

CAUÊ GLORIGIANO RIBEIRO

**Análise e Seleção de Portfólios de Investimentos Financeiros:
Testes empíricos entre os modelos de Markowitz e Black-Litterman**

Monografia apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Especialista-
MBA Latu-Sensu

Área de Concentração:
Engenharia Financeira

Orientador: Professor Titular Oswaldo
Luiz do Valle Costa

São Paulo

2016

MBA/EF
2016
R.355a

[2008893]



Escola Politécnica - EPEL



31500009777

m2016I

Ribeiro, Cauê Glorigiano

Análise e Seleção de Portfólios de Investimentos Financeiros: Testes empíricos entre os modelos de Markowitz e Black-Litterman / Cauê Glorigiano Ribeiro. São Paulo, 2016.

Monografia (Especialista-MBA Latu-Sensu) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

1) Ações (Finanças) 2) Alocação de Ativos 3) Investidores (Finanças) 4) Black-Litterman 5) Otimização 6) Carteiras de Investimentos 7) Administração Financeira 8) Matemática Financeira 9) Investimentos 10) Títulos (Finanças) 11) Risco (Economia). I) Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Programa de Educação Continuada da Escola Politécnica

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos Professores, Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa, Dr. Roberto Moura Sales e Me. Danilo Zucolli Figueiredo, pela orientação na construção desta monografia. E aos meus familiares, pelo apoio constante em minhas atividades acadêmicas.

“Uma operação de investimento é aquela que, por meio da análise, promete segurança para o principal e um retorno adequado. As operações que não vão ao encontro destas exigências são especulativas.”

(Benjamin Graham)

RESUMO

Historicamente os agentes participantes do mercado financeiro global buscam pelo aperfeiçoamento contínuo de modelos e metodologias para análise e seleção de ativos financeiros. Neste intuito, este trabalho apresenta de forma analítica a estrutura de dois modelos que tratam deste tema: o modelo de Markowitz que estabelece a base da moderna “teoria de carteiras” [MARKOWITZ, 1952], e do modelo de Black-Litterman [BLACK-LITTERMAN, 1992] que surge como alternativa ao tradicional método da média-variância. Desta forma, os modelos foram aplicados em ativos negociados no mercado financeiro nacional (BM&FBovespa), sendo duas carteiras de renda variável compostas separadamente de ações do setor de serviços financeiros e de cotas de fundos de investimentos imobiliários. Após as aplicações, confrontou-se os resultados da distribuição de pesos dos portfólios sugeridos pelos modelos e também se analisou a performance destes portfólios utilizando o Índice de Sharpe e de retorno acumulado no período de testes. Como resultado final, percebe-se que o modelo de Black-Litterman baseado nas opiniões dos analistas e investidores do mercado financeiro obteve desempenho superior, principalmente nos ativos referente ao setor de serviços financeiros, em relação ao modelo de Markowitz.

Palavras-chave: Ativos Financeiros. Black-Litterman. Carteiras. Markowitz. Média-Variância. Otimização. Portfólios.

ABSTRACT

Historically the participants of the global financial market participants seek the continuous improvement of models and methodologies for the analysis and selection of financial assets. This paper presents analytically the structure of two models that address this issue: the Markowitz model laying the foundation of modern "portfolio theory" [Markowitz, 1952], and the Black-Litterman model [BLACK-Litterman 1992] which is an alternative to the traditional method of mean-variance. The models were applied in assets traded in the domestic financial market (BM&FBovespa), two equity portfolios composed separately from the financial services sector stocks and real estate investment fund quotas. After the applications, confronted the results of the weight distribution of portfolios suggested by models and also analyzed the performance of these portfolios using the Sharpe ratio and cumulative return in the test period. As a final result, we can see that the model of Black-Litterman based on the opinions of analysts and investors in the financial markets achieved superior performance, especially in assets related to the financial services industry, for the Markowitz model.

Keywords: Financial Assets. Black-Litterman. Portfolio. Markowitz. Mean-Variance. Optimization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – A redução do risco pela diversificação de n ativos.....	19
Figura 1.2 – Conjunto de combinações de portfólios para ρ diferentes.	22
Figura 1.3 – Fronteira Eficiente e Carteira de Mínima Variância Global.....	25
Figura 1.4 – Fronteira Eficiente Geral.....	28
Figura 1.5 – Reta do Mercado de Capitais e prêmio de risco.....	31
Figura 1.6 – Reta de Títulos do Mercado.....	32
Figura 2.1 – Fluxo da Modelagem de Black-Litterman.....	48
Figura 3.1 – Reta Tangente e Fronteira Eficiente da Carteira de Ações.	55
Figura 3.2 – Reta Tangente e Fronteira Eficiente da Carteira de FII.....	58
Figura 4.1 – Composição de ω por portfólio recomendado.	78
Figura 4.2 – Plano Risco-Retorno simulado dos portfólios sugeridos.	81
Figura 4.3 – Simulação de retorno acumulado (B-L vs Benchmarks) – nova amostra.....	82
Figura 4.4 – Simulação de retorno acumulado (B-L vs Markowitz) – nova amostra.	83
Figura 4.5 – Retorno acumulado da Carteira de Ações na nova amostra histórica.....	83
Figura 4.6 – Composição de ω por portfólio sugerido.	85
Figura 4.7 – Plano Risco-Retorno simulado dos portfólios sugeridos.	87
Figura 4.8 – Simulação de retorno acumulado (B-L vs Benchmarks) – nova amostra.....	88
Figura 4.9 – Simulação de retorno acumulado (B-L vs Markowitz) – nova amostra.	88
Figura 4.10 – Retorno acumulado da Carteira de FII na nova amostra histórica.....	89

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Classificação de modelos e autores.	35
Tabela 3.1 – Carteira de Ações.	51
Tabela 3.2 – Carteira de Fundos de Investimentos Imobiliários (FII).	52
Tabela 3.3 – Vetores de Risco-Retorno da Carteira de Ações - histórico.	53
Tabela 3.4 – Variáveis do modelo de Markowitz – “Gregas”.	53
Tabela 3.5 – Vetores para solução do modelo de Markowitz.	53
Tabela 3.6 – Pesos ótimos (otimização por Média-Variância) da Carteira de Ações.	54
Tabela 3.7 – Pesos ótimos (Mínima-Variância Global) da Carteira de Ações.	54
Tabela 3.8 – Pesos ótimos (Tangente) da Carteira de Ações.	55
Tabela 3.9 – Vetores de Risco-Retorno histórico da Carteira de FII – histórico.	56
Tabela 3.10 – Vetores para solução do modelo de Markowitz.	56
Tabela 3.11 – Variáveis do modelo de Markowitz – “Gregas”.	57
Tabela 3.12 – Pesos ótimos (otimização por Média-Variância) da Carteira de FII.	57
Tabela 3.13 – Pesos ótimos (Mínima-Variância Global) da Carteira de FII.	57
Tabela 3.14 – Pesos ótimos (Tangente) da carteira de FII.	58
Tabela 3.15 – Pesos da Capitalização de Mercado da Carteira de Ações.	59
Tabela 3.16 – Risco-Retorno dos benchmarks e da taxa livre de risco.	60
Tabela 3.17 – Coeficientes de aversão ao risco.	60
Tabela 3.18 – Vetores de Retorno Implícito do Equilíbrio de Mercado.	60
Tabela 3.19 – Projeções de analistas de mercado para a Carteira de Ações.	61
Tabela 3.20 – Matriz P para 9 visões.	62
Tabela 3.21 – Vetor Q para 9 visões.	62
Tabela 3.22 – Matriz diagonal Ω para 9 visões.	63
Tabela 3.23 – Vetores de retornos esperados da distribuição <i>a posteriori</i> para 9 visões.	63
Tabela 3.24 – Matriz de covariância da distribuição <i>a posteriori</i> para 9 visões.	64
Tabela 3.25 – Nova matriz de covariância da distribuição <i>a posteriori</i> para 9 visões.	64
Tabela 3.26 – Pesos ótimos de Black-Litterman da Carteira de Ações para 9 visões.	65
Tabela 3.27 – Matriz P para 3 visões.	65
Tabela 3.28 – Vetor Q para 3 visões.	65
Tabela 3.29 – Matriz diagonal Ω para 3 visões.	66
Tabela 3.30 – Vetores de retornos esperados da distribuição <i>a posteriori</i> para 3 visões.	66
Tabela 3.31 – Matriz de covariância da distribuição <i>a posteriori</i> para 3 visões.	66
Tabela 3.32 – Nova matriz de covariância da distribuição <i>a posteriori</i> para 3 visões.	67
Tabela 3.33 – Pesos ótimos de Black-Litterman da Carteira de Ações para 3 visões.	67
Tabela 3.34 – Matriz P para 2 visões.	67
Tabela 3.35 – Vetor Q para 2 visões.	68
Tabela 3.36 – Matriz diagonal Ω para 2 visões.	68
Tabela 3.37 – Vetores de retornos esperados da distribuição <i>a posteriori</i> para 2 visões.	68
Tabela 3.38 – Matriz de covariância da distribuição <i>a posteriori</i> para 2 visões.	69
Tabela 3.39 – Nova matriz de covariância da distribuição <i>a posteriori</i> para 2 visões.	69
Tabela 3.40 – Pesos ótimos de Black-Litterman da Carteira de Ações para 2 visões.	69
Tabela 3.41 – Pesos da Capitalização de Mercado da Carteira de FII.	70
Tabela 3.42 – Risco-Retorno do benchmark e da taxa livre de risco.	70
Tabela 3.43 – Coeficiente de aversão ao risco.	71
Tabela 3.44 – Projeções de analistas de mercado para a Carteira de FII.	71
Tabela 3.45 – Matriz P para 10 visões.	72
Tabela 3.46 – Vetor Q para 10 visões.	72
Tabela 3.47 – Matriz diagonal Ω para 10 visões.	72
Tabela 3.48 – Vetor de retorno esperado da distribuição <i>a posteriori</i> para 10 visões.	73
Tabela 3.49 – Matriz de covariância da distribuição <i>a posteriori</i> para 10 visões.	73
Tabela 3.50 – Nova matriz de covariância da distribuição <i>a posteriori</i> para 10 visões.	73
Tabela 3.51 – Pesos ótimos de Black-Litterman da Carteira de FII para 10 visões.	74
Tabela 3.52 – Matriz P para 5 visões.	74
Tabela 3.53 – Vetor Q para 5 visões.	74
Tabela 3.54 – Matriz diagonal Ω para 5 visões.	75
Tabela 3.55 – Vetor de retorno esperados da distribuição <i>a posteriori</i> para 5 visões.	75

Tabela 3.56 – Matriz de covariância da distribuição <i>a posteriori</i> para 5 visões.....	75
Tabela 3.57 – Nova matriz de covariância da distribuição <i>a posteriori</i> para 5 visões.....	76
Tabela 3.58 – Pesos ótimos de Black-Litterman da Carteira de FII para 5 visões.	76
Tabela 4.1 – Resumo dos portfólios recomendados para a Carteira de Ações.....	77
Tabela 4.2 – Risco-Retorno das ações com dados da nova amostra histórica.....	80
Tabela 4.3 – Risco-Retorno dos portfólios com dados da nova amostra histórica.....	80
Tabela 4.4 – Ranking de Índice de Sharpe para os portfólios sugeridos.....	82
Tabela 4.5 – Estatística de retorno dos portfólios sugeridos.	84
Tabela 4.6 – Resumo dos portfólios recomendados para a Carteira de FII.	85
Tabela 4.7 – Risco-Retorno dos FII com dados da nova amostra histórica.	86
Tabela 4.8 – Risco-Retorno dos portfólios com dados da nova amostra histórica.....	86
Tabela 4.9 – Ranking de Índice de Sharpe para os portfólios sugeridos.....	87
Tabela 4.10 – Estatística de retorno dos portfólios sugeridos.	90

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	12
1. Revisão Bibliográfica.....	14
1.1. Teoria da Média-Variância.....	14
1.1.1. Risco e Retorno.....	14
1.1.2. O Modelo de Média-Variância	16
1.1.3. Combinações de Carteiras	19
1.2. O Modelo de Markowitz.....	23
1.2.1. Carteira com Ativos de Risco.....	24
1.2.2. Carteira de Mínima Variância Global e Fronteira Eficiente	25
1.2.3. Carteira com Ativos de Risco e 1 Ativo Livre de Risco	26
1.2.4. Problemas e desvantagens encontrados no modelo Markowitz	28
1.3. Modelo de Precificação – Capital Asset Pricing Model (CAPM)	29
2. O Modelo de Black-Litterman.....	33
2.1. O Modelo	33
2.2. Estrutura.....	36
2.3. O Parâmetro τ : A medida de incerteza das estimativas	39
2.4. As matrizes P e Q: especificações das opiniões (visões de curto prazo)	40
2.5. A matriz Ω : covariância das opiniões	42
2.6. Teoria Bayesiana aplicada ao modelo de Black-Litterman.....	43
2.7. Equação completa do modelo de Black-Litterman.....	44
2.8. Vantagens do modelo de Black-Litterman.	48
3. Aplicações dos Modelos.....	50
3.1. Informações preliminares e base de dados.....	50
3.2. Portfólio de Renda Variável.....	51
3.2.1. Carteira de Ações – Serviços Financeiros, Seguros e Bancários	51
3.2.2. Carteira de Fundos de Investimentos Imobiliários (FII).....	51
3.3. Aplicação empírica do modelo de Markowitz	52
3.4. Aplicação empírica do modelo de Black-Litterman	59
4. Comparação de Resultados e Análise de Desempenho	77
5. Conclusões Finais.....	91
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	92
APÊNDICE A – Demonstrações Matemáticas.....	94

INTRODUÇÃO

A teoria moderna de análise e seleção de carteiras de investimentos financeiros desenvolvida por Harry Markowitz [MARKOWITZ, 1952], convencionou os dois objetivos fundamentais de qualquer tipo de investimento: a maximização do retorno esperado para um dado nível de risco ou a minimização do risco para um dado nível de retorno esperado. Neste sentido, a criação de uma carteira ou portfólio se dará através do processo de otimização dos ativos selecionados, formando a fronteira eficiente de característica hiperbólica, demonstrando as melhores combinações possíveis de carteiras.

No entanto, estudos anteriores sugerem que o processo de otimização gera um problema em especial, pois, demonstra ser parcial em relação aos ativos que apresentam covariâncias extremas. Ou seja, o otimizador tende a selecionar os ativos com características mais atraentes, por exemplo, alta rentabilidade e baixo risco, e vender o descoberto ou desfavorecer aqueles com características opostas. O fator determinante para este tipo de problema está na sensibilidade dos resultados aos erros de estimação dos *inputs* do modelo, que se trata, do parâmetro das covariâncias e principalmente aos valores dos retornos esperados dos ativos. Ainda que algumas premissas do modelo possam ser questionadas, tais como a simetria de informação entre investidores e a constância das correlações ao longo do horizonte de investimentos, o erro de estimação implícito é um tipo de problema que leva a frequente obtenção de soluções de canto, isto é, resultados que apresentam um baixo grau de diversificação, contrariando justamente o conceito que o modelo ajudou a definir. Para tentar controlar a sensibilidade das carteiras resultantes, os investidores ou gestores adicionam restrições ao modelo com o intuito de demonstrar portfólios coerentes com as suas visões. Entretanto, a utilização em excesso de restrições artificiais levam as carteiras otimizadas a simplesmente refletir as expectativas pré-determinadas, diluindo as vantagens do processo de otimização, que em algumas vezes não são economicamente intuitivas.

Dito isto, o modelo proposto por Black-Litterman [BLACK-LITTERMAN, 1992] tem como objetivo sanar tais problemas, utilizando uma abordagem Bayesiana para combinar fontes de informação. Neste intuito, os retornos de equilíbrio oriundos do CAPM ou da Capitalização de Mercado dos ativos, será o centro de gravidade, e o modelo

pressupõe que existam duas fontes de informação sobre os retornos futuros: as expectativas ou opiniões dos investidores, analistas ou gestores, e o equilíbrio do mercado. Desta maneira, o conhecimento do investidor é combinado com os dados observados para fornecer a distribuição dos retornos esperados.

Nesta monografia, tem-se a intenção de apresentar a metodologia do modelo de Black-Litterman, demonstrando sua aplicabilidade com dados observados no mercado de capitais brasileiro e no ensejo, contrapor os resultados de B-L com os resultados do modelo de Markowitz.

No Capítulo 1, faremos uma revisão bibliográfica da moderna teoria de carteiras, começando pela alocação ótima conforme a aproximação base de Média-Variância, modelo de Markowitz e precificação do CAPM. O Capítulo 2 abordará os fundamentos teóricos do modelo de Black-Litterman, bem como sua estrutura metodológica. Nos Capítulos 3 e 4 realizaremos as aplicações, dividindo basicamente em duas partes: a primeira refere-se ao modelo de Markowitz e a segunda ao modelo de Black-Litterman; em seguida compararemos os dois resultados demonstrando qual obteve melhor desempenho, encerrando com as considerações acerca das ferramentas utilizadas, seus pontos positivos e negativos. Por fim no Capítulo 5, efetuaremos a conclusão geral desta monografia. No Apêndice, poderão ser encontradas algumas demonstrações mais extensas com a finalidade de facilitar o entendimento do leitor com relação aos cálculos efetuados no desenvolvimento deste estudo.

1. Revisão Bibliográfica

1.1. Teoria da Média-Variância

O binômio Risco-Retorno é, com certo grau de certeza, o tema que causa mais debates entre os agentes econômicos, sejam acadêmicos ou profissionais, no mundo dos investimentos. Desde a técnica de alocação de ativos, bem como a arte do *valuation*¹, perguntas do tipo: Como o risco é medido? Como é recompensado (seu retorno)? E quanto (nível) de risco pode-se assumir? São fundamentais em qualquer tipo de decisão econômico-financeira. Para tornar estas importantes incógnitas mensuráveis, é necessário de alguma forma quantificar o que seria risco e retorno de determinado ativo. A abordagem mais comum, e que adotaremos nesta monografia, incide em duas dimensões:

- (i) O retorno de um determinado ativo, que compreende a recompensa, é considerado como uma variável aleatória;
- (ii) Associar a medida de risco ao desvio-padrão dessa variável aleatória, e a rentabilidade ao seu valor esperado.

A partir destas considerações, apresentaremos a metodologia de cálculo destas variáveis baseado nos Capítulos 1, 2 e 3 do livro “Análise de Risco e Retorno em Investimentos Financeiros” [ASSUNÇÃO-COSTA, 2005], que se fazem necessários na moderna teoria por Média-Variância para a seleção ótima de ativos e composição de um portfólio.

1.1.1. Risco e Retorno

Definimos que a taxa de retorno R_i ² de um ativo i , que é uma variável aleatória, é denotada por:

¹ É o termo em inglês para “Avaliação de Empresas” ou “Valoração de Empresas”. Esta área de finanças estuda o processo de se avaliar o valor de determinado ativo, seja financeiro ou real.

² Para valores pequenos de $S_i(1) - S_i(0)$, a taxa de retorno pode ser aproximadamente calculada como $R_i = \ln[S_i(1)/S_i(0)]$.

$$R_i = \frac{S_i(1) - S_i(0)}{S_i(0)} \quad (1.1)$$

Em que, $S_i(0)$ e $S_i(1)$ é o valor de um ativo i no instante 0 e 1. O retorno esperado de R_i será escrito por r_i , sendo:

$$E[R_i] = r_i \quad (1.2)$$

E o risco do ativo R_i será representado pelo desvio-padrão σ_i , ou seja:

$$\sigma_i = \sqrt{E[(R_i - r_i)^2]} \quad (1.3)$$

A covariância $cov(R_i, R_j)$, $i \neq j$ entre os ativos R_i e R_j é denotada por:

$$cov(R_i, R_j) = E[(R_i - r_i)(R_j - r_j)] \quad (1.4)$$

Estimando as variáveis definidas nas equações (1.2), (1.3) e (1.4) com base em alguma série histórica de valores dos ativos, por exemplo, R_1 e R_2 , tem se que:

$$\hat{r}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_i(t) \quad , \text{sendo } i = 1 \text{ e } 2 \quad (1.5)$$

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_i(t) - \hat{r}_i)^2} \quad , \text{sendo } i = 1 \text{ e } 2 \quad (1.6)$$

$$\widehat{cov}(R_1, R_2) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T [(R_1(t) - \hat{r}_1)(R_2(t) - \hat{r}_2)] \quad (1.7)$$

1.1.2. O Modelo de Média-Variância

Nesta seção definiremos as medidas de Risco-Retorno para n ativos financeiros, sem restrições às posições a descoberto, ou seja, admitiremos posições vendidas em que, o agente econômico toma um ativo $S_i(0)$ emprestado no mercado e o vende instantaneamente, transformando em recursos financeiros para investimento em outro ativo financeiro qualquer.

No mercado há n ativos com valores $S_1(0), \dots, S_n(0)$, ainda, suponha que o investidor tenha um valor $V(0)$ disponível para investimento. Considere que $H_1, \dots, H_n$ representam as quantidades de cada um dos ativos i que pode se ter no portfólio. Então podemos denotar por ω_i o peso ou proporção total investido no ativo i .

$$\omega_i = \frac{H_i S_i(0)}{V(0)} \quad , \text{ onde } \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \quad (1.8)$$

Agora consideremos P como a taxa de retorno de um portfólio ao final de um período, e R_i , como o retorno de um ativo i . A taxa de retorno deste portfólio ao final de um período pode ser escrita como:

$$\omega_1 R_1 + \dots + \omega_n R_n = \omega' R = P \quad (1.9)$$

Em que os vetores ($n \times 1$):

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

No ensejo, definimos o vetor ($n \times 1$):

$$r_i = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} = E[R] = \begin{bmatrix} E[R_1] \\ \vdots \\ E[R_n] \end{bmatrix}$$

E também o vetor auxiliar ($n \times 1$):

$$e = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de Covariância é dada por:

$$\Sigma = cov(R) = E \left[(R_i - r_i)(R_j - r_j)' \right] , i \neq j \quad (1.10)$$

A média do retorno do portfólio P é dada por:

$$\mu = E[P] = E[\omega' R] = \omega' E[R] = \omega' r = \omega_1 r_1 + \dots + \omega_n r_n \quad (1.11)$$

E a variância de P, por:

$$\sigma^2 = \omega' \Sigma \omega \quad (1.12)$$

Em suma, temos que:

$$\begin{aligned} P &= \omega' R \\ \mu &= \omega' r \\ \sigma^2 &= \omega' \Sigma \omega \\ 1 &= \omega' e \end{aligned}$$

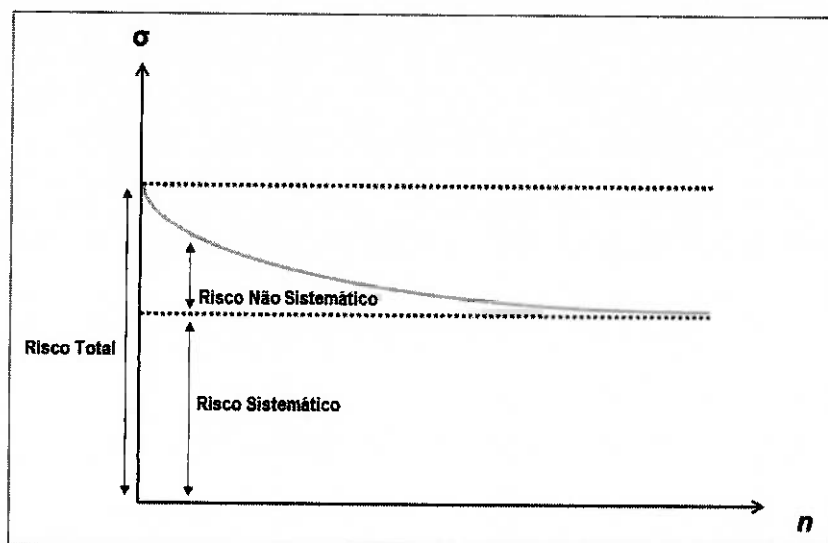
A partir de (1.12), é possível verificar que, quanto menor a correlação entre os retornos dos ativos que compõem a carteira, menor será o risco do investimento. Este fenômeno é conhecido como processo de diversificação. No caso de um conjunto de n ativos cujos retornos $R_1, \dots, R_n$ sejam descorrelacionados, todos com valor esperado r_1 e variância σ_1^2 , ao se aplicar o mesmo montante de recursos $\left(\frac{1}{n}\right)$ nos ativos considerados, temos:

$$\mu = \omega' r = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} r_1 = r_1$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) (\sigma_1^2) \begin{bmatrix} 1 \\ n \\ \vdots \\ 1 \\ n \end{bmatrix} = n \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_1^2 = \frac{1}{n} \sigma_1^2$$

Desta forma, verifica-se que, à medida que n se eleva a variância diminui. Vale lembrar que o risco de um portfólio de ativos tem dois componentes. O primeiro tem origem sistêmica, surgindo a partir de acontecimentos que impactam todos ativos do mercado, por exemplo, eventos econômicos e políticos. O segundo está associado a características intrínsecas ao ativo referenciado, ou seja, não sistêmico. Então, o processo de diversificação age na parte que se refere ao risco não sistêmico também chamado de diversificável, pois, estruturas de carteiras com baixo grau de correlação reduzem este tipo de risco. A figura 1.1, demonstra este feito.

Figura 1.1 – A redução do risco pela diversificação de n ativos.



Fonte: SHARPE (1995).

1.1.3. Combinações de Carteiras

Ao se ampliar as possíveis combinações dos pesos de dois ativos em uma carteira, podem ser obtidos os resultados relativos a cada composição, ou seja, o risco da carteira em relação ao retorno da mesma. Nesta seção, definiremos as equações para medir esta relação, tanto para carteiras construídas somente com ativos de risco quanto para carteiras que contém ativos livre de risco.

1) 2 Ativos de Risco:

Suponha que no mercado existam dois ativos de risco R_1 e R_2 , com retornos esperados r_1 e r_2 , variâncias σ_1^2 e σ_2^2 e coeficiente de correlação ρ_{12} . Seja montada uma carteira com retorno P composta por tais ativos nas proporções (ω_1) e $(1 - \omega_1)$. Então:

$$P = (\omega_1 R_1) + [(1 - \omega_1) R_2] \quad (1.13)$$

$$\mu = (\omega_1 r_1) + [(1 - \omega_1) r_2] \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= [\omega_1 \quad 1 - \omega_1] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ 1 - \omega_1 \end{bmatrix} \\
&= \omega_1^2\sigma_1^2 + 2\omega_1(1 - \omega_1)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + (1 - \omega_1)^2\sigma_2^2
\end{aligned}
\tag{1.15}$$

Desta forma, obtemos as seguintes situações:

a) Correlação Positiva Perfeita ($\rho_{12} = 1$):

No caso dos retornos dos ativos R_1 e R_2 tenham comportamento idêntico, ρ_{12} será igual a +1 e a formação desta carteira não implicará em redução do risco, ou seja, risco e retorno serão sempre linearmente proporcionais. Efetuando algumas manipulações algébricas em (1.15) e (1.14), temos que:

$$\sigma^2 = (\omega_1\sigma_1 + (1 - \omega_1)\sigma_2)^2 \Rightarrow \sigma = |\omega_1\sigma_1 + (1 - \omega_1)\sigma_2| = |\sigma_2 + \omega_1(\sigma_1 - \sigma_2)|$$

Considerando $\sigma_1 \neq \sigma_2$, escrevemos:

$$\omega_1 = \frac{\sigma - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \tag{1.16}$$

$$\mu = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \right) \sigma + \left(\frac{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2} \right) \tag{1.17}$$

b) Correlação Negativa Perfeita ($\rho_{12} = -1$):

Por outro lado, se os retornos dos ativos possuírem comportamento perfeitamente oposto, ρ_{12} será igual a -1. Neste caso, há uma diminuição do risco com a montagem desta carteira, existindo uma combinação entre os ativos que leva a um risco da carteira igual a zero.

Tomando (1.15) novamente, temos:

$$\sigma^2 = (\omega_1\sigma_1 - (1 - \omega_1)\sigma_2)^2 \Rightarrow \sigma = |\omega_1\sigma_1 - (1 - \omega_1)\sigma_2| = |-\sigma_2 + \omega_1(\sigma_1 + \sigma_2)|$$

Em que:

$$\sigma = \begin{cases} -\sigma_2 + \omega_1(\sigma_1 + \sigma_2) & \text{se } \omega_1 \geq \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \\ \sigma_2 - \omega_1(\sigma_1 + \sigma_2) & \text{se } \omega_1 \leq \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \end{cases} \quad (1.18)$$

O risco zero (nulo) é dado como:

$$\omega_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

A partir de (1.14), existem 2 possibilidades:

(i)

$$\omega_1 \leq \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \Rightarrow \omega_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma}{\sigma_1 + \sigma_2} \Rightarrow \mu = \left(\frac{r_2 - r_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \sigma + \left(\frac{\sigma_2 r_1 + \sigma_1 r_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)$$

(ii)

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \leq \omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma}{\sigma_1 + \sigma_2} \Rightarrow \mu = \left(\frac{r_1 - r_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \sigma + \left(\frac{\sigma_2 r_1 + \sigma_1 r_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)$$

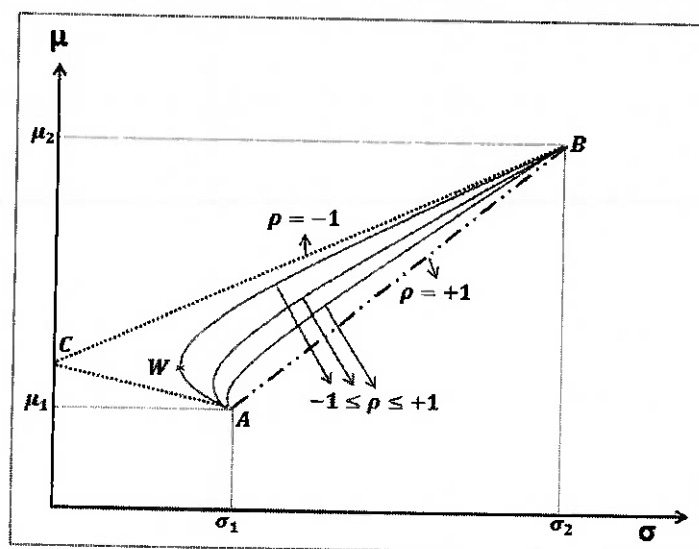
(1.19)

c) Correlação $(-1 \leq \rho_{12} \leq +1)$ ou $(|\rho_{12}| < 1)$:

As situações descritas até o momento baseiam-se em valores extremos para a correlação, sendo bastante difícil verifica-los na realidade. A partir dos retornos dos ativos considerados, e com a correlação deles variando entre -1 e +1, combinando-se diferentes pesos na carteira, a relação risco-retorno é representada por uma hipérbole.

Na figura 1.2 percebermos que à medida que ρ_{12} tende a -1 observa-se a diversificação do risco, e considerando $\rho_{12} = 0$, o ponto W da figura representa a Carteira de Mínima Variância. Além disso, o segmento WB representa a Fronteira Eficiente, ou seja, nesta curva estão representadas as carteiras com maior retorno possível entre todas as carteiras com um determinado nível de risco especificado.

Figura 1.2 – Conjunto de combinações de portfólios para ρ diferentes.



Fonte: SHARPE (1995).

2) 1 Ativo de Risco e 1 Ativo livre de Risco

Avaliando agora uma carteira composta por 2 ativos, sendo 1 de risco e outro livre de risco. Substituindo R_1 por $r_f = \text{risk free}$ em (1.13), logo $\sigma_1 = 0$, o retorno da carteira e o retorno esperado são dados como:

$$P = (\omega_1 r_f) + [(1 - \omega_1) R_2] \quad (1.20)$$

$$\mu = (\omega_1 r_f) + [(1 - \omega_1) r_2] \quad (1.21)$$

A variância desta nova carteira é:

$$\sigma^2 = (1 - \omega_1)^2 \sigma_2^2 \quad (1.22)$$

Assim:

$$\omega_1 = 1 - \frac{\sigma}{\sigma_2} \quad (1.23)$$

1.2. O Modelo de Markowitz

O clássico artigo "*Portfolio Selection*", [MARKOWITZ, 1952] propôs pela primeira vez a abordagem clássica de Média-Variância, posteriormente publicada em livros do mesmo autor em 1959 e 1987. Esta técnica assume que investidores racionais escolhem entre ativos de risco baseados genuinamente no valor esperado e na variância das taxas de retorno no espaço de tempo considerado, sendo essas as duas únicas variáveis de decisão para a seleção dos ativos.

O modelo desenvolve-se como uma ferramenta quantitativa que permite ao investidor alocar os seus recursos entre diferentes ativos financeiros, compondo sua carteira de forma a obter uma solução de compromisso ótima entre retorno e risco.

Markowitz identificou a necessidade de se considerar as características individuais dos ativos no momento de construir um portfólio. Ou seja, os investidores e gestores devem levar em consideração os movimentos representados pela covariância dos ativos. Caso o considerem, o autor afirma que eles poderão construir portfólios que resultam em maior expectativa de retorno para um mesmo nível de risco ou um menor risco para um portfólio com o mesmo retorno esperado, em relação a portfólios que ignoram a covariância dos retornos dos ativos.

Tendo como base essas duas afirmações, Markowitz desenvolveu a que é hoje conhecida como "Teoria Moderna de Carteiras", estabelecendo, entre outros resultados, a fronteira eficiente para as carteiras de investimento.

Desta forma, este modelo é a base para diversos estudos sobre teorias de portfólio. E é desta mesma base que o modelo de Black-Litterman foi desenvolvido e, diante disso, é de suma importância compreender a proposta de Markowitz.

1.2.1. Carteira com Ativos de Risco

De acordo com o modelo, os inputs necessários para criar um portfólio ótimo são: o retorno esperado de cada ativo, a variância de cada ativo e covariâncias entre estes ativos. Então, consideremos novamente a carteira com retorno P composta por n ativos, agora somente de risco, com retornos $R_1, \dots, R_n$, retornos esperados $r_1, \dots, r_n$ e matriz de covariância Σ . Investindo-se uma proporção ω_i no ativo R_i e usando novamente as equações de (1.9) a (1.12), desejamos resolver o seguinte problema de otimização.

Para um dado valor de rentabilidade μ :

$$\begin{aligned} & \min_{\omega} \omega' \Sigma \omega \\ & \text{sujeito a} \\ & \omega' r = \mu \quad ; \quad \omega' e = 1 \quad ; \quad \omega \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{1.24}$$

Primeiramente definem-se as variáveis:

$$\alpha = e' \Sigma^{-1} e \tag{1.25}$$

$$\gamma = r' \Sigma^{-1} r \tag{1.26}$$

$$\psi = e' \Sigma^{-1} r \tag{1.27}$$

$$\delta = \alpha \gamma - \psi^2 \tag{1.28}$$

A solução do problema de otimização é dada por:

$$\omega^* = h\mu + g \tag{1.29}$$

Sendo:

$$h = \frac{\alpha}{\delta} \Sigma^{-1} r - \frac{\psi}{\delta} \Sigma^{-1} e \quad (1.30)$$

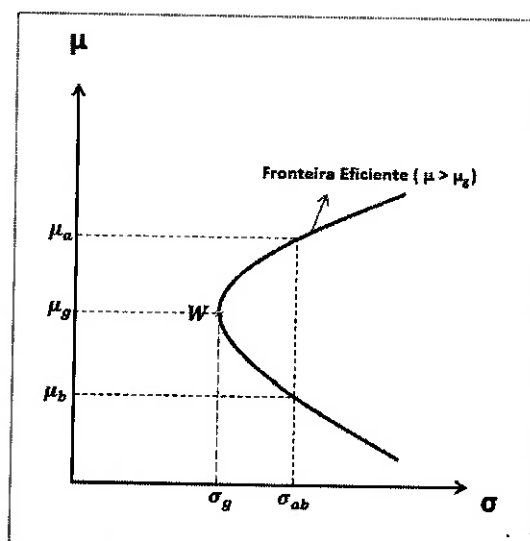
$$g = \frac{\gamma}{\delta} \Sigma^{-1} e - \frac{\psi}{\delta} \Sigma^{-1} r \quad (1.31)$$

Em que ω^* é um vetor ($n \times 1$) e representa a proporção ótima de ativos inseridos na carteira construída pelo modelo de Markowitz.

1.2.2. Carteira de Mínima Variância Global e Fronteira Eficiente

O ponto W destacado na figura 1.3, representa uma carteira de ativos que proporciona o menor risco possível, e é conhecida por Carteira de Mínima Variância Global. Quanto mais uma carteira se distancia deste ponto, maior é o risco e consequentemente maior o retorno. Sendo que por envolver o risco mínimo, é preferencial a todas as demais carteiras que oferecem um retorno esperado menor. De outra forma, diz-se que a carteira W domina todas as demais carteiras que se encontram abaixo dela.

Figura 1.3 – Fronteira Eficiente e Carteira de Mínima Variância Global.



Fonte: MARKOWITZ (1952).

Considere que ω_g é a composição da Carteira de Mínima Variância Global, μ_g seu retorno e σ_g^2 a sua variância. Então:

$$\omega_g = \frac{1}{\alpha} \Sigma^{-1} e \quad (1.32)$$

$$\mu_g = \frac{\psi}{\alpha} \quad (1.33)$$

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{\alpha} \quad (1.34)$$

Vale observar que a análise acima considera que todos os ativos da carteira possuem risco.

1.2.3. Carteira com Ativos de Risco e 1 Ativo Livre de Risco

Anos depois do trabalho de Markowitz, Tobin [TOBIN, 1958 e 1965] estendeu a teoria desenvolvida ao incluir a possibilidade de aplicação em um ativo livre de risco, denotado por r_f . Tal ativo, por definição, tem um retorno esperado que será sempre igual ao retorno efetivo, ou seja, não há variância no retorno.

Neste momento, desejamos resolver o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \min_{\omega} \omega' \Sigma \omega \\ & \text{sujeito a} \\ & \omega' r + (1 - \omega' e) r_f = \mu \\ & \omega \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (1.35)$$

A solução do problema é dada por:

$$\omega = \frac{(\mu - r_f)}{(r - r_f e)' \Sigma^{-1} (r - r_f e)} \Sigma^{-1} (r - r_f e) \quad (1.36)$$

Em que ω em (1.35) representa a composição de ativos de risco, enquanto $(1 - \omega'e)$ representa a proporção a ser investida no ativo livre de risco. Ao inserir o ativo livre de risco na carteira com ativos de risco, a fronteira eficiente, passa ser uma reta, ao invés de uma hipérbole. Denotaremos por ω_T a composição da carteira Tangente que correspondem a uma posição em 100% em ativos de risco, sendo μ_T seu retorno e σ_T seu nível de risco.

$$\omega_T = \frac{1}{e'\Sigma^{-1}(r - r_f e)} \Sigma^{-1}(r - r_f e) = \frac{1}{\psi - r_f \alpha} \Sigma^{-1}(r - r_f e) \quad (1.37)$$

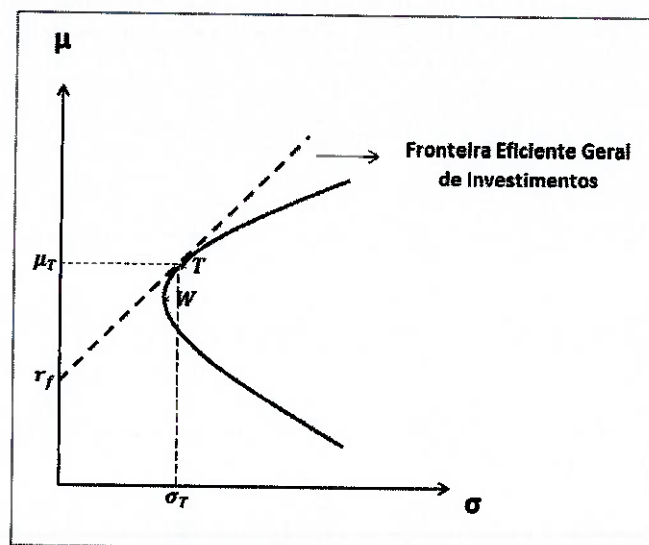
$$\mu_T = \frac{r'\Sigma^{-1}(r - r_f e)}{\psi - r_f \alpha} = \frac{\gamma - r_f \psi}{\psi - r_f \alpha} = r' \omega_T \quad (1.38)$$

$$\sigma_T^2 = \omega_T' \Sigma \omega_T = \frac{(r - r_f e)'\Sigma^{-1}(r - r_f e)}{(\psi - r_f \alpha)^2} \quad (1.39)$$

Na figura 1.4 é possível representar através do ponto T, a composição da carteira que tangencia a fronteira composta com ativos de risco. Na mesma figura, a reta que também tangencia a hipérbole, é dada pela equação a seguir:

$$\mu = \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_T}\right) r_f + \frac{\sigma}{\sigma_T} \mu_T = r_f + \frac{\sigma}{\sigma_T} (\mu_T - r_f) \quad (1.40)$$

Figura 1.4 – Fronteira Eficiente Geral.



Fonte: COSTA (2005)

1.2.4. Problemas e desvantagens encontrados no modelo Markowitz

Embora o modelo de Markowitz possa ser muito empregado no ambiente acadêmico, não se pode dizer o mesmo quanto a sua implementação prática ou profissional. Esta afirmação é justificada devido ao surgimento de alguns problemas e desvantagens que ocorrem durante o processo de execução do modelo.

Michaud [MICAUD, 1989] em seu artigo "*The Markowitz optimization Enigma: Is 'Optimized' Optimal?*", ponderou as desvantagens do modelo, e dentre estas, destacam-se:

(i) O modelo maximiza os erros de estimação dos parâmetros de entrada, já que as médias amostrais são obtidas a partir de dados históricos e se substitui o valor esperado pela média amostral. Michaud afirmou que este procedimento não é recomendável e que contribui em grande parte para a maximização de erros;

(ii) Outro ponto importante apontado por Michaud se refere à instabilidade do modelo de M-V. Ou seja, pequenas alterações nos dados de entrada podem alterar substancialmente a composição do portfólio ótimo, como por exemplo, uma modificação no retorno esperado de um ativo pode gerar um portfólio totalmente diferente. E de acordo com o autor, esta desvantagem pode estar relacionada com o caso de a matriz de covariância ser estimada erroneamente;

(iii) O modelo não leva em conta a questão da capitalização do mercado. Isto significa que se os ativos com baixa capitalização têm alto retorno esperado e está negativamente correlacionado com outros ativos da carteira, o modelo pode sugerir um alto peso neles. Isto é normalmente um problema, especialmente quando inserimos uma restrição às posições vendidas. O modelo então costuma sugerir alta concentração em ativos com baixa capitalização;

(iv) Por último, o principal problema encontrado ao se utilizar a modelagem de Markowitz, encontra-se no fato de que o otimizador quase sempre recomenda carteiras com posições vendidas (com altos pesos), para o caso em que não são impostas restrições deste tipo. E é justamente por este motivo que a restrição de posição vendida é imposta ao modelo, porém, após a otimização o modelo gera soluções com peso zero em muitos ativos, concentrando grandes posições em outros, contrariando precisamente o objetivo principal da modelagem, que é a diversificação de ativos em uma carteira.

Em suma, Michaud alega que, muitas vezes o modelo leva a portfólios ótimos irrelevantes e alguns estudos mostram que, mesmo utilizando-se pesos iguais nos ativos, o resultado pode ser superior a otimização de portfólio de Markowitz.

1.3. Modelo de Precificação – Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Um dos feitos mais relevantes do desenvolvimento recente da teoria moderna de finanças e risco, é o conhecido modelo de precificação de ativos, denominado por "*Capital Asset Pricing Model*" (CAPM)³. É um modelo derivado da teoria do portfólio e busca, mais efetivamente, uma resposta de como devem ser relacionados e mensurados os componentes básicos da arte de avaliação de ativos, risco e retorno. Desta maneira, é uma ferramenta essencial para o apreçamento de ativos pelo mercado em equilíbrio e dentro de um contexto de otimização por média-variância.

Como todo modelo financeiro, são definidas algumas hipóteses para seu desenvolvimento, dentre as mais importantes, temos que:

³ O desenvolvimento da teoria a ser exposta nesta seção é atribuído a diversos autores. No entanto, é necessário citar os primeiros e relevantes trabalhos publicados por: SHARPE (1964); MARKOWITZ (1959); LINTER (1965); e MOSSIN (1966).

- (i) Assume-se grande eficiência informativa do mercado, atingindo igualmente todos os investidores;
- (ii) Os ativos assumem o comportamento de uma distribuição normal;
- (iii) Os investidores, de maneira geral, são avessos ao risco. As decisões de investimentos são tomadas com base na otimização por média-variância;
- (iv) Não há impostos, taxas ou qualquer outro tipo de custo de transação; e
- (v) Existe uma taxa de juros de mercado definida como livre de risco.

No equilíbrio, a carteira de mercado, aqui definido como ω_M , deverá coincidir com a carteira tangente comum aos investidores que otimizam seus recursos por média-variância. Então, escrevemos as definições das equações (1.37), (1.38) e (1.39) como ω_M , μ_M e σ_M^2 respectivamente. Como se pressupõem que todos os investidores no universo CAPM possuam as mesmas informações e detenham a mesma carteira, esta tem que incluir todos os ativos negociados, proporcionalmente aos seus valores de mercado.

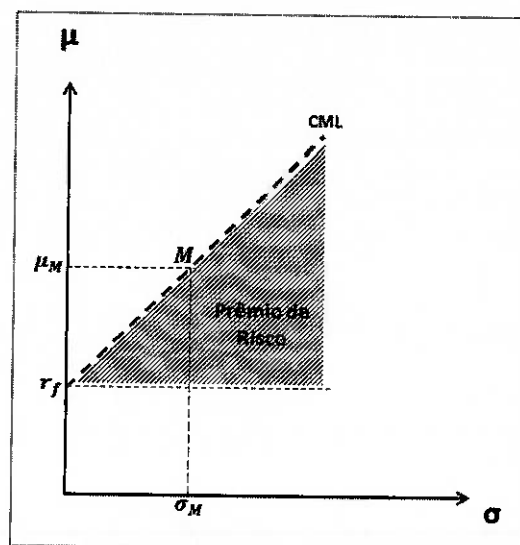
Utilizando a figura 1.5 como referência, percebe-se que todas as carteiras otimizadas estão em linha reta, que se origina do ativo livre de risco. Esta é a chamada linha ou reta do mercado de capitais – CML “*Capital Market Line*” e descreve a relação entre risco e retorno para carteiras que contém somente o risco sistemático.

Observe que à medida que o risco aumenta a rentabilidade também aumenta de forma linear tendo em vista que a equação da reta é dada por:

$$\mu = r_f + \frac{(\mu_M - r_f)}{\sigma_M} \sigma \quad (1.41)$$

Onde a intersecção da reta é a taxa livre de risco e sua inclinação por unidade de risco, seu coeficiente angular $b = \frac{(\mu_M - r_f)}{\sigma_M}$ indica o prêmio pelo risco de mercado. Então a taxa de retorno requerida de uma carteira é, portanto, igual à remuneração sem risco, mais um prêmio de risco ponderado pelo desvio-padrão desta carteira.

Figura 1.5 – Reta do Mercado de Capitais e prêmio de risco.



Fonte: ASSAF (2012)

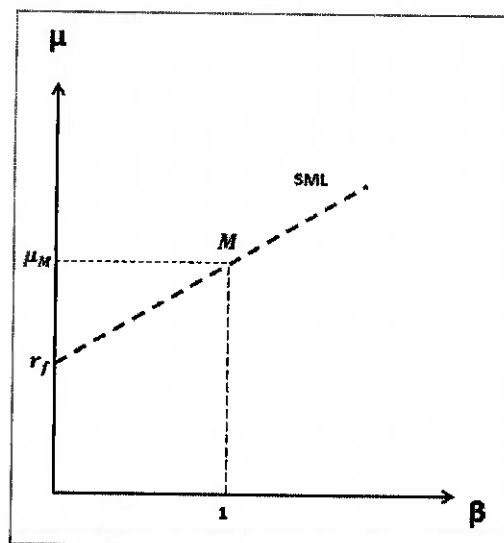
Em um mundo em que os investidores detêm apenas dois ativos – uma combinação de ativos livres de risco e a carteira de mercado – o risco de qualquer ativo individual será medido relativamente à carteira de mercado. O modelo CAPM exprime o risco sistemático de um ativo pelo seu coeficiente Beta, denotado por β , conforme:

$$\beta = \frac{cov(P_M, P)}{\sigma_M^2} \quad (1.42)$$

O Beta da carteira de mercado é igual a 1, e ativos que são mais arriscados que a média terão Betas maiores do que 1, e ativos mais seguros do que a média terão Betas menores do que 1. Sendo que o ativo livre de risco tem um Beta igual a 0 (zero). Na avaliação do risco de uma carteira, o Beta é entendido como a média ponderada de cada ativo contido na carteira.

A relação entre Betas e retornos esperados é demonstrada na figura 1.6. Se o CAPM for verdadeiro, todos os ativos devem se posicionar sobre a reta SML “*Security Market Line*” ou Reta de Títulos do Mercado, que fornece o retorno esperado para qualquer Beta dado.

Figura 1.6 – Reta de Títulos do Mercado.



Fonte: COSTA (2005)

Portanto os valores de β ao longo das carteiras eficientes são:

$$\beta = \frac{\sigma}{\sigma_M} \quad (1.43)$$

Em resumo, para qualquer carteira ω com retorno P , retorno esperado μ e variância σ^2 tem-se que a equação do CAPM é:

$$\mu = r_f + (\mu_M - r_f)\beta \quad (1.44)$$

2. O Modelo de Black-Litterman

2.1. O Modelo

O modelo original de Black-Litterman (B-L) foi publicado pela primeira vez por Fischer Black e Robert Litterman em 1990 no artigo *"Asset Allocation: Combining Investor Views With Market Equilibrium"* [BLACK-LITTERMAN, 1990] pelo departamento de Pesquisas e Mercados de Renda Fixa do banco de investimento norte-americano Goldman, Sachs & Company. Posteriormente, em outro artigo, denominado *"Global Portfolio Optimization"* de 1992 [BLACK-LITTERMAN, 1992] os inventores publicam um novo texto, descrevendo uma metodologia mais completa do modelo. Durante estes 26 anos, desde a divulgação dos trabalhos originais, muitos outros autores têm publicado pesquisas com o objetivo de melhorar a técnica de alocação de ativos em portfólios e também solucionar os problemas encontrados na utilização do modelo de Markowitz, ou de Média-Variância tradicional. Neste contexto, surge o modelo de B-L como alternativa para sanar tais problemas.

Para este novo modelo, Fisher e Robert propuseram uma forma de estimar os retornos esperados dos ativos para conseguir um portfólio mais bem comportado, estabelecendo, no entanto, que a carteira de ativos se situasse na fronteira-eficiente. Se esta condição não fosse atendida, seria possível obter um portfólio melhor através da abordagem de média-variância. Este novo enfoque de estimar os retornos esperados, que realmente produz a diferença entre os modelos de B-L, M-V e Markowitz, ou seja, o primeiro parte de uma carteira de mercado em equilíbrio de longo prazo⁴ (CAPM ou Capitalização de Mercado), o segundo gera pesos em uma carteira a partir de um processo de otimização, enquanto o terceiro, devido à complexa relação de retornos esperados e pesos da carteira resultante, geram em grande parte das vezes, carteiras cuja composição não parece fazer sentido.

O modelo de B-L inicia-se de um ponto neutro e intuitivo, em que a carteira de mercado em equilíbrio pode ser representada pelo comportamento de um investidor que reúne o mercado com um todo. Desta forma, retornos neutros significam retornos

⁴ Sobre o conceito de equilíbrio de longo prazo, ver: LITTERMAN, R. *Modern Investment Management – A Equilibrium Approach*. John Wiley and Sons, Inc. 2003.

esperados que levam a demanda de todos os títulos do mercado, no caso em que todos os investidores apresentassem a mesma opinião. Black e Litterman fazem a proposição de que, na ausência de informações adicionais, o portfólio de equilíbrio não pode ser superado, ou seja, mantenha-o na avaliação. Porém, da mesma forma que se pode ter acesso a um equilíbrio de longo prazo, é apropriado que este equilíbrio esteja sujeito a se deteriorar a todo instante, no sentido das hipóteses de eficiência de mercado.

Caso os investidores e gestores concordem com todas as expectativas de retorno dos ativos deste portfólio, ele já estará otimizado. No entanto, estes agentes podem ter suas próprias visões de curto prazo, portanto, podem desejar se afastar do equilíbrio de mercado. Esta é outra importante característica que o modelo B-L agrega: fornece uma maneira clara para que os investidores e gestores expressem suas visões de curto prazo e, mais importante, uma estrutura para combinar de forma consistente a informação de equilíbrio de longo prazo *a priori* com a visão de curto prazo, gerando um conjunto de retornos esperados *a posteriori*, a partir do qual os pesos dos ativos são fornecidos. Ainda, os investidores poderão aplicar um nível de confiança sobre suas visões, que será ponderado pelos retornos esperados do portfólio de equilíbrio.

De acordo com Lee [LEE, 2000], o modelo de Black-Litterman também atenua em grande parte o problema de erro de estimativa na maximização, por espalhar os erros em todo o vetor de retornos esperados.

Na tabela 2.1 a seguir, classificamos brevemente a respeito dos modelos utilizados por diversos outros autores, resumindo os documentos mais importantes que contribuíram para a evolução teórica e prática da modelagem de B-L. A tabela está dividida em 3 partes, sendo classificada pela tipologia de implementação. Ou seja, o tipo Canônico refere-se ao modelo original dos autores com a utilização da teoria bayesiana e do parâmetro τ . O tipo Híbrido trata-se de modelos desenvolvidos sem a abordagem bayesiana, mas, com o emprego do parâmetro τ . E por último, o tipo Alternativo, que não leva em consideração o parâmetro τ ou abordagem bayesiana.

Tabela 2.1 – Classificação de modelos e autores.

Tipo de Modelo	Autores (Ano de Publicação)	Abordagem Bayesiana	Parâmetro τ	Observação
Canônico	Black-Litterman (1991, 1992)	Sim	Sim	Fornecem a descrição do modelo, mas não demonstram todas as equações e fórmulas.
Canônico	Bevan-Winkelmann (1998)	Sim	Sim	
Canônico	He-Litterman (1999)	Sim	Sim	Melhor conteúdo referencial da matemática envolvida no modelo.
Canônico	Drobetz (2001)	Sim	Sim	Primeiro trabalho reproduzido na forma canônica do modelo.
Canônico	Litterman (2003)	Sim	Sim	
Canônico	Blamont-Firoozy (2003)	Sim	Sim	Discutem a respeito do parâmetro τ .
Canônico	Beach-Orlov (2006)	Sim	Sim	Aplicação do modelo GARCH.
Canônico	Cheung (2009)	Sim	Sim	Aplicação do modelo de fatores.
Híbrido	Satchell-Scowcroft (2000)	Não	Sim	Definem τ igual a 1 (um).
Híbrido	Qian-Gorman (2001)	Não	Sim	Adicionam a matriz de covariância de opiniões/visões sobre os retornos.
Híbrido	Herold (2003)	Não	Sim	Aborda a gestão Ativa de um carteira no modelo de B-L, contra um benchmark.
Híbrido	Idzorek (2005)	Não	Sim	Nova denominação para ω
Híbrido	Braga-Natale (2007)	Não	Sim	
Híbrido	Martellini-Ziemann (2007)	Não	Sim	Aplicação das ferramentas de risco, VAR e CVAR.
Híbrido	Bertsimas (2013)	Não	Sim	Replicação da otimização reversa e abordagem bayesiana com outros modelos de otimização
Híbrido	Michaud (2013)	Não	Sim	Ignora modelos econométricos e abordagem bayesiana no processo de implementação
Alternativo	Fusai-Meucci (2003)	Não	Não	
Alternativo	Meucci (2005)	Não	Não	
Alternativo	Krishnan-Mains (2005)	Não	Não	
Alternativo	Giacometti (2006)	Não	Não	Utiliza a distribuição T-Student
Alternativo	Giacometti (2007)	Não	Não	Utiliza VAR e CVAR. E outros tipos de distribuições

Fonte: WALTERS (2013). Disponível em <http://www.blacklitterman.org/methods.html>

2.2. Estrutura

O modelo de B-L emprega duas principais fontes para prover os resultados esperados:

- (i) Refere-se aos retornos esperados oriundos do equilíbrio de mercado, que podem ser obtidos pelo método de otimização reversa, ou seja, diz respeito sobre o que o mercado sugere a respeito dos excessos de retornos esperados;
- (ii) Relacionada à visão (opinião) que os investidores têm a respeito de um conjunto de ativos.

Considerando a maximização da função de utilidade quadrática U descrita por Idzorek [IDZOREK, 2000], temos:

$$U = \omega' \Pi - \left(\frac{\lambda}{2} \right) \omega' \Sigma \omega \quad (2.1)$$

Sendo,

U : função de utilidade do investidor;

ω : pesos da capitalização do mercado ($n \times 1$);

Π : excesso de retorno implícito do equilíbrio de mercado ($n \times 1$);

λ : coeficiente de aversão ao risco do mercado; e

Σ : matriz de covariância dos retornos estimados ($n \times n$).

A solução da maximização de U pode ser demonstrada, tendo em vista, que se trata de uma função côncava, ou seja, possui um máximo local único. Com a maximização da função, sem a inserção de restrições, é possível encontrar a forma de solução fechada.

$$\max_{\omega} \left\{ \omega' \Pi - \frac{\lambda \omega' \Sigma \omega}{2} \right\} \quad (2.2)$$

Desta maneira, tomando a primeira derivada de (2.1) em relação ao vetor de pesos (ω) e igualando a zero, temos:

$$\frac{dU}{d\omega} = \Pi - \lambda \Sigma \omega = 0 \quad (2.3)$$

Resolvendo para Π , temos:

$$\Pi = \lambda \Sigma \omega \quad (2.4)$$

Multiplicando ambos os lados pelo vetor ω' em (2.4), encontramos o coeficiente de aversão ao risco (λ).

$$\begin{aligned} (\omega')\Pi &= \lambda(\omega')\Sigma\omega \\ \lambda &= \frac{(\omega')\Pi}{(\omega')\Sigma\omega} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ou, de outra maneira, o coeficiente de aversão ao risco de uma carteira pode ser obtido conforme [GRINOLD-KAHN, 2000]:

$$\lambda = \frac{E(r) - r_f}{\sigma^2} \quad (2.6)$$

Em que,

$E(r)$: retorno esperado do mercado (benchmark);

σ^2 : variância dos retornos do mercado (benchmark);

r_f : taxa livre de risco.

A partir de (2.4) é possível obter o vetor de pesos ótimo ω .

$$\omega = (\lambda \Sigma)^{-1} \Pi \quad (2.7)$$

O resultado de (2.4) é a solução fechada para o problema de otimização reversa, gerando retornos esperados implícitos no equilíbrio de mercado, que servirão de ponto de partida neutro para agrupar as visões do investidor a respeito dos retornos futuros. Drobetz [DROBETZ, 2001] descreve:

Intuitivamente este procedimento está proximamente ligado ao CAPM. Este modelo prediz que preços vão se ajustar até que, em equilíbrio de mercado, os retornos esperados serão tais que a demanda por estes ativos seja exatamente a oferta disponível.

De acordo com He e Litterman [HE-LITTERMAN, 1999], a modelagem pelo CAPM originará os retornos da carteira de equilíbrio. Desta forma, ostenta-se que os retornos dos ativos são distribuídos segundo uma distribuição normal, com média μ e variância conhecida Σ , onde r é um vetor que representa o retorno dos ativos.

$$r \sim N(\mu, \Sigma) \quad (2.8)$$

Porém, μ também é uma variável aleatória, e, segundo a informação que temos *a priori*, é centrada em Π .

$$\mu = \Pi + \varepsilon^{(e)} \quad (2.9)$$

De (2.9) temos que $\varepsilon^{(e)}$ é um vetor de erro com distribuição normal de média 0 (zero) e variância Σ_{Π} . Ficando por hipótese:

$$\varepsilon^{(e)} \sim N(0, \Sigma_{\Pi}) \quad (2.10)$$

Conforme observado por Walters [WALTERS, 2014], uma concepção errônea comum ao modelo de B-L é tomar (2.8) como modelo de referência, considerando que μ não é aleatória.

Para definir Σ_{Π} , os autores assumem a hipótese simplificadora de que a estrutura da matriz de covariância de μ é proporcional à covariância dos retornos Σ . Para tanto, criaram um parâmetro τ , como constante de proporcionalidade, que significa a incerteza na estimativa dos retornos esperados da carteira de equilíbrio, ou seja, quanto maior for o valor deste parâmetro, menor será a confiança nas estimativas. Com esta hipótese, tem-se que:

$$\Sigma_{\Pi} = \tau \Sigma \quad (2.11)$$

Portanto a distribuição de μ é:

$$\mu \sim N(\Pi, \tau \Sigma) \quad (2.12)$$

Com isto, obtemos todos os parâmetros para estimar a média da distribuição de retornos, chamada no modelo em questão de distribuição *a priori*.

2.3. O Parâmetro τ : A medida de incerteza das estimativas

Tau (τ) é provavelmente o parâmetro que causa mais discussão entre os pesquisadores que implementam a teoria do modelo de Black-Litterman. A maioria dos autores, utilizam valores diferentes, e alguns deles, simplesmente o ignoram, como é o caso de Fusai e Meucci [FUSAI-MEUCCI, 2003], Krishnan e Mains [KRISHNAN-MAINS, 2005] e Giacometti [GIACOMETTI, 2007].

Este parâmetro escalar pode ser interpretado como o grau de incerteza dos investidores sobre a legitimidade do CAPM. Igualmente, pode ser visto como um parâmetro que representa a incerteza sobre a precisão com que se estima o vetor Π . Desta maneira, um pequeno valor de τ corresponde a um elevado nível de confiança nas

estimativas de retornos da carteira de equilíbrio devido ao redimensionamento para baixo da matriz de covariância dos retornos históricos.

Vemos em (2.12) que $\tau\Sigma$ é a variância da média estimada, ou o erro padrão da distribuição *a priori*. De um ponto de vista intuitivo, τ é normalmente muito inferior a 1, uma vez que reflete o fato de que a incerteza na média da distribuição é muito menor do que a variância nos retornos. Isso indica que o gestor de portfólio é razoavelmente confiante nas estimativas do CAPM.

Como dito anteriormente, os autores divergem em relação ao valor do parâmetro τ . Por exemplo, Idzorek [IDZOREK, 2004] sugere algo entre 0,01 e 0,05, He e Litterman [HE-LITTERMAN, 1999] utilizam um valor constante de 0,025, e outros sugerem usar algum tipo de estimador baseado nas amostras que servem para a construção da matriz de covariância, como por exemplo, o estimador de máxima verossimilhança:

$$\tau = \frac{1}{N} \quad (2.13)$$

Onde,

N: é o número de amostras.

Um ponto interessante sobre a seleção de τ , é que, na ausência de pontos de vista, o investidor somente investirá a fração $\frac{1}{1+\tau}$ na carteira de mercado e o restante de seus recursos serão investidos no ativo livre de risco, por causa da incerteza na sua estimativa.

2.4. As matrizes P e Q: especificações das opiniões (visões de curto prazo)

A vantagem do modelo Black-Litterman é combinar diferentes fontes para estimação dos resultados esperados e com isso superar as limitações do modelo de otimização tradicional da média-variância. Uma destas fontes refere-se às opiniões específicas dos investidores e gestores sobre os retornos do mercado, que podem divergir dos retornos de equilíbrio da carteira de longo prazo. Diante disto, o modelo

admite que tais divergências sejam inseridas nas estimativas de modo que a combinação destas perspectivas seja definida como uma distribuição condicional.

Para estas opiniões, aqui definidas como visões de curto prazo, supõe-se que a matriz construída seja do tipo diagonal, isto é, o modelo impõe uma restrição, para que cada opinião não esteja correlacionada com as outras opiniões. Esta restrição no problema ajuda a melhorar a estabilidade dos resultados e simplifica o problema. Walters [WALTERS, 2009] diz que estimar as covariâncias entre as opiniões seria ainda mais complicado e sujeito a erros do que estimar apenas as variâncias das opiniões. Outra característica importante destas opiniões refere-se ao modo de expressão, que podem ser do tipo relativo (comparação entre ativos) ou absoluto (estimar um valor fechado para um ativo qualquer), sendo que para opiniões relativas a soma dos pesos será 0 (zero) e para opiniões absolutas a soma dos pesos será 1 (um).

Seja k o número total de visões sobre os n ativos, a representação é demonstrada da seguinte maneira: P , uma matriz ($k \times n$) cujas colunas contêm os pesos que montam cada uma das visões. Q um vetor de tamanho ($k \times 1$) representando os retornos esperados em cada visão.

Assim a visão do investidor pode ser escrita, como:

$$P\mu = Q + \varepsilon^{(v)} \quad (2.14)$$

Em que,

$\varepsilon^{(v)}$: é uma variável aleatória com distribuição normal com média zero e matriz de covariância das visões Ω ($k \times k$).

Desta forma:

$$P\mu \sim N(Q, \Omega) \quad (2.15)$$

2.5. A matriz Ω : covariância das opiniões

Na literatura escassa a respeito do modelo de B-L, não há um método único ou universal para a determinação da matriz de covariância das opiniões, Ω . A variância das visões está inversamente relacionada ao grau de confiança dos investidores nas k visões. Caso o investidor determine baixo nível de confiança em suas opiniões, a composição de $\omega_{K \times K}$ da carteira final deverá decair mais para o portfólio de equilíbrio. Ao contrário, se o investidor atribui alto grau de confiança nas mesmas opiniões, a composição da carteira final se afastará mais da carteira de equilíbrio do mercado. Entretanto, o modelo básico de Black-Litterman não fornece uma maneira intuitiva de quantificar essa relação, cabendo ao investidor definir o método de cálculo da matriz Ω de opiniões.

Alguns métodos ao longo destes anos foram propostos pelos autores, como:

- (i) Proporcional à variância da distribuição *a priori*;
- (ii) Utilizando um intervalo de confiança;
- (iii) Utilizando a variância dos resíduos em um modelo de fator;
- (iv) Utilizando o método de Idzorek [IDZOREK, 2000] para especificar a confiança ao longo da dimensão dos pesos.

Para a presente monografia, vamos adotar o método em que a variância das opiniões será proporcional à variância dos retornos dos ativos, da mesma maneira como ocorre para a da distribuição *a priori*. He e Litterman [HE-LITTERMAN, 1999] e Meucci [MEUCCI, 2006] utilizam este método, embora, tenham utilizado de forma diferente, definiram a variância das opiniões da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\omega_{ij} &= P(\tau\Sigma)P' \quad , \forall i = j \\ \omega_{ij} &= 0 \quad , \forall i \neq j\end{aligned}\tag{2.16}$$

Ou,

$$\Omega = \text{diag}(P(\tau\Sigma)P')\tag{2.17}$$

Por este método, as variâncias das opiniões, ou incertezas, são essencialmente iguais aos pesos das visões dos investidores e dos pesos de equilíbrio de mercado. Ao incluir τ na expressão, a estimativa *a posteriori* dos retornos torna-se independente de τ .

2.6. Teoria Bayesiana aplicada ao modelo de Black-Litterman

Neste item apresentaremos alguns conceitos introdutórios de estatística bayesiana e demonstramos seu uso feito por Black e Litterman.

A estatística bayesiana é uma abordagem natural para interpretar o modelo de B-L, pois fornece uma teoria para combinar informações de diferentes fontes e modelar a incerteza inerente a essa informação. Esta abordagem combina informação prévia com a amostra de dados, que através do uso repetido do Teorema de Bayes, a informação prévia é atualizada, com o intuito de mesclar as informações do mercado, com as informações do investidor.

Dentro deste enfoque, é necessário definir o que será considerado informação prévia e o que será considerado informação amostral. Geralmente, as opiniões dos investidores são empregadas como informações prévias e as informações do mercado (retorno de equilíbrio) são utilizadas como informação amostral para atualizar a informação prévia gerando o retorno esperado *a posteriori*.

Sob a ótica da teoria Bayesiana, o modelo é construído, a partir do Teorema de Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (2.18)$$

Sendo,

$P(A)$: distribuição *a priori*, que corresponde às hipóteses construídas sobre a distribuição da média de retornos. Portanto, tem-se que:

$$P(A) \sim N(\Pi, \tau\Sigma) \quad (2.19)$$

E,

$P(B|A)$: a visão do investidor, dada a informação obtida no equilíbrio de longo prazo CAPM:

$$P(B|A) \sim N(Q, \Omega) \quad (2.20)$$

E,

$P(B)$: é a distribuição marginal da visão do investidor.

Assim, a função densidade de probabilidade do retorno esperado, dado o retorno de equilíbrio, $P(A|B)$, é definida pelo produto da função condicional do retorno de equilíbrio, $P(B|A)$, e do retorno esperado, $P(A)$, que especifica a opinião subjetiva do gestor/investidor, em unidades marginais de probabilidades, $P(B)$, dos retornos de equilíbrio.

Portanto, a Teoria de Bayes prevê um mecanismo formal para especificar as opiniões subjetivas com os dados de mercado. Com novos dados incorporados, a densidade *posteriori* é a distribuição mais consistente possível com as duas fontes de informação.

Aplicando o Teorema de Bayes, chega-se a distribuição *posteriori*:

$$P(A|B) \sim N \{[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q], [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}\} \quad (2.21)$$

2.7. Equação completa do modelo de Black-Litterman

Combinando o equilíbrio de mercado com as opiniões dos investidores de acordo com a abordagem bayesiana, é possível gerar a distribuição *posteriori* dos retornos esperados, $E[R]$ definida por média $\tilde{\mu}$:

$$\tilde{\mu} = E[R] = \{[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q]\} \quad (2.22)$$

E variância *posteriori* ϕ^{-1} ;

$$\phi^{-1} = \{[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}\} \quad (2.23)$$

Devido os retornos serem aleatórios e independentes no modelo, sua distribuição não é mais simplesmente $r \sim N(\mu, \Sigma)$. Combinando (2.19), (2.20) e (2.21), temos que a nova distribuição do modelo é dada por:

$$E[R] \sim N(\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma}) \quad \text{com } \tilde{\Sigma} = \Sigma + \phi^{-1} \quad (2.24)$$

Onde,

$E[R]$: é o vetor coluna ($n \times 1$) da distribuição *posteriori*;

τ : é um valor escalar;

Σ : é uma matriz ($n \times n$) de covariância dos excessos de retorno;

Q : é o vetor coluna ($n \times 1$) das visões sobre os excessos de retornos para alguns ou todos os ativos;

P : é a matriz ($k \times n$) de ligação que representa quais os ativos em que o investidor possui visões;

Ω : é a matriz diagonal ($n \times n$) da incerteza inerente a visão do investidor; e

Π : é o vetor coluna ($n \times 1$) dos excessos de retornos implícitos.

Com base em (2.22), é possível perceber que a equação de B-L refere-se a uma média ponderada complexa do vetor de retorno implícito de mercado (Π) e do vetor de opiniões (Q), ou seja, as visões de curto prazo, em que seus pesos relativos ω_{Π} e ω_Q são funções do valor escalar (τ) e das incertezas sobre as opiniões (Ω). Conforme demonstrado em:

$$\omega_{\Pi} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}(\tau\Sigma)^{-1} \quad (2.25)$$

$$\omega_Q = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}P'\Omega^{-1}P \quad (2.26)$$

Podemos dizer que os pesos relativos são determinados pelo grau de dispersão percebido nos retornos esperados de equilíbrio e na confiança das expectativas, respectivamente.

Como os retornos dos ativos estão correlacionados, opiniões sobre alguns ativos implicarão mudanças nos retornos esperados de todos os ativos. Na verdade, $P'\Omega^{-1}$ é uma matriz ($n \times k$) que propaga as k opiniões em n componentes, $P'\Omega^{-1}Q$. Se esse ajuste não for feito no vetor dos retornos esperados, as diferenças entre os retornos esperados de equilíbrio e as opiniões do investidor poderiam ser interpretadas como oportunidades de arbitragem pelo otimizador conduzindo a portfólios concentrados em poucos ativos, ou seja, ocorreriam as “soluções de canto”. Em termos intuitivos, Fabozzi [FABOZZI, 2007] afirma que, qualquer erro de estimação é dispersa entre todos os ativos, fazendo o retorno de Black-Litterman menos sensível a erros de opiniões individuais.

Os retornos esperados, $E[R]$, não devem ser tratados como projeções ou expectativas de curto prazo, mas como pontos de referência. As situações em que as expectativas estão em desacordo com estes prêmios de risco são consideradas oportunidades de investimento. Também é importante notar que a aproximação dos retornos esperados de B-L não depende diretamente dos retornos históricos.

Com base na teoria financeira moderna, um investidor neutro em relação ao mercado, ou seja, que não tem expectativas diferentes do consenso de mercado, deve manter a carteira de mercado. O modelo de B-L é coerente com esta proposição, porque quando o investidor não manifestar qualquer expectativa, ou a confiança nas opiniões é zero (a matriz P é composta somente por zeros), os retornos esperados *posteriori* serão $E[R] = \Pi$. Da mesma forma, quando a incerteza na expectativa é muito grande, $E[R]$ é dominado por Π e no limite tende a este, em ambos os casos um investidor racional acaba possuindo a carteira de mercado e o ativo livre de risco. Na ausência de restrições, o Black-Litterman recomenda um desvio da ponderação da capitalização de mercado de um ativo somente se houver uma opinião sobre ele.

Dito isto, a equação (2.22) também pode ser descrita da seguinte forma:

$$\tilde{\mu} = E[R] = \Pi + \tau \Sigma P' (\Omega + \tau P \Sigma P')^{-1} (Q P \Pi) \quad (2.27)$$

Fica claro que o investidor se desvia do equilíbrio com um vetor proporcional a $\tau \Sigma P' (\Omega + \tau P \Sigma P')^{-1} (Q P \Pi)$. A partir desta definição, podemos observar que quando o investidor está 100% confiante em todas as k opiniões (o que equivale a colocar todos os elementos de Ω iguais à zero), os retornos de Black-Litterman serão iguais a:

$$\tilde{\mu} = E[R] = \Pi + \tau \Sigma P' (\tau P \Sigma P')^{-1} (Q P \Pi) \quad (2.28)$$

Lee [LEE, 2000] assegura que, embora o Black-Litterman original pressupõe que o CAPM é válido ou que pode ser aplicado na prática, esta hipótese não afeta os conceitos e a derivação acima. Uma alternativa é substituir o vetor de retornos de equilíbrio do CAPM pelo vetor de retornos esperados que fazem o investidor neutro com relação a qualquer aposta tática ou de curto prazo. Ou seja, ao invés de assumir que o retorno do CAPM se aplica, o investidor pode usar o vetor de retornos que o faria manter a sua carteira de referência estratégica ou de longo prazo, como discutido acima.

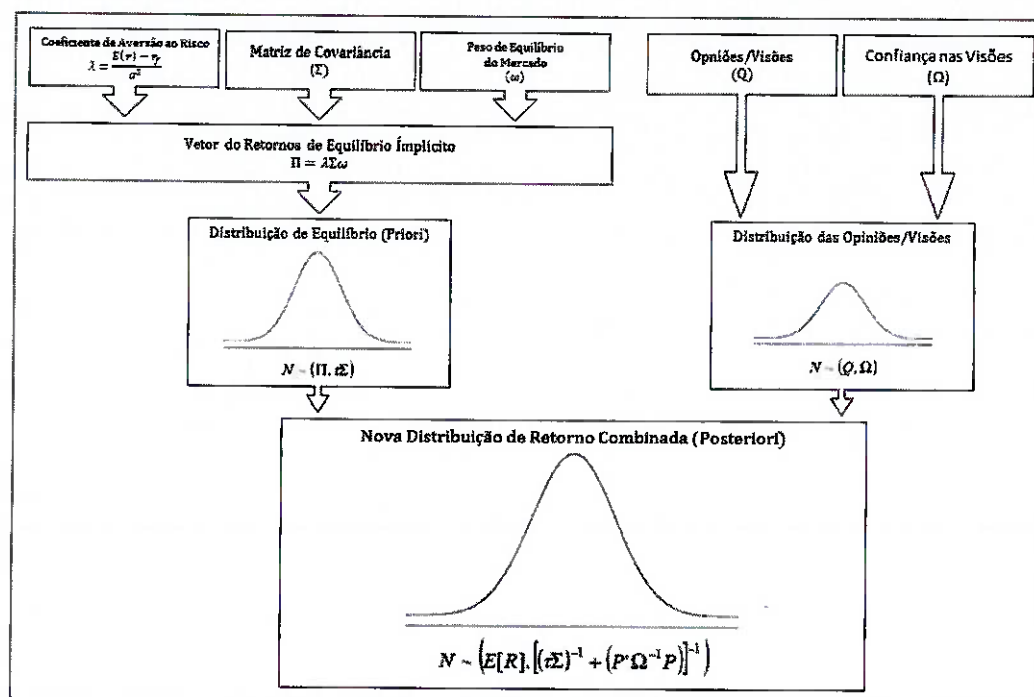
Após a definição de todas as variáveis envolvidas no modelo, é possível obter a nova distribuição de retornos combinada (*a posteriori*) através da implementação da equação de B-L. A figura 2.1 resume em forma de fluxograma, a metodologia do modelo de Black-Litterman que foi exposta até o momento.

Para resolver o problema de otimização de média-variância é necessário conhecer a média e covariância da distribuição dos retornos esperados. A média da distribuição dos retornos é igual à média *posteriori* dos retornos esperados, $E[R]$, enquanto que a covariância da distribuição preditiva inclui um termo que reflete o erro de estimação. A média e a covariância são, respectivamente, $\tilde{\mu}$ e $\tilde{\Sigma} = \Sigma + \phi^{-1}$.

Desta forma, a solução para o problema de otimização de uma carteira sem restrições é dado pelo vetor de pesos ótimos ω^* .

$$\omega^* = (\lambda \tilde{\Sigma})^{-1} \tilde{\mu} \quad (2.29)$$

Figura 2.1 – Fluxo da Modelagem de Black-Litterman.



Fonte: IDZOREK (2004). Elaborado pelo autor.

2.8. Vantagens do modelo de Black-Litterman.

Resumidamente, podemos descrever algumas vantagens do modelo de B-L.

(i) **Flexibilidade.** O modelo permite que sejam incluídas no portfólio expectativas sobre o mercado e que se possa atualizá-las constantemente. Diferentemente do modelo padrão de M-V, o modelo de B-L não exige que os retornos esperados de cada ativo sejam estimados. Só é necessário que o investidor estime o retorno esperado para os ativos sobre os quais ele tem uma opinião valiosa. Isto é mais consistente com a prática, pois é muito difícil para o administrador ter conhecimento detalhado ou uma expectativa significativa de cada um dos ativos em carteira. Além disso, existem muitos graus de liberdade na aplicação do modelo, que geralmente são usados interativamente até que o investidor sinta que ele conseguiu obter o equilíbrio da carteira. Esta flexibilidade é que torna o modelo tão atraente para diferentes investidores com diferentes situações [LEE, 2000];

(ii) Ainda comentando em relação à flexibilidade, outra vantagem é que o investidor pode tomar risco nos ativos que ele realmente tem uma opinião formada, com maior magnitude e que tenha mais confiança [BEVAN-WINKELMANN, 1998]. Na

verdade, o modelo permite aos investidores separar as projeções ("para onde vai o mercado?") do grau de crença ou confiança nelas ("Como eu confio muito que a minha projeção esta correta?") [SCHERER, 2007]. Em outras palavras, o modelo permite diferenciar entre a "força" de uma opinião (a magnitude da opinião) e a "confiança" em uma opinião (o grau de certeza com que é expressa);

(iii) A metodologia produz carteiras mais equilibradas e estáveis no tempo ao utilizar os retornos de equilíbrio como um centro de gravidade. A solução é "ancorada" na reconhecida carteira de Capitalização de Mercado;

(iv) Mitiga o problema de maximizar os erros de estimação espalhando os erros ao longo do vetor de retornos esperados [IDZOREK, 2004]. Esta abordagem bayesiana para seleção de carteiras leva em conta diretamente a incerteza na estimação [RACHEV, 2008];

(v) Permite expressar opiniões ou expectativas de mercado de forma relativa, ou seja, classificar o desempenho esperado de um ativo em relação a outro.

3. Aplicações dos Modelos

3.1. Informações preliminares e base de dados

Neste capítulo aplicaremos de forma empírica, a teoria desenvolvida na presente monografia, e para isto, foram selecionados títulos de investimentos financeiros disponíveis no mercado nacional, de maneira deliberada de acordo com a subjetividade do autor.

Para representar o segmento de renda variável, escolhemos ativos do mercado de Ações e também ativos do mercado de Fundos de Investimentos Imobiliários, ambos negociados e disponíveis para consulta na Bolsa de Valores brasileira (BM&FBovespa⁵) ou *vendors* especializados em mercados financeiros.

Em modelagem financeira, é comum a utilização de parâmetros básicos como: taxa livre de risco e benchmarks do mercado. Desta maneira, a série histórica que representará a taxa livre de risco será o CDI — Certificado de Depósito Interbancário, que é a taxa pela qual os bancos emprestam e tomam emprestados recursos entre si, porém, para este caso consideraremos uma taxa pós-fixada - com dados disponibilizados na página eletrônica da CETIP⁶. No caso dos benchmarks, as séries utilizadas serão: Índice Bovespa (IBOV), Índice Financeiro (IFNC) e Índice de Fundos de Investimentos Imobiliários (IFIX), todos com informações disponíveis na BMF&Bovespa.

Em relação à periodicidade da base de dados, tanto para o segmento de renda variável, taxa livre de risco e benchmarks, foi considerado o intervalo diário – em dias úteis – de 02/01/2014 à 30/12/2015, totalizando 494 observações de preços e 493 observações de log-retornos.

⁵ A Bolsa de Valores de São Paulo - Bovespa era a bolsa oficial do Brasil, até iniciar um processo de fusão com a BM&F que culminou na criação de uma nova instituição, denominada BM&FBovespa no dia 8 de maio de 2008. Disponível em http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/.

⁶ Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos, atualmente CETIP S.A. - Mercados Organizados, <https://www.cetip.com.br/>.

3.2. Portfólio de Renda Variável

3.2.1. Carteira de Ações – Serviços Financeiros, Seguros e Bancários

Começamos esta seção, com uma breve definição do que é uma Ação. Trata-se da menor parcela do capital social das companhias ou sociedades por ações. É, portanto, um título patrimonial e, como tal, concede aos seus titulares, os acionistas, todos os direitos e deveres de um sócio, no limite das ações possuídas. Uma ação é um valor mobiliário, expressamente previsto em lei, no entanto, apesar de todas as companhias ou sociedades por ações terem o seu capital dividido em ações, somente as ações emitidas por companhias registradas na CVM, chamadas companhias abertas, podem ser negociadas publicamente no mercado de valores mobiliários. Assim sendo, para esta aplicação os ativos elegidos fazem parte do setor de serviços Financeiros, Seguros e Bancário. E são destacados na tabela a seguir.

Tabela 3.1 – Carteira de Ações.

Código ¹	Tipo ²	Empresa
BBAS3	ON	Banco do Brasil
BBDC4	PN	Banco Bradesco
BBSE3	ON	BB Seguridade Participações
CIEL3	ON	Cielo
CTIP3	ON	Cetip
ITUB4	PN	Itaú Unibanco Holding
PSSA3	ON	Porto Seguro
SANB11	UNIT	Banco Santander Brasil
SULA11	UNIT	Sul América

¹ Código da Ação negociada na Bolsa de Valores (BM&Fbovespa).

² ON (Ordinária); PN (Preferencial); UNIT (Composição de ON e PN).

Fonte: BMF&Bovespa. Elaboração do Autor.

3.2.2. Carteira de Fundos de Investimentos Imobiliários (FII)

O fundo de investimento imobiliário é uma comunhão de recursos destinados à aplicação em empreendimentos imobiliários, tais como a construção e a aquisição de imóveis para posterior comercialização ou a aquisição de imóveis prontos para auferir renda de locação. Além disso, é também permitido aos FII a aquisição de títulos e valores

mobiliários relacionados a empreendimentos imobiliários, como letras de crédito imobiliário, certificados de recebíveis imobiliários, certificados de potencial adicional de construção, entre outros. Por ser constituído sob a forma de condomínio fechado, o cotista do FII não pode solicitar o resgate de suas cotas, o que só pode ocorrer em caso de liquidação do fundo deliberada pela assembleia geral de cotistas ou no término do prazo de duração dos fundos que funcionam com prazo determinado. Como as cotas dos FII não são resgatáveis, a única forma de se desfazer do investimento é vender as cotas para outro investidor, de forma semelhante ao que ocorre quando investimos em ações de companhias abertas. Em virtude disso, quase todos esses fundos têm as cotas registradas para negociação em mercado de bolsa de valores ou de balcão organizado, com as operações realizadas pelos investidores através de uma corretora ou distribuidora de valores mobiliários. Nesta aplicação os títulos selecionados são:

Tabela 3.2 – Carteira de Fundos de Investimentos Imobiliários (FII).

Código ¹	Tipo	Fundo
BRCR11	FII	BC FUND
BBPO11	FII	BB PRGII
KNRI11	FII	KINEA
HGRE11	FII	HG REAL
KNCR11	FII	KINEA RI
HGBS11	FII	CSHG SHOP
SAAG11	FII	SANTANDER AG
TBOF11	FII	TB OFFICE
JSRE11	FII	JS REAL
HGLG11	FII	CSHG LOG

¹ Código do FII negociada na Bolsa de Valores (BM&Fbovespa).

Fonte: BMF&Bovespa. Elaboração do Autor.

3.3. Aplicação empírica do modelo de Markowitz

Considerando as informações e dados preliminares nas seções 3.1 e 3.2, temos:

- (i) Para a Carteira de Ações.

Inicialmente retomam-se as equações (1.5), (1.6) e (1.7), e aplicando-as na série histórica de cada ativo, construímos a tabela de vetores ($n \times 1$) de Risco-Retorno.

Tabela 3.3 – Vetores de Risco-Retorno da Carteira de Ações - histórico.

	Retorno (r)	Risco (σ)
BBAS3	-0,09888214%	3,08658427%
BBDC4	-0,08245475%	2,42679164%
BBSE3	0,00319307%	2,06911504%
CIEL3	0,00325671%	1,93379861%
CTIP3	0,09316185%	1,42339755%
ITUB4	-0,03649357%	2,14936515%
PSSA3	-0,00397669%	1,98797729%
SANB11	0,03272740%	2,32471296%
SULA11	0,05075868%	2,05930090%

Fonte: BMF&Bovespa. Elaboração do Autor.

No próximo passo, definem-se as “Gregas” do modelo.

Tabela 3.4 – Variáveis do modelo de Markowitz – “Gregas”.

α	7989,92232954
γ	0,01311304
ψ	5,88244043
δ	70,16908102

Fonte: Elaboração do Autor.

Em seguida, conforme (1.30) e (1.31) têm-se os vetores ($n \times 1$).

Tabela 3.5 – Vetores para solução do modelo de Markowitz.

	h	g
BBAS3	-137,78008636	-0,06129377
BBDC4	-301,57322840	0,18529429
BBSE3	-65,03710770	0,02239996
CIEL3	-147,25253734	0,29019942
CTIP3	569,02138147	0,09345740
ITUB4	10,00314021	0,08081145
PSSA3	-146,42735063	0,29721723
SANB11	119,22138407	0,05768544
SULA11	99,82440469	0,03422859

Fonte: Elaboração do Autor.

E como consequência, obtemos a solução do problema de Média-Variância dado por (1.29), ou seja, apresenta-se o vetor ($n \times 1$) de pesos ótimos para um dado nível de μ . Em que μ nesta aplicação trata-se do retorno médio diário do CDI no período analisado, sendo 0,05055611% a.d. ou 13,58362978% a.a. na base de 252 dias úteis.

Tabela 3.6 – Pesos ótimos (otimização por Média-Variância) da Carteira de Ações.

	ω^*	μ	σ^2	σ
BBAS3	-13,10%			
BBDC4	3,28%			
BBSE3	-1,05%			
CIEL3	21,58%			
CTIP3	38,11%	0,05055611%	0,00013122	1,14549740%
ITUB4	8,59%			
PSSA3	22,32%			
SANB11	11,80%			
SULA11	8,47%			
	100,00%			

Fonte: Elaboração do Autor.

Aplicando (1.32), (1.33) e (1.34) tem-se o ponto de Mínima-Variância. Desta forma, carteiras com $\mu \geq \mu_g$ são chamadas de carteiras eficientes, ou seja, elas possuem maior retorno possível entre todas as carteiras com um determinado nível de risco especificado.

Tabela 3.7 – Pesos ótimos (Mínima-Variância Global) da Carteira de Ações.

	ω_g	μ_g	σ_g^2	σ_g
BBAS3	-16,27%			
BBDC4	-3,67%			
BBSE3	-2,55%			
CIEL3	18,18%			
CTIP3	51,24%	0,07362325%	0,00012516	1,11873885%
ITUB4	8,82%			
PSSA3	18,94%			
SANB11	14,55%			
SULA11	10,77%			
	100,00%			

Fonte: Elaboração do Autor.

Tomando novamente (1.37), (1.38) e (1.39) encontra-se o ponto Tangente que corresponde a uma posição de 100% nos ativos de risco desta Carteira de Ações.

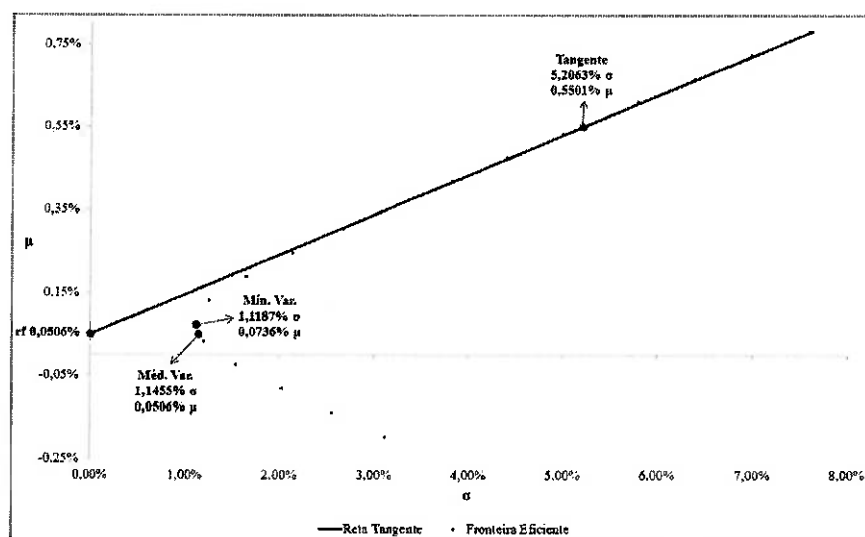
Tabela 3.8 – Pesos ótimos (Tangente) da Carteira de Ações.

	ω_T	μ_T	σ^2_T	σ_T
BBAS3	-81,93%			
BBDC4	-147,37%			
BBSE3	-33,54%			
CIEL3	-51,99%			
CTIP3	322,38%	0,55012769%	0,00271058	5,20631840%
ITUB4	13,58%			
PSSA3	-50,83%			
SANB11	71,36%			
SULA11	58,34%			
	100,00%			

Fonte: Elaboração do Autor.

Graficamente representamos os pontos calculados acima, no plano cartesiano de Risco-Retorno:

Figura 3.1 – Reta Tangente e Fronteira Eficiente da Carteira de Ações.



Fonte: Elaboração do Autor.

(ii) Para a Carteira de Fundos de Investimentos Imobiliários.

Novamente aplicaremos os mesmos cálculos do item (i) desta seção. Então, plotaremos na sequência, os resultados obtidas nas tabelas a seguir.

Tabela 3.9 – Vetores de Risco-Retorno histórico da Carteira de FII – histórico.

	Retorno (r)	Risco (σ)
BRCR11	-0,07310614%	1,01297314%
BBPO11	-0,01609743%	0,72544291%
KNRI11	-0,02638223%	1,12765455%
HGRE11	-0,04900635%	1,06859842%
KNCR11	0,00634074%	1,15881128%
HGBS11	-0,02732179%	1,13114164%
SAAG11	-0,00856382%	0,83048693%
TBOF11	-0,03472760%	1,29023572%
JSRE11	-0,46021786%	10,17236299%
HGLG11	-0,02703506%	1,27512657%

Fonte: BMF&Bovespa. Elaboração do Autor.

Tabela 3.10 – Vetores para solução do modelo de Markowitz.

	h	g
BRCR11	-775,62531674	-0,037505844
BBPO11	515,05890130	0,327433164
KNRI11	-26,85945460	0,076227115
HGRE11	-371,11432763	-0,02957101
KNCR11	376,42293873	0,221325426
HGBS11	-73,65564597	0,036933502
SAAG11	469,08599876	0,296861787
TBOF11	-8,91316055	0,056000869
JSRE11	-67,35852182	-0,019846971
HGLG11	-37,04141147	0,07214196

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.11 – Variáveis do modelo de Markowitz – “Gregas”.

α	42139,91798987
γ	0,00906065
ψ	-9,09796853
δ	299,04190348

Fonte: Elaboração do Autor.

Da mesma forma, temos a solução dos problemas de otimização, em que se considera nesta aplicação o mesmo valor de μ dado no item (i) desta seção.

Tabela 3.12 – Pesos ótimos (otimização por Média-Variância) da Carteira de FII.

	ω^*	μ	σ^2	σ
BRCR11	-42,96%	0,05055611%	0,00009708	0,98528241%
BBPO11	58,78%			
KNRI11	6,26%			
HGRE11	-21,72%			
KNCR11	41,16%			
HGBS11	-0,03%			
SAAG11	53,40%			
TBOF11	5,15%			
JSRE11	-5,39%			
HGLG11	5,34%			
	100,00%			

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.13 – Pesos ótimos (Mínima-Variância Global) da Carteira de FII.

	ω_g	μ_g	σ_g^2	σ_g
BRCR11	13,00%	-0,02158991%	0,00002373	0,48713929%
BBPO11	21,62%			
KNRI11	8,20%			
HGRE11	5,06%			
KNCR11	14,01%			
HGBS11	5,28%			
SAAG11	19,56%			
TBOF11	5,79%			
JSRE11	-0,53%			
HGLG11	8,01%			
	100,00%			

Fonte: Elaboração do Autor.

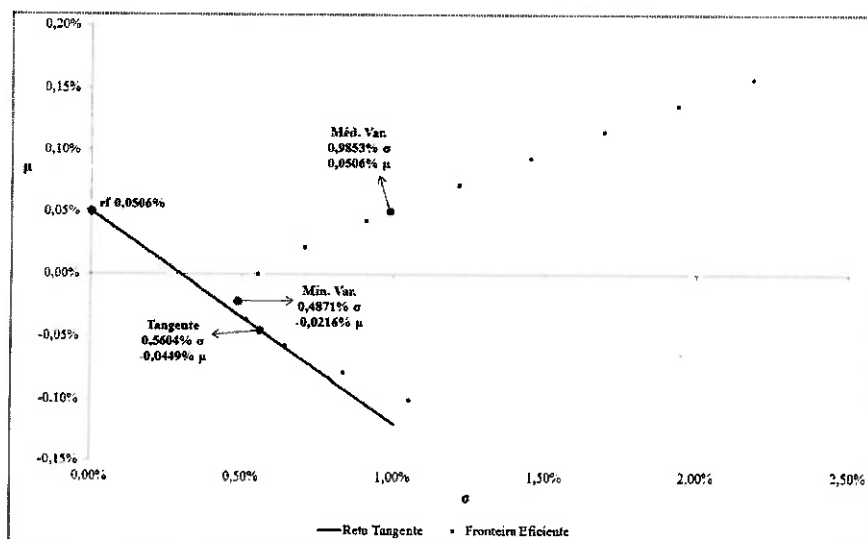
Tabela 3.14 – Pesos ótimos (Tangente) da carteira de FII.

	ω_T	μ_T	σ^2_T	σ_T
BRCR11	31,10%			
BBPO11	9,60%			
KNRI11	8,83%			
HGRE11	13,72%			
KNCR11	5,22%	-0,04493160%	0,00003141	0,56042914%
HGBS11	7,00%			
SAAG11	8,61%			
TBOF11	6,00%			
JSRE11	1,04%			
HGLG11	8,88%			
	100,00%			

Fonte: Elaboração do Autor.

Igualmente, plota-se o gráfico dos pontos calculados no plano cartesiano de Risco-Retorno. Porém, é importante apontar duas características evidenciadas na figura a seguir. Para esta carteira de FII, as carteiras de Mínima-Variância e Tangente têm retorno negativo, o que, na prática desestimula sua viabilidade financeira, pois, o investidor racional irá preferir portfólios que no mínimo “paguem” a renda fixa.

Figura 3.2 – Reta Tangente e Fronteira Eficiente da Carteira de FII.



Fonte: Elaboração do Autor.

3.4. Aplicação empírica do modelo de Black-Litterman

Nesta seção dispõem-se dos cálculos necessários para aplicação da modelagem de B-L, em que serão utilizados dados das carteiras já mencionadas. Então:

(i) Para a Carteira de Ações.

Começamos com a demonstração do vetor de pesos ($n \times 1$) com base na Capitalização de Mercado para cada ativo, ou seja, trata-se do valor de mercado atual de cada empresa na data de análise (30/12/2015).

Tabela 3.15 – Pesos da Capitalização de Mercado da Carteira de Ações.

Código	Quantidade de Ações Emitidas ¹	Valor de de Mercado em R\$ ²	Pesos de Mercado ω_{Mkt}
BBAS3	2.865.417.020	42.236.246.875	10,71%
BBDC4	2.776.800.721	53.536.717.901	13,57%
BBSE3	2.000.000.000	48.660.000.000	12,33%
CIEL3	2.264.012.551	76.048.181.588	19,27%
CTIP3	262.978.823	9.861.705.863	2,50%
ITUB4	3.036.875.751	79.960.938.524	20,27%
PSSA3	323.293.030	9.307.606.334	2,36%
SANB11	3.781.541.209	60.655.920.984	15,37%
SULA11	767.284.079	14.279.156.701	3,62%
Total	18.078.203.183	394.546.474.769	100,00%

¹ Posição divulgada até maio/16.

² Qdte. de Ações emitidas x Cotação base 30/12/2015

Fonte: RI das empresas. BM&FBovespa. Elaboração do Autor.

Na sequência calcula-se o coeficiente de aversão ao risco da carteira, utilizando como benchmarks os índices IBOV (Ibovespa) e IFNC (Setorial Financeiro) e como taxa livre de risco o CDI, todos em taxas diárias do período histórico selecionado, conforme tabela a seguir.

Tabela 3.16 – Risco-Retorno dos benchmarks e da taxa livre de risco.

	IFNC	IBOV	CDI
Retorno (r')	0,01106025%	-0,03033189%	0,05055611%
Risco (σ')	1,75260547%	1,52401892%	0,00000000%

Fonte: BMF&Bovespa, Cetip. Elaboração do Autor.

Tabela 3.17 – Coeficientes de aversão ao risco.

$\lambda = \frac{E[r] - rf}{\sigma^2}$			
IBOV ¹	3,48259832	IFNC ¹	1,28582903

¹ Em módulo

Fonte: Elaboração do Autor.

Com os pesos do portfólio de Capitalização de Mercado, os coeficientes de aversão ao risco e a matriz de covariância da Carteira de Ações, encontramos os vetores de retorno de mercado, conforme (2.4), obtendo a distribuição *a priori*, ou seja, os vetores ($n \times 1$) dos Retornos Implícitos de Equilíbrio de Mercado, concluindo assim a primeira metade da modelagem de Black-Litterman.

Tabela 3.18 – Vetores de Retorno Implícito do Equilíbrio de Mercado.

	$\Pi = \lambda \Sigma \omega_{Mkt}$		Histórico
	IBOV	IFNC	Portfólio
BBAS3	0,15081129%	0,05568186%	-0,09888214%
BBDC4	0,11942461%	0,04409341%	-0,08245475%
BBSE3	0,08780949%	0,03242062%	0,00319307%
CIEL3	0,07156669%	0,02642353%	0,00325671%
CTIP3	0,04669978%	0,01724228%	0,09316185%
ITUB4	0,10907210%	0,04027110%	-0,03649357%
PSSA3	0,04997949%	0,01845320%	-0,00397669%
SANB11	0,09041184%	0,03338145%	0,03272740%
SULA11	0,05179702%	0,01912426%	0,05075868%
Média	0,08639693%	0,03189908%	-0,00430105%
Desvio	0,03348548%	0,01236336%	0,05783600%
Máximo	0,15081129%	0,05568186%	0,09316185%
Mínimo	0,04669978%	0,01724228%	-0,09888214%

Fonte: Elaboração do Autor.

A partir deste momento inserimos as informações que fazem com que o modelo de B-L se diferencie em relação ao tradicional de M-V. Portanto o embasamento dos novos pesos da carteira não é realizado em cima de dados históricos e sim no posicionamento do mercado. Para a Carteira de Ações, construímos a tabela abaixo com base nas opiniões dos analistas, gestores e investidores sobre o preço projetado da Carteira de Ações para o final de 2016.

Tabela 3.19 – Projeções de analistas de mercado para a Carteira de Ações.

	Preço em 30/12/15		Preço-Alvo 2016 ¹		Up / Down	Retorno Médio Esperado diário
BBAS3	R\$	14,74	R\$	27,00	83,18%	0,24047597%
BBDC4	R\$	19,28	R\$	30,00	55,60%	0,17560205%
BBSE3	R\$	24,33	R\$	34,00	39,75%	0,13288598%
CIEL3	R\$	33,59	R\$	39,85	18,64%	0,06783808%
CTIP3	R\$	37,50	R\$	42,00	12,00%	0,04498181%
ITUB4	R\$	26,33	R\$	38,00	44,32%	0,14569221%
PSSA3	R\$	28,79	R\$	30,36	5,45%	0,02107279%
SANB11	R\$	16,04	R\$	12,35	-23,00%	-0,10368809%
SULA11	R\$	18,61	R\$	20,00	7,47%	0,02858869%
Média					27,04420298%	0,08371661%
Desvio					29,95798735%	0,09609683%

¹ Informações obtidas no endereço eletrônico de RI de cada empresa. Preço-Alvo para 30/12/16

Fonte: RI das empresas. Bloomberg. Elaboração do Autor.

Feito isto, define-se a matriz das visões e/ou opiniões P, que pode ser do tipo absoluta ou relativa. Para esta aplicação demonstraremos os resultados simulando três séries de visões para a Carteira de Ações: 1º com 9 visões absolutas; 2º com 3 visões absolutas; e 3º com 2 visões relativas. Então:

▪ Simulação com 9 visões:

Para a primeira série utilizamos o método absoluto, ou seja, atribuímos valor 1 para cada ativo separado por 9 visões na matriz P, o que significa que, estamos “acreditando” ou “apostando” nas opiniões dos analistas demonstradas na tabela 3.19, formando um vetor ($n \times 1$) Q com base na coluna de retorno médio esperado diário. Adotando a regra de (2.13) temos que para o parâmetro Tau (τ) é de $\frac{1}{9}$, e desta forma é

possível construir a matriz de covariância Ω destas visões. Conforme (2.17) seguiremos o método em que a variância das opiniões será proporcional à variância dos retornos dos ativos, e por este método as variâncias das opiniões, ou incertezas, são essencialmente iguais aos pesos das visões dos investidores e dos pesos de equilíbrio de mercado. Então, temos as tabelas:

Tabela 3.20 – Matriz P para 9 visões.

	P								
	BBAS3	BBDC4	BBSE3	CIEL3	CTIP3	ITUB4	PSSA3	SANB11	SULA11
Visão 1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Visão 2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Visão 3	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Visão 4	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Visão 5	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Visão 6	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Visão 7	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Visão 8	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Visão 9	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.21 – Vetor Q para 9 visões.

	Q
Visão 1	0,24047597%
Visão 2	0,17560205%
Visão 3	0,13288598%
Visão 4	0,06783808%
Visão 5	0,04498181%
Visão 6	0,14569221%
Visão 7	0,02107279%
Visão 8	-0,10368809%
Visão 9	0,02858869%

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.22 – Matriz diagonal Ω para 9 visões.

Ω								
0,00010586	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,00006544	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,00004757	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,00004155	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,00002251	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00005133	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00004391	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00006005	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00004712

Fonte: Elaboração do Autor.

Agora, ajustando o equilíbrio de mercado com as opiniões dos analistas de acordo com (2.22), (2.23) e (2.24), é possível gerar a distribuição *a posteriori* dos retornos esperados $E[R]$, bem como a matriz de covariância desta distribuição *a posteriori*.

Tabela 3.23 – Vetores de retornos esperados da distribuição *a posteriori* para 9 visões.

$E[R]$		
	IBOV	IFNC
BBAS3	0,18241903%	0,16418275%
BBDC4	0,14087360%	0,12618859%
BBSE3	0,10371785%	0,09379900%
CIEL3	0,07251195%	0,06235061%
CTIP3	0,05266810%	0,04895862%
ITUB4	0,12643111%	0,11262919%
PSSA3	0,04193637%	0,03823325%
SANB11	0,01645868%	0,00367025%
SULA11	0,03942440%	0,03509177%

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.24 – Matriz de covariância da distribuição *a posteriori* para 9 visões.

	Φ^{-1}								
	BBAS3	BBDC4	BBSE3	CIEL3	CTIP3	ITUB4	PSSA3	SANB11	SULA11
BBAS3	0,00003644	0,00000956	0,00000512	0,00000290	0,00000288	0,00000928	0,00000256	0,00000489	0,00000194
BBDC4	0,00000956	0,00002195	0,00000248	0,00000192	0,00000182	0,00000990	0,00000198	0,00000388	0,00000151
BBSE3	0,00000512	0,00000248	0,00001845	0,00000361	0,00000276	0,00000311	0,00000238	0,00000233	0,00000130
CIEL3	0,00000290	0,00000192	0,00000361	0,00001838	0,00000144	0,00000125	-0,00000014	0,00000156	0,00000152
CTIP3	0,00000288	0,00000182	0,00000276	0,00000144	0,00000955	0,00000198	0,00000060	0,00000012	0,00000086
ITUB4	0,00000928	0,00000990	0,00000311	0,00000125	0,00000198	0,00001645	0,00000200	0,00000356	0,00000122
PSSA3	0,00000256	0,00000198	0,00000238	-0,00000014	0,00000060	0,00000200	0,00001958	0,00000018	0,00000421
SANB11	0,00000489	0,00000388	0,00000233	0,00000156	0,00000012	0,00000356	0,00000018	0,00002639	0,00000122
SULA11	0,00000194	0,00000151	0,00000130	0,00000152	0,00000086	0,00000122	0,00000421	0,00000122	0,00002128

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.25 – Nova matriz de covariância da distribuição *a posteriori* para 9 visões.

	$\Sigma^{-} = \Sigma + \Phi^{-1}$								
	BBAS3	BBDC4	BBSE3	CIEL3	CTIP3	ITUB4	PSSA3	SANB11	SULA11
BBAS3	0,00098914	0,00053852	0,00036388	0,00024509	0,00021476	0,00049735	0,00022536	0,00033916	0,00020904
BBDC4	0,00053852	0,00061088	0,00025569	0,00018162	0,00015865	0,00043373	0,00017612	0,00026892	0,00016296
BBSE3	0,00036388	0,00025569	0,00044658	0,00019437	0,00015455	0,00024735	0,00015483	0,00018522	0,00013386
CIEL3	0,00024509	0,00018162	0,00019437	0,00039234	0,00010152	0,00015669	0,00006650	0,00013296	0,00010666
CTIP3	0,00021476	0,00015865	0,00015455	0,00010152	0,00021215	0,00015054	0,00007462	0,00008055	0,00007922
ITUB4	0,00049735	0,00043373	0,00024735	0,00015669	0,00015054	0,00047842	0,00016433	0,00024394	0,00014554
PSSA3	0,00022536	0,00017612	0,00015483	0,00006650	0,00007462	0,00016433	0,00041478	0,00008981	0,00018474
SANB11	0,00033916	0,00026892	0,00018522	0,00013296	0,00008055	0,00024394	0,00008981	0,00056682	0,00011326
SULA11	0,00020904	0,00016296	0,00013386	0,00010666	0,00007922	0,00014554	0,00018474	0,00011326	0,00044535

Fonte: Elaboração do Autor.

Por fim, utilizando (2.29) apresentamos o vetor ($m \times 1$) de pesos ótimos gerados pelo modelo de Black-Litterman:

Tabela 3.26 – Pesos ótimos de Black-Litterman da Carteira de Ações para 9 visões.

	$\omega^* = (\lambda \Sigma)^{-1} E[R]$	
	IBOV	IFNC
BBAS3	26,77%	69,15%
BBDC4	29,12%	75,07%
BBSE3	30,32%	79,07%
CIEL3	15,27%	30,15%
CTIP3	-6,58%	-8,74%
ITUB4	30,88%	72,86%
PSSA3	-11,50%	-28,17%
SANB11	-44,85%	-129,04%
SULA11	-3,31%	-7,38%

Fonte: Elaboração do Autor.

Seguindo o mesmo roteiro de aplicação, demonstramos apenas os resultados em forma de tabelas para a segunda e terceira simulação.

▪ Simulação com 3 visões:

Aqui também se utiliza o método de opiniões absolutas, então temos que:

Tabela 3.27 – Matriz P para 3 visões.

	P								
	BBAS3	BBDC4	BBSE3	CIEL3	CTIP3	ITUB4	PSSA3	SANB11	SULA11
Visão 1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Visão 2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Visão 3	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.28 – Vetor Q para 3 visões.

	Q
Visão 1	0,17560205%
Visão 2	0,14569221%
Visão 3	-0,10368809%

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.29 – Matriz diagonal Ω para 3 visões.

Ω		
0,00005133	0,0	0,0
0,0	0,00006544	0,0
0,0	0,0	0,00006005

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.30 – Vetores de retornos esperados da distribuição *a posteriori* para 3 visões.

	$E[R]$	
	IBOV	IFNC
BBAS3	0,15086645%	0,11082540%
BBDC4	0,12858721%	0,10538164%
BBSE3	0,08419380%	0,05642583%
CIEL3	0,06662293%	0,04027580%
CTIP3	0,05111528%	0,03756966%
ITUB4	0,12300867%	0,10085718%
PSSA3	0,05451443%	0,04054075%
SANB11	0,01089407%	-0,00663630%
SULA11	0,04916093%	0,03340388%

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.31 – Matriz de covariância da distribuição *a posteriori* para 3 visões.

	Φ^{-1}								
	BBAS3	BBDC4	BBSE3	CIEL3	CTIP3	ITUB4	PSSA3	SANB11	SULA11
BBAS3	0,00006386	0,00001865	0,00001893	0,00001273	0,00001127	0,00001826	0,00001123	0,00000962	0,00001020
BBDC4	0,00001865	0,00002529	0,00000839	0,00000645	0,00000561	0,00001320	0,00000630	0,00000560	0,00000572
BBSE3	0,00001893	0,00000839	0,00003709	0,00001410	0,00001079	0,00000925	0,00001024	0,00000587	0,00000832
CIEL3	0,00001273	0,00000645	0,00001410	0,00003671	0,00000703	0,00000532	0,00000289	0,00000446	0,00000733
CTIP3	0,00001127	0,00000561	0,00001079	0,00000703	0,00001888	0,00000586	0,00000423	0,00000168	0,00000499
ITUB4	0,00001826	0,00001320	0,00000925	0,00000532	0,00000586	0,00001975	0,00000632	0,00000525	0,00000516
PSSA3	0,00001123	0,00000630	0,00001024	0,00000289	0,00000423	0,00000632	0,00003951	0,00000192	0,00001596
SANB11	0,00000962	0,00000560	0,00000587	0,00000446	0,00000168	0,00000525	0,00000192	0,00002740	0,00000359
SULA11	0,00001020	0,00000572	0,00000832	0,00000733	0,00000499	0,00000516	0,00001596	0,00000359	0,00004319

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.32 – Nova matriz de covariância da distribuição *a posteriori* para 3 visões.

$\Sigma^{-} = \Sigma + \Phi^{-1}$									
	BBAS3	BBDC4	BBSE3	CIEL3	CTIP3	ITUB4	PSSA3	SANB11	SULA11
BBAS3	0,00101656	0,00054762	0,00037769	0,00025492	0,00022316	0,00050633	0,00023402	0,00034389	0,00021731
BBDC4	0,00054762	0,00061422	0,00026160	0,00018614	0,00016244	0,00043704	0,00018044	0,00027064	0,00016717
BBSE3	0,00037769	0,00026160	0,00046521	0,00020486	0,00016258	0,00025349	0,00016269	0,00018875	0,00014088
CIEL3	0,00025492	0,00018614	0,00020486	0,00041067	0,00010711	0,00016076	0,00006953	0,00013586	0,00011247
CTIP3	0,00022316	0,00016244	0,00016258	0,00010711	0,00022149	0,00015442	0,00007824	0,00008211	0,00008336
ITUB4	0,00050633	0,00043704	0,00025349	0,00016076	0,00015442	0,00048173	0,00016866	0,00024563	0,00014948
PSSA3	0,00023402	0,00018044	0,00016269	0,00006953	0,00007824	0,00016866	0,00043471	0,00009155	0,00019649
SANB11	0,00034389	0,00027064	0,00018875	0,00013586	0,00008211	0,00024563	0,00009155	0,00056783	0,00011564
SULA11	0,00021731	0,00016717	0,00014088	0,00011247	0,00008336	0,00014948	0,00019649	0,00011564	0,00046727

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.33 – Pesos ótimos de Black-Litterman da Carteira de Ações para 3 visões.

$\omega^* = (\lambda \Sigma^{-})^{-1} E[R]$		
	IBOV	IFNC
BBAS3	9,63%	9,63%
BBDC4	21,88%	65,10%
BBSE3	11,10%	11,10%
CIEL3	17,35%	17,35%
CTIP3	2,25%	2,25%
ITUB4	50,55%	138,11%
PSSA3	2,12%	2,12%
SANB11	-41,79%	-114,86%
SULA11	3,26%	3,26%

Fonte: Elaboração do Autor.

▪ Simulação com 2 visões:

Neste item se utiliza do método de opiniões relativas, então temos que:

Tabela 3.34 – Matriz P para 2 visões.

P									
	BBAS3	BBDC4	BBSE3	CIEL3	CTIP3	ITUB4	PSSA3	SANB11	SULA11
Visão 1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0
Visão 2	0	0	1	0	0	0	-1	0	0

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.35 – Vetor Q para 2 visões.

Q	
Visão 1	0,02990984%
Visão 2	0,11181319%

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.36 – Matriz diagonal Ω para 2 visões.

Ω	
0,00002258	0,0
0,0	0,00005760

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.37 – Vetores de retornos esperados da distribuição *a posteriori* para 2 visões.

	E[R]	
	IBOV	IFNC
BBAS3	0,16251935%	0,07118880%
BBDC4	0,13310338%	0,06227449%
BBSE3	0,10795227%	0,05906558%
CIEL3	0,08161904%	0,03973160%
CTIP3	0,05266168%	0,02513177%
ITUB4	0,11307354%	0,04554245%
PSSA3	0,03319959%	-0,00373281%
SANB11	0,09827703%	0,04379709%
SULA11	0,04920012%	0,01569905%

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.38 – Matriz de covariância da distribuição *a posteriori* para 2 visões.

	Φ^{-1}								
	BBAS3	BBDC4	BBSE3	CIEL3	CTIP3	ITUB4	PSSA3	SANB11	SULA11
BBAS3	0,00010341	0,00005576	0,00003574	0,00002482	0,00002231	0,00005346	0,00002817	0,00003550	0,00002352
BBDC4	0,00005576	0,00005730	0,00002536	0,00001780	0,00001638	0,00004811	0,00002090	0,00002753	0,00001758
BBSE3	0,00003574	0,00002536	0,00003940	0,00001746	0,00001455	0,00002482	0,00002408	0,00001750	0,00001610
CIEL3	0,00002482	0,00001780	0,00001746	0,00003973	0,00001003	0,00001644	0,00001056	0,00001319	0,00001221
CTIP3	0,00002231	0,00001638	0,00001455	0,00001003	0,00002184	0,00001591	0,00001022	0,00000810	0,00000907
ITUB4	0,00005346	0,00004811	0,00002482	0,00001644	0,00001591	0,00005022	0,00002028	0,00002615	0,00001663
PSSA3	0,00002817	0,00002090	0,00002408	0,00001056	0,00001022	0,00002028	0,00003756	0,00001231	0,00001876
SANB11	0,00003550	0,00002753	0,00001750	0,00001319	0,00000810	0,00002615	0,00001231	0,00005895	0,00001281
SULA11	0,00002352	0,00001758	0,00001610	0,00001221	0,00000907	0,00001663	0,00001876	0,00001281	0,00004679

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.39 – Nova matriz de covariância da distribuição *a posteriori* para 2 visões.

	$\Sigma^{-} = \Sigma + \Phi^{-1}$								
	BBAS3	BBDC4	BBSE3	CIEL3	CTIP3	ITUB4	PSSA3	SANB11	SULA11
BBAS3	0,00105611	0,00058472	0,00039450	0,00026701	0,00023420	0,00054153	0,00025096	0,00036977	0,00023063
BBDC4	0,00058472	0,00064623	0,00027857	0,00019750	0,00017321	0,00047195	0,00019504	0,00029257	0,00017902
BBSE3	0,00039450	0,00027857	0,00046752	0,00020823	0,00016634	0,00026906	0,00017654	0,00020039	0,00014866
CIEL3	0,00026701	0,00019750	0,00020823	0,00041369	0,00011011	0,00017188	0,00007720	0,00014459	0,00011735
CTIP3	0,00023420	0,00017321	0,00016634	0,00011011	0,00022445	0,00016447	0,00008424	0,00008853	0,00008744
ITUB4	0,00054153	0,00047195	0,00026906	0,00017188	0,00016447	0,00051220	0,00018262	0,00026654	0,00016095
PSSA3	0,00025096	0,00019504	0,00017654	0,00007720	0,00008424	0,00018262	0,00043277	0,00010194	0,00019929
SANB11	0,00036977	0,00029257	0,00020039	0,00014459	0,00008853	0,00026654	0,00010194	0,00059938	0,00012485
SULA11	0,00023063	0,00017902	0,00014866	0,00011735	0,00008744	0,00016095	0,00019929	0,00012485	0,00047087

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.40 – Pesos ótimos de Black-Litterman da Carteira de Ações para 2 visões.

	$\omega^* = (\lambda \Sigma^{-})^{-1} E[R]$	
	IBOV	IFNC
BBAS3	9,63%	9,63%
BBDC4	26,13%	60,66%
BBSE3	31,54%	81,75%
CIEL3	17,35%	17,35%
CTIP3	2,25%	2,25%
ITUB4	4,32%	-30,21%
PSSA3	-18,32%	-68,52%
SANB11	13,84%	13,84%
SULA11	3,26%	3,26%

Fonte: Elaboração do Autor.

(ii) Para a Carteira de Fundos de Investimentos Imobiliários.

Outra vez, aplicaremos a modelagem de B-L a esta carteira apresentando apenas as tabelas e resultados finais, porém, simulando duas séries de visões e/ou opiniões para a Carteira de FII: 1º com 10 visões absolutas e 2º com 5 visões absolutas.

Então, começamos exibindo a primeira parte do modelo:

Tabela 3.41 – Pesos da Capitalização de Mercado da Carteira de FII.

Código	Quantidade de Cotas Emitidas ¹	Valor de de Mercado em R\$ ²	Pesos de Mercado ω_{Mkt}
BRCR11	19.224.537	1.796.532.983	18,00%
BBPO11	15.919.690	1.543.891.536	15,47%
KNRI11	13.797.000	1.494.904.950	14,98%
HGRE11	738.310	840.196.780	8,42%
KNCR11	14.438.503	1.571.631.052	15,75%
HGBS11	537.492	749.263.848	7,51%
SAAG11	5.631.512	483.183.730	4,84%
TBOF11	10.050.000	575.865.000	5,77%
JSRE11	6.452.470	583.948.535	5,85%
HGLG11	340.100	338.708.991	3,39%
Total	87.129.614	9.978.127.404	100%

¹ Posição mais recente divulgada pela fundo

² Qdte. de Cotas emitidas x Cotação base 30/12/2015

Fonte: RI dos fundos. BM&FBovespa. Elaboração do Autor.

Para o cálculo do coeficiente de aversão ao risco da carteira, utilizamos como benchmark o índice IFIX (Fundos de Investimentos Imobiliários) e como taxa livre de risco o CDI, ambos em taxas diárias do período histórico selecionado, conforme tabela a seguir.

Tabela 3.42 – Risco-Retorno do benchmark e da taxa livre de risco.

	IFIX	CDI
Retorno (r')	0,00476295%	0,05055611%
Risco (σ')	0,40023149%	0,00000000%

Fonte: BMF&Bovespa. Cetip. Elaboração do Autor.

Tabela 3.43 – Coeficiente de aversão ao risco.

$$\lambda = \frac{E[r] - rf}{\sigma^2}$$

IFIX	28,58762920
------	-------------

¹ Em Módulo

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.44 – Projeções de analistas de mercado para a Carteira de FII.

Preço em 30/12/15	Rendimento Total 2016 ¹	Retorno Médio Esperado diário
BRCR11	20,66%	0,07454707%
BBPO11	20,61%	0,07437592%
KNRI11	22,61%	0,08093572%
HGRE11	8,68%	0,03304196%
KNCR11	29,45%	0,10247034%
HGBS11	16,34%	0,06005980%
SAAG11	28,78%	0,10043150%
TBOF11	35,04%	0,11927569%
JSRE11	28,93%	0,10088739%
HGLG11	21,14%	0,07613031%
	Média	0,08289171%
	Desvio	0,02470015%

¹ Potencial de Valorização das cotas + Yield (Rendimento)

Fonte: RI das empresas. Elaboração do Autor.

Agora, partindo para a segunda parte do modelo temos:

- Simulação com 10 visões:

Neste caso, trabalharemos novamente com visões do tipo absolutas. Tendo como resultados:

Tabela 3.45 – Matriz P para 10 visões.

	P									
	BRCR11	BBPO11	KNRI11	HGRE11	KNCRI1	HGBS11	SAAG11	TBOF11	JSRE11	HGLG11
Visão 1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Visão 2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Visão 3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Visão 4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Visão 5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Visão 6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Visão 7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Visão 8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Visão 9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Visão 10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.46 – Vetor Q para 10 visões.

Q	
Visão 1	0,07454707%
Visão 2	0,07437592%
Visão 3	0,08093572%
Visão 4	0,03304196%
Visão 5	0,10247034%
Visão 6	0,06005980%
Visão 7	0,10043150%
Visão 8	0,11927569%
Visão 9	0,10088739%
Visão 10	0,07613031%

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.47 – Matriz diagonal Ω para 10 visões.

Ω									
0,00001026	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,00000526	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,00001272	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,00001142	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,00001343	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00001279	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00000690	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00001665	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00103477	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00001626

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.48 – Vetor de retorno esperado da distribuição *a posteriori* para 10 visões.

E[R]	
IFIX	
BRCR11	0,08055493%
BBPO11	0,07119520%
KNRI11	0,08773012%
HGRE11	0,06199375%
KNCR11	0,09267752%
HGBS11	0,07040817%
SAAG11	0,07568891%
TBOF11	0,09334875%
JSRE11	1,02552545%
HGLG11	0,06168643%

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.49 – Matriz de covariância da distribuição *a posteriori* para 10 visões.

Φ^{-1}										
	BRCR11	BBPO11	KNRI11	HGRE11	KNCR11	HGBS11	SAAG11	TBOF11	JSRE11	HGLG11
BRCR11	0,00000501	0,00000036	0,00000017	0,00000018	0,00000007	0,00000006	0,00000020	0,00000039	0,00000047	0,00000006
BBPO11	0,00000036	0,00000240	0,00000025	0,00000046	0,00000003	0,00000037	0,00000048	0,00000024	0,00000168	0,00000022
KNRI11	0,00000017	0,00000025	0,00000019	0,00000042	0,00000034	0,00000033	0,00000014	0,00000030	0,00000018	0,00000024
HGRE11	0,00000018	0,00000046	0,00000042	0,00000537	0,00000017	0,00000063	0,00000020	0,00000055	0,00000103	0,00000035
KNCR11	0,00000007	0,00000003	0,00000034	0,00000017	0,00000665	0,00000036	0,00000002	-0,00000007	0,00000206	0,00000004
HGBS11	0,00000006	0,00000037	0,00000033	0,00000063	0,00000036	0,00000611	0,00000031	0,00000024	0,00000055	0,00000029
SAAG11	0,00000020	0,00000048	0,00000014	0,00000020	0,00000002	0,00000031	0,00000326	0,00000016	0,00000299	0,00000012
TBOF11	0,00000039	0,00000024	0,00000030	0,00000055	-0,00000007	0,00000024	0,00000016	0,00000080	0,00000033	0,00000046
JSRE11	0,00000047	0,00000168	0,00000018	0,00000103	0,00000206	0,00000055	0,00000299	0,00000033	0,00051151	-0,00000070
HGLG11	0,00000006	0,00000022	0,00000024	0,00000035	0,00000004	0,00000029	0,00000012	0,00000046	-0,00000070	0,00000799

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.50 – Nova matriz de covariância da distribuição *a posteriori* para 10 visões.

$\Sigma^{-1} = \Sigma + \Phi^{-1}$										
	BRCR11	BBPO11	KNRI11	HGRE11	KNCR11	HGBS11	SAAG11	TBOF11	JSRE11	HGLG11
BRCR11	0,00010762	0,00001796	0,00001148	0,00001395	0,00000450	0,00000892	0,00001260	0,00002021	0,00004594	0,00000686
BBPO11	0,00001796	0,00005503	0,00001548	0,00002446	0,00000473	0,00002124	0,00002260	0,00001646	0,00009615	0,00001367
KNRI11	0,00001148	0,00001548	0,00013335	0,00002371	0,00001601	0,00002040	0,00001081	0,00001825	0,00003707	0,00001488
HGRE11	0,00001395	0,00002446	0,00002371	0,00011956	0,00001070	0,00003280	0,00001562	0,00002925	0,00007721	0,00002057
KNCR11	0,00000450	0,00000473	0,00001601	0,00001070	0,00014093	0,00001725	0,00000371	0,00000084	0,00009363	0,00000418
HGBS11	0,00000892	0,00002124	0,00002040	0,00003280	0,00001725	0,00013406	0,00001860	0,00001774	0,00006264	0,00001786
SAAG11	0,00001260	0,00002260	0,00001081	0,00001562	0,00000371	0,00001860	0,00007223	0,00001231	0,00014186	0,00000937
TBOF11	0,00002021	0,00001646	0,00001825	0,00002925	0,00000084	0,00001774	0,00001231	0,00017456	0,00004141	0,00002383
JSRE11	0,00004594	0,00009615	0,00003707	0,00007721	0,00009363	0,00006264	0,00014186	0,00004141	0,01085920	-0,00000370
HGLG11	0,00000686	0,00001367	0,00001488	0,00002057	0,00000418	0,00001786	0,00000937	0,00002383	-0,00000370	0,00017059

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.51 – Pesos ótimos de Black-Litterman da Carteira de FII para 10 visões.

$\omega^* = (\lambda \Sigma)^{-1} E[R]$	
IFIX	
BRCR11	15,35%
BBPO11	17,18%
KNRI11	12,64%
HGRE11	-0,13%
KNCR11	17,51%
HGBS11	4,66%
SAAG11	16,87%
TBOF11	10,79%
JSRE11	2,61%
HGLG11	6,28%

Fonte: Elaboração do Autor.

- Simulação com 5 visões:

Novamente com visões absolutas temos:

Tabela 3.52 – Matriz P para 5 visões.

	P									
	BRCR11	BBPO11	KNRI11	HGRE11	KNCR11	HGBS11	SAAG11	TBOF11	JSRE11	HGLG11
Visão 1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Visão 2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Visão 3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Visão 4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Visão 5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.53 – Vetor Q para 5 visões.

Q	
Visão 1	0,07454707%
Visão 2	0,07437592%
Visão 3	0,08093572%
Visão 4	0,03304196%
Visão 5	0,10247034%

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.54 – Matriz diagonal Ω para 5 visões.

Ω				
0,00001026	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,00000526	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,00001272	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,00001142	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,00001343

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.55 – Vetor de retorno esperados da distribuição *a posteriori* para 5 visões.

$E[R]$	
IFIX	
BRCR11	0,07901917%
BBPO11	0,07068692%
KNRI11	0,08625187%
HGRE11	0,06099537%
KNCR11	0,09672791%
HGBS11	0,07579790%
SAAG11	0,06266642%
TBOF11	0,06695677%
JSRE11	1,89916376%
HGLG11	0,04189208%

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.56 – Matriz de covariância da distribuição *a posteriori* para 5 visões.

Φ^{-1}										
	BRCR11	BBPO11	KNRI11	HGRE11	KNCR11	HGBS11	SAAG11	TBOF11	JSRE11	HGLG11
BRCR11	0,00000504	0,00000041	0,00000020	0,00000024	0,00000007	0,00000018	0,00000041	0,00000079	0,00000131	0,00000017
BBPO11	0,00000041	0,00000252	0,00000031	0,00000057	0,00000007	0,00000084	0,00000100	0,00000058	0,00000423	0,00000054
KNRI11	0,00000020	0,00000031	0,00000623	0,00000050	0,00000036	0,00000070	0,00000031	0,00000065	0,00000066	0,00000055
HGRE11	0,00000024	0,00000057	0,00000050	0,00000551	0,00000021	0,00000131	0,00000048	0,00000119	0,00000253	0,00000082
KNCR11	0,00000007	0,00000007	0,00000036	0,00000021	0,00000668	0,00000070	0,00000009	-0,00000009	0,00000420	0,00000011
HGBS11	0,00000018	0,00000084	0,00000070	0,00000131	0,00000070	0,00001188	0,00000120	0,00000102	0,00000307	0,00000120
SAAG11	0,00000041	0,00000100	0,00000031	0,00000048	0,00000009	0,00000120	0,00000633	0,00000066	0,00001144	0,00000052
TBOF11	0,00000079	0,00000058	0,00000065	0,00000119	-0,00000009	0,00000102	0,00000066	0,00001592	0,00000179	0,00000185
JSRE11	0,00000131	0,00000423	0,00000066	0,00000253	0,00000420	0,00000307	0,00001144	0,00000179	0,00102184	-0,00000212
HGLG11	0,00000017	0,00000054	0,00000055	0,00000082	0,00000011	0,00000120	0,00000052	0,00000185	-0,00000212	0,00001590

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.57 – Nova matriz de covariância da distribuição *a posteriori* para 5 visões.

$\Sigma^- = \Sigma + \Phi^{-1}$										
	BRCR11	BBPO11	KNRI11	HGRE11	KNCR11	HGBS11	SAAG11	TBOF11	JSRE11	HGLG11
BRCR11	0,00010765	0,00001801	0,00001151	0,00001401	0,00000450	0,00000904	0,00001281	0,00002061	0,00004678	0,00000697
BBPO11	0,00001801	0,00005514	0,00001554	0,00002456	0,00000477	0,00002170	0,00002312	0,00001679	0,00009870	0,00001398
KNRI11	0,00001151	0,00001554	0,00013339	0,00002379	0,00001604	0,00002077	0,00001098	0,00001860	0,00003755	0,00001520
HGRE11	0,00001401	0,00002456	0,00002379	0,00011970	0,00001074	0,00003348	0,00001591	0,00002989	0,00007872	0,00002104
KNCR11	0,00000450	0,00000477	0,00001604	0,00001074	0,00014096	0,00001759	0,00000378	0,00000082	0,00009577	0,00000424
HGBS11	0,00000904	0,00002170	0,00002077	0,00003348	0,00001759	0,00013983	0,00001949	0,00001852	0,00006516	0,00001876
SAAG11	0,00001281	0,00002312	0,00001098	0,00001591	0,00000378	0,00001949	0,00007530	0,00001282	0,00015030	0,00000977
TBOF11	0,00002061	0,00001679	0,00001860	0,00002989	0,00000082	0,00001852	0,00001282	0,00018239	0,00004287	0,00002522
JSRE11	0,00004678	0,00009870	0,00003755	0,00007872	0,00009577	0,00006516	0,00015030	0,00004287	0,01136954	-0,00000512
HGLG11	0,00000697	0,00001398	0,00001520	0,00002104	0,00000424	0,00001876	0,00000977	0,00002522	-0,00000512	0,00017849

Fonte: Elaboração do Autor.

Tabela 3.58 – Pesos ótimos de Black-Litterman da Carteira de FII para 5 visões.

$\omega^* = (\lambda \Sigma^-)^{-1} E[R]$	
IFIX	
BRCR11	15,92%
BBPO11	17,93%
KNRI11	13,09%
HGRE11	0,34%
KNCR11	16,67%
HGBS11	6,83%
SAAG11	4,40%
TBOF11	5,25%
JSRE11	5,32%
HGLG11	3,09%

Fonte: Elaboração do Autor.

4. Comparação de Resultados e Análise de Desempenho

Iniciamos este capítulo confrontando os resultados obtidos pela modelagem desenvolvida no capítulo anterior, e em seguida, aplicaremos os pesos ω dos portfólios sugeridos em uma nova base de informações fora da amostra original - que data de 04/01/2016 a 26/04/2016, totalizando 77 observações de preços - com o objetivo de verificar a performance dos portfólios recomendados via uma análise de backtest.

(i) Para a Carteira de Ações.

Na tabela a seguir exibimos os resultados da distribuição de pesos ω dos ativos para cada portfólio sugerido, sendo que este processo de diversificação é mais bem compreendido através das composições disponíveis na figura 4.1. Nesta mesma figura, percebe-se que para os portfólios de Markowitz o modelo concentrou o maior percentual no ativo CTIP3, que não por acaso obteve a melhor relação Risco-Retorno da base histórica ($r = 0,09\%$ a.d. ; $\sigma = 1,42\%$ a.d.), por outro lado, abriu posições vendidas justamente em ativos que obtiveram uma relação Risco-Retorno desfavorável, como em BBAS3, BBDC4 e BBSE3, evidenciando um dos problemas clássicos da modelagem por M-V, que a técnica de otimização tende a selecionar ativos com características mais atraentes e desprezar os menos atraentes.

Tabela 4.1 – Resumo dos portfólios recomendados para a Carteira de Ações.

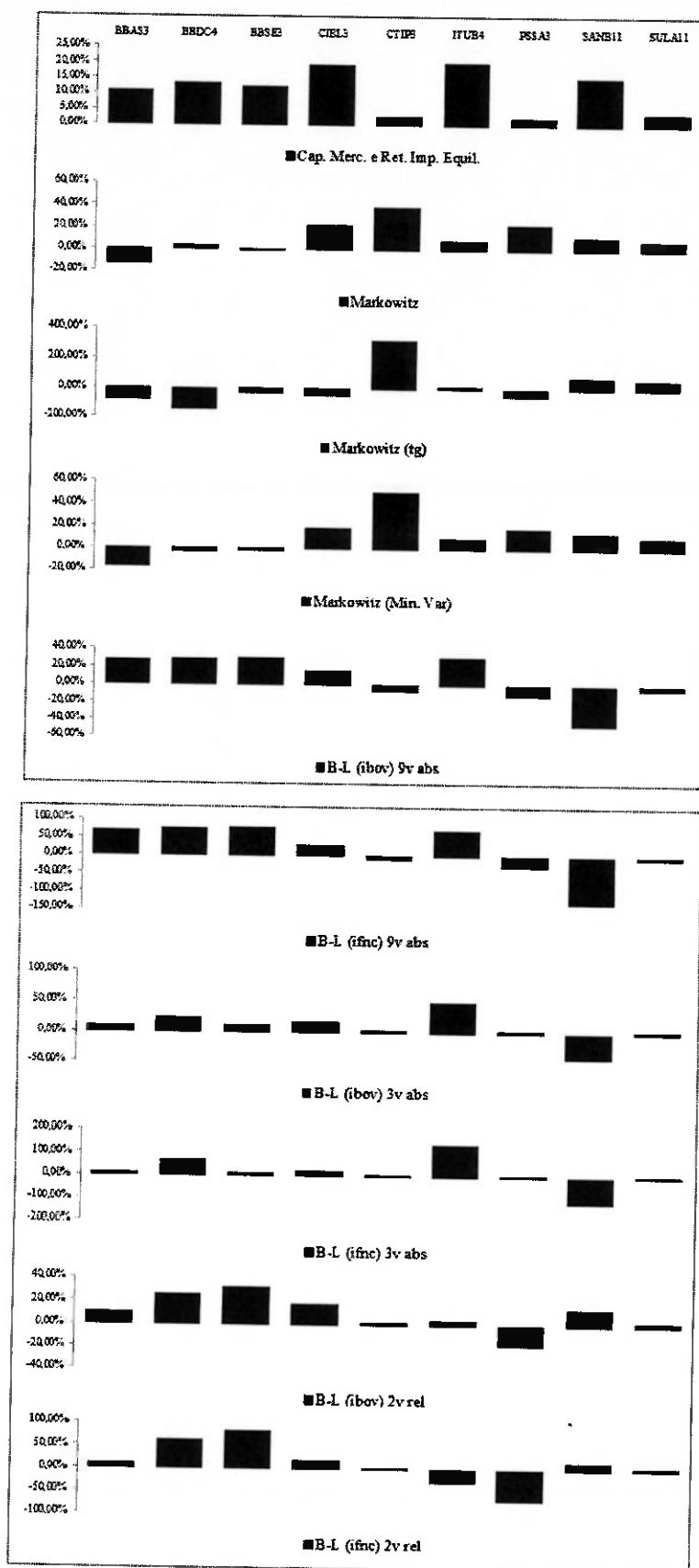
Ativos	ω	ω	ω	ω	ω	ω		ω		ω	
	Capitalização de Mercado	Retorno de equilíbrio II	Markowitz ¹	Markowitz ² (tangente)	Markowitz ² (mín. var.)	Black-Litterman com 9 visões absolutas		Black-Litterman com 3 visões absolutas		Black-Litterman com 2 visões relativas	
						IBOV	IFNC	IBOV	IFNC	IBOV	IFNC
BBAS3	10,71%	10,71%	-13,10%	-81,93%	-16,27%	26,77%	69,15%	9,63%	9,63%	9,63%	9,63%
BBDC4	13,57%	13,57%	3,28%	-147,37%	-3,67%	29,12%	75,07%	21,88%	65,10%	26,13%	60,66%
BBSE3	12,33%	12,33%	-1,05%	-33,54%	-2,55%	30,32%	79,07%	11,10%	11,10%	31,54%	81,75%
CIEL3	19,27%	19,27%	21,58%	-51,99%	18,18%	15,27%	30,15%	17,35%	17,35%	17,35%	17,35%
CTIP3	2,50%	2,50%	38,11%	322,38%	51,24%	-6,58%	-8,74%	2,25%	2,25%	2,25%	2,25%
ITUB4	20,27%	20,27%	8,59%	13,58%	8,82%	30,88%	72,86%	50,55%	138,11%	4,32%	-30,21%
PSSA3	2,36%	2,36%	22,32%	-50,83%	18,94%	-11,50%	-28,17%	2,12%	2,12%	-18,32%	-68,52%
SANB11	15,37%	15,37%	11,80%	71,36%	14,55%	-44,85%	-129,04%	-41,79%	-114,86%	13,84%	13,84%
SULA11	3,62%	3,62%	8,47%	58,34%	10,77%	-3,31%	-7,38%	3,26%	3,26%	3,26%	3,26%
Soma ω	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	66,10%	152,97%	76,35%	134,05%	90,00%	90,00%
Saldo de ω em r_f	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	33,90%	-52,97%	23,65%	-34,05%	10,00%	10,00%

¹ considerando μ como a taxa de r_f diária média do período analisado

² se o saldo em r_f for positivo, entende-se por investimento, se r_f for negativo, entende-se por empréstimo. Porém, o modelo de B-L não impõe condições para manter o ativo sem risco na carteira.

Fonte: Elaboração do Autor.

Figura 4.1 – Composição de ω por portfólio recomendado.



Fonte: Elaboração do Autor.

Já na modelagem de B-L a distribuição de pesos que parte do portfólio de Capitalização de Mercado é influenciada pelas opiniões dos analistas e/ou investidores.

Para o caso de 9 visões absolutas, tanto utilizando o coeficiente λ do IBOV como do IFNC, temos que o modelo pondera os ω seguindo fielmente as perspectivas de retorno das projeções, como exemplo podemos citar as posições vendidas em SANB11 que tem uma projeção negativa de preços, PSSA3 e SULA11 que tem projeção relativamente baixa em relação aos outros ativos, fazendo com que tais posições vendidas façam caixa para alocação nos ativos com projeções superiores e favoráveis. É importante observar que, esta dependência nas opiniões pode ser um ponto negativo para o modelo, tendo em vista que, caso as opiniões estejam equivocadas, poderá levar o portfólio a resultados financeiros abaixo ou extremamente ao contrário do esperado. Por este motivo, o modelo não exige que sejam atribuídas opiniões a todos os ativos, que é o caso das simulações a seguir.

Neste portfólio reduzimos o número de visões absolutas de 9 para 3, impusemos pesos 1 para BBDC4, ITUB4 e SANB11. Como resultado, compreendemos que nestes três ativos houve significativa mudança em ω em relação ao portfólio inicial de Capitalização de Mercado. Em BBDC4 por exemplo, o peso original era de aproximadamente 13,57% e foi para 21,88% (IBOV) e 65,10% (IFNC), em ITUB4 temos que o peso original era de 20,27% e foi para 50,55% (IBOV) e 138,11% (IFNC), e por último em SANB11 o peso original era de positivo em 15,37%, naturalmente pois se trata de pesos por valor de mercado, e foi para uma posição vendida em 41,79% (IBOV) e 114,86% (IFNC) respectivamente. Outro ponto a se destacar refere-se ao fato de a distribuição praticamente não ser alterada em relação ao portfólio de Capitalização de Mercado, nos ativos que não foram atribuídas visões e/ou opiniões.

Na última sugestão de portfólio, as opiniões foram inseridas não mais de maneira absoluta, mas sim de maneira relativa, ou seja, ao invés de sustentar uma visão diretamente no ativo, faremos uma visão indireta entre um ou mais ativos. Nesta aplicação foram dadas 2 visões relativas entre BBDC4 e ITUB4 em que Bradesco superaria o retorno de Itaú em aproximadamente 0,03% a.d., e entre BBSE3 e PSSA3 em que BB Seguridade superaria o retorno de Porto Seguro em aproximadamente 0,11% a.d. Como resultados, novamente o modelo seguiu as opiniões e distribuiu pesos positivos e alavancados para BBDC4 e BBSE3, e de maneira contrária, atribuiu peso baixo ou até mesmo negativo, com posições vendidas nos ativos ITUB4 – que para os

outros portfólios estava sendo considerado com uma excelente projeção de alta – e PSSA3.

Agora, após a demonstração dos portfólios sugeridos por ambas as modelagens, aplicaremos tais diversificações em uma nova amostra de dados históricos para validar os modelos aplicados e verificar seu desempenho em uma análise de backtest. Entretanto, é importante salientar que, modelos de seleção e otimização de carteiras de investimentos não têm como característica principal, prever flutuação e volatilidade de preços dos ativos. Aplicando as informações de Risco-Retorno temos as tabelas a seguir.

Tabela 4.2 – Risco-Retorno das ações com dados da nova amostra histórica.

	Retorno (r)	Risco (σ)
BBAS3	0,55731428%	4,87509116%
BBDC4	0,40560315%	3,38562985%
BBSE3	0,41896567%	3,52235575%
CIEL3	0,02227802%	3,60541850%
CTIP3	0,21765756%	1,61874718%
ITUB4	0,33798684%	2,91225062%
PSSA3	-0,03681748%	3,48048133%
SANB11	0,22635509%	2,53119757%
SULA11	-0,20691503%	2,58677158%

Fonte: Elaboração do Autor.

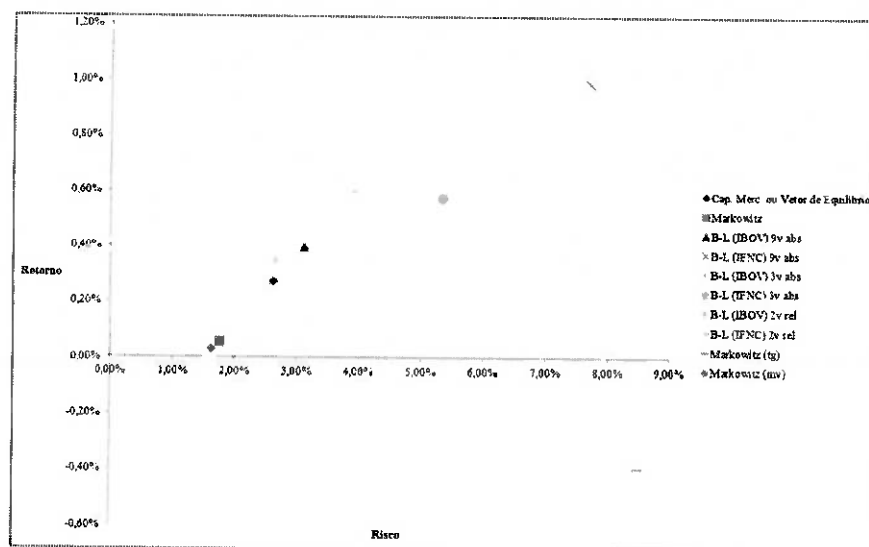
Tabela 4.3 – Risco-Retorno dos portfólios com dados da nova amostra histórica.

	Retorno (P)	Risco (σ)
Capitalização de Mercado	0,27104371%	2,62280527%
Retorno de Equilíbrio II	0,27104371%	2,62280527%
Markowitz	0,05368894%	1,76170614%
Markowitz (tangente)	-0,39932083%	8,49262775%
Markowitz (mín. var.)	0,03277174%	1,62766849%
Black-Litterman com 9 visões absolutas	IBOV	0,39731027%
	IFNC	0,98862769%
Black-Litterman com 3 visões absolutas	IBOV	0,26643750%
	IFNC	0,57224958%
Black-Litterman com 2 visões relativas	IBOV	0,34650783%
	IFNC	0,59869685%
Média	0,30900518%	3,85798254%
Máximo	0,98862769%	8,49262775%
Mínimo	-0,39932083%	1,62766849%

Fonte: Elaboração do Autor.

Graficamente plotamos os dados da tabela 4.3 na figura a seguir no plano cartesiano de Risco-Retorno.

Figura 4.2 – Plano Risco-Retorno simulado dos portfólios sugeridos.



Fonte: Elaboração do Autor.

Como critério para avaliar o desempenho destas carteiras, escolhemos o Índice de Sharpe de acordo com:

$$IS = \frac{\mu - r_f}{\sigma} \quad (4.1)$$

A tabela a seguir exibe o ranking dos portfólios sugeridos por este método de avaliação. Então, é possível perceber que os modelos de B-L obtiveram uma posição superior no ranking comparado com os modelos de Markowitz, sendo que, somente os portfólios de B-L 2v. rel. IFNC e B-L 9v. abs. IFNC apresentaram um desempenho superior ao IS_{IBOV} , e em relação ao IS_{IFNC} , nenhum portfólio conseguiu ser superior.

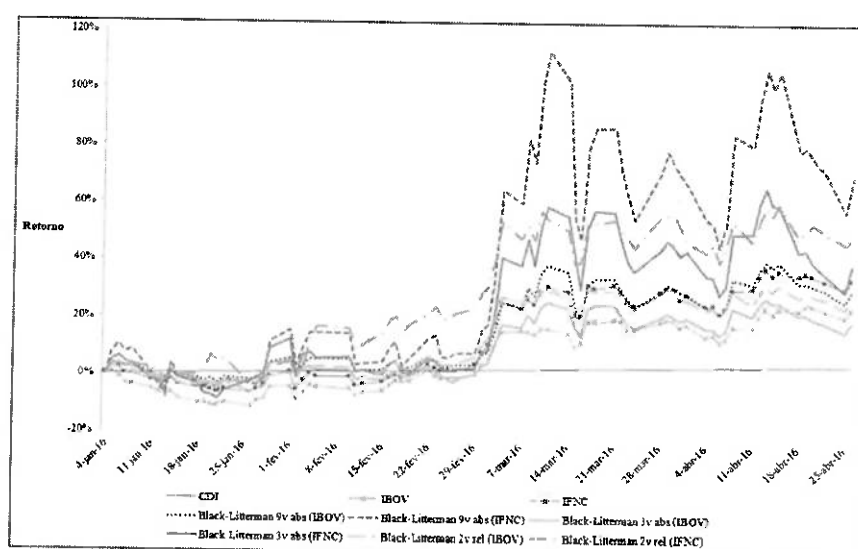
Tabela 4.4 – Ranking de Índice de Sharpe para os portfólios sugeridos.

	IS_{IBOV}	IS_{IFNC}	$IS_{PORT.}$	$IS_p > IS_{IBOV}$	$IS_p > IS_{IFNC}$
Black-Litterman com 2 visões relativas IFNC			0,13999835	SIM	NÃO
Black-Litterman com 9 visões absolutas IFNC			0,12157199	SIM	NÃO
Black-Litterman com 9 visões absolutas IBOV			0,11017105	NÃO	NÃO
Black-Litterman com 2 visões relativas IBOV			0,11004671	NÃO	NÃO
Black-Litterman com 3 visões absolutas IFNC			0,09707846	NÃO	NÃO
Capitalização de Mercado	0,11865791	0,14222701	0,08292761	NÃO	NÃO
Retorno de Equilíbrio II			0,08292761	NÃO	NÃO
Black-Litterman com 3 visões absolutas IBOV			0,08192053	NÃO	NÃO
Markowitz			0,00008413	NÃO	NÃO
Markowitz (mín. var.)			-0,01275996	NÃO	NÃO
Markowitz (tangente)			-0,05332408	NÃO	NÃO

Fonte: Elaboração do Autor.

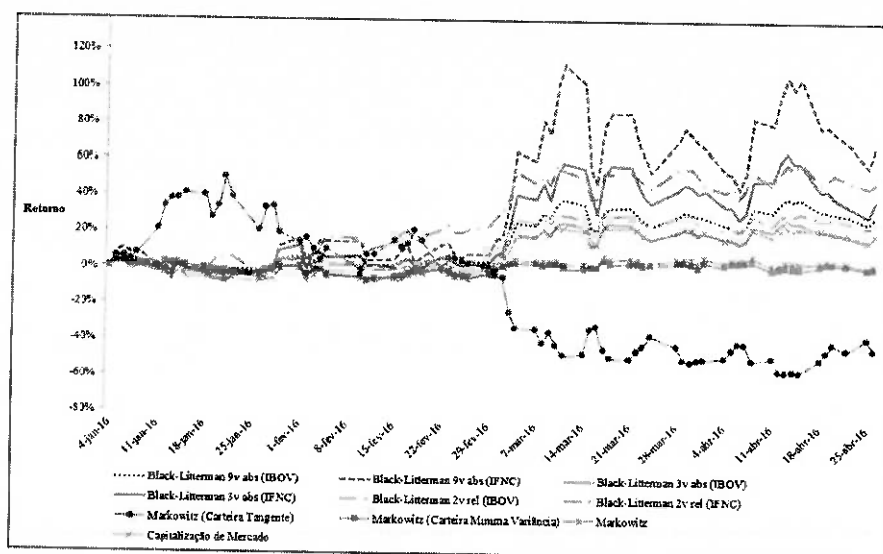
Nesta etapa, comparamos os retornos acumulados dos portfólios recomendados no período da nova amostra. Primeiramente confrontamos os resultados da modelagem de B-L com os benchmarks e com a taxa livre de risco, o CDI, conforme a figura 4.3. Na sequência analisamos o desempenho comparativo do modelo de B-L versus o de Markowitz, demonstrado na figura 4.4.

Figura 4.3 – Simulação de retorno acumulado (B-L vs Benchmarks) – nova amostra.



Fonte: Elaboração do Autor.

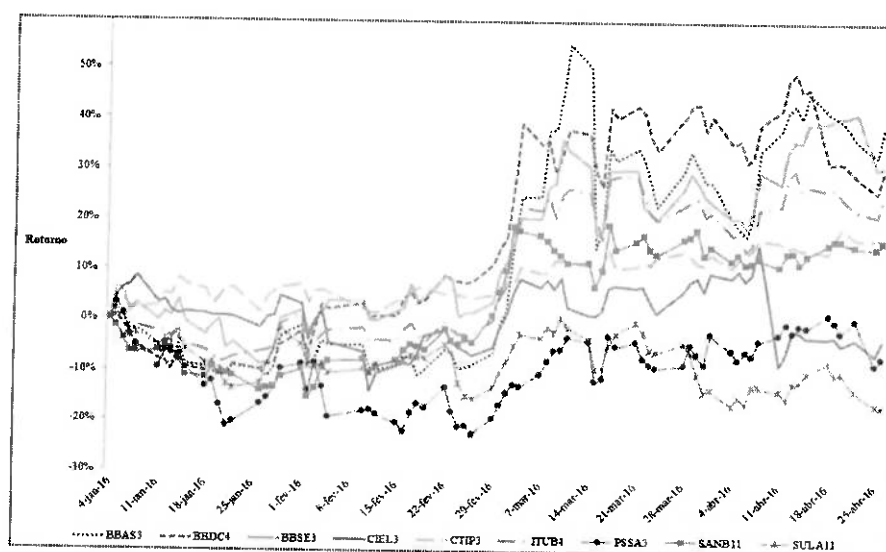
Figura 4.4 – Simulação de retorno acumulado (B-L vs Markowitz) – nova amostra.



Fonte: Elaboração do Autor.

Era esperado que os portfólios criados pela modelagem de B-L obtivessem um desempenho superior aos do modelo de Markowitz, pois as tabelas 4.2 e 4.3 já demonstravam tal expectativa, considerando que as opiniões dos analistas recomendavam estimativas favoráveis para os ativos que, precisamente no período da nova base amostral apresentaram uma performance positiva como pode ser observado na figura 4.5 abaixo.

Figura 4.5 – Retorno acumulado da Carteira de Ações na nova amostra histórica.



Fonte: Elaboração do Autor.

Em última análise para a Carteira de Ações, apresentamos na tabela a seguir os resultados de desempenho em relação aos benchmarks e da taxa livre de risco. Nesta situação, é possível perceber que os portfólios de B-L em sua maioria, na linha de retorno acumulado superaram os modelados por Markowitz, bem como o IBOV (23,83%), o IFNC (33,92%) e o CDI (4,16%), conforme evidenciado nas figuras 4.3 e 4.4. No quesito de desempenho diário, temos que os portfólios em geral mantiveram um equilíbrio de resultados acima dos benchmarks e da taxa CDI, porém, comparando-se o modelo de B-L com o de Markowitz, a modelagem de Black-Litterman novamente exibe um resultado superior.

Tabela 4.5 – Estatística de retorno dos portfólios sugeridos.

	Cap. de Merc. ou vetor Π	B-L (9v abs) IBOV	B-L (9v abs) IFNC	B-L (3v abs) IBOV	B-L (3v abs) IFNC	B-L (2v rel) IBOV	B-L (2v rel) IFNC	Markowitz	Markowitz (Tangente)	Markowitz (Mín. Var.)
Dias de amostra 76										
Retorno Acumulado	19,70%	30,33%	69,64%	19,35%	38,88%	26,65%	48,70%	2,94%	-44,15%	1,49%
Retorno Médio Diário	0,27%	0,40%	0,99%	0,27%	0,57%	0,35%	0,60%	0,05%	-0,40%	0,03%
% de Dias Acima do IBOV	46,05%	52,63%	50,00%	50,00%	44,74%	53,95%	52,63%	44,74%	48,68%	47,37%
% de Dias Abaixo do IBOV	53,95%	47,37%	50,00%	50,00%	55,26%	46,05%	47,37%	55,26%	51,32%	52,63%
% de Dias Acima do IFNC	39,47%	47,37%	48,68%	36,84%	44,74%	48,68%	56,58%	43,42%	50,00%	43,42%
% de Dias Abaixo do IFNC	60,53%	52,63%	51,32%	63,16%	55,26%	51,32%	43,42%	56,58%	50,00%	56,58%
% de Dias Acima do CDI	51,32%	51,32%	50,00%	50,00%	48,68%	53,95%	59,21%	47,37%	48,68%	50,00%
% de Dias Abaixo do CDI	48,68%	48,68%	50,00%	50,00%	51,32%	46,05%	40,79%	52,63%	51,32%	50,00%
% de Dias Retorno POSITIVO	52,63%	51,32%	50,00%	50,00%	48,68%	53,95%	59,21%	47,37%	48,68%	50,00%
% de Dias Retorno NEGATIVO	47,37%	48,68%	50,00%	50,00%	51,32%	46,05%	40,79%	52,63%	51,32%	50,00%

(ii) Para a Carteira de Fundos de Investimentos Imobiliários.

As análises para a Carteira de FII seguiram as mesmas diretrizes adotadas nas análises do item (i) desta seção.

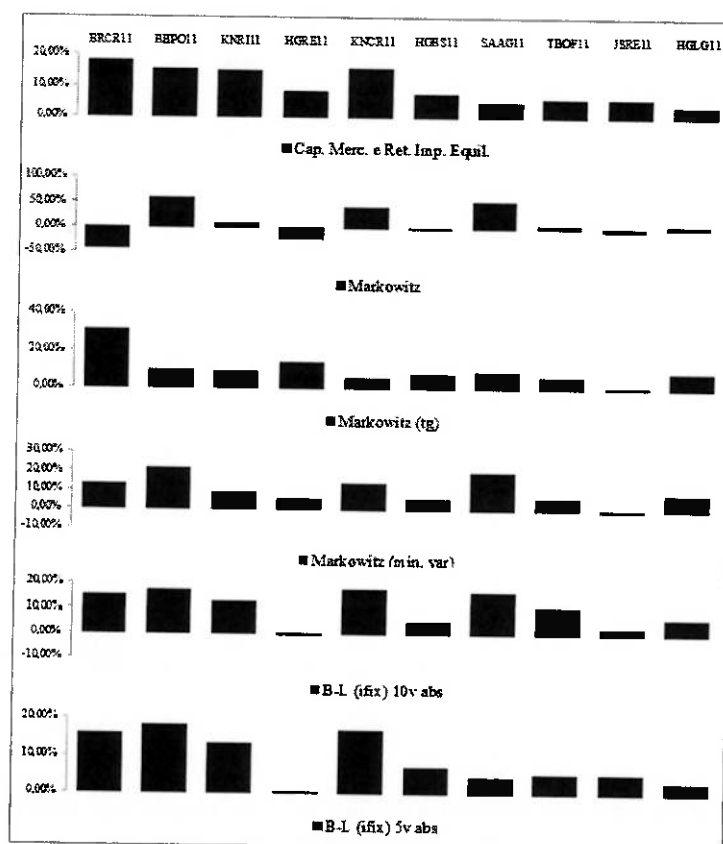
Então, para os modelos de Markowitz percebe-se novamente que o método seguiu a tendência de selecionar e aperfeiçoar ativos com uma relação Risco-Retorno mais favorável, isto pode ser visto nos ativos BBPO11, KNCR11 e SAAG11 que juntos somam mais de 150% da distribuição dos pesos. Em contrapartida, o modelo abriu posições vendidas nos ativos que mantém a relação Risco-Retorno desfavorável, como é o caso dos ativos BRGR11 e HGRE11. Desta forma temos igualmente a Carteira de Ações, uma Carteira de FII também com baixo nível de diversificação.

Tabela 4.6 – Resumo dos portfólios recomendados para a Carteira de FII.

Ativos	ω Capitalização de Mercado	ω Retorno de equilíbrio II	ω Markowitz ¹	ω Markowitz ¹ (tangente)	ω Markowitz ¹ (mín. var.)	ω Black-Litterman com 10 visões absolutas IFIX	ω Black-Litterman com 5 visões absolutas IFIX
BRCR11	18,00%	18,00%	-42,96%	31,10%	13,00%	15,35%	15,92%
BBPO11	15,47%	15,47%	58,78%	9,60%	21,62%	17,18%	17,93%
KNRI11	14,98%	14,98%	6,26%	8,83%	8,20%	12,64%	13,09%
HGRE11	8,42%	8,42%	-21,72%	13,72%	5,06%	-0,13%	0,34%
KNCR11	15,75%	15,75%	41,16%	5,22%	14,01%	17,51%	16,67%
HGBS11	7,51%	7,51%	-0,03%	7,00%	5,28%	4,66%	6,83%
SAAG11	4,84%	4,84%	53,40%	8,61%	19,56%	16,87%	4,40%
TBOF11	5,77%	5,77%	5,15%	6,00%	5,79%	10,79%	5,25%
JSRE11	5,85%	5,85%	-5,39%	1,04%	-0,53%	2,61%	5,32%
HGLG11	3,39%	3,39%	5,34%	8,88%	8,01%	6,28%	3,09%
Soma ω	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	103,75%	88,82%
saldo em rf ²	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-3,75%	11,18%

¹ considerando μ como a rf diária média do período analisado² se o saldo em rf for positivo, entende-se por investimento, se rf for negativo, entende-se por empréstimo

Fonte: Elaboração do Autor.

Figura 4.6 – Composição de ω por portfólio sugerido.

Fonte: Elaboração do Autor.

Na modelagem de B-L verifica-se que os resultados ficam levemente aproximados aos valores do portfólio da Capitalização de Mercado – que é uma das bases do modelo – mesmo considerando que as projeções dos analistas estão relativamente otimistas. Então, percebe-se que o modelo se comporta de forma cautelosa, influenciado pelo alto valor do coeficiente de aversão ao risco com base no benchmark IFIX.

Igualmente, após a demonstração dos portfólios recomendados por ambas as modelagens, aplicaremos tais diversificações em uma nova amostra de dados históricos (que data de 04/01/2016 a 26/04/2016). Desta forma, utilizamos as informações de Risco-Retorno desta nova amostra para cada ativo e aplicamos aos portfólios sugeridos, conforme tabelas a seguir.

Tabela 4.7 – Risco-Retorno dos FII com dados da nova amostra histórica.

	Retorno (r)	Risco (σ)
BRCR11	0,17964352%	1,67970788%
BBPO11	0,12866070%	0,80520726%
KNRI11	0,14445352%	1,42090167%
HGRE11	0,04659292%	1,67301035%
KNCR11	0,08338107%	0,71237357%
HGBS11	0,15938780%	1,55197494%
SAAG11	0,15325491%	0,99184729%
TBOF11	0,09900121%	1,62183862%
JSRE11	0,00554817%	1,16222514%
HGLG11	0,04036767%	1,37792817%

Fonte: Elaboração do Autor.

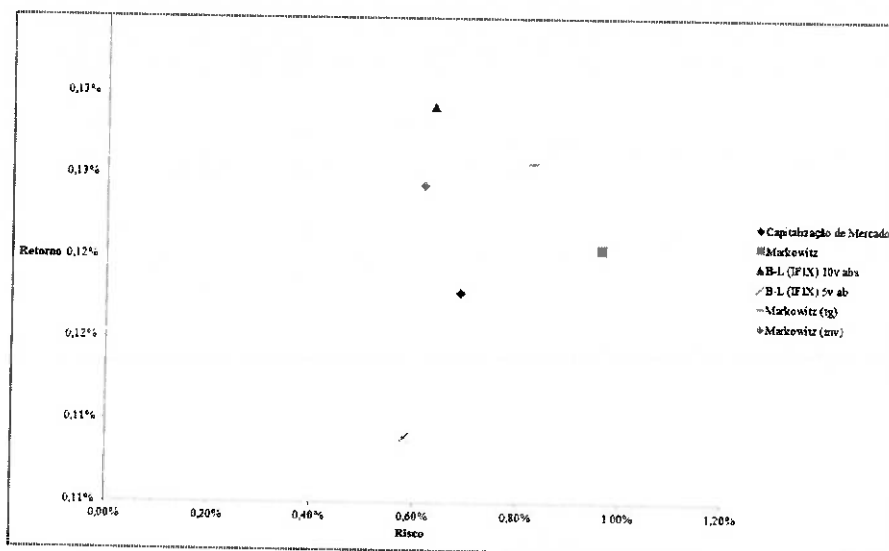
Tabela 4.8 – Risco-Retorno dos portfólios com dados da nova amostra histórica.

Portfólios		Retorno (P)	Risco (σ)
Capitalização de Mercado		0,11774828%	0,68945776%
Retorno de Equilíbrio II		0,11774828%	0,68945776%
Markowitz		0,12044891%	0,96438029%
Markowitz (tangente)		0,12565720%	0,82819452%
Markowitz (mín. var.)		0,12438405%	0,61711023%
Black-Litterman com 10 visões absolutas	IFIX	0,12911319%	0,63693329%
Black-Litterman com 5 visões absolutas	IFIX	0,10898748%	0,58090641%
	Média	0,12058391%	0,71520575%
	Máximo	0,12911319%	0,96438029%
	Mínimo	0,10898748%	0,58090641%

Fonte: Elaboração do Autor.

Novamente dispomos dos dados da 4.8, na figura do plano cartesiano de Risco-Retorno.

Figura 4.7 – Plano Risco-Retorno simulado dos portfólios sugeridos.



Aqui, também utilizamos como critério de avaliação de desempenho o Índice de Sharpe conforme (4.1), em que os resultados podem ser conferidos na tabela a seguir.

Tabela 4.9 – Ranking de Índice de Sharpe para os portfólios sugeridos.

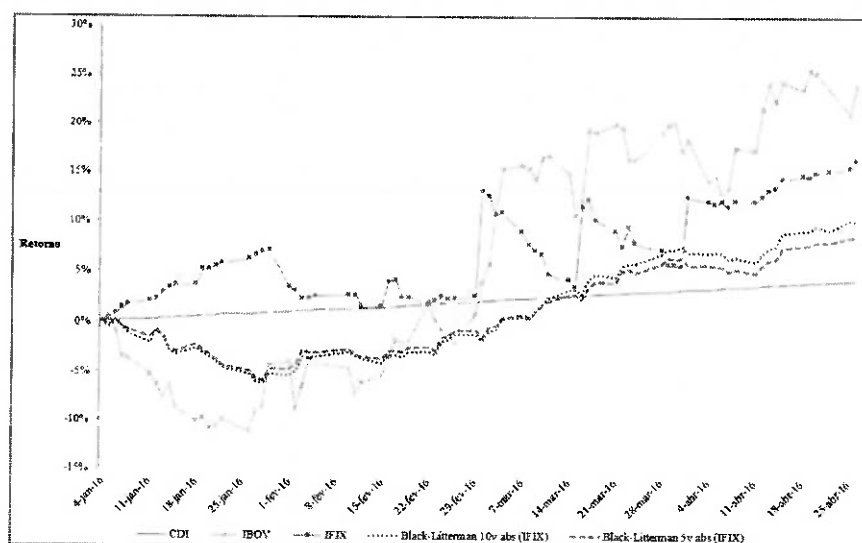
	IS _{IFIX}	IS _{PORT.}	IS _p > IS _{IFIX}
Black-Litterman com 10 visões absolutas IFIX		0,11865053	SIM
Markowitz (mín. var.)		0,11479849	SIM
Black-Litterman com 5 visões absolutas IFIX		0,09544869	SIM
Capitalização de Mercado	0,08646964	0,09312762	SIM
Retorno de Equilíbrio II		0,09312762	SIM
Markowitz (tangente)		0,08707673	SIM
Markowitz		0,06937946	NÃO

Fonte: Elaboração do Autor.

Com base na tabela acima, vemos que os portfólios de B-L e Markowitz (Tangente) foram destaque no ranking, principalmente o portfólio de B-L 10v. abs. que lidera o grupo. Em suma, todos os portfólios superaram o IS_{IFIX} com exceção do de Markowitz.

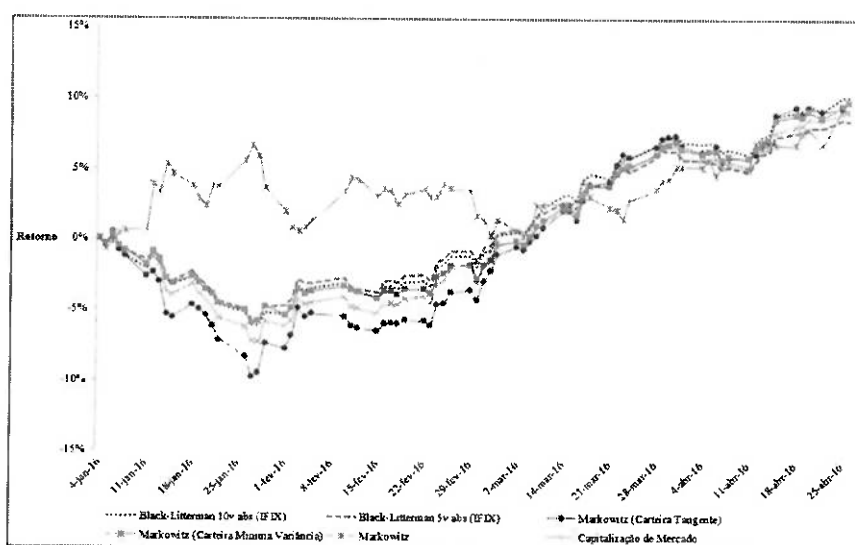
Agora, comparamos os retornos acumulados dos portfólios sugeridos no período da nova amostra. Do mesmo modo, confrontamos os resultados da modelagem de B-L com os benchmarks e com a taxa livre de risco, o CDI, conforme a figura 4.8. Na sequência analisamos o desempenho comparativo do modelo de B-L versus o de Markowitz, demonstrado na figura 4.9.

Figura 4.8 – Simulação de retorno acumulado (B-L vs Benchmarks) – nova amostra.



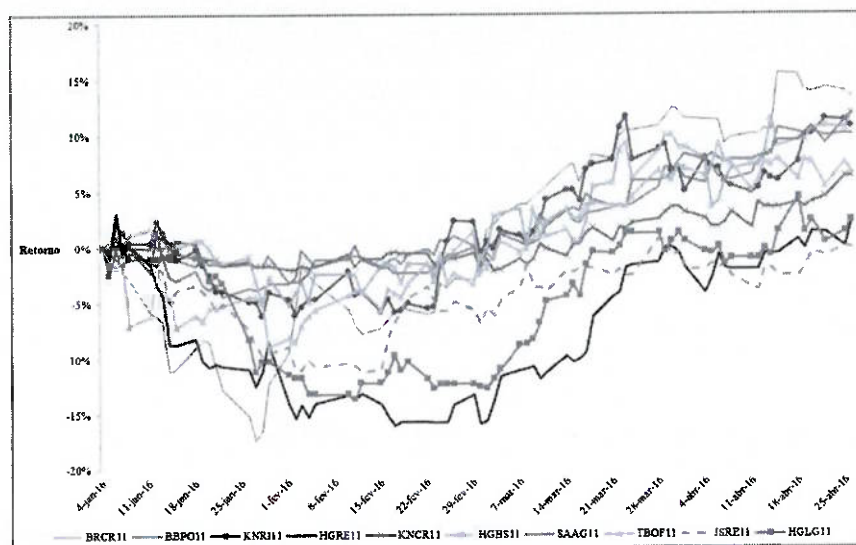
Fonte: Elaboração do Autor.

Figura 4.9 – Simulação de retorno acumulado (B-L vs Markowitz) – nova amostra.



Fonte: Elaboração do Autor.

Figura 4.10 – Retorno acumulado da Carteira de FII na nova amostra histórica.



Fonte: Elaboração do Autor.

Diante dos gráficos apresentados, podemos verificar que na figura 4.8 os modelos de B-L não conseguem superar seu benchmark principal – o IFIX – da mesma maneira, se quer chega próximo ao IBOV. A partir da segunda quinzena de Mar/16 os portfólios de B-L começam a obter um resultado acumulado positivo em relação ao CDI, esta mudança coincide com as curvas demonstradas na figura 4.10 que evidencia esta inversão de tendência, e pode ser explicada devido à nova sinalização do COPOM - Comitê de Política Monetária do Banco Central do Brasil – dada ao mercado, referente à trajetória futura da taxa Selic. Neste período o mercado começou a precificar uma possível queda na Selic (atualmente em 14,25% a.a.) para o ano de 2016, e tradicionalmente de maneira generalizada, há uma relação inversa entre FII e taxa de juros (Selic e CDI), ou seja, uma diminuição nas taxas de juros faz com que os FII fiquem mais atrativos e consequentemente o preço das cotas sobem no curto prazo – o inverso é verdadeiro.

Comparando a modelagem de B-L versus o de Markowitz, vemos através da figura 4.9 que, com exceção do portfólio de Markowitz o restante mantém resultados acumulados negativos e só iniciam uma inversão de tendência a partir do período de sinalização dado pelo COPOM, de acordo com o explicado no parágrafo anterior, sendo que todos os portfólios sugeridos se mantêm relativamente próximos até o final do período analisado.

Por último, apresentamos na tabela a seguir os resultados de desempenho em relação aos benchmarks e da taxa livre de risco. No contexto de retorno acumulado, apesar das proximidades de resultados dos portfólios sugeridos, verifica-se que o modelo de B-L 10v. abs. foi levemente superior em relação aos outros portfólios.

Nas linhas de desempenho diário, temos que os portfólios em geral também mantiveram certo equilíbrio de resultados acima dos benchmarks e da taxa CDI.

Tabela 4.10 – Estatística de retorno dos portfólios sugeridos.

	Cap. de Merc. ou vetor II	B-L (10v abs) IFIX	B-L (5v abs) IFIX	Markowitz	Markowitz (Tangente)	Markowitz (Mín. Var.)
Dias de amostra 76						
Retorno Acumulado	9,16%	10,13%	8,49%	9,20%	9,73%	9,75%
Retorno Médio Diário	0,12%	0,13%	0,11%	0,12%	0,13%	0,12%
% de Dias Acima do IFIX	55,26%	55,26%	51,32%	56,58%	56,58%	55,26%
% de Dias Abaixo do IFIX	44,74%	44,74%	48,68%	43,42%	43,42%	44,74%
% de Dias Acima do CDI	52,63%	50,00%	51,32%	48,68%	53,95%	55,26%
% de Dias Abaixo do CDI	47,37%	50,00%	48,68%	51,32%	46,05%	44,74%
% de Dias Retorno POSITIVO	53,95%	56,58%	52,63%	50,00%	57,89%	57,89%
% de Dias Retorno NEGATIVO	46,05%	43,42%	47,37%	50,00%	42,11%	42,11%

Fonte: Elaboração do Autor.

5. Conclusões Finais

O modelo de Black-Litterman aparece no mundo das finanças na década de 90 - mais especificamente na área de gestão de portfólios - como alternativa ao tradicional modelo de Média-Variância desenvolvido anteriormente por Harry Markowitz. Tendo como propósito, corrigir as “falhas” e “problemas” oriundos das decisões de investimentos financeiros. Tal modelo traz oportunidades úteis e adequadas para os agentes do mercado financeiro, proporcionando flexibilidade no grau em que permite a inserção de opiniões subjetivas dentro de um modelo com uma estrutura estatística robusta, combinando informações quantitativas de maneira sólida e condizente com as suas expectativas. Desta maneira, a proposta dos autores é particularmente atrativa, pois, sabemos que o mercado financeiro é repleto de opiniões, visões ou especulações subjetivas, seja para ativos de renda fixa, renda variável ou para as perspectivas econômicas e políticas.

Nas aplicações realizadas nesta monografia, no capítulo 3, o modelo B-L atingiu um dos seus objetivos, demonstrando que a distribuição de pesos foi destacada de acordo com as opiniões ou visões atribuídas por cada tipo de simulação (absoluta ou relativa), portanto, o modelo impôs risco exclusivamente em ativos que tiveram uma visão definida e manteve os demais ativos em posições neutra, próximo da carteira de equilíbrio e/ou Capitalização de Mercado. Contrariando o modelo de M-V que, tanto a Carteira de Ações como a de FII, obtiveram distribuições tendenciosas e com baixo nível de diversificação.

No capítulo 4, comparando os dois modelos, constata-se que o de B-L apresentou resultados superiores em relação ao de Markowitz, principalmente para as simulações efetuadas na Carteira de Ações, quando se avaliou o desempenho de retorno acumulado e também via o método de classificação de carteiras, o índice de Sharpe.

Para finalizar, como sugestão para pesquisas de temas relacionados a esta monografia, indicamos: 1) aplicação a uma carteira de títulos públicos ou privados de renda fixa; 2) teste do modelo para outros métodos de inserção de visões, como os modelos de séries temporais ou de previsão ARMA, ARIMA e GARCH; 3) verificar a validade do modelo para períodos mais longos, por exemplo, de 2 a 3 anos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ATEM, G. M. Métodos Bayesianos em Alocação de Ativos: Avaliação de Desempenho. Fundação Getúlio Vargas. EESP. 2013.
- BARBOSA, V. S. Um Estudo do Modelo de Macro alocação Proposto por Black-Litterman. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2010.
- BLACK, F.; LITTERMAN, R. Asset Allocation: Combining Investor Views With Market Equilibrium. Goldman, Sachs & CO. Fixed Income Research. 1990.
- _____. Global Portfolio Optimization. Journal of Fixed Income. 1991. v1. n2. 07-18p.
- _____. Global Asset Allocation with Equities, Bonds and Currencies. Goldman, Sachs & CO. Fixed Income Research. 1991.
- _____. Portfolio Optimization. Financial Analysts Journal. 1992. v9. 28-42p.
- DROBETZ, W. How to Avoid the Pitfalls in Portfolio Optimization? Putting the Black-Litterman Approach at Work. Financial Markets and Portfolio Management. 2001. v15. 59-75p.
- FUSAI, G.; MEUCCI, A. Assessing Views. Risk Magazine. 2003. n16. v3. 18-21p.
- GIACOMETTI, R. Stable distributions in the Black-Litterman approach to asset allocation. Quantitative Finance. 2007. 423-433p.
- GRINOLD, R.; KAHN, R. Active Portfolio Management: A Quantitative Approach for Providing Superior Returns and Controlling Risk. McGraw-Hill. 2000.
- HE, G.; LITTERMAN, R. The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios. Investment Management Research. 1999.
- IDZOREK, T. M. A Step-By-Step Guide to the Black-Litterman Model: Incorporating User Specified Confidence Levels. Zephyr Associates. 2004. 03-06p.
- _____. Strategic Asset Allocation and Commodities. Ibbotson White Paper. 2006.
- KRISHNAN, H.; MAINS, N. The Two-Factor Black-Litterman Model. Risk Magazine. 2005.
- LEE, W. Advanced Theory and Methodology of Tactical Asset Allocation. New Hope, PA: Frank Fabozzi Associates, 2000.
- LOBARINHAS, R. B. Modelos Black-Litterman e GARCH Ortogonal para uma Carteira do Tesouro Nacional. Instituto de Matemática e Estatística da USP. 2012.
- LITTERMAN, R. Modern Investment Management: A Equilibrium Approach. John Wiley and Sons, Inc. 2003.

- MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. *The Journal of Finance*. 1952. v1. 77-91p.
- MICHAUD, R. O. The Markowitz Optimization Enigma: Is "Optimized" Optimal? *Financial Analysts Journal*. 1989. 31-41p.
- MEUCCI, A. Beyond Black-Litterman in Practice: A Five-Step Recipe to Input Views on non-Normal Markets. Working paper available on SSRN. 2006.
- MEUCCI, A. Fully Flexible Views: Theory and Practice. Working paper available on SSRN. 2008.
- _____. Risk and Asset Allocation. Springer Finance. 2005.
- _____. The Black-Litterman Approach: Original Model and Extensions. Working paper available on SSRN. 2010.
- PORTO, L. S. M. da S. Utilização do Modelo de Black-Litterman para Gestão de Hedge Funds do Brasil. Fundação Getúlio Vargas. EPGE. 2010.
- TOBIN, J. Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. *Review of Economic Studies*. 1958. v26. n1. 65-86p.
- TOBIN, J. The Theory of Portfolio Selection. 1965. 03-51p.
- WALTERS, J. The Black-Litterman Model in Detail. <http://blacklitterman.org/>. 2014.

APÊNDICE A – Demonstrações Matemáticas

Neste apêndice, apresentamos os resultados analíticos cujas demonstrações são mais elaboradas, e faz sentido deduzi-las neste espaço. Estas expressões utilizam diversos conceitos expostos nas seções de onde foram retiradas, e, portanto, servem para auxiliar a compreensão da teoria e ilustrar os métodos numéricos utilizados nas aplicações.

A1. – Uma breve introdução à Teoria de Bayes

Esta seção fornece uma visão geral de parte relevante da teoria de Bayes, a fim de criar um vocabulário comum que pode ser usado na análise do modelo de Black-Litterman a partir de uma abordagem Bayesiana.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (A1.1)$$

Sendo,

$P(A)$: distribuição *a priori*.

$P(B)$: distribuição marginal da visão do investidor.

$P(A|B)$: distribuição *a posteriori*.

$P(B|A)$: distribuição de amostragem.

Quando aplicamos esta fórmula e solucionamos para obter a distribuição *a posteriori*, a distribuição $P(B)$ irá desaparecer nas constantes de integração de modo que a partir deste ponto em diante iremos despreza-la.

Um problema geral no uso da teoria de Bayes é identificar uma distribuição *a priori* intuitiva e tratável. Um dos pressupostos fundamentais do modelo de Black-Litterman (e também de otimização por Média-Variância) é que os retornos de ativos são normalmente distribuídos. Por esse motivo, vamos nos limitar ao caso de distribuições condicionais e *a priori* distribuídas normalmente. Uma vez que os parâmetros de entrada são distribuídos normalmente, então a distribuição *a posteriori* também irá seguir uma distribuição normal.

Outro pressuposto essencial do modelo de B-L, é que a variância das distribuições *a priori* e condicional sobre a média são conhecidas, mas a média não é conhecida. Este processo é conhecido na literatura Bayesiana como média desconhecida e variância conhecida.

Definindo as distribuições, temos que:

$$P(A) \sim N(x, \frac{S}{n}) \quad (A1.2)$$

Em que,

S : é a variância da amostra da distribuição sobre a média, com n amostras.

$$P(B|A) \sim N(\mu, \Omega) \quad (A1.3)$$

Sendo,

Ω : é a incerteza de estimativa na média μ estimativa da média, não é a variância de distribuição sobre a média.

$$P(A|B) \sim N \{ [\Omega^{-1}\mu + nS^{-1}x]' [\Omega^{-1} + nS^{-1}]^{-1}, [\Omega^{-1} + nS^{-1}]^{-1} \} \quad (A1.4)$$

E, a variância em (A1.4) é a variância da média estimada sobre a média atual. Em estatística Bayesiana o inverso da variância é conhecido como a precisão. Desta forma, podemos descrever a distribuição *a posteriori* como a média ponderada das distribuições *a priori* e condicional, onde o fator de ponderação é a respectiva precisão.

A2. – Dedução da Equação Completa de Black-Litterman

Este apêndice apresenta uma dedução alternativa da equação completa de Black-Litterman para o retorno *a posteriori* esperado. Partindo de (2.22) que vai decorrer em (2.28).

$$\tilde{\mu} = E[R] = \{[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q]\} \quad (\text{A2.1})$$

Separando em duas partes o segundo termo:

$$\tilde{\mu} = E[R] = \left\{ [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + [(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}P]^{-1}(P'\Omega^{-1}Q) \right\}$$

Substituindo o termo de precisão no primeiro termo com a forma alternativa:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} = E[R] &= \left\{ [\tau\Sigma - \tau\Sigma P' [P\tau\Sigma P' + \Omega]^{-1} P\tau\Sigma] (\tau\Sigma)^{-1} \Pi \right\} + [(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}P]^{-1}(P'\Omega^{-1}Q) \\ \tilde{\mu} = E[R] &= \left[\Pi - [\tau\Sigma P' [P\tau\Sigma P' + \Omega]^{-1} P\tau\Sigma] \right] + [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}(P'\Omega^{-1}Q) \\ \tilde{\mu} = E[R] &= \left[\Pi - [\tau\Sigma P' [P\tau\Sigma P' + \Omega]^{-1} P\tau\Sigma] \right] + [(\tau\Sigma)(\tau\Sigma)^{-1} [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}(P'\Omega^{-1}Q)] \\ \tilde{\mu} = E[R] &= \left[\Pi - [\tau\Sigma P' [P\tau\Sigma P' + \Omega]^{-1} P\tau\Sigma] \right] + [(\tau\Sigma)[I_n + P'\Omega^{-1}P\tau\Sigma]^{-1}(P'\Omega^{-1}Q)] \\ \tilde{\mu} = E[R] &= \left[\Pi - [\tau\Sigma P' [P\tau\Sigma P' + \Omega]^{-1} P\tau\Sigma] \right] + [\tau\Sigma[I_n + P'\Omega^{-1}P\tau\Sigma]^{-1}(\Omega(P')^{-1})^{-1}Q)] \\ \tilde{\mu} = E[R] &= \left[\Pi - [\tau\Sigma P' [P\tau\Sigma P' + \Omega]^{-1} P\tau\Sigma] \right] + [\tau\Sigma[\Omega(P')^{-1} + P\tau\Sigma]^{-1}Q)] \\ \tilde{\mu} = E[R] &= \left[\Pi - [\tau\Sigma P' [P\tau\Sigma P' + \Omega]^{-1} P\tau\Sigma] \right] + [\tau\Sigma P' (P')^{-1} [\Omega(P')^{-1} + P\tau\Sigma]^{-1}Q)] \\ \tilde{\mu} = E[R] &= \left[\Pi - [\tau\Sigma P' [P\tau\Sigma P' + \Omega]^{-1} P\tau\Sigma] \right] + [\tau\Sigma P' [\Omega + P\tau\Sigma P']^{-1}Q)] \end{aligned}$$

Assim, apresenta-se a forma alternativa da equação de Black-Litterman para o retorno *a posteriori*:

$$\tilde{\mu} = E[R] = [\Pi + \tau\Sigma P' (\tau P \Sigma P')^{-1}] (Q P \Pi) \quad (\text{A2.2})$$

A3. – Etapas resumidas para aplicação do modelo de Black-Litterman

Este apêndice resume as etapas necessárias para implementar o modelo de Black-Litterman.

Temos os seguintes parâmetros:

ω_{mkt} = Pesos de equilíbrio para cada ativo. Derivado do Capitalização de Mercado ou do CAPM;

Σ = Matriz de covariâncias entre os ativos. Pode ser calculado a partir de dados históricos;

r_f = Taxa livre de risco;

λ = O coeficiente de aversão ao risco de mercado (benchmark);

τ = A medida da incerteza da variância de equilíbrio;

Primeiro usamos otimização reversa para calcular o vetor de excesso de retorno implícito do equilíbrio de mercado ($n \times 1$), usando (2.4).

$$\Pi = \lambda \Sigma \omega$$

Em seguida, formulamos os pontos de vista dos investidores, analistas e gestores, especificando P , Ω , e Q . Dadas as k visões e n ativos, então P é uma matriz ($k \times n$) onde cada linha pode somar 0 (visão relativa) ou 1 (visão absoluta). Q é um vetor ($k \times 1$) dos visões e Ω é uma matriz diagonal ($n \times n$) da covariância das visões.

Para o próximo passo, assumindo que estamos certos em todos os pontos de vista, nós aplicamos a “equação mestre” de Black-Litterman para calcular a estimativa dos retornos *a posteriori* usando (2.22).

$$\tilde{\mu} = E[R] = \{[(\tau \Sigma)^{-1} + P' \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P' \Omega^{-1} Q]\}$$

E variância *a posteriori* usando (2.23).

$$\phi^{-1} = \{[(\tau \Sigma)^{-1} + P' \Omega^{-1} P]^{-1}\}$$

Computamos a nova variância a *posteriori* usando (2.24).

$$E[R] \sim N(\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma}) \quad \text{com } \tilde{\Sigma} = \Sigma + \phi^{-1}$$

E agora podemos calcular os pesos para a carteira ótima eficiente sem restrições a partir de (2.29).

$$\omega^* = (\lambda \tilde{\Sigma})^{-1} \tilde{\mu}$$