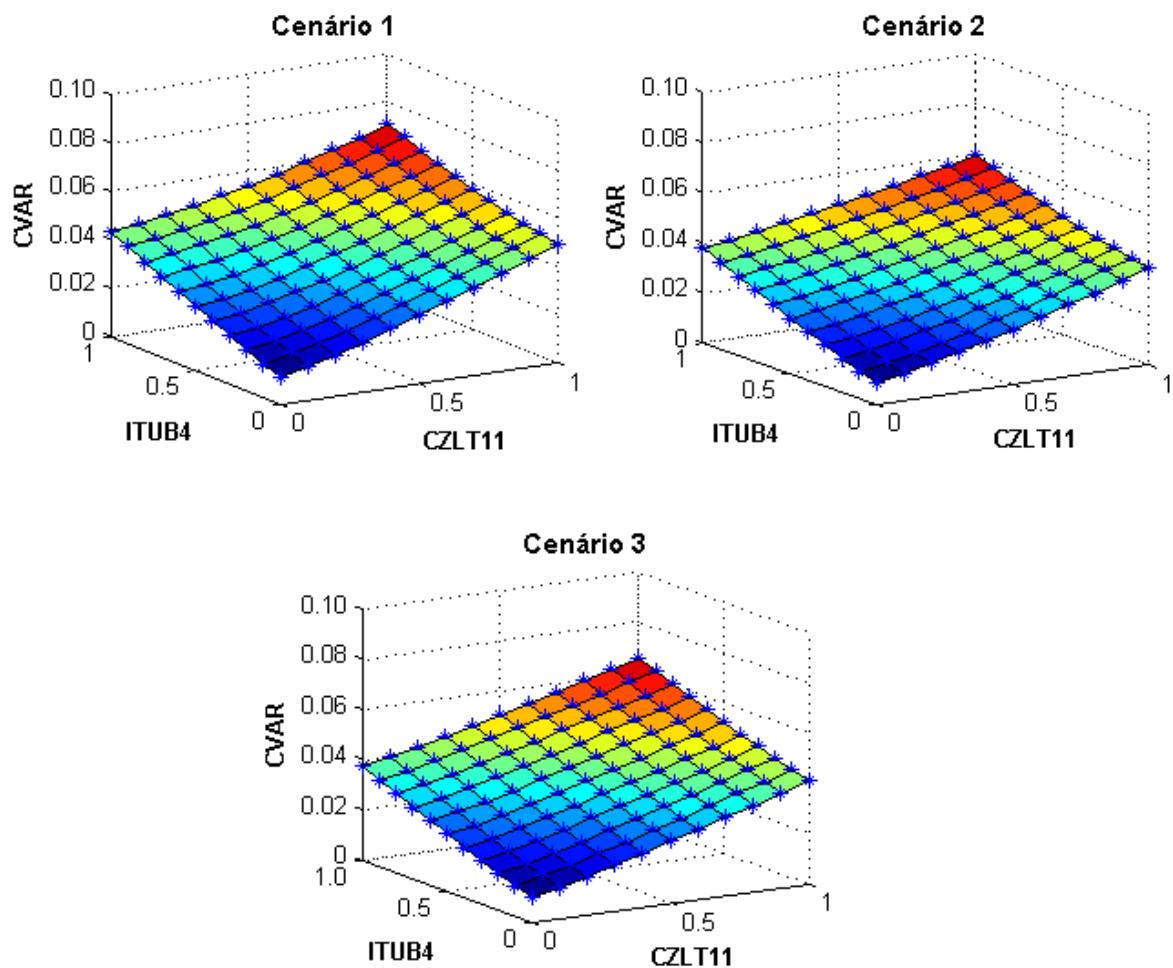


Figura 27: Aproximação gerada pelo método Kriging para a função CVAR

## 5.5. ESTIMAÇÃO DA FRONTEIRA EFICIENTE

Esse capítulo apresentou uma abordagem não usual para o problema de determinação de carteiras de mínimo risco. Foi proposto um modelo que aproxima a função  $CVAR(X)$  através do método DACE para posterior determinação de uma solução ótima para:

$$\min CVAR(X)$$

Onde,

$$X = \left\{ X \in R^n \left| \sum_{j=1}^n x_j = 1 \quad 0 \leq x_j \leq 1 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \right. \right\}$$

O que se propõe é analisar o desempenho do modelo em termos do comportamento da fronteira eficiente, em uma abordagem semelhante à proposta por Markowitz. O CVAR(X) é minimizado para diferentes valores de retorno esperado, construindo um gráfico de risco retorno que representa sua fronteira eficiente.

Da mesma forma que no modelo de Markowitz, é possível determinar a composição ótima de uma carteira de investimentos de acordo com o perfil de risco do investidor, considerando ao invés da variância o valor em risco condicional da carteira.

Com as funções fornecidas para as representações gráficas da Figura 27 foi possível construir uma formulação matemática no software MATLAB que permite minimizar  $\hat{f}(X)$  para determinados valores de retorno esperado. Vale lembrar que o valor do risco está expresso em porção do total a ser investido, considerando que haja uma correspondência de um para um entre o retorno monetário e o retorno em percentual.

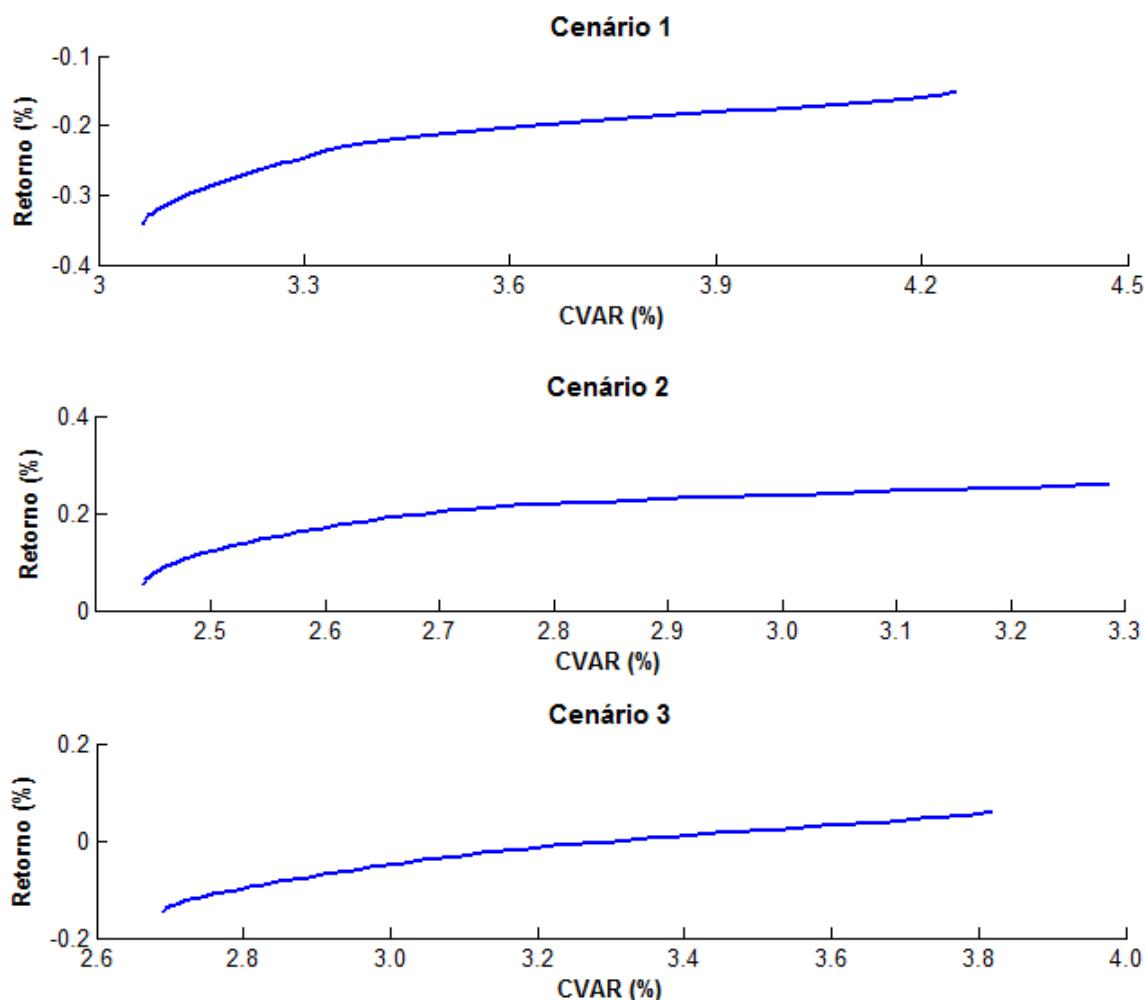


Figura 28:Fronteira eficiente pelo Método Kriging para os 3 cenários

De modo análogo à abordagem utilizada nos itens 4.3.1 e 4.3.2, as figuras Figura 29, Figura 30 e Figura 31 mostram as curvas de risco-retorno dos demais cenários em caso de um deles se materializar. Em cada figura a fronteira eficiente é representada por uma linha mais espessa que as demais.

Nota-se novamente a perda de eficiência quando carteiras ótimas de um cenário são aplicadas em outro, ou seja, a mudança da expectativa de retorno acarreta uma relação risco-retorno das soluções bem inferior à apresentada na fronteira eficiente em seu cenário base. A Tabela 13 apresenta os valores de risco e retorno correspondentes a essa variação.

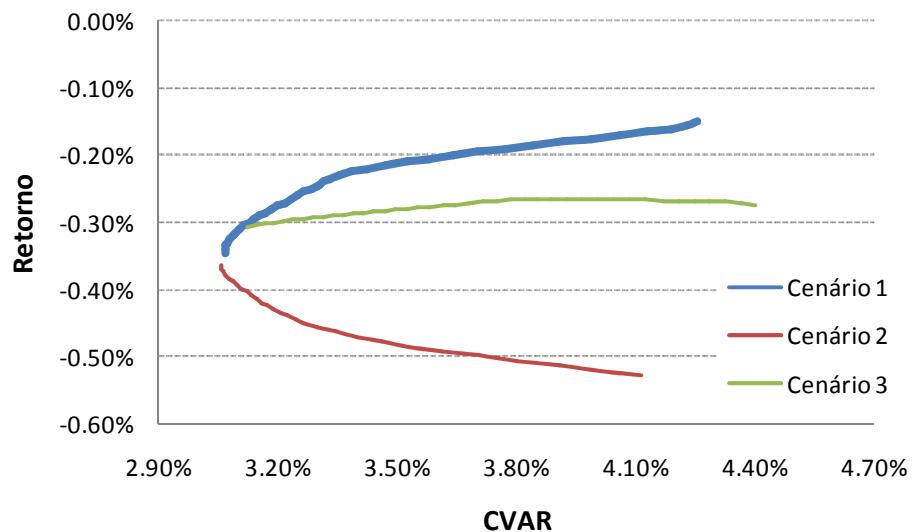


Figura 29: Curvas de risco e retorno tomando o cenário 1 como base

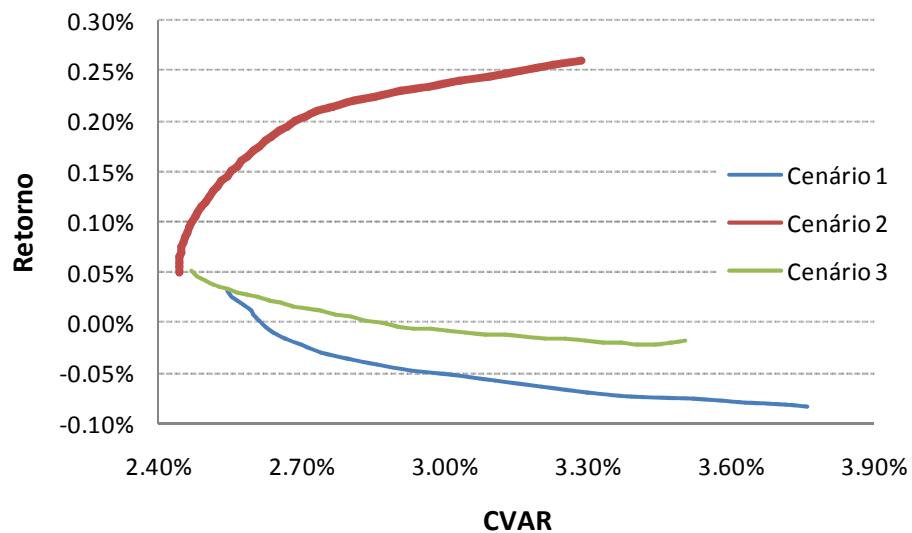


Figura 30: Curvas de risco e retorno tomando o cenário 2 como base

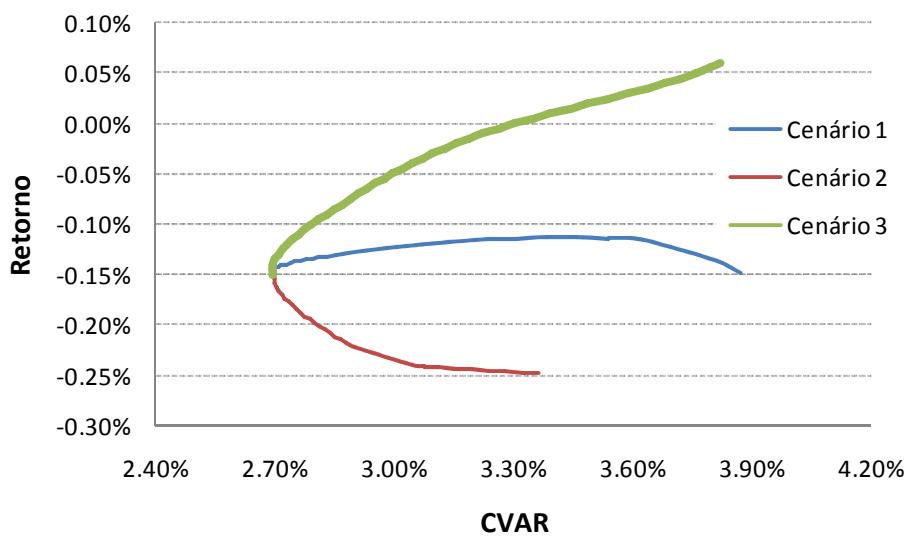


Figura 31: Curvas de risco e retorno tomando o cenário 3 como base

Tabela 13: Relação risco e retorno pelo Método Kriging

Cenário 1 base						
	Risco	Retorno	Risco	Retorno	Risco	Retorno
Cenário 1	3.10%	-0.32%	3.30%	-0.25%	3.50%	-0.21%
Cenário 2	3.10%	-0.39%	3.30%	-0.46%	3.50%	-0.48%
Cenário 3	3.10%	-0.32%	3.30%	-0.29%	3.50%	-0.28%

Cenário 2 base						
	Risco	Retorno	Risco	Retorno	Risco	Retorno
Cenário 1	2.80%	-0.03%	3.10%	-0.06%	3.30%	-0.07%
Cenário 2	2.80%	0.22%	3.10%	0.25%	3.30%	0.26%
Cenário 3	2.80%	0.01%	3.10%	-0.01%	3.30%	-0.02%

Cenário 3 base						
	Risco	Retorno	Risco	Retorno	Risco	Retorno
Cenário 1	3.10%	-0.12%	3.30%	-0.11%	3.50%	-0.11%
Cenário 2	3.10%	-0.24%	3.30%	-0.25%	3.50%	-0.25%
Cenário 3	3.10%	-0.03%	3.30%	0.00%	3.50%	0.03%

A Figura 32 apresenta as composições das carteiras eficientes geradas pelo modelo de otimização que utiliza a função aproximada pelo ajuste DACE para o comportamento do CVAR. Observa-se novamente que a fronteira eficiente recomenda um investimento maior em GGBR4, CZLT11 e BVMF3 para os cenários 1, 2 e 3 respectivamente, à medida que o apetite do investidor por risco aumenta.

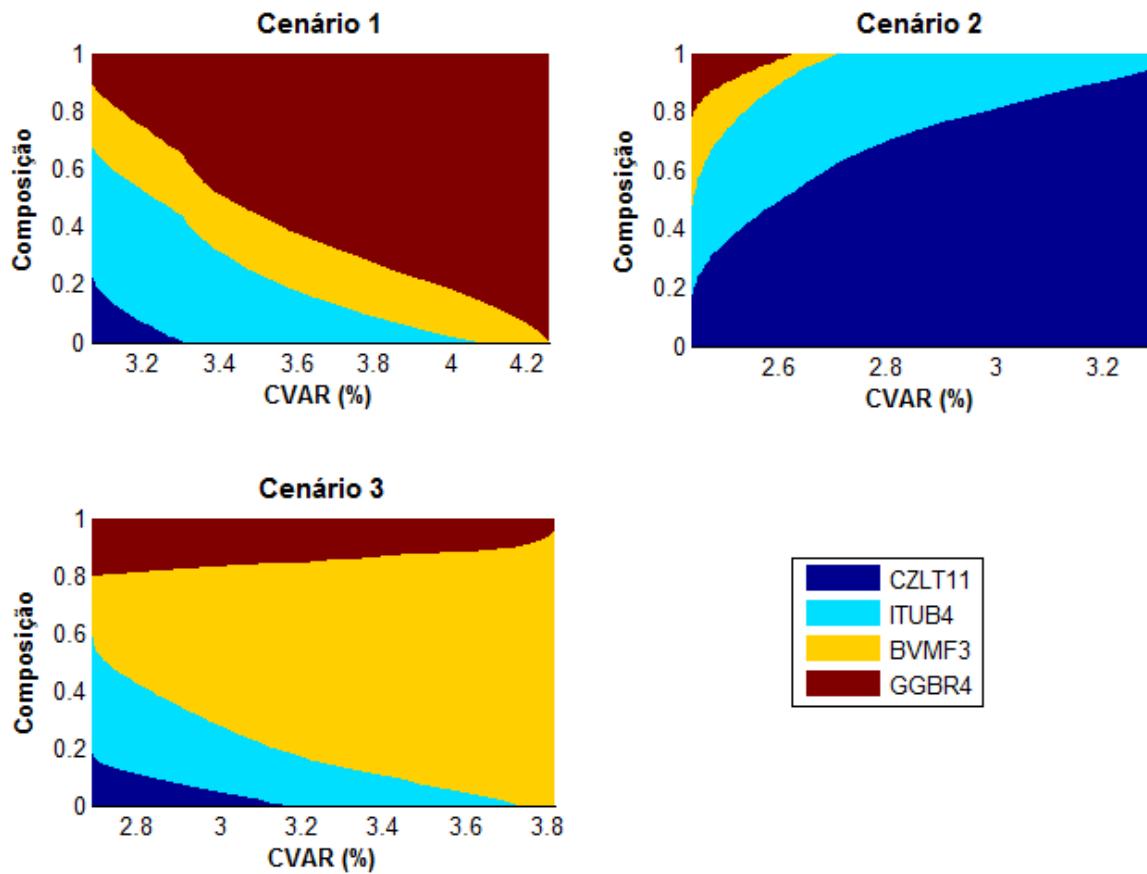


Figura 32: Alocação ótima fornecida pelo Método Kriging

As figuras Figura 17, Figura 22 e Figura 32 apresentam formas parecidas, ou seja, recomendações de alocações no decorrer da fronteira eficiente que seguem as mesmas tendências, o que reforça as vantagens do uso do método proposto. Esse, portanto, é capaz de gerar boas análises de risco com uma maior facilidade de implementação, requerendo uma menor capacidade computacional e sem a necessidade de supor uma determinada distribuição de probabilidade sem que essa necessariamente ocorra.

## 6. CONCLUSÕES

Nesse capítulo serão apresentadas as principais conclusões das aplicações dos modelos de seleção de portfólio, bem como o comportamento observado pelo modelo proposto. Serão indicadas também recomendações e extensões para trabalhos futuros.

### 6.1. CONCLUSÕES DO TRABALHO

Esse trabalho buscou utilizar um método de seleção de portfólio capaz de otimizar a relação entre risco e retorno da carteira de ativos de um investidor. Foram escolhidos quatro ativos para compor a carteira, sendo esses negociados na Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo.

Primeiramente apresentou-se a Teoria Moderna de Gestão de Carteiras, criada por Markowitz em 1952, que figura como a primeira formulação apresentada na literatura que foi considerada eficiente para a maximização da função utilidade de um portfólio. A partir disso foi possível aprofundar a análise e apresentar outros modelos, que surgiram posteriormente e que utilizam outra medida de risco, diferente da variância utilizada pelo modelo de Markowitz.

O VAR e o CVAR surgiram na literatura como medidas de risco que suprem as deficiências indicadas para a variância, sendo o CVAR considerado uma medida de risco mais completa por ser coerente, de acordo com Artzner *et al* (1999), e também por analisar a cauda da distribuição de probabilidade (ROCKAFELLAR e URYASEV, 2000, 2002) .

Portanto, foi estudado o CVAR como medida de risco utilizada para avaliar a relação risco e retorno nos problemas de otimização financeira, numa abordagem semelhante à proposta por Markowitz. Por não ser muito conhecido nas empresas e instituições financeiras, o CVAR ainda não é muito utilizado pelos gestores de investimento. Além disso, a complexidade para otimizá-lo, decorrente do grande número de variáveis e restrições exigidas, torna seu uso pouco conveniente na rotina operacional das empresas.

Para contornar essas dificuldades, foi proposta a aplicação do método Kriging, também conhecido como ajuste DACE, muito usado para resolução de problemas da engenharia (QUEIPO, *et al.*, 2002). Esse método dispensa a simulação de Monte Carlo para a geração de cenários, diferente do proposto por Rockafellar e Uryasev (2002), utilizando os dados da série

histórica dos retornos para modelar a cauda da distribuição de probabilidade, o que diminui bastante a necessidade de capacidade computacional para resolução do problema.

Vale ressaltar que a aplicação do modelo proposto gera uma função objetivo não linear, a qual representa uma aproximação da função real. No entanto, essa característica não foi considerada um empecilho para a utilização do método, pois nosso interesse é analisar o comportamento do modelo de seleção de portfólio e essa metodologia forneceu uma boa aproximação para o comportamento do CVAR.

Para analisar e ilustrar a sensibilidade dos modelos de seleção de portfólio frente à variabilidade e imprevisibilidade dos retornos futuros dos ativos, foram escolhidos três cenários que apresentam diferentes comportamentos ao longo do tempo. A partir desses cenários foram resolvidos problemas de composição de portfólio. Também foi realizada uma análise do desempenho dessas carteiras ótimas no caso de concretização dos demais cenários. Constatou-se que as soluções previamente consideradas ótimas, quando aplicadas em outros cenários, perdem sua eficiência, apresentando retornos muitas vezes bastante negativos quando comparados com os da fronteira eficiente.

Por fim, numa abordagem análoga à descrita acima, realizou-se o ajuste DACE, com base nos dados históricos, para aproximar a função que descreve o comportamento do CVAR nos diferentes cenários. Em seguida, construiu-se a fronteira eficiente da função aproximadora obtida em cada cenário e fez-se uma análise do comportamento dessas soluções ótimas na concretização de outros cenários.

A partir desses estudos, concluiu-se que as fronteiras obtidas pelos três modelos são diferentes, apresentando cada uma delas uma composição de portfólio bem diferente das demais. Constatou-se também que o modelo proposto apresenta uma grande facilidade de implementação, rapidez de análise e geração de resultados, caracterizando uma grande vantagem frente aos demais.

Os resultados obtidos, através da aplicação dos modelos apresentados, foram condizentes com o objetivo inicialmente traçado para o trabalho. No entanto, vale ressaltar aqui que, em algumas ocasiões, foi necessária a simplificação de alguns aspectos do problema. Como exemplo pode-se citar o fato de não terem sido considerados portfólios com posições alavancadas.

## 6.2. FUTURAS EXTENSÕES

Como descrito no início do trabalho, o modelo proposto considera apenas os períodos inicial e final do preço das ações, caracterizando um modelo uniperíodo. Ou seja, a decisão é tomada em  $t_0$  e seu resultado é observado em  $t_1$ . Uma possível extensão deste trabalho é a aplicação desse modelo considerando vários períodos futuros (modelo multiperíodo) para a otimização das relações risco e retorno das carteiras de investimento. Essa abordagem se aproximaria bastante do cotidiano de gestores de investimento, que necessitam tomar decisões que envolvem mais de um período futuro.

Conforme destacado por Yin *et al* (2011) o modelo Kriging supõe que a variância dos erros seja homogênea, o que não necessariamente ocorre. Neste artigo os autores propõem uma modificação do modelo Kriging para eliminar essa hipótese. Uma possível extensão do trabalho aqui apresentado seria empregar este novo modelo.

Por fim, podem-se considerar também ativos que não apenas ações, mas também outros derivativos, para compor o portfólio do investidor, de modo a abranger as possibilidades de investimentos disponíveis no mercado.

## BIBLIOGRAFIA

ARTZNER, P. et al. Coherent measures of risk. **Mathematical Finance**, v. 9, p. 203-228, July 1999.

ASSAF NETO, A. **Mercado Financeiro**. 9<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2009.

COSTA NETO, P. L. O. **Estatística**. 2<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Editora Blücher, 2002.

HULL, J. C. **Options, Futures and Other Derivatives**. Fourth. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1999.

JONES, D. R.; SCHONLAU, M.; WELCH, W. J. Efficient global optimization of expensive black-box functions. **Journal of Global Optimization**, v.13, n.4, 1998. p.455-492.

JORION, P. **Value at Risk**: the new benchmark of managing financial risk. 3th. ed. New York: McGraw-Hill, 1997.

LOPHAVEN, S. N.; NIELSEN, H. B.; SONDERGAARD, J. **DACE: a matlab kriging tollbox**. Denmark: Informatics and Mathematical Modelling. Technical University of Denmark, p. 28 (Technical Report, IMM-TR-2002-12). 2002.

LUENBERGER, D. G. **Investment Science**. New York: Oxford University Press, 1998.

MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**, v.7, 1952. p.77-91.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros**. 2<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: LTC, 2003.

NETO, P. L. O. C.; CYMBALISTA, M. **Probabilidades**. São Paulo: Edgar Blucher Ltda, 2006.

PARDALOS, P. M.; ROMEIJN, H.; TUY, H. Recent developments and trends in global optimization. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v.124, 2000. p.209-228.

PFLUG, G. C. Some remarks on the Value-at-Risk and Conditional Value-at-Risk. In: URYASEV, S. **Probabilistic constrained optimization**. [S.l.]: [s.n.], 2000. p. 272-281.

QUARANTA, A. G.; ZAFFARONI, A. Robust optimization of condition value at risk and portfolio selection. **Journal of Banking and Finance**, v.32, 2008. 2046-2056.

QUEIPO, V. N. et al. Surrogate Modeling-based optimization for the integration of statistic and dynamic data into a reservoir description. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v.37, n.3-4, 2002. p.167-181.

RIBEIRO, C. O.; FERREIRA, L. A. S. Uma contribuição ao problema de composição de carteiras de mínimo valor em risco. **Gestão e Produção**, v.12, 2004. p.295-304.

ROCKAFELLAR, R. T.; URYASEV, S. Optimization of Conditional Value-at-Risk. **Journal of Risk**, v. 2, 2000. 21-41.

ROCKAFELLAR, R. T.; URYASEV, S. Conditional Value-at-Risk for general loss distributions. **Journal of Banking and Finance**, v.26, 2002. 1443-1471.

RUBINSTEIN, M. Markowitz's "Portfolio Selection": A Fifty-Year Retrospective. **The Journal of Finance**, v.57, 2002. p.1041-1045.

SHESKIN, D. J. **Parametric and Nonparametric Statistical Procedures**. 3<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: Chapman & Hall/CRC, 2004.

SZEGÖ, G. Measures of risk. **Journal of Banking & Finance**, v. 26, p. 1253-1272, June 2002.

YIN, J.; NG, S. H.; NG, K. M. Kriging metamodel with modified nugget-effect: The heteroscedastic variance case. **Computers & Industrial Engineering**, Singapore, 61, 2011. 760–777.

## ANEXO I – MODELO DE MARKOWITZ

%A matriz de retornos (rentabilidade) é organizada de forma que cada coluna %corresponde a um ativo

```

asset_classes = {'CZLT11' 'ITUB4' 'BVMF3' 'GGBR4'};

%retorno_c1 representa os retornos dos ativos para cenário 1
%retorno_c2 representa os retornos dos ativos para cenário 2
%retorno_c3 representa os retornos dos ativos para cenário 3

media_c1=mean(retorno_c1);
media_c2=mean(retorno_c2);
media_c3=mean(retorno_c3);

covariancia=cov(rentabilidade);

retorno=[];
pesos_c1=[];
pesos_c2=[];
pesos_c3=[];
variancia_c1=[];
variancia_c2=[];
variancia_c3=[];

%Para cada cenário tem-se a média e uma solução ótima de acordo com o
%modelo de Markowitz

i=1;

for retorno=0.0:0.00005:0.0012
    [pesos_c1(:,i),variancia_c1(1,i)]=fmincon(@myfun_mark,[0;0;0;0],[-1 0 0
0;0 -1 0 0; 0 0 -1 0;0 0 0 -1],[0;0;0;0],[media_c1;[1 1 1
1]],[retorno;1],[0;0;0;0],[1;1;1;1]);
    i=i+1;
end

i=1;
for retorno=0.0:0.00005:0.0011
    [pesos_c2(:,i),variancia_c2(1,i)]=fmincon(@myfun_mark,[0;0;0;0],[-1 0 0
0;0 -1 0 0; 0 0 -1 0;0 0 0 -1],[0;0;0;0],[media_c2;[1 1 1
1]],[retorno;1],[0;0;0;0],[1;1;1;1]);
    i=i+1;
end

i=1;
retorno=[];
for retorno=0.0:0.0001:0.0020
    [pesos_c3(:,i),variancia_c3(1,i)]=fmincon(@myfun_mark,[0;0;0;0],[-1 0 0
0;0 -1 0 0; 0 0 -1 0;0 0 0 -1],[0;0;0;0],[media_c3;[1 1 1
1]],[retorno;1],[0;0;0;0],[1;1;1;1]);
    i=i+1;
end

variancia_c1=sqrt(variancia_c1);
variancia_c2=sqrt(variancia_c2);
variancia_c3=sqrt(variancia_c3);

```

```
for i=1:length(pesos_c2)
    cond2_1(1,i)= media_c1*pesos_c2(:,i);
    cond2_3(1,i)= media_c3*pesos_c2(:,i);
end

for i=1:length(pesos_c1)
    cond1_2(1,i)= media_c2*pesos_c1(:,i);
    cond1_3(1,i)= media_c3*pesos_c1(:,i);
end

for i=1:length(pesos_c3)
    cond3_2(1,i)= media_c2*pesos_c3(:,i);
    cond3_1(1,i)= media_c1*pesos_c3(:,i);
end
```

## ANEXO II – MODELO CVAR

```
%CÁLCULO DA FRONTEIRA EFICIENTE DO CVAR

asset_classes = {'CZLT11' 'ITUB4' 'BVMF3' 'GGBR4'};
covariancia=cov(rentabilidade);
media=mean(rentabilidade);

media_c1=mean(retorno_c1);
media_c2=mean(retorno_c2);
media_c3=mean(retorno_c3);

%CÁLCULO DA FRONTEIRA EFICIENTE PARA O CENÁRIO 1
%Defini-se previamente matrizA e matrizAeq.
%Na matrizA substitui-se os valores das colunas de 1-4, da linha 35 até 64
%pelos valores dos retornos de cada cenário
vetor_b=zeros(64,1);
for i=35:1:64
    for j=1:1:4
        matrizA(i, j)=-retorno_c1(i-34, j);
    end
end

%Na matrizAeq substitui-se os valores das colunas 1-4, da linha 2 pelos
%valores da média dos retornos
for j=1:1:4
    matrizAeq(2, j)=media_c1(j);
end

i=1; j=1;
retorno=[];
for retorno=0.0:0.00005:0.0012
    [pesos_c1(i,:),cvar_c1(i,:)]=fmincon(@myfun_cvar_c1,zeros(35,1),matrizA,vet
    or_b,matrizAeq,[1;retorno]);
    i=i+1;
end
retorno=0.0:0.00005:0.0012;

%CÁLCULO DA FRONTEIRA EFICIENTE PARA O CENÁRIO 2
retorno=[];
for i=35:1:64
    for j=1:1:4
        matrizA(i, j)=-retorno_c2(i-34, j);
    end
end

for j=1:1:4
    matrizAeq(2, j)=media_c2(j);
end

i=1; j=1;
for retorno=0.0:0.00005:0.0011
    [pesos_c2(i,:),cvar_c2(i,:)]=fmincon(@myfun_cvar_c2,zeros(35,1),matrizA,vet
    or_b,matrizAeq,[1;retorno]);
    i=i+1;
end
retorno=0.0:0.00005:0.0011;
```

```
%CÁLCULO DA FRONTEIRA EFICIENTE PARA O CENÁRIO 3
for i=35:1:64
    for j=1:1:4
        matrizA(i,j)=-retorno_c3(i-34,j);
    end
end

for j=1:1:4
    matrizAeq(2,j)=media_c3(j);
end

i=1; j=1;
for retorno=0.0:0.0001:0.0020
    [pesos_c3(i,:),cvar_c3(i,:)]=fmincon(@myfun_cvar_c1,zeros(35,1),matrizA,vet
or_b,matrizAeq,[1;retorno]);
    i=i+1;
end
retorno=0.0:0.0001:0.0020;
```

## ANEXO III – MODELO PROPOSTO

```

num_ativos=size(retornos,2);

for i=1:4
    limites(:,i)=[0;1];
end

pesos = gridsamp(limites, intervalos);
num_historico = length(retornos);
num_pesos=length(pesos);

%Cálculo dos retornos da carteira
for i=1:num_pesos
    for j=1:length(retornos)
        retorno_carteira(j,i)=retornos(j,:)*pesos(i,:)';
    end
end

matriz_var=prctile(retorno_carteira,90);
alfa = norminv(0.90,0,1);

%CALCULO DO CVAR
for i=1:num_pesos
    matriz_aux(:,i)=retorno_carteira(:,i)-matriz_var(1,i);
end

for i=1:num_pesos
    k=0;
    soma=0;
    for j=1:length(retornos)
        if matriz_aux(j,i)>0
            soma=soma+matriz_aux(j,i);
            k=k+1;
        end
    end
    if k>0
        cvar(1,i)=soma/k;
    else
        cvar(1,i)=0;
    end
end

for i=1:num_pesos
    cvar(1,i)=matriz_var(1,i)+cvar(1,i); %*(1/(1-0.9));
end

##### AJUSTE DACE #####
theta=1;
[dmodel,perf]=dacefit(pesos,cvar',@regpoly1,@corrgauss,theta)

```