

MONOGRAFIA - TRABALHO DE FORMATURA

**22/45 - A GEOMETRIA IRREGULAR DE AQUÍFERO NAS ESTIMATIVAS DE
TRANSMISSIVIDADE: UM ESTUDO NUMÉRICO DE TESTE DE BOMBEAMENTO**

Autor

Phillipe Ferreira Lima

Sob orientação de

Prof. Dr. Ricardo Hirata

Prof. Dra. Alraune Zech



Departamento de Geologia Sedimentar e Ambiental

Instituto de Geociências
Universidade de São Paulo

2022

**A Geometria Irregular de Aquífero nas Estimativas de Transmissividade: um Estudo
Numérico de Teste de Bombeamento
TF - 22/45**

Aluno: Phillipe Ferreira Lima

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Hirata

Coorientadora: Prof. Dra. Alraune Zech

1 RESUMO

Os métodos convencionais para a análise de testes de bombeamento partem da premissa de que o aquífero deve ser homogêneo em sua condutividade hidráulica (K), armazenamento, e espessura saturada (b). Diversas técnicas foram criadas para transpor tal limitação, entretanto poucas são aquelas amplamente utilizadas. Resultados de testes em aquíferos de grande heterogeneidade incorrem em imprecisões. Assim, este trabalho tem como objetivo investigar os erros no cálculo da transmissividade ($T=Kb$) obtidos em aquíferos com espessura irregular. Modelos numéricos criados evidenciam o efeito desta irregularidade nos dados de rebaixamento de cargas hidráulicas, como a demora em alcançar um estado estacionário, um maior período de um estado quase estacionário no qual as cargas hidráulicas variam, mas são quase constantes, bem como oscilações nas cargas hidráulicas a curtos períodos de bombeamento. Os resultados indicam que a irregularidade da espessura implica em erros de estimativas de transmissividade em torno de 10% para testes de bombeamento conduzidos com a coleta de dados em um poço. Para o caso em que a coleta dos dados de rebaixamento ocorre em diversos poços a diferentes distâncias do local bombeado, o erro das estimativas é da ordem de 0,23% para a configuração utilizada.

**A Geometria Irregular de Aquífero nas Estimativas de Transmissividade: um Estudo
Numérico de Teste de Bombeamento
TF - 22/45**

Aluno: Phillipe Ferreira Lima

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Hirata

Coorientadora: Prof. Dra. Alraune Zech

2 ABSTRACT

Conventional methods for analyzing pumping tests start from the premise that the aquifer must be homogeneous in its hydraulic conductivity (K), storage, and thickness (b). Several techniques were created to transport this limitation, however few are widely used. Results of tests in aquifers of great heterogeneity implies in inaccuracies. Thus, this work aims to investigate the uncalculated errors of transmissivity ($T=Kb$) obtained in aquifers with irregular thickness. Generated numerical models show that the effect of this irregularity on the hydraulic load drawdown data, such as the delay of the arrival of a steady state, a longer period of a quasi-steady state in which the head are changing, but are almost constant, as well as oscilations of the heads in early time. The results indicate that the thickness irregularity implies errors in transmissivity estimates around 10% for conducted pumping tests with data collection in a single well. For the case where the gathering of drawdown data takes place in several wells at different distances from the pumped location, the estimation error is of the order of 0.23% for the configuration used.

Lista de Figuras

1	Malha gerada utilizando Gmsh para o caso de aquífero com espessura constante (benchmark) e um zoom especificando os detalhes dos elementos da malha. A região em amarelo representa o embasamento impermeável e a região verde o aquífero.	14
2	Malha gerada utilizando Gmsh para o caso 1 e um zoom especificando os detalhes dos elementos da malha. A região em amarelo representa o embasamento impermeável e a região verde o aquífero.	15
3	Malha gerada utilizando Gmsh para o caso 2 e um zoom especificando os detalhes dos elementos da malha. A região em amarelo representa o embasamento impermeável e a região verde o aquífero.	16
4	Exemplificação da distribuição usada dos pontos amostrados no tempo.	18
5	Curvas de rebaixamento obtidas para o caso benchmark (referência). Os pontos representam as cargas hidráulicas observadas na simulação.	23
6	Curvas de rebaixamento obtidas para o caso 1. Os pontos representam as cargas hidráulicas observadas na simulação.	24
7	Curvas de rebaixamento obtidas para o caso 2. Os pontos representam as cargas hidráulicas observadas na simulação.	25
8	Curvas da diferença entre a solução GRF e os dados obtidos das modelagens numéricas.	27
9	Curvas da proporção de desvio entre os dados obtidos das modelagens numéricas e a solução GRF.	28
10	Condutividades hidráulicas obtidas utilizando a solução GRF. Em (a) os valores em logaritmo e em (b) o erro em porcentagem dos valores K obtidos em relação com o valor de K real do aquífero (input).	29
11	Transmissividades obtidas utilizando a solução GRF e os valores de espessuras no local do poço de monitoramento analisado. Em (a) os valores em logaritmo e em (b) o erro em porcentagem dos valores T obtidos em relação com o valor de T real do aquífero (input) para cada posição.	30
12	Mapa de correlação cruzada entre os valores de carga hidráulica e estimativa de transmissividade a (A) curtos e (B) longos período de bombeamento. Adaptado de Wu et al., 2005	34

Lista de Tabelas

1	Parâmetros utilizados para solucionar o modelo numérico.	17
2	Parâmetros utilizados para a modelagem.	18
3	Intervalos das curvas de rebaixamento analisados.	21
4	Valores de $\ln K$ obtidos em (m/s).	30
5	Valores de $\ln T$ obtidos em (m/s).	31

Conteúdo

1	RESUMO	1
2	ABSTRACT	2
3	INTRODUÇÃO	6
4	METAS E OBJETIVOS	7
5	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	8
5.1	Teste de Bombeamento	8
5.2	Modelo Numérico de Aquífero	10
6	MATERIAIS E MÉTODOS	13
6.1	Malha	13
6.1.1	Benchmark	13
6.1.2	Aquífero com espessura irregular - caso 1	14
6.1.3	Aquífero com espessura irregular - caso 2	14
6.2	OpenGeoSys	15
6.2.1	Equação governante de fluxo de água subterrânea em um aquífero con- finado	15
6.2.2	Condições iniciais e de contorno	17
6.2.3	Solução numérica	17
6.2.4	Parâmetros do modelo	17
6.2.5	Coleta de dados	18
6.3	Modelo Generalized Radial Flow (GRF)	18
6.4	Estimativas de transmissividade	20
6.4.1	Intervalo de curva analisado	20
7	RESULTADOS OBTIDOS	22
7.1	Curva de rebaixamento	22
7.2	Estimativas de condutividade hidráulica	29
7.3	Estimativas de transmissividade	30
8	INTERPRETAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	32
8.1	Período pós-inicial da curva de rebaixamento	32
8.2	Intervalo da curva analisado	33
8.3	Significado das estimativas	34
8.3.1	Parâmetros efetivos	35
9	CONCLUSÕES	37
10	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	38
11	ANEXO	41

3 INTRODUÇÃO

A caracterização das propriedades hidráulicas de um aquífero é fundamental para o planejamento de seu uso, prevenção e remediação de uma contaminação. Entre diversos métodos utilizados, o teste de bombeamento é o mais comum. Entre eles, as técnicas mais famosas são as desenvolvidas por Cooper-Jacob (1946) e a solução analítica de Theis (1935), que estimam a transmissividade (T) e o coeficiente de armazenamento (S). Estes métodos exigem que tais características sejam homogêneas no espaço. Porém, a maioria dos aquíferos são heterogêneos. Isto resulta em discrepâncias entre os parâmetros hidráulicos obtidos e as características reais do aquífero. A depender do rigor da investigação hidrogeológica é necessária uma maior acuidade nestes resultados para melhor entender e prever os processos hidrogeológicos neste aquífero, sobretudo quando a heterogeneidade destes parâmetros é pronunciada.

Wu et al. (2005) e Wen et al. (2010) estudaram os resultados de longos testes de bombeamento em regime estacionário, em campos de poços com intenso monitoramento das cargas hidráulicas, e calcularam os erros impostos pela heterogeneidade dos aquíferos. Yeh e Liu (2000) desenvolveram métodos para a caracterização espacial de parâmetros hidráulicos a partir de técnicas geoestatísticas interpretando por inversão os resultados obtidos em tomografias hidráulicas. Mais recentemente, Zech et al. (2012) e Zech et al. (2016) propuseram a expansão da solução Theis e Thiem, com as quais é possível se obter parâmetros geoestatísticos de aquíferos heterogêneos. Existem ainda diversos outros estudos teóricos investigando a caracterização da heterogeneidade de um aquífero utilizando modelos numéricos (Wu et al., 2005) e modelos em sandbox (Berg e Illman, 2011). Estes estudos investigam a caracterização de aquíferos heterogêneos utilizando campos de T e K heterogêneos.

Além disso, soluções analíticas dos métodos convencionais têm como suposição que o fluxo subterrâneo da água durante um teste de bombeamento é laminar e horizontal. Porém, existem diversos aquíferos de geometrias irregulares (e. g., Gutentag et al., 1984; Viguier et al., 2018) que durante um teste de bombeamento podem provocar componentes verticais de fluxo de água causando estimativas erradas de T .

Com a hipótese de que aquíferos com espessuras irregulares podem provocar estimativas erradas de T a partir da análise de dados de teste de bombeamento, este projeto tem como proposta investigar como a geometria de um aquífero resulta em desvios dos valores de T . As estimativas de T foram obtidas a partir de métodos convencionais aplicados a dados de testes de bombeamento. Os dados a serem analisados foram obtidos de modelos numéricos onde foi executado teste de bombeamento em malhas que representaram os aquíferos de espessuras irregulares.

A magnitude dos erros de estimativas de T , derivada dos testes de bombeamento conduzidos, foi baixa, uma vez que a irregularidade da espessura de um aquífero é quase desprezível em comparação com sua continuidade lateral. Além disso, a heterogeneidade de T de um aquífero tem maior contribuição da condutividade hidráulica do que da espessura, uma vez que K varia ordens de magnitude. Porém, tanto estudos investigando a estimativa de T em

aquíferos com espessuras irregulares quanto para quantificar a magnitude destes erros ainda não foram explorados e este trabalho pode ser considerado um estudo inovador.

4 METAS E OBJETIVOS

O objetivo principal deste estudo é o de **testar a hipótese de que aquíferos com geometria irregular provocam erros de estimativa da transmissividade a partir da análise de testes de bombeamentos, utilizando-se de técnicas tradicionais**. Além disso, esse projeto teve como meta mensurar a magnitude destes erros e fazer a relação destes resultados com a literatura referente à caracterização de aquíferos heterogêneos.

5 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

5.1 Teste de Bombeamento

O teste de bombeamento é amplamente empregado para se caracterizar, em escala de centenas de metros, as propriedades hidráulicas de um aquífero, identificar as condições de contorno de um dado aquífero; bem como o de estimar o ingresso de água de um aquífero ao outro.

Theis (1935), com ajuda do matemático C. I. Lubin, propôs originalmente uma solução analítica em estado transiente que reproduz a evolução das cargas hidráulicas em um poço de monitoramento localizado na área de influência de um poço em bombeamento. Como forma de homenagem em anexo se encontram o artigo científico Theis (1935) e o de Cooper e Jacob (1946) da proposta de simplificação da solução proposta pelo primeiro trabalho. Com a utilização desta solução inversamente é possível estimar os parâmetros hidráulicos de um aquífero (T e S). Esta e outras soluções analíticas propostas (e. g. Hantush e Jacob, 1955; Hantush, 1960; Neuman, 1975) têm as seguintes premissas:

- O aquífero precisa apresentar transmissividade constante, ser isotrópico e homogêneo.
- O aquífero tem que ser confinado e infinito em extensão.
- O poço tubular bombeado tem que penetrar toda a espessura saturada do aquífero.
- A vazão no poço bombeado precisa ser constante ao longo do tempo.
- O fluxo de água no meio poroso necessita ser laminar, horizontal e não turbulento.

Durante um teste de bombeamento é retirada a água subterrânea com a introdução de um poço tubular com vazão conhecida. Durante a execução, o poço é bombeado durante várias horas, podendo durar dias. Isto faz com que haja a criação de um cone de rebaixamento nas cargas hidráulicas. As medidas das cargas hidráulicas nos poços de monitoramento são efetuadas por piezômetros localizados a várias distâncias do poço em bombeamento. Estas medidas poderão ser aplicadas em uma equação de fluxo vertical de água em poço tubular, como a solução Theis, para se estimar as características hidráulicas do aquífero bombeado [Kruseman e De Ridder, 2000]. Antes da realização deste tipo de teste é necessário a coleta de informações como as características geológicas em subsuperfície, tipo de aquífero, espessura e continuidade lateral do aquífero etc [Kruseman e De Ridder, 2000].

A estimativa das propriedades hidráulicas dos aquíferos é normalmente executada com a aplicação de técnicas de ajuste dos dados de rebaixamento das cargas hidráulicas comparando-as às curvas teóricas. Há diversas maneiras de interpretação, mas a mais utilizada é o Método de Cooper-Jacob (Cooper e Jacob, 1946) para aquíferos confinados, que pode ser feita manualmente ou com uso de softwares, que utilizam algoritmos de otimização para estimar os valores de T e S.

Como todos os aquíferos na natureza possuem algum caráter heterogêneo, a aplicação de teste de bombeamento resulta em valores de parâmetros hidráulicos que diferem dos valores obtidos por outros métodos. Isto é devido à diferença do volume amostrado do aquífero por cada técnica. Por exemplo, o volume amostrado em um teste de bombeamento (cone de rebaixamento) é da escala de centenas de metros, já este volume amostrado em um slug test é da ordem de metros, enquanto os resultados de análise laboratorial de amostra de rocha é da ordem de centímetros.

Esta divergência da escala de amostragem liderou diversos estudos sobre o significado dos valores obtidos dos parâmetros hidráulicos a partir do teste de bombeamento. Meier et al. (1998) e Sanchez-Vila et al. (1999), utilizando o método de Cooper-Jacob e diversos poços de monitoramento, mostraram que a T estimado é uma transmissividade efetiva (média geométrica) do aquífero ao longo de todo o cone de rebaixamento. O T efetivo é definido como um parâmetro hidráulico constante representativo ao longo de todo o domínio, que relaciona o conjunto de médias de fluxos com o gradiente de cargas hidráulicas (Sanchez-Vila et al., 2006).

No estudo da caracterização de aquíferos também foi analisada a relação destes parâmetros hidráulicos e o meio heterogêneo amostrado. Por exemplo, Meier et al. (1998) e Sanchez-Vila et al. (1999) avaliaram que o T obtido, utilizando o Método de Cooper-Jacob em vários poços de monitoramento a diversas distâncias do poço bombeado em um aquífero heterogêneo sintético (modelo numérico), é muito similar aos valores reais. Wu et al. (2005) identificaram que esta correspondência entre o valor de T obtido e o valor de T efetivo pode divergir e só é verdadeiro para aquíferos heterogêneos no estágio final do teste de bombeamento, isto é, quando o cone de rebaixamento tende ao estágio estacionário. Foi evidenciado ainda que o T efetivo obtido varia ao longo do tempo (período do teste de bombeamento) conforme o cone de rebaixamento evolui. Graças a isso, esta estimativa é dependente do tamanho, do local e do grau de heterogeneidade que este cone engloba. Estes dizem ainda que as estimativas dos parâmetros hidráulicos dependem do local em que foi observado os dados (posição do poço de monitoramento) e que as cargas hidráulicas observadas em um poço de monitoramento em aquífero heterogêneo seria um desvio da tendência das cargas hidráulicas previstas por soluções analíticas para aquífero homogêneo. Portanto, utilizar a solução de Theis para a caracterização de parâmetros hidráulicos em aquíferos heterogêneos usando um poço de monitoramento seria como comparar perturbações, advindas do caráter heterogêneo, com tendências, fornecidas pelas soluções analíticas convencionais (Wu et al., 2005), levando a maiores erros de estimativas.

Como todos os aquíferos presentes na natureza infringem alguma premissa dos métodos convencionais, pois possuem alguma heterogeneidade e/ou barreiras seja com corpos com carga hidráulicas constantes (e. g. rios e lagos) e/ou limites da continuidade lateral do aquífero. Graças a isso vêm se desenvolvendo técnicas para que se tenha um maior precisão e por consequência um maior entendimento da heterogeneidade dos parâmetros hidráulicos de um aquífero. Por exemplo, Wu et al. (2005) propuseram utilizar hidrográficos (mapa de contorno das cargas hidráulicas de um cone de rebaixamento) criado a partir de muitos poços de monitoramento estressados durante um teste de bombeamento. Com isso é possível se obter

as características hidráulicas no cone de rebaixamento em um aquífero heterogêneo através da análise das curvas de isovalores das cargas hidráulicas.

Também foi proposto a tomografia hidráulica (Yeh e Liu, 2000) para se obter a estimativa de valores K de um aquífero heterogêneo e sua distribuição espacial. Esta técnica utiliza um método sequencial inverso geoestatístico para obter a condutividade hidráulica efetiva condicionado para cada observação feita das cargas hidráulica de um teste de bombeamento. Xiang et al. (2009) mostram que esta técnica fornece estimativas hidráulicas do aquífero que podem prever o rebaixamento das cargas hidráulicas causadas por um teste de bombeamento que não foi usado na análise de tomografia hidráulica. Porém, quanto maior for a heterogeneidade do aquífero, maior será a necessidade de dados disponíveis para caracterizar este aquífero.

Foram propostas técnicas de interpretar os dados de teste de bombeamento considerando a heterogeneidade do aquífero, porém com a necessidade de menos poços de monitoramento. Zech et al. (2012, 2016) apresentaram uma extensão das soluções analíticas de Theis e Thiem para aquíferos heterogêneos. Com estes métodos os parâmetros hidráulicos estimados são parâmetros geoestatísticos e não valores para cada nó do modelo (como na tomografia hidráulica). Assim como os métodos tradicionais, as estimativas hidráulicas são obtidas através do uso inverso de soluções analíticas (semi analítica neste caso). Portanto, são necessários menos dados (poços de monitoramento) para ser feita a caracterização da heterogeneidade de um aquífero. Estas soluções propostas são soluções semi-analíticas capazes de estimar a média (μ), variância (σ^2) e o comprimento de correlação (ℓ) da transmissividade, além de conseguir estimar o coeficiente de armazenamento do aquífero. Estas soluções estendidas foram obtidas com o uso do método de Radial Coarse Graining para derivar a transmissividade efetiva como função dos parâmetros estatísticos do aquífero (μ , σ^2 e ℓ) com distribuição log-normal que dependem da distância radial (r) entre os poços.

5.2 Modelo Numérico de Aquífero

Modelos numéricos computacionais são cada vez mais aplicados como uma maneira de se fazer experimentos sobre fenômenos naturais. Isto é devido ao avanço da capacidade de processamento computacional e o avanço de softwares que possibilitam o uso de modelos numéricos na simulação de fenômenos mais complexos. Estas simulações aplicadas para a análise de testes de bombeamento estão sendo estudadas há pelo menos 40 anos (e. g. Rushton e Booth, 1976; Lakshminarayana e Rajagopalan, 1978; Rathod e Rushton, 1991; Rutledge, 1991). As principais utilidades de conduzir testes de bombeamento em modelos numéricos é que as premissas e as propriedades a serem calibradas podem ser escolhidas pelo usuário. Além disso, durante o processo de calibração do modelo é possível se obter uma percepção sobre o fluxo de água no modelo conceitual de aquífero e as incertezas da sua análise (Johnson et al., 2001).

Diversos softwares foram e estão sendo desenvolvidos com códigos pré-configurados de diferenças finitas e elementos finitos a fim de facilitar a construção de modelos e fazendo com que o usuário possa focar na análise do experimento. Um exemplo é o MODFLOW (Harbaugh

e McDonald, 1996) em que é possível construir modelos de uma, duas ou três dimensões para a condução de testes de bombeamento e que trouxe a capacidade do usuário utilizar coordenadas cilíndricas para analisar o rebaixamento da carga hidráulica durante um teste de bombeamento (Reily e Harbaugh, 1993).

O uso de modelagem numérica como laboratório para a condução de experimentos é muito usado, uma vez que este método pode isolar o que realmente interessa no estudo de um processo. Com isso, experimentos executados utilizando-se modelos numéricos de aquíferos e a execução de testes de bombeamento fazem com que os resultados sejam livres de ruídos. Como exemplo de ruídos temos erros em medidas que podem ser originadas no processo de coleta das cargas hidráulicas de poços de monitoramento e/ou mensuração da vazão da água bombeada. Outro tipo de fenômeno que pode gerar ruído é a variação da taxa de bombeamento no poço devido a dificuldades técnicas ocorridas durante o processo (e.g. variação ou interrupção da energia que alimenta a bomba). Existem ainda diversos outros tipos de ruídos que podem impactar nos dados produzidos durante um teste de bombeamento, e. g. efeito Noordbergum, infiltração, efeitos barométricos, entre outros.

Modelos numéricos de teste de bombeamento em aquíferos além de serem livres de ruídos que causam erros, possuem o princípio da reciprocidade. Este princípio foi inicialmente aplicado na área de campos eletromagnéticos proposto por Lorentz. Este princípio diz que o estresse aplicado em um ponto A e o efeito mensurado em um ponto B terão o mesmo efeito no ponto A para o mesmo estresse aplicado no ponto B, em processos que ocorrem em meios heterogêneos. Para o caso de teste de bombeamento, este princípio foi analisado por Bruggeman [1972] para o fluxo estacionário e transiente de água subterrânea em meios heterogêneos e se traduz para esta área da seguinte forma: a curva de cargas hidráulicas em um poço A, provocado pelo bombeamento no poço B, será a mesma curva de cargas hidráulicas vista no poço B provocadas pelo bombeamento no poço A. Delay et al. (2011) diz ainda que o princípio de reciprocidade em teste de bombeamentos é garantido entre um poço de bombeamento e um poço de monitoramento durante um teste de bombeamento com mais de um poço de monitoramento, independentemente das condições iniciais pré-bombeamento para fluxos darcyianos em meios heterogêneos. O ferimento deste princípio pode ser consequência de fatores físicos como, por exemplo, fraturas (meio descontínuo) entre os pontos A e B, erros originados na coleta de dados e infração das suposições das equações governantes, como, por exemplo, fluxo de água turbulento, componentes de fluxo de água verticais, entre outros.

Butler e McElwee (1990) defendem ser preciso fazer a análise de sensibilidade em experimentos numéricos de teste de bombeamento. Todo sistema físico, químico ou biológico pode ser entendido como um modelo com entradas que vão ser transformadas por parâmetros e produzem as saídas deste modelo. Como os parâmetros reais são raramente sabidos, a análise de sensibilidade é utilizada no estudo de como as incertezas nos dados de entrada influenciam nos dados de saída do modelo. Desta forma, a análise de sensibilidade pode ser usada para diminuir as incertezas relacionadas aos parâmetros estimados durante um teste de bombeamento (Butler e McElwee, 1990). As maneiras mais utilizadas para o seu cálculo são: os métodos de perturbação, calculado através da diferença entre a saída do modelo com todos

os parâmetros não perturbados e a saída com um parâmetro perturbado; o analítico, sendo a comparação entre a sensibilidade obtida de soluções analíticas (quando possível) com a obtida do modelo numérico; o direto, feito uma solução das equações governantes com as equações obtidas da diferenciação destas com respeito aos parâmetros utilizados; e o método adjacente, efetuado através da solução numérica das equações governantes e suas equações *adjoint*. Kabala (2001) diz que a sensibilidade do rebaixamento das cargas hidráulicas de um poço durante um teste de bombeamento aumenta rapidamente com o tempo até que o fluxo de água que penetra o poço tubular iguale a taxa de bombeamento de água. Após um platô este começa a decrescer lentamente. Já a sensibilidade de T decresce durante a fase de armazenamento de água no poço e após este estágio converge para um valor único. Porém, atualmente existem softwares que fazem a calibração de sensibilidade através de algoritmos otimizadores (Müller e Herrmann, 2021).

6 MATERIAIS E MÉTODOS

Todas as etapas do trabalho, isto é, o modelo numérico do aquífero, simulação do teste de bombeamento, a caracterização dos parâmetros hidráulicos, a análise dos resultados, foram implementadas em Python. Foi utilizado os pacotes do GeoStat-Framework (<https://geostat-framework.org>) para a simulação do teste de bombeamento e análise dos dados, como o OGS5py (Müller et al., 2020), Welltestpy (Müller e Herrmann, 2021) e Anaflow (Müller, 2018). Foi utilizado a API (Application Programming Interface) Python Gmsh para a criação das malhas que representam os aquíferos com espessuras irregulares. A visualização dos dados foi efetuada através da biblioteca Matplotlib.

6.1 Malha

As malhas que serviram como domínio para a simulação dos testes de bombeamento, foram criadas com a API Python do software Gmsh. Este é um software de código aberto para a geração de malhas estruturadas ou não estruturadas de elementos finitos. Este software contém quatro módulos: descrição da geometria, geração da malha, solução e pós-processamento da malha. Além disso, possui ferramentas avançadas de visualização. Foram criadas três configurações que lideraram as investigações deste projeto: Benchmark, caso 1 e caso 2.

As três configurações são compostas por malha bidimensionais que, para o caso mais simples, terá um fluxo de água unidimensional no sentido do poço bombeado. Majoritariamente as análises de dados de teste de bombeamento são feitas utilizando soluções analíticas que tem como premissa fluxo radial laminar e horizontal (bidimensional), como a solução Theis.

Porém, para a investigação que este projeto se propõe a ter, para se simular a realidade com mais fidelidade, teria que se criar malhas 3D de geometria do aquífero que criaria componentes verticais de fluxo e infringindo a premissa de fluxo radial horizontal. Como o fluxo é radial em um teste de bombeamento, para a facilitação das interpretações dos resultados, teria se que criar irregularidades simples na espessura do aquífero de maneira que estivessem, por exemplo, equidistantes dos poços ou simétricas com o cone de rebaixamento. Isto levaria a geometrias irreais na natureza, e.g. estruturas circulares em torno do poço bombeado.

Com isto em mente, este projeto utiliza domínios bidimensionais. Com o uso de generalização de soluções analíticas adaptadas para esta configuração, como será visto mais a frente, permite criar malhas mais simples e que tem exemplos na natureza. Como consequência, as interpretações serão mais simples.

6.1.1 Benchmark

Uma malha foi criada para a elaboração do benchmark, bem como para as primeiras versões de teste do modelo (caso estacionário) (fig. 1) tendo dimensões que permitisse a investigações de feições geológicas em tamanhos representativos na natureza. Esta malha possui duas dimensões, sendo x definido pelo eixo horizontal e z pelo eixo vertical. O aquífero possui 6000 m de extensão lateral com 300 m de profundidade. A origem da malha se localiza na ponta

superior da linha que define o poço de bombeamento. Desta forma o aquífero é definido entre -3000 e 3000 na direção x e entre 0 e -300 na direção z. O embasamento possui 100 metros de profundidade no modelo sendo definido entre -300 e -400 na direção z. O espaçamento de resolução entre os nós da malha é de 10 m. O poço de monitoramento é definido como linhas verticais, onde a carga hidráulica medida em um poço de monitoramento representa a média de todas as cargas hidráulicas medidas ao longo de todo o poço. Os poços de monitoramento foram posicionados a 10, 125, 250, 375 e 500 metros do poço bombeado localizado na coordenada x=0 metros.

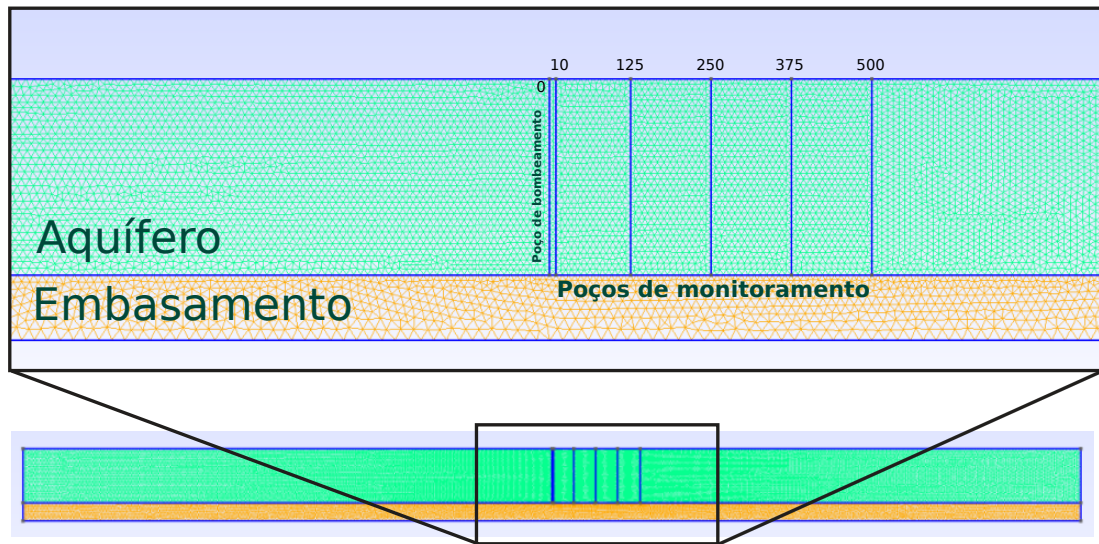


Figura 1: Malha gerada utilizando Gmsh para o caso de aquífero com espessura constante (benchmark) e um zoom especificando os detalhes dos elementos da malha. A região em amarelo representa o embasamento impermeável e a região verde o aquífero.

6.1.2 Aquífero com espessura irregular - caso 1

O primeiro caso de aquífero com espessura irregular possui uma diferença em comparação ao caso anterior e que liderará as investigações a fim de se atingir os objetivos deste projeto. Foi definido um ponto com coordenadas (250, -250) no domínio a fim de se criar uma irregularidade usando uma Spline (curva matemática passando por dois pontos de controle). Com isso há uma proeminência no lado direito do aquífero (fig. 2). Graças a isso o aquífero possui um estreitamento partindo de 300 m de espessura e chegando a 250 m a 250 m de distância do poço de bombeamento. Após isso há o espessamento e retorna a 300 m de espessura a 500 m de distância do poço bombeado. Os poços de monitoramento foram posicionados às mesmas distâncias do caso de benchmark, porém em ambos os lados do aquífero.

6.1.3 Aquífero com espessura irregular - caso 2

Para este caso foi aplicado o mesmo procedimento do caso anterior, porém com a adição de uma curva negativa (depressão do lado esquerdo utilizando o Spline. As coordenadas e as medidas do aquífero são semelhantes ao caso anterior, porém para a depressão a Spline é

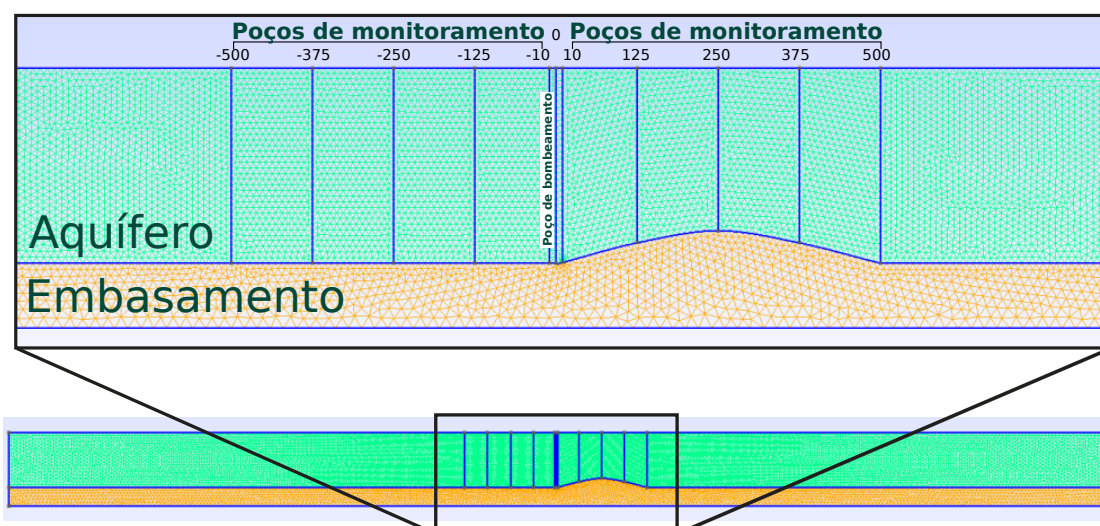


Figura 2: Malha gerada utilizando Gmsh para o caso 1 e um zoom especificando os detalhes dos elementos da malha. A região em amarelo representa o embasamento impermeável e a região verde o aquífero.

invertida em relação a spline que forma a proeminência tendo seu ponto mais profundo a 350 metros (fig. 3).

Esta malha foi criado com o intuito de investigar a ideia de que as estimativas dos parâmetros hidráulicos obtidos são valores médios de deve o volume amostrado, ou seja, médias de K e S do meio que compreende o volume do cone de rebaixamento (no caso deste projeto a área do cone de rebaixamento). Caso esta ideia seja verdadeira, independentemente do tamanho do cone de rebaixamento, os valores de T obtidos serão os mesmos, uma vez que o estreitamento do aquífero observado a direita é refletido com um espessamento à esquerda de maneira igualitária.

6.2 OpenGeoSys

O modelo numérico foi criado com a utilização da biblioteca Python OGS5py e que simulou um aquífero onde foram executados os testes de bombeamento. A biblioteca OGS5py é um API Python do software de modelagem científica OpenGeoSys5 (OGS5). O OGS5 é amplamente utilizado para simular processos termais, hidráulicos, mecânicos e químicos em meio poroso ou fraturado. O OGS5 utiliza método de elementos finitos para resolver as equações diferenciais parciais que governam processos de fluxo e transporte em subsuperfície [Müller et al., 2020].

6.2.1 Equação governante de fluxo de água subterrânea em um aquífero confinado

Foi criado um modelo de aquífero confinado, de duas dimensões (x, z), isotrópico e com K homogêneo. A equação governante do fluxo de água subterrânea em um aquífero confinado é regido principalmente pela variável da carga hidráulica. A equação de fluxo de água subterrânea, para este caso, é derivada dos princípios da conservação de massa e momento da

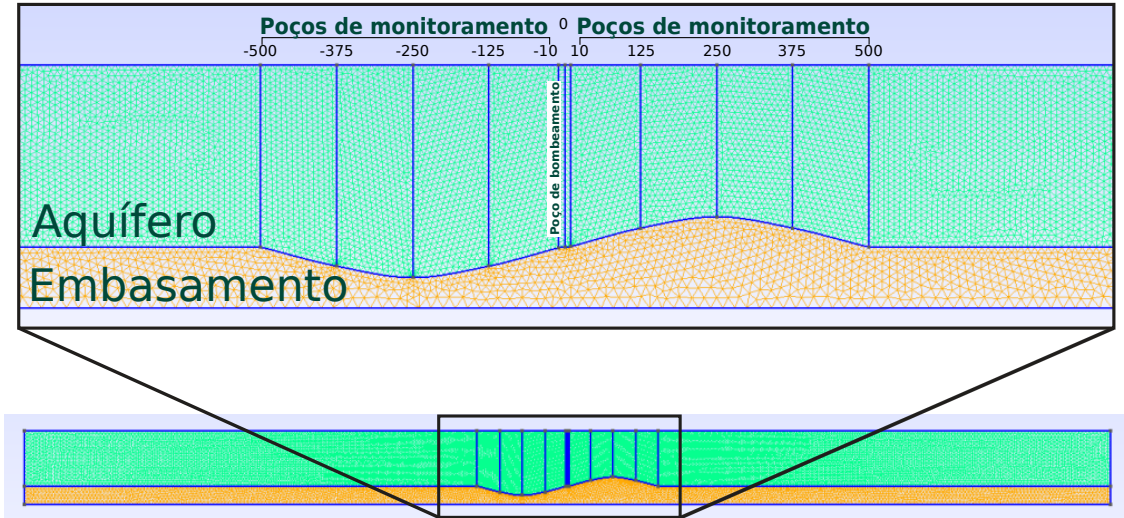


Figura 3: Malha gerada utilizando Gmsh para o caso 2 e um zoom especificando os detalhes dos elementos da malha. A região em amarelo representa o embasamento impermeável e a região verde o aquífero.

mecânica do contínuo. A descrição do movimento de fluidos utilizada foi a euleriana, na qual considera a sua observação em um volume de controle por onde entra e sai este fluido.

O fluxo da água subterrânea foi considerada em meio poroso não deformável. Desta forma o único meio de haver o fluxo de água é por meio dos espaços vazios. A porosidade (n) é dada pela razão destes espaços vazios com o volume total do meio. Como foi considerado que o meio não é deformável, portanto, a variável espaços vazios é considerada constante ao longo de toda a simulação. Com isso temos que a equação do balanço de massa (fluída) em um meio poroso estático é dada por:

$$\frac{\partial n\rho}{\partial t} + \nabla(n\rho v) = Q_p \quad (1)$$

Onde ρ é a densidade do fluido [kg/m^3], t o tempo [s], v o vetor velocidade [m/s] e Q_p o termo de entrada de água subterrânea no sistema [kg/m^3s]. Considerando a água como um fluido incompressível e, portanto, com densidade constante, implica que $\rho = \rho_0$. Dividindo (1) por ρ_0 temos:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(nv) = \frac{Q_p}{\rho_0} \quad (2)$$

O coeficiente de armazenamento (S) é um conceito que engloba a mudança de n ao longo do tempo. A relação entre a mudança de n e da carga hidráulica (h em m) com o tempo é linear com fator de proporção de mudança S :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3)$$

Tem-se ainda a relação linear que explica o fluxo de água subterrâneo devido a um gradiente de carga hidráulica no espaço em meios porosos, com K como fator de proporção. Esta relação é dada pela equação de Darcy:

$$nv = q = -K\nabla h \quad (4)$$

Combinando a equação de balanço (2) com as equações constitutivas (3) e (4), resulta na equação governante de fluxo de água subterrânea em aquíferos confinados utilizada nas simulações:

$$S \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla(K \nabla h) = Q \quad (5)$$

Para o caso deste projeto com duas dimensões (x e z) e com meio isotrópico ($K_x = K_z = K$), esta equação é dado por:

$$S \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial h}{\partial z} \right) = Q \quad (6)$$

6.2.2 Condições iniciais e de contorno

A condição inicial foi definida com carga hidráulica de zero metros para todo o domínio:

$$h(t = 0, x, z) = h_0 \quad (7)$$

Onde h_0 é a carga hidráulica inicial. As condições de contorno foram configuradas para os extremos laterais do aquífero como tendo carga hidráulica de zero metros:

$$h(t, x = 1500, z) = h_0 \quad (8)$$

$$h(t, x = -1500, z) = h_0 \quad (9)$$

Já a condição que simula o bombeamento foi configurada como uma linha no centro do aquífero com constante Neumann:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{Q}{2\pi T} \quad (10)$$

Onde Q é a taxa de bombeamento em m^3/s e T é a transmissividade do aquífero em m^2/s .

6.2.3 Solução numérica

Foi utilizado a solução linear *biconjugate gradient stabilized method* (BICGSTAB), presente no OGS para a equação governante, pois o problema deste projeto (fluxo de água subterrânea) é um problema linear. O BICGSTAB é um método iterativo para a solução numérica de sistemas lineares não simétricos. Os demais parâmetros utilizados podem ser vistos na tabela 1. Onde ϵ é o erro de tolerância, N é número máximo de iterações para solucionar um passo de tempo da simulação e θ o número de relaxamento laplaciano.

Tabela 1: Parâmetros utilizados para solucionar o modelo numérico.

Método	Critério de convergência	ϵ	N	θ	Pré condicionamento	Modelo de armazenamento
BICGSTAB	$ rn < x $	1.0E-14	1000	1.0	pré condicionamento ILU	matriz simétrica

6.2.4 Parâmetros do modelo

Os parâmetros escolhidos são valores que estão dentro de um intervalo comumente encontrado para aquíferos confinados. Estes foram aplicados para os três casos (Tabela 2).

Tabela 2: Parâmetros utilizados para a modelagem.

Parâmetro	Símbolo	Valor utilizado	Unidade de medida
Vazão de bombeamento	Q	-1.0E-02	m^3/s
Condutividade hidráulica do aquífero	K	-1.0E-04	m/s
Condutividade hidráulica do embasamento	K	0	m/s
Coefficiente de armazenamento específico	S_s	1.0E-03	m^{-1}
Densidade da água (10°C)	ρ	999.7026	kg/m^3
Viscosidade da água (10°C)	μ	1.308E-03	$Pa.s$

6.2.5 Coleta de dados

A coleta de dados foi realizada para todos os poços de monitoramento. Os valores de evolução da carga hidráulica se refere a cada nó da linha que representa o poço de monitoramento. Para cada passo de tempo foi feita a média dos valores de cargas hidráulicas. Isto foi executado para todos os poços de monitoramento.

$$h(x, t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_p(x, t)_i \quad x = \{-500, -375, -250, -125, -10, 10, 125, 250, 375, 500\} \quad (11)$$

Onde h_p é um vetor com todas as cargas hidráulicas medida em cada nó do poço de monitoramento e $h(x, t)$ é o valor de carga hidráulica, em metros, para cada posição x e passo de tempo t . A distribuição de t tanto para os passos calculados no modelo quanto para as cargas hidráulicas amostradas tem uma distribuição de comportamento cúbico no tempo como exemplificado na figura 4. Nesta figura foram usados 50 pontos amostrados entre um intervalo de 0 a 100 segundo, porém para as simulações foram usados 200 pontos amostrados com intervalos de tempo (tempo de bombeamento) que dependem da distância do poço de monitoramento em relação ao poço de bombeamento a fim obter a porção da curva de rebaixamento para cada caso, como será explicado nos resultados.



Figura 4: Exemplificação da distribuição usada dos pontos amostrados no tempo.

6.3 Modelo Generalized Radial Flow (GRF)

Para validar os resultados das simulações e para a construção de uma referência (benchmark), é normal o uso de soluções analíticas que descrevam o processo no qual o modelo numérico irá simular. Para modelagem de teste de bombeamento é normalmente utilizada a

solução Theis (1935) para este fim. A modelagem deste projeto tem como característica possuir um domínio com duas dimensões onde o fluxo de água é unidimensional (ao longo do eixo x), para o caso mais simples de um aquífero com espessura constante (benchmark). Porém, a solução Theis descreve o rebaixamento de cargas hidráulicas através do fluxo radial de água subterrânea. Desta forma foi necessário utilizar-se uma solução analítica que descreva este fluxo unidimensional e, portanto, consiga descrever os dados obtidos pelo modelo numérico a fim de se estabelecer o benchmark para o problema. Esta equação utilizada é a solução de Modelo de Fluxo Radial Generalizado (GRF), desenvolvida por Baker (1988).

O GRF foi criado visando solucionar o problema de descrever o rebaixamento de cargas hidráulica devido ao bombeamento em meios fraturados. O problema em específico é escolher a geometria apropriada de um sistema de fraturas no qual ocorre o fluxo subterrâneo. Esta solução foi desenvolvida generalizando a solução Theis para fluxo dimensional, em meios porosos, para valores não integrais enquanto mantém as premissas de fluxo radial e homogeneidade do aquífero. Desta forma o GRF consegue descrever a queda das cargas hidráulicas em diversas formas empregadas (geometria) de teste de bombeamento (Baker, 1988). As premissas deste modelo são:

- O fluxo de água subterrânea é radial e n -dimensional em um meio homogêneo e isotrópico com condutividade hidráulica K_f e armazenamento específico S_{sf} .
- A lei de Darcy se aplica para todo o sistema.
- A retirada de água do sistema é através de uma esfera n -dimensional com raio r_w e capacidade de armazenamento S_w .

A solução analítica GRF (Baker, 1988) a seguir é uma equação generalizada da solução Theis (1935):

$$h(r, t) = \frac{Q_0 r^{2\nu}}{4\pi^{1-\nu} K_f b^{3-\eta}} \Gamma(-\nu, u) \quad \nu < 1 \quad (12)$$

Com:

$$\nu = 1 - \frac{\eta}{2} \quad (13)$$

$$u = \frac{S_{sf} r^2}{4K_f t} \quad (14)$$

$$\Gamma(s, x) = \int_x^\infty t^{s-1} e^{-t} dt \quad (15)$$

Onde:

- $h(r, t)$ é a função que descreve as cargas hidráulicas para a posição r no tempo t para o sistema.
- Q_0 é a taxa de bombeamento constante.
- r é distância radial do poço de bombeamento.
- η é a dimensão do sistema.
- b é a extensão da região de fluxo.

- t sendo o tempo.

Para o problema deste projeto o fluxo de água no meio poroso ocorre de maneira unidimensional, portanto, $\eta = 1$. Com isto temos como resultado a seguinte forma da solução modelo GRF, utilizada na análise dos dados:

$$h(r, t) = \frac{Q_0 r}{2\sqrt{\pi} K_f b^2} \left(\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} - \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} \sqrt{u} \right) \quad (16)$$

Onde erfc é a função de erro complementar. Note que para o caso de $\eta = 2$ a solução modelo GRF se torna a solução Theis. A solução GRF foi aplicada através do uso da biblioteca Python Anaflow para a implementação do benchmark, bem como para a análise dos dados para os casos em que foi simulado um teste de bombeamento em aquíferos com espessuras irregulares.

6.4 Estimativas de transmissividade

Com os dados de curva de rebaixamento obtido das simulações e com a solução analítica GRF foram feitas as estimativas de transmissividade. Isto foi obtido utilizando o método de mínimos quadrados não linear para a agilização dos resultados ao invés de utilizar um método manual, visto que este projeto teve que analisar várias curvas de rebaixamento provenientes de vários poços e de vários experimentos. Neste método é usado um conjunto de observações m (dados de carga hidráulica observado) com um modelo não linear n (solução GRF unidimensional) com parâmetros desconhecidos (condutividade hidráulica e coeficiente de armazenagem) onde $m > n$. A base deste método é aproximar a solução para um modelo linear e por sucessivas iterações obter os valores dos parâmetros desconhecidos que melhor ajustam a solução com os dados observados. Este método foi aplicado com o uso da biblioteca Python Scipy. Esta biblioteca científica fornece diversos algoritmos matemáticos e estatísticos para solução de problema de otimização, integração, interpolação, equações algébricas, equações diferenciais, entre outros. A partir disso, para cada curva, é possível se obter as estimativas de K e S do aquífero. Os valores de T podem ser obtidos com a igualdade:

$$T = Kb \quad (17)$$

6.4.1 Intervalo de curva analisado

Os valores obtidos de transmissividade a partir da análise de curva de rebaixamento depende do intervalo analisado (Butler e Liu, 1993). Desta forma, foi utilizado o benchmark para a definição desses intervalos a serem analisados para cada poço de monitoramento. Esta definição foi obtida através da escolha arbitrária dos intervalos das curvas, obtidas do benchmark, que resultam em uma estimativa de transmissividade que mais se aproximava do valor real do aquífero. Para isso foi necessário mudar o intervalo de t , ou seja, para cada poço a melhor a curva que tinha o melhor intervalo era obtida com tempo de bombeamento diferente em comparação com os poços vizinhos. Quanto mais distante o poço de monitoramento está localizado do poço bombeado, mais tempo de bombeamento é necessário para se obter a curva que resulta na melhor estimativa de T .

Os valores do menor t para cada poço de monitoramento estão ilustrados na tabela 3. A porção usada para analisar a curva e obter o K para cada distância é definido pelo intervalo: [menor t , tempo de bombeamento]. Estes melhores intervalos de análise obtidos no benchmark foram usados para o caso 1 e 2. Estes intervalos da curva analisada para a obtenção dos valores de K são representados nos resultados por uma reta vertical laranja que indica o início do intervalo. Portanto, os dados utilizados para análise e obtenção dos resultados são os que estão à direita desta reta laranja. Além disso, as ilustrações dos resultados segue o seguinte padrão de cores: benchmark verde, caso 1 azul, caso 2 vermelho, GRF preto. Onde os resultados dos poços à direita do poço bombeado é ilustrado por cores mais escuras e o poços à esquerda por cores mais claras.

Tabela 3: Intervalos das curvas de rebaixamento analisados.

Distância do poço bombeado (m)	Menor t (s)	Tempo de bombeamento (s)	K obtido (m/s)	Erro
10	1,27E+05	1,0E+06	1,00044518349E-04	4,4518349E-08
125	3,48E+05	1,0E+06	1,00095945071E-04	9,5945071E-08
250	1,04E+06	2,0E+06	1,0010438202E-04	1,0438202E-07
375	2,49E+06	4,0E+06	1,00100695175E-04	1,00695175E-07
500	6,12E+06	9,0E+06	1,0010309464E-04	1,0309464E-07

7 RESULTADOS OBTIDOS

7.1 Curva de rebaixamento

Os resultados obtidos para o benchmark estão ilustrados na figura 5. Os dados observados são provenientes da simulação, a curva GRF é obtida da solução analítica GRF utilizando os parâmetros utilizados na modelagem. É possível observar que os dados observados estão ajustados com a solução analítica.

Os dados obtidos para o caso 1 é apresentado na figura 6. Neste caso é possível observar que os dados não estão ajustados à solução analítica que descreve a curva de rebaixamento esperada. Para os dados dos poços localizados a menos que 250 metros do poço bombeado, tanto os posicionados a esquerda quanto os da direita, resultaram em rebaixamentos observados maiores que os rebaixamentos esperados (solução GRF). Para os poços a mais que 250 metros os dados obtidos dos poços a esquerda se mantém com o comportamento dos poços a menos que 250 metros, porém os poços a direita resultaram em curvas que se aproximam mais do comportamento esperado.

O caso 2 apresenta curvas de rebaixamento que não possuem um padrão a partir de certa distância do poço (fig. 7) como foi observado no caso 1. As curvas obtidas para o poços a 10 metros do local bombeado apresenta curva de rebaixamento semelhante à curva esperada. As curvas obtidas a 125 metros apresenta valores do poço a esquerda menores que os observados a direita. Isso se inverte para os poços a 375 e 500 metros, com valores de rebaixamento dos poços a direita apresentando mais desvio que os valores da esquerda. Para os poços a 250 metros, posição de máximo estreitamento e espessamento do aquífero, as curvas se aproximam da curva esperada.

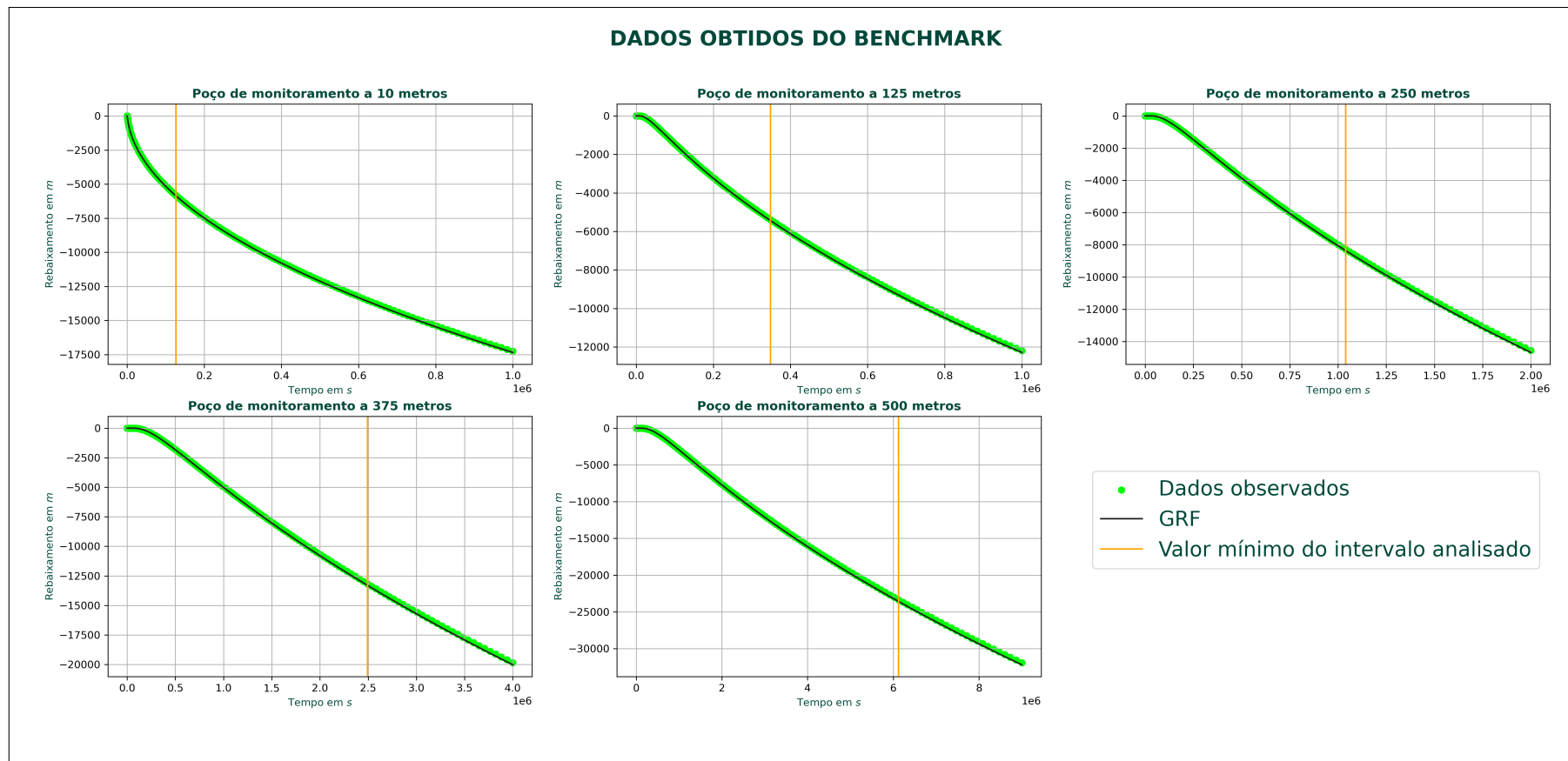


Figura 5: Curvas de rebaixamento obtidas para o caso benchmark (referência). Os pontos representam as cargas hidráulicas observadas na simulação.

DADOS OBTIDOS DO CASO 1

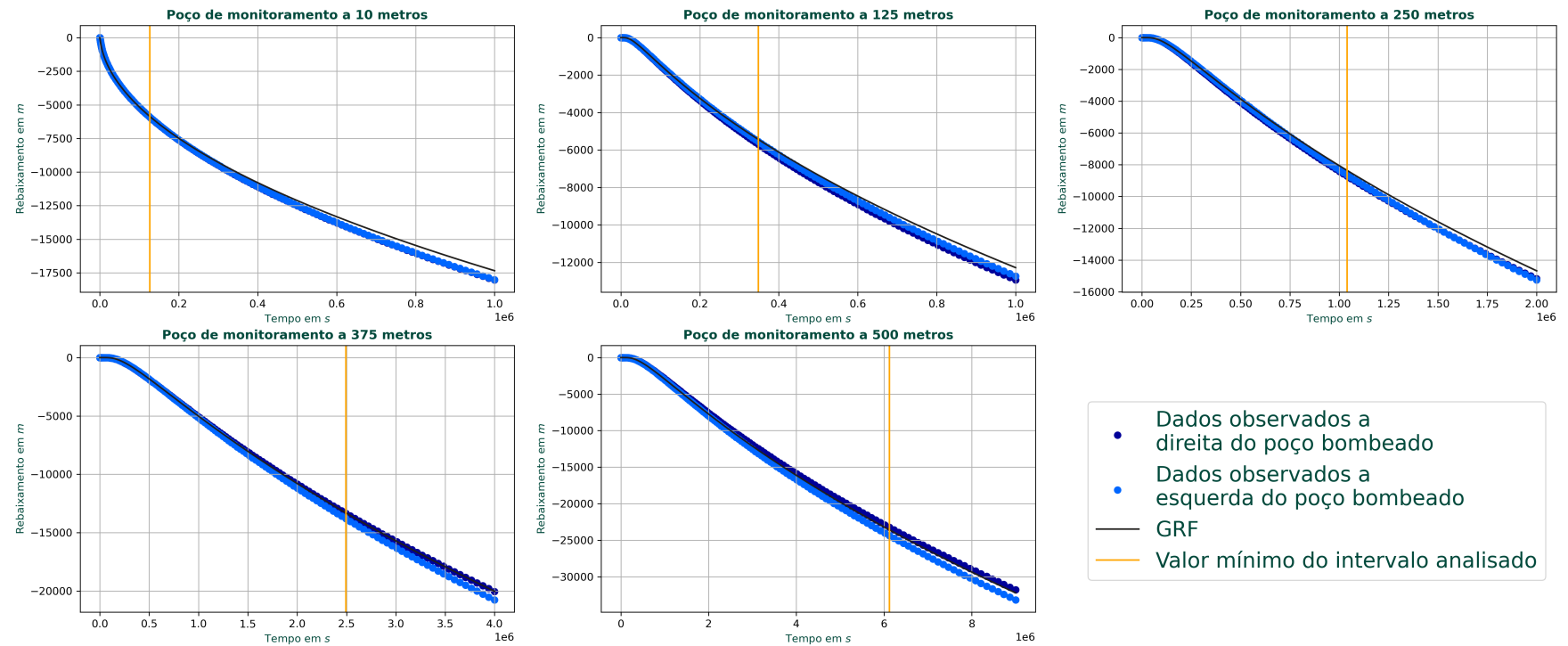


Figura 6: Curvas de rebaixamento obtidas para o caso 1. Os pontos representam as cargas hidráulicas observadas na simulação.

DADOS OBTIDOS DO CASO 2

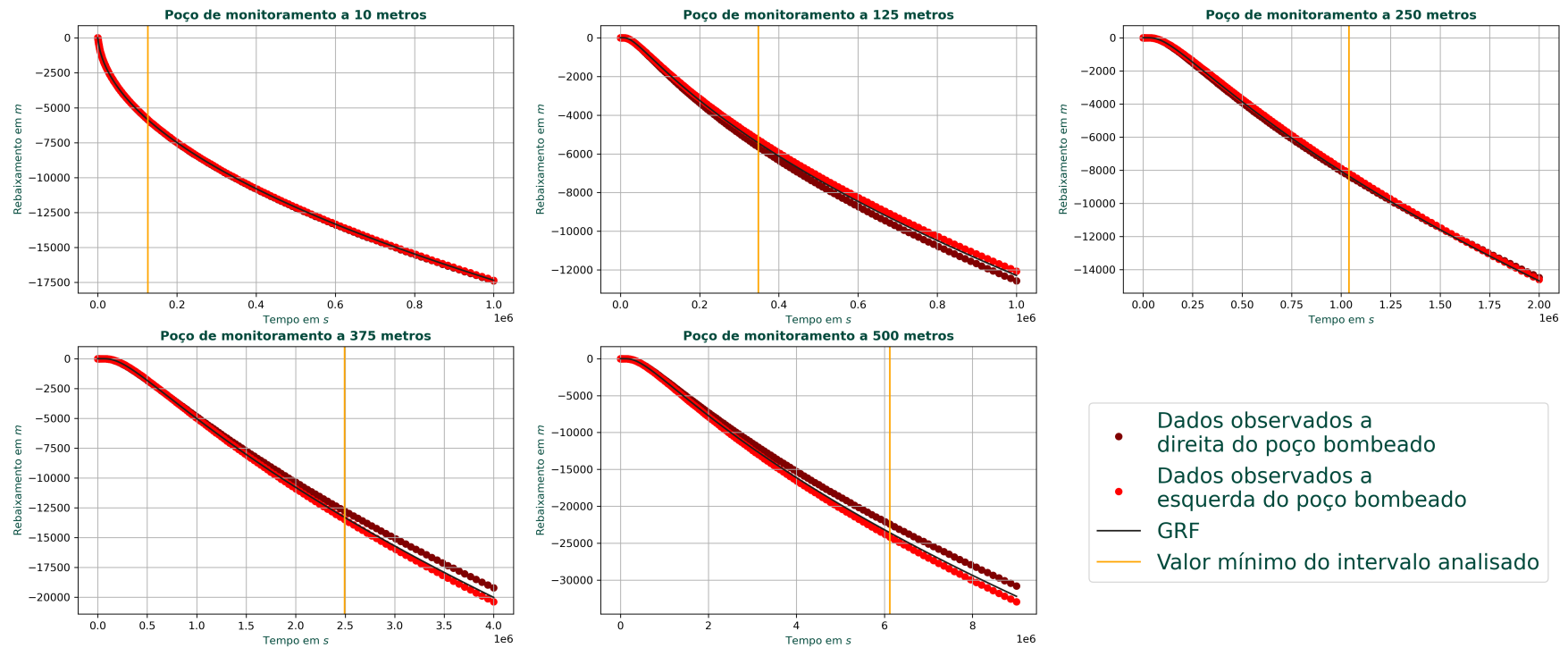


Figura 7: Curvas de rebaixamento obtidas para o caso 2. Os pontos representam as cargas hidráulicas observadas na simulação.

Para o caso 2 com poços localizados a 250 metros, é possível observar que as curvas tem comportamentos opostos e que a partir de certo tempo elas invertem com relação à curva esperada. Isto fica mais evidente quando observado a figura 8, que apresenta as curvas de diferença entre os valores de rebaixamento esperado (solução GRF) e os valores de rebaixamento observado nas simulações. Os poços a 250 metros são os únicos que a partir de, aproximadamente, $1,5E+06$ segundos a diferença das cargas hidráulicas do poço da direita passa ser menor (no caso 1) ou maior (no caso 2) em relação com o poço da esquerda. Outro ponto de destaque é o comportamento das curvas de diferenças do caso 1 para os poços a 10 metros de distância, que se afastam muito do comportamento tanto da curva obtida no benchmark quanto para as curvas obtidas no caso 2.

É possível observar que o comportamento das curvas de diferença das cargas hidráulicas obtidas e das esperadas são oscilantes antes do intervalo analisado, estes que produzem os melhores resultados de T para o caso de benchmark. Isto ocorre sobretudo no período imediatamente após o início do bombeamento. Esta oscilação é ainda melhor identificada na figura 9. Esta figura ilustra a evolução da proporção da diferença entre os dados observados e os dados esperado conforme a solução GRF. Estas curvas foram definidas pela expressão:

$$Desvio = \frac{Observados}{GRF} \quad (18)$$

No início do rebaixamento das cargas hidráulicas a proporção do desvio dos dados explode para mais infinito, exceto no caso dos poços de monitoramento a 10 metros do poço de bombeamento. Estes altos valores no início destas curvas (fig. 9) indica que já está havendo rebaixamento observado no modelo, porém não há ou há muito pouco rebaixamento das cargas hidráulica prevista pela solução analítica GRF. Já nos casos com os poços observados mais próximos do poço bombeado este comportamento se inverte, indicando que os valores de rebaixamento observados são maiores no início se comparados aos valores esperados.

As curvas de desvio proporcional dos dados apresentados na figura 9 indicam que este comportamento de altas diferenças entre as cargas hidráulicas observadas e previstas não está relacionado com a geometria do aquífero, uma vez que o benchmark também apresenta este comportamento.

Após este período de altos valores de desvio as curvas, em todos os casos e poços, tendem a se estabilizarem. Porém, antes que haja esta estabilização em altos valores de tempo, há uma oscilação das curvas de desvios para os poços dos casos 1 e 2. Esta oscilação deve ser consequência da geometria do aquífero, uma vez que a curva de desvio do benchmark não apresenta este comportamento e se estabiliza rapidamente em valores muito próximo de 1, ou seja, valores observados muito próximos dos valores esperado.

DIFERENÇA ENTRE OS DADOS ESPERADOS E OS DADOS OBSERVADOS

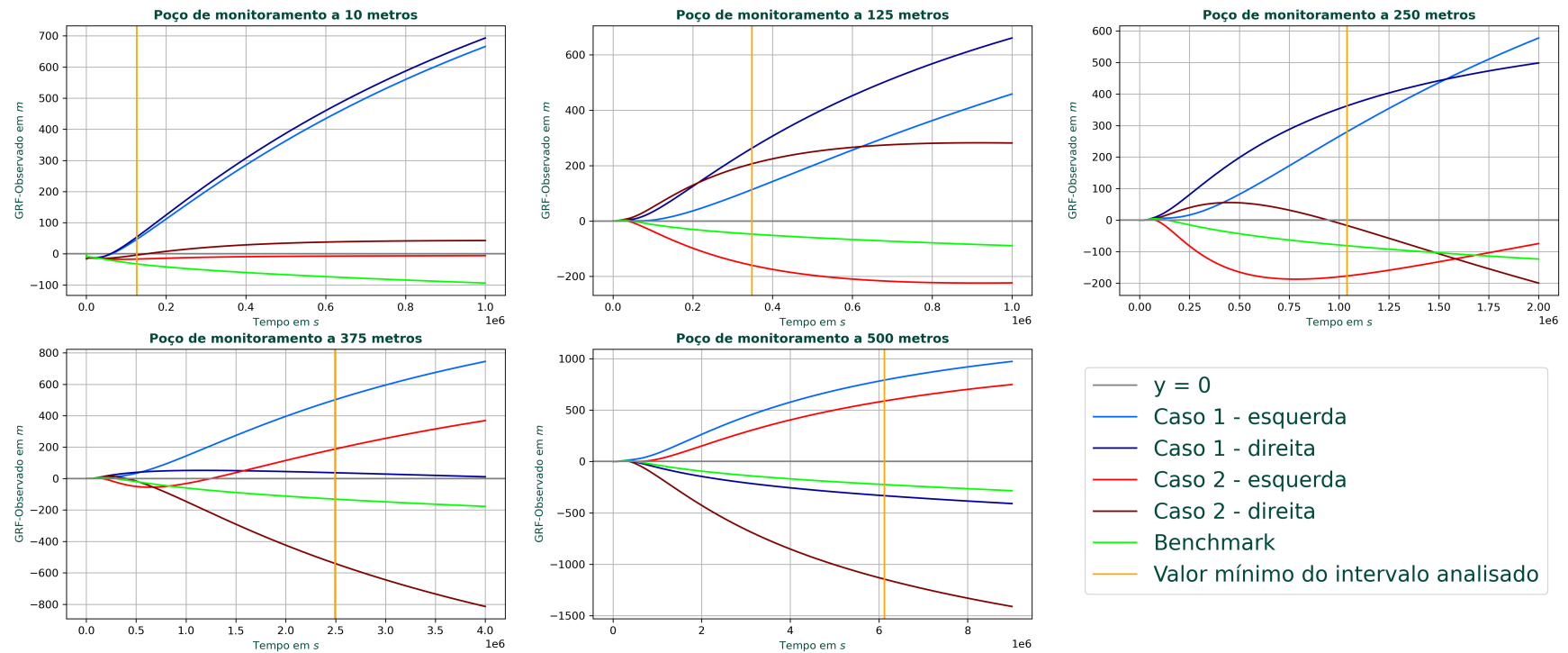


Figura 8: Curvas da diferença entre a solução GRF e os dados obtidos das modelagens numéricas.

PROPORÇÃO DE DESVIO ENTRE OS DADOS OBSERVADOS E OS DADOS ESPERADOS

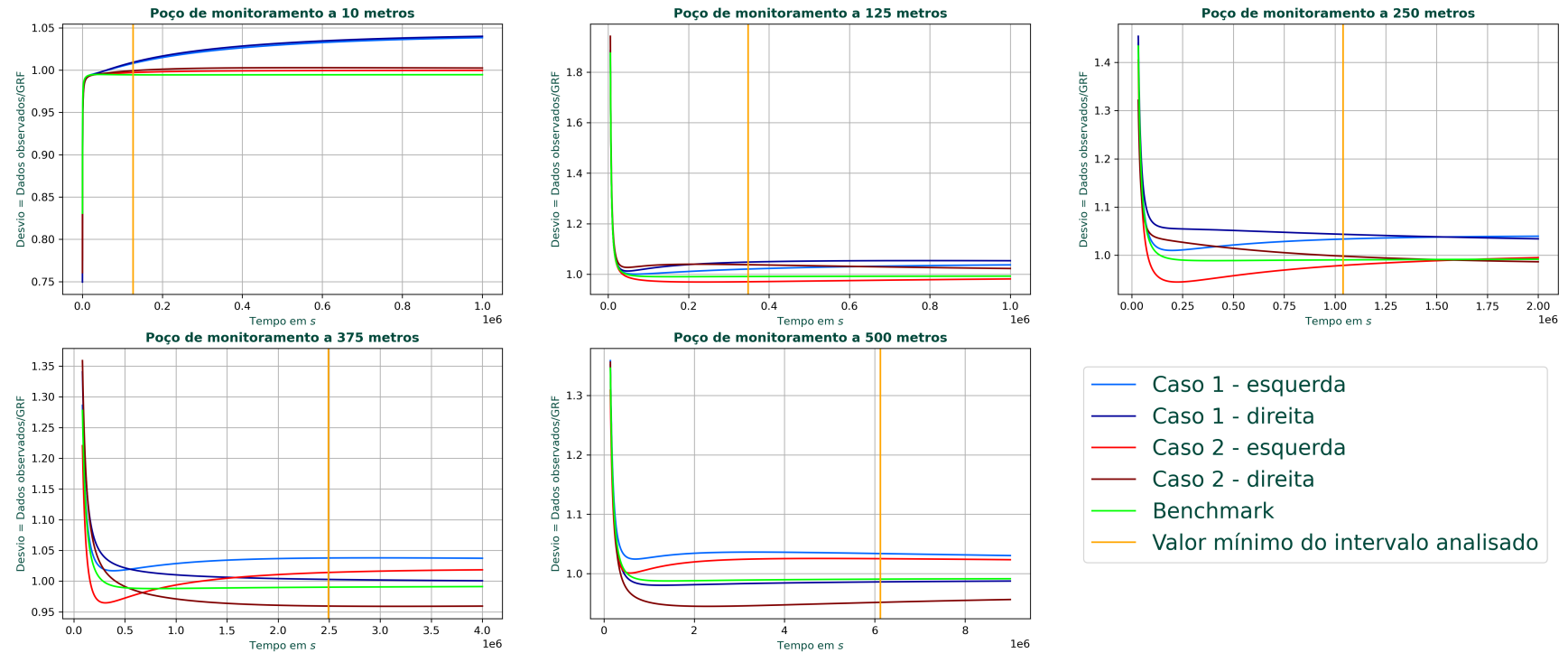


Figura 9: Curvas da proporção de desvio entre os dados obtidos das modelagens numéricas e a solução GRF.

Outro ponto a ser notado é que o intervalo de tempo que produziram as melhores estimativas para o benchmark, com o início deste intervalo indicado nos gráficos pela reta laranja vertical, representa a porção onde as curvas de desvio estão estabilizadas em um valor no eixo y. Porém, isto não ocorre para os poços a 10 metros no caso 1 e ocorre de maneira parcial para os poços a 250 metros nos casos 1 e 2 (loais de máximo estreitamento e espessamento do aquífero).

Para todos os poços nos três casos simulados os valores de desvio se estabilizam em valores que se encontram entre 1,05 e 0,95, ou seja, a diferenças entre as cargas hidráulicas observadas e as esperadas conforme a solução analíticas possui uma diferença de no máximo 5 por cento. Isto indica que a geometria do aquífero implica em erros de valores de cargas hidráulicas muito baixo e por consequência as estimativas de T possui este mesmo caráter, como já era esperado.

7.2 Estimativas de condutividade hidráulica

A partir dos dados de rebaixamento das cargas hidráulicas de todos os poços observados dos três casos foi feita a análise, utilizando o intervalo final das curvas de rebaixamento, para se estimar os parâmetros K e S. A figura 10 ilustra os valores obtidos para cada distância do poço de monitoramento em relação ao poço de bombeamento. Em (a) os valores obtidos em logaritmo e em (b) os valores de erro de K, em porcentagem, entre o valor real do aquífero e os valores obtidos.

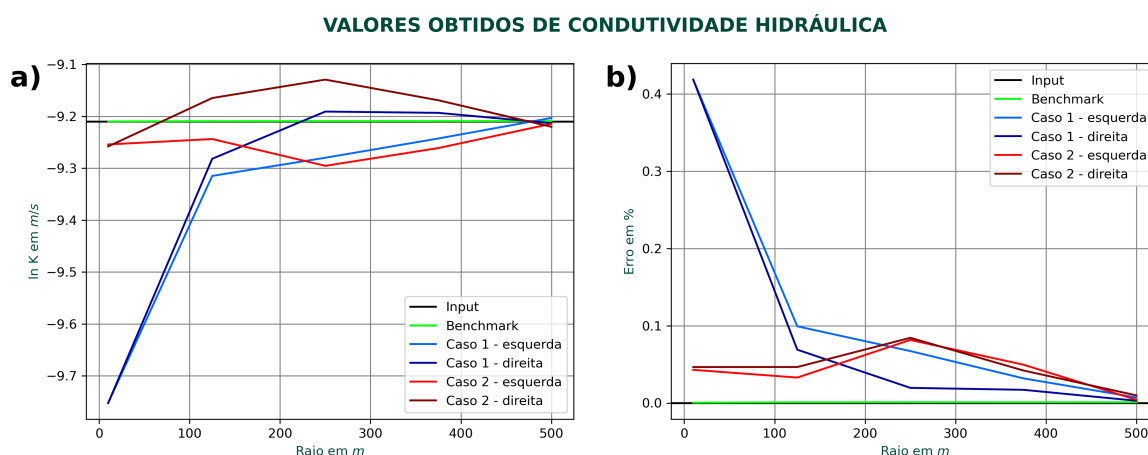


Figura 10: Condutividades hidráulicas obtidas utilizando a solução GRF. Em (a) os valores em logaritmo e em (b) o erro em porcentagem dos valores K obtidos em relação com o valor de K real do aquífero (input).

Os valores de K obtidos para o benchmark (curva verde) são muito próximos aos valores de input (curva preta: $y = -9.21034$). Isto indica que os resultados da modelagem são confiáveis e que a solução analítica GRF unidimensional descreve perfeitamente o rebaixamento das cargas hidráulicas para a descrição utilizada nesta modelagem.

Os dados dos poços a 10 metros de distância da localização bombeada do caso 1 apresentou um comportamento das curvas de diferença (Fig. 8) e das curvas de desvio proporcional (Fig.

9) muito diferente dos outros casos e isto é refletido nas estimativas de K (Fig. 10). Estes cenários apresentaram os maiores erros com valores acima de 40 por cento.

Para os demais poços do caso 1 e 2 os valores de erro são pequenos e menores que 10 por cento, como já era esperado antes mesmo da elaboração deste projeto. Destes poços os que apresentaram os maiores erros foram os poços a 125 metros do caso 1 e os poços a 250 metros do caso 2. Os menores valores de erro ficam com todos os 4 poços a 500 metros de distância do poço bombeado.

Os resultados obtidos de condutividade hidráulica estão apresentados na tabela 4.

Tabela 4: Valores de $\ln K$ obtidos em (m/s).

Distância do poço bombeado (m)	Caso 1 - esquerda	Caso 1 - direita	Caso 2 - esquerda	Caso 2 - direita
10	-9,75202	-9,75220	-9,25420	-9,25800
125	-9,31481	-9,28182	-9,24381	-9,16485
250	-9,27988	-9,19093	-9,29542	-9,12937
375	-9,24275	-9,19340	-9,26119	-9,16914
500	-9,20321	-9,21327	-9,21446	-9,22023

7.3 Estimativas de transmissividade

Os valores de transmissividade foram obtidos a partir da equação (17) e assim como para as condutividades hidráulicas obtidas foram representadas com gráficos de valores de $\ln T$ e de erro em porcentagem em função do raio do poço observado (Fig. 11).

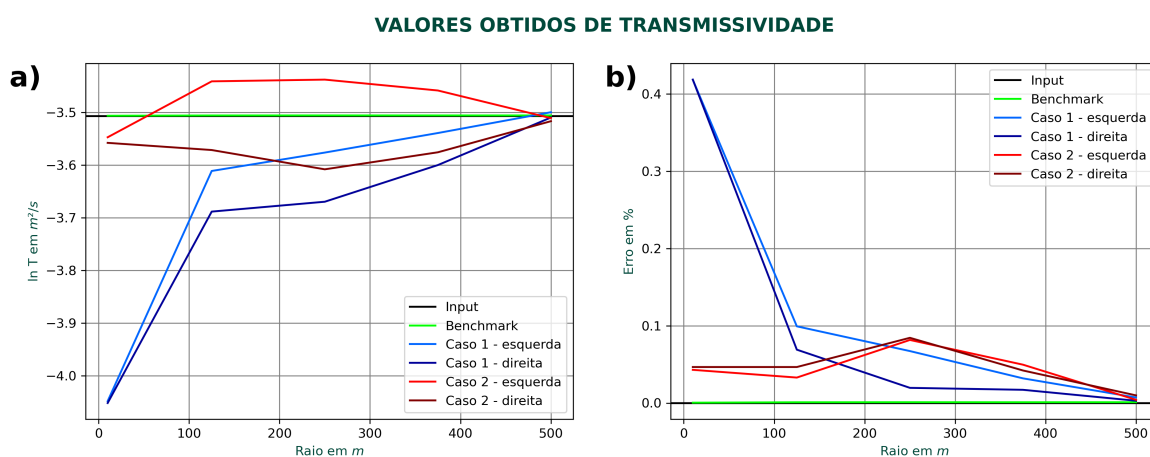


Figura 11: Transmissividades obtidas utilizando a solução GRF e os valores de espessuras no local do poço de monitoramento analisado. Em (a) os valores em logaritmo e em (b) o erro em porcentagem dos valores T obtidos em relação com o valor de T real do aquífero (input) para cada posição.

Comparando os gráficos (a) das figuras 10 e 11 é possível observar que os valores obtidos, no caso 1, para os poços da esquerda possuem valores menores de K se comparados com os poços da direita. Isto se inverte para os valores obtidos de T devido ao fato que os poços da direita tem menor espessura de aquífero do que os poços da esquerda, refletindo em menores valores de T. Para o caso 2 os valores são invertidos também reflexos da espessura na qual estão posicionados os poços de monitoramento.

Porém, para os gráficos (b) das figuras 10 e 11 os valores de erro são exatamente iguais, ou seja, majoritariamente menores que 10 por cento. Esta igualdade dos valores ocorre, pois a obtenção desses valores de erro são feitas comparando o T obtido, definido por K estimado e a espessura do poço, com o T calculado, definido pelo K real (input do modelo) e as mesmas espessuras de cada poço. O fato do erro ser obtido dividindo os valores obtidos com os reais faz com que a espessura seja cancelada e, portanto, resulta em mesmo valores de erro em porcentagem. Isto não ocorre com os gráficos (a) pois os valores de T destes não são comparativos (razão) com os valores reais. Desta forma, para analisar a influência da geometria nas estimativas de T é melhor utilizar os valores de T (Fig. 11(a)), como feito anteriormente.

Os resultados obtidos de transmissividade estão apresentados na tabela 5.

Tabela 5: Valores de $\ln T$ obtidos em (m/s).

Distância do poço bombeado (m)	Caso 1 - esquerda	Caso 1 - direita	Caso 2 - esquerda	Caso 2 - direita
10	-4,04824	-4,05182	-3,54702	-3,55762
125	-3,61103	-3,68827	-3,44078	-3,57126
250	-3,57610	-3,66947	-3,43749	-3,60791
375	-3,53896	-3,59981	-3,45816	-3,57555
500	-3,49943	-3,50948	-3,51067	-3,51645

8 INTERPRETAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A massiva parcela da literatura investigando testes de bombeamento utilizam métodos baseados na realidade destes testes. Um poço bombeado provoca um fluxo radial em torno de si, e como consequência os métodos e as investigações científicas são baseadas nesta realidade, pois partem deste princípio. O maior exemplo é a solução Theis que tem como premissa o fluxo radial bidimensional.

A solução GRF se insere em um contexto da necessidade da utilização da solução Theis para diferentes geometrias, podendo ser útil para se entender as análises de dados de testes de bombeamento em rochas fraturadas. Esta solução é uma generalização da solução Theis para dimensões diferentes, como, por exemplo, o fluxo radial tridimensional em torno de uma esfera para o caso da GRF em 3D ou, como no caso deste trabalho, o fluxo radial unidimensional em torno de um ponto.

Os resultados deste projeto serão analisados com base na literatura de teste de bombeamento tradicional (fluxo radial bidimensional), apesar de obter estes resultados através de uma descrição de fluxo radial unidimensional. Entretanto, para o que se investiga neste trabalho, impacto de fluxo vertical (2D) decorrente da geometria do aquífero quando analisado utilizando uma solução (GRF 1D, o qual é uma solução Theis em 1D) que tem como premissa fluxo unidimensional, seria o mesmo que estudar, nos casos reais, o impacto do fluxo vertical (3D) decorrente da geometria do aquífero utilizando soluções (e.g. Theis) que tem como premissa fluxo bidimensional.

Outro ponto a ser mencionado são os valores de rebaixamento das cargas hidráulicas obtidas que não fazem sentido para os valores normalmente observados na natureza. Isto é reflexo da configuração utilizada no problema, como já explicado. Como prática de procurar entender estes valores, foi feita uma razão entre a solução GRF e a solução Theis para se obter um fator (variável em função do tempo). Este fator foi utilizado para "transformar" os valores de rebaixamento obtidos pelo GRF para os valores que seriam obtidos pela solução Theis tradicional. Como consequência, as cargas hidráulicas na porção da curva analisada para os poços a 250 metros apresentaram rebaixamento em torno de 50 metros.

8.1 Período pós-inicial da curva de rebaixamento

Butler e Liu (1993) mencionam que mudanças, fora do esperado por soluções analíticas, no comportamento do rebaixamento ao longo do tempo são sensíveis às propriedades hidráulicas do aquífero até determinado tempo de bombeamento. Após certo limite de tempo, as variações do fluxo de água causadas pelas variações laterais das propriedades hidráulicas do aquífero serão imperceptíveis através da análise da curva de rebaixamento, pois o fluxo subterrâneo está chegando perto de um estado estacionário.

Esta ideia apoia a afirmação de que o intervalo de oscilação entre a explosão dos valores de desvio e a porção da curva analisada (Fig. 9) é reflexo das variações do fluxo de água causada

pelas variações laterais da geometria. Outra evidência que apoia esta afirmação é que os poços dos dois casos de espessura irregular não apresenta esta oscilação para o mesmo intervalo, pois estes se encontram bem perto do poço bombeado, de forma que estas variações do fluxo de água não influenciam muito nas curvas de rebaixamento.

Além disso, os poços que se localizam mais próximos da irregularidade do aquífero e que estão entre estas geometrias e o poço bombeado, 250 e 375 metros, (Fig. 9) resultam nas curvas que apresentam maiores oscilações para o intervalo mencionado.

Se analisada as curvas de desvio (Fig. 9) tendo em consideração a posição do poço, esquerda ou direita, se observa que os poços da esquerda para distâncias além de 125 metros possuem oscilação dos valores de desvio maiores que as oscilações dos poços da direita. Além disso, as figuras 6 e 7 mostram que estes poços da esquerda possuem rebaixamentos maiores que os previstos, indicando que a vazão do lado esquerdo é maior que o lado direito. Isto é apoiado tanto pela geometria dos aquíferos que o lado esquerdo possui espessura maior que o lado direito, nos dois casos, quanto pela solução GRF (16) que diz que quanto maior a vazão maior será o rebaixamento obtido. Este, portanto, é mais uma evidência que corrobora para a ideia de que as oscilações acima mencionadas são reflexo das variações da espessura do aquífero.

8.2 Intervalo da curva analisado

A porção dos dados analisados, intervalo este obtido através dos dados de benchmark, apresenta um estado quase estacionário (Fig. 8), i.e. as mudanças são tão graduais que podem ser assumidas como constantes. Zha et al (2017) utilizando vários dados de rebaixamento observados e tomografia hidráulica, chegaram a conclusão que a heterogeneidade das propriedades de um aquífero, principalmente a condutividade hidráulica, impede o desenvolvimento de uma condição estacionária das cargas hidráulicas a menos que a duração do bombeamento seja muito grande. Observado a figura 8 para o gráfico do poço a 250 metros (local com maior heterogeneidade da espessura do aquífero) a porção analisada, e que deveria ter um estado estacionário, é a que apresenta maiores variações se comparada com os outros poços. Estas variações, certamente, são o estado quase estacionário provocado pela heterogeneidade das propriedades do aquífero.

Outro ponto a ser interpretado é o aumento do tempo de bombeamento, para alcançar o intervalo ótimo dos dados a serem analisados (Tabela 3), com o aumento da distância do poço monitorado. Wu et al (2005) utilizando modelagem numérica de um aquífero heterogêneo com diferentes posições dos poços chegou a conclusão que quanto maior for a distância do poço de monitoramento maior o período (tempo de bombeamento) que as estimativas de T apresentará grandes variações em relação ao T efetivo (input do modelo). Isto resulta que quanto maior a distância do poço analisado em um teste de bombeamento, maior será o tempo necessário para as estimativas proveniente deste aproximarem o T efetivo.

8.3 Significado das estimativas

Wu et al (2005) utilizando um modelo numérico mostrou que as estimativas obtidas de somente um poço de monitoramento não tem um significado claro. Eles produziram um mapa de correlação cruzada entre os valores de carga hidráulica afetadas pelo bombeamento e as estimativas de T obtidas de um poço de monitoramento (Fig. 12) para períodos iniciais e finais dos dados de rebaixamento. Para períodos iniciais, os valores de T obtidos são negativamente correlacionados com os valores de rebaixamento na mesma área. Porém, para períodos finais da curva de rebaixamento as estimativas de T são muito afetadas por uma grande área de cargas hidráulicas rebaixadas, com maiores correlações em duas regiões: A e B (Fig. 12(B)). Entretanto, estes valores obtidos de T são altamente influenciados pelo domínio inteiro afetado pelo cone de rebaixamento.

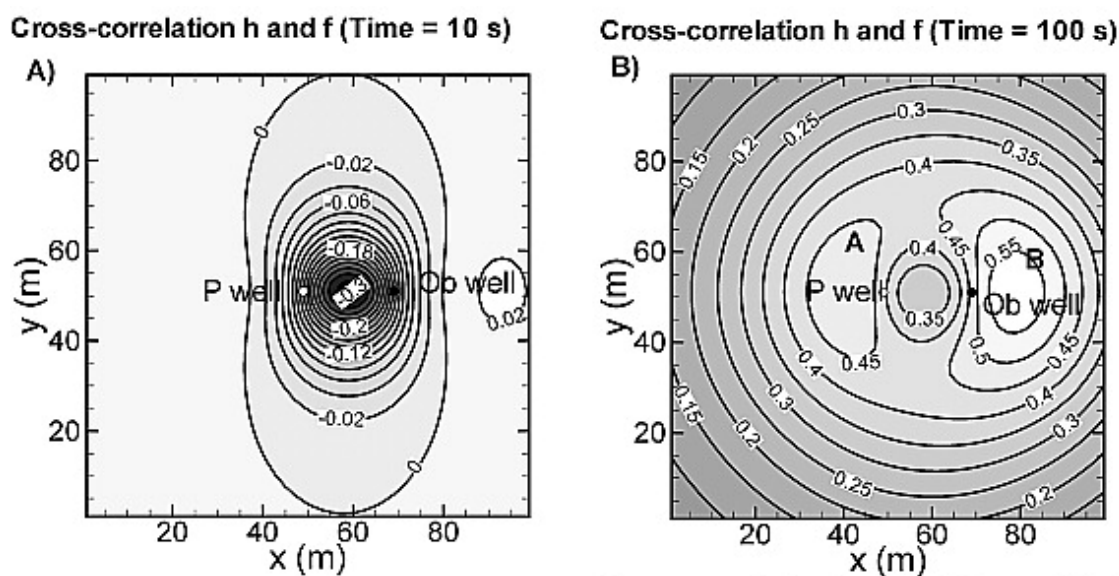


Figura 12: Mapa de correlação cruzada entre os valores de carga hidráulica e estimativa de transmissividade a (A) curtos e (B) longos período de bombeamento. Adaptado de Wu et al., 2005

As estimativas obtidas nos poços de 500 metros de distância foram as que mais se aproximaram dos valores reais (Fig. 10 e 11) e, portanto, obtiveram os menores valores de erros, independentemente do caso 1 ou 2. O volume amostrado para cada incremento de carga hidráulica rebaixada em um poço de observação durante um teste de bombeamento será maior quanto maior for a distância entre o poço de bombeamento e o poço de monitoramento. Poços a grandes distâncias, implicam maiores tempos de bombeamento, como já discutido, pois o volume amostrado é tão grande que o efeito de variações locais de fluxo se tornam desprezíveis, como foi mostrado por Butler e Liu (1993) e que a área que influencia o T obtido é também muito grande como mostra a figura 12. Essas afirmações ajudam a explicar as ótimas estimativas obtidas para esses poços.

Porém, para os demais a porção da curva analisada é obtida de menores tempos de bombeamento (Tabela 3) e, portanto, menor área amostrado do aquífero. Isto faz que com as variações de fluxo locais derivadas pela espessura irregular tenham maior peso nas estimativas dos parâmetros hidráulicos obtidos. Para o caso 1 (Fig. 10 e 11) os valores estimados nos

poços do lado direito possuem menores erros se comparado com os obtidos do lado esquerdo. Isto pode ser explicado pelo fato de as estimativas obtidas no poço do lado direito serem, para todas as distâncias deste lado, influenciadas pela porção atrás do poço de bombeamento que é de espessura constante, ao passo que para os poços do lado esquerdo a área atrás do poço do bombeamento ser sempre de espessura irregular.

Já para os poços do caso 1 a distância de 10 metros e apresentaram maiores erros, acima de 40 por cento, isto pode ser entendido como que estes poços, para qualquer lado do poço de bombeamento que ele esteja, será influenciada por toda a espessura irregular atrás do poço de bombeamento para o poço de monitoramento à esquerda ou para a irregularidade a trás do poço de monitoramento para o poço localizado a direita. Quanto mais distante o poço estiver para este caso no lado direito, menor será a porção da irregularidade com alta influência nas estimativas. Além disso, como já menciona, o aumento da distância implica no aumento da área do aquífero amostrada e a influência da irregularidade diminui. Isto explica a tendência da diminuição dos erros obtidos no caso 1 com o aumento da distância.

8.3.1 *Parâmetros efetivos*

Meier et al (1998) e Sánchez-Vila et al (1999) utilizando técnicas de análise de teste de bombeamento tradicionais em aquíferos heterogêneos concluíram que estimativas de T obtidas a partir de diferentes poços de monitoramento com diferentes distâncias tendem a convergir para o valor de T efetivo (média geométrica de T). Os resultados do caso 2 (Fig. 10(a) e 11(a)) possuem médias geométricas de $\ln K$ igual a -9,22093 m/s e de $\ln T$ igual a -3,52183 m²/s que se aproximam do valor real (input) desses parâmetros que são, respectivamente, -9,21034 e -3,50656 m²/s. Considerando os valores destes parâmetros efetivos o erro das estimativas são 4,0E-8 e 0,00435 por cento para K e T efetivos, respectivamente.

Estes valores baixos de erro considerando os parâmetros efetivos eram esperados para o caso 2 uma vez que quantitativamente a área do aquífero perdida do lado direita é igual à área ganha do lado esquerdo. Isto resulta em um T médio igual ao T do modelo benchmark de espessura constante e que é a premissa da solução GRF. Isto também é refletido as estimativas obtidas para cada poço (Fig. 10 e 11).

Porém, o caso 1 não possui uma imagem inversa da anomalia da espessura do aquífero, como também acontece na natureza, apresentará maiores erros. Utilizando o mesmo conceito usado para o caso 2, esse primeiro cenário apresentou $\ln K$ efetivo de -9,34014 m/s e $\ln T$ de -3,67432 com erros em porcentagem de 12,1 e 15, para K e T respectivamente. Portanto, erros mais um pouco maiores que os obtidos por estimativas desses parâmetros utilizando somente um poço de bombeamento (Fig. 10 e 11).

Entretanto, os valores de K e T obtidos para o caso 1 nos poços de 10 metros de distância são valores que desviam muito dos obtidos nos demais poços deste caso e até mesmo para os poços a 10 metros do caso 2. Caso estes 2 poços sejam desconsiderados da análise resulta em $\ln K$ e $\ln T$ efetivos de -9,23990 m/s e -3,58597 m²/s com erros menores de K e T de 2.9 e

7.6 por cento, respectivamente. E como esperado, os valores efetivos desses parâmetros são menores que os valores de input, fazendo sentido tanto para T (menor espessura) quanto para K que para a descrição utilizada neste projeto seria como se onde há a irregularidade do caso houvesse uma menor condutividade hidráulica que dificulta o fluxo unidimensional.

9 CONCLUSÕES

A partir deste projeto foi possível concluir que impactos das geometrias analisadas nas estimativas de transmissividade são da ordem de valores menores que 10 por cento para análises utilizando somente um poço de monitoramento. Para as análises utilizando diversos poços a diversas distâncias dos poços bombeados, as estimativas da média geométrica giram em torno de 3 a 7 por cento para o caso estudado de uma variação de 50 metros em um aquífero de 300 metros de espessura.

Este projeto apoia ainda afirmações feitas na literatura sobre a influência da heterogeneidade de T em aspectos da teoria de testes de bombeamento. Além disso, mostra que a geometria (espessura) também contribui para esta influência, uma vez que estas poderiam ser resultados somente da condutividade hidráulica. Exemplo desses aspectos causadas pela heterogeneidade de T e foram que confirmadas por serem influenciadas também pela geometria além da condutividade hidráulica são as oscilações da curva de rebaixamento, as variações locais de fluxo em comparação com o comportamento esperado antes da chegada da porção final das curvas de rebaixamento (estado quase estacionário) e a prolongação do estado quase estacionário e o retardamento do estado estacionário do rebaixamento das cargas hidráulicas.

Além disso, este projeto apoia a ideia, demonstrando de maneira quantitativa, da utilização de diversos poços de monitoramento, ao invés de um, e a diversas distâncias, a fim de se obter menores erros nos valores dos parâmetros hidráulicos obtidos e aumentar a qualidade da caracterização de aquíferos.

10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barker, J.A., 1988. A generalized radial flow model for hydraulic tests in fractured rock, *Water Resources Research*, vol. 24, no. 10, pp. 1796-1804.

Berg, S. J., and W. A. Illman, 2011. Capturing aquifer heterogeneity: Comparison of approaches through controlled sandbox experiments, *Water Resour. Res.*, 47, W09514, doi:10.1029/2011WR010429.

Bruggeman, G. A. (1972), The reciprocity principle in flow through heterogeneous porous media, in *Development in Soil Science, Fundamental of Transport Phenomena in Porous Media*, vol. 71, pp. 136–149, IAHR, Elsevier, Amsterdam.

Butler, J.J. Jr., and C.D. McElwee. 1990. Variable-rate pumping tests for radially symmetric nonuniform aquifers. *Water Resources Research* 26, no. 2: 291-306.

Butler, J. J.Jr., and W. Liu (1993), Pumping tests in non-uniform aquifers: The radially asymmetric case, *Water Resour. Res.*, 29(2), 259-269. <https://doi.org/10.1029/92WR02128>

Cooper, H. H., Jr., and C. E. Jacob, 1946. A generalized graphical method for evaluating formation constants and summarizing well-field history, *Eos Trans. AGU*, 27(4), 526–534.

Delay, F., P. Ackerer, and A. Guadagnini (2011), Theoretical analysis and field evidence of reciprocity gaps during interference pumping tests, *Adv. Water Resour.*, 34(5), 592–606.

Green, P.J., 1995. Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination, *Biometrika*, 82, 711–32.

Gutentag, E. G., F. J. Heimes, N. C. Krothe, R. R. Luckey, and J. B. Weeks. 1984. Geohydrology of the High Plains Aquifer in parts of Colorado, Kansas, Nebraska, New Mexico, Oklahoma, South Dakota, Texas, and Wyoming. U.S. Geological Survey Professional Paper 1400-B.

Hantush, M. S. and C. E. Jacob. 1955. Nonsteady radial flow in an infinite leaky aquifer. *Transactions of the American Geophysical Union*, 36, 95–100.

Hantush, M. S. 1960. Modification of the theory of leaky aquifers. *Journal of Geophysical Research*, 65, 3713–3725.

Harbaugh, A.W., and McDonald, M.G., 1996. User's documentation for MODFLOW-96, an update to the U.S. Geological Survey modular finite-difference ground-water flow model: U.S. Geological Survey Open-File Report 96–485, 56 p.

Huang S.-Y., Wen, J. -C, Yeh, T.-C. J., Lu, W., Juan, H.-L., Tseng, C.-M., Lee, J.-H., Chang, K.-C., 2011. Robustness of joint interpretation of sequential pumping tests: Numerical and field experiments, *WATER RESOURCES RESEARCH*, VOL. 47, W10530, doi:10.1029/2011WR010698

Johnson, G. S., Cosgrove, D. M., Frederick, D. B., 2001. A Numerical Model and Spreadsheet Interface for Pumping Test Analysis, *GROUNDWATER* 39, No. 4, 582–592.

Kabala, Z. J., 2001. Sensitivity analysis of a pumping test on a well with wellbore storage and skin, *Advances in Water Resources*, Volume 24, Issue 5, Pages 483-504, ISSN 0309-1708, [https://doi.org/10.1016/S0309-1708\(00\)00051-8](https://doi.org/10.1016/S0309-1708(00)00051-8).

Kruseman, G. P., N. A. de Ridder. 2000. Analysis and Evaluation of Pumping Test Data. Second Edition, International Institute for Land Reclamation and Improvement.

Lakshminarayana, V., and S.P. Rajagopalan. 1978. Digital model studies of steady-state radial flow to partially penetrating wells in unconfined anisotropic aquifers. *Journal of Hydrology* 38, 249-262.

Meier, P. M., J. Carrera, and X. Sanchez-Vila (1998), An evaluation of Jacob's method for interpretation of pumping tests in heterogeneous formations, *Water Resour. Res.*, 34(5), 1011-1025.

Müller, S., A. Zech, F. Heße. 2020. ogs5py: A Python-API for the OpenGeosys 5 Scientific Modeling Package. *Groundwater*, 59, pp. 117-122, <https://doi.org/10.1111/gwat.13017>

Müller, S., C. Leven, P. Dietrich, S. Attinger, A. Zech. 2021. How to Find Aquifer Statistics Utilizing Pumping Tests Studies Using welltestpy. *Groundwater*, 60, pp. 137-144, <https://doi.org/10.1111/gwat.13121>

Neuman, S. P. 1975. Analysis of pumping test data from anisotropic unconfined aquifers considering delayed gravity response. *Water Resources Research*, 11, 329–342.

Rathod, K.S., and K.R. Rushton. 1991. Interpretation of pumping from two zone layered aquifers using a numerical model. *Ground Water* 29, no. 4: 499-509.

Reilly, T.E., and A. W. Harbaugh. 1993. Simulation of cylindrical flow to a well using the U.S. Geological Survey Modular Finite-Difference Ground-Water Flow Model. *Ground Water* 31, no. 3: 489-494.

Rushton, K.R., and S.J. Booth. 1976. Pumping-test analysis using a discrete time-discrete space numerical model. *Journal of Hydrology* 28, 13-27.

Rutledge, A.T. 1991. An axisymmetric finite-difference flow model to simulate drawdown in and around a pumped well. USGS Water Resources Investigations Report 90-4098.

Sánchez-Vila, X., P. M. Meier, and J. Carrera (1999), Pumping test in heterogeneous aquifers: An analytical study of what can be obtained from their interpretation using Jacob's method, *Water Resour. Res.*, 35(4), 943-952.

Theis, C. V. (1935), The relation between lowering the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using ground water storage, *Eos Trans. AGU*, 16, 519–524.

Wen, J. C., C. M. Wu, T.-C. J. Yeh, and C. M. Tseng (2010), Estimation of effective aquifer hydraulic properties from an aquifer test with multi-well observations (Taiwan), *Hydrogeol. J.*, 18, 1143–1155, doi:10.1007/s10040-010-0577-1

Wu, C. M., T.-C. J. Yeh, J. Zhu, T. H. Lee, N. S. Hsu, C. H. Chen, and A. F. Sancho (2005), Traditional analysis of aquifer tests: Comparing apples to oranges?, *Water Resour. Res.*, 41, W09402, doi:10.1029/2004WR003717.

Xiang, J., T.-C. J. Yeh, C.-H. Lee, K.-C. Hsu, and J.-C. Wen (2009), A simultaneous successive linear estimator and a guide for hydraulic tomography analysis, *Water Resour. Res.*, 45, W02432, doi:10.1029/2008WR007180.

Yeh, T. C. J., Liu, S. (2000). Hydraulic tomography: Development of a new aquifer test method. *Water Resources Research*, 36(8), 2095-2105. <https://doi.org/10.1029/2000WR900114>

Zech, A., S. Muller, J. Mai, F. Heße, and S. Attinger. 2016. 'Extending Theis' solution: Using transient pumping tests to estimate parameters of aquifer heterogeneity. *Water Resources Research* 52, no. 8: 6156–6170. <https://doi.org/10.1002/2015WR018509>

Zech, A., C.L. Schneider, and S. Attinger. 2012. The extended Thiem's solution Including the impact of heterogeneity. *Water Resources Research* 48, no. 10: W10535. <https://doi.org/10.1029/2012WR011852>

Zha, Y., Yeh, T. C. J., Shi, L., Huang, S. Y., Wang, W., Wen, Y. Z. 2017. Quasi-steady state conditions in heterogeneous aquifers during pumping tests, *Advances in Water Resources*, 10.1016/j.advwatres.2017.03.017, 106, (95-110)

11 ANEXO

UNITED STATES
DEPARTMENT OF THE INTERIOR
GEOLOGICAL SURVEY
WATER RESOURCES DIVISION
GROUND WATER BRANCH
Washington 25, D. C.

GROUND WATER NOTES
HYDRAULICS

No. 5

August 1952

THE RELATION BETWEEN THE LOWERING OF THE PIEZOMETRIC SURFACE
AND THE RATE AND DURATION OF DISCHARGE OF A WELL
USING GROUND WATER STORAGE

By
Charles V. Theis

This paper develops some of the basic concepts on which much of our present-day theory of ground-water hydraulics is founded. Although published in the Transactions of the American Geophysical Union, part 2 (pp. 519-524), August 1935, the supply of reprints has long since been exhausted and the paper is now generally to be found only in the better-stocked reference libraries.

It is reproduced as part of the new series of Ground Water Notes to permit distribution to all ground-water field personnel for their ready reference and use. Minor changes have been made in notation only, to be consistent with current Branch usage.

When a well is pumped or otherwise discharged, water levels in its neighborhood are lowered. Unless this lowering occurs instantaneously it represents a loss of storage, either by the unwatering of a portion of the previously saturated sediments if the aquifer is nonartesian or by release of stored water by the compaction of the aquifer due to lowered pressure if the aquifer is artesian. The mathematical theory of ground-water hydraulics has been based, apparently entirely, on a postulate that equilibrium has been attained and therefore that water-levels are no longer falling. In a great number of hydrologic problems, involving a well or pumping district near or in which water-levels are falling, the

Open file

current theory is therefore not strictly applicable. This paper investigates in part the nature and consequences of a mathematical theory that considers the motion of ground-water before equilibrium is reached and, as a consequence, involves time as a variable.

To the extent that Darcy's law governs the motion of ground-water under natural conditions and under the artificial conditions set up by pumping, an analogy exists between the hydrologic conditions in an aquifer and the thermal conditions in a similar thermal system. Darcy's law is analogous to the law of the flow of heat by conduction, hydraulic pressure being analogous to temperature, pressure-gradient to thermal gradient, permeability to thermal conductivity, and specific yield to specific heat. Therefore, the mathematical theory of heat-conduction developed by Fourier and subsequent writers is largely applicable to hydraulic theory. This analogy has been recognized, at least since the work of Slichter, but apparently no attempt has been made to introduce the function of time into the mathematics of ground-water hydrology. Among the many problems in heat-conduction analogous to those in ground-water hydraulics are those concerning sources and sinks, sources being analogous to recharging wells and sinks to ordinary discharging wells.

C. I. Lubin, of the University of Cincinnati, has with great kindness prepared for me the following derivation of the equation expressing changes in temperature due to the type of source or sink that is analogous to a recharging or discharging well under certain ideal conditions, to be discussed below.

The equation given by H. S. Carslaw (Introduction to the mathematical theory of the conduction of heat in solids, 2nd ed., p. 152, 1921) for the temperature at any point in an infinite plane with initial temperature zero at any time due to an "instantaneous line-source coinciding with the axis of z of strength Q " (involving two-dimensional flow of heat) is

$$v = \frac{Q}{4\pi kt} e^{-(x^2 + y^2)/4kt} \quad (1)$$

where v = change in temperature at the point x, y at the time t ; Q = the strength of the source or sink--in other words, the amount of heat added or taken out instantaneously divided by the specific heat per unit-volume; k = Kelvin's coefficient of diffusivity, which is equal to the coefficient of conductivity divided by the specific heat per unit-volume; and t = time.

The effect of a continuous source or sink of constant strength is derived from equation (1) as follows:

$$\text{Let} \quad Q = \phi(t') dt'$$

$$\text{Then } v_{(x,y,t)} = \int_0^t \left[\frac{\phi(t')}{4\pi k(t-t')} \right] e^{-(x^2 + y^2)/4k(t-t')} dt'$$

$$\text{Let } \phi(t') = \lambda, \text{ a constant}$$

$$\text{Then } v_{(t)} = \frac{\lambda}{4\pi k} \int_0^t \left[\frac{e^{-(x^2 + y^2)/4k(t-t')}}{t-t'} \right] dt'$$

$$\text{Let } u = \frac{x^2 + y^2}{4k(t-t')}$$

$$\begin{aligned} \text{Then } v_{(t)} &= \frac{\lambda}{4\pi k} \int_{(x^2 + y^2)/4kt}^{\infty} \left[\frac{e^{-u}}{(t-t')} \right] \left[\frac{x^2 + y^2}{4k} \right] \frac{du}{u^2} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi k} \int_{(x^2 + y^2)/4kt}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \end{aligned} \quad (2)$$

The definite integral, $\int_{(x^2 + y^2)/4kt}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ is a form of the

exponential integral, tables of which are available (Smithsonian Physical Tables, 8th rev. ed., table 32, 1933; the values to be used are those given for $Ei(-x)$, with the sign changed.) The value of the integral is given by the series

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = -0.577216 - \log_e x + x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} - \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \dots \quad (3)$$

Equation (2) can be immediately adapted to ground-water hydraulics to express the draw-down at any point at any time due to discharging a well. The coefficient of diffusivity, k , is analogous to the coefficient of transmissibility of the aquifer divided by the specific yield. (The term "coefficient of transmissibility" is here used to denote the product of Meinzer's coefficient of permeability and the thickness of the saturated portion of the aquifer; it quantitatively describes the ability of the aquifer to transmit water. Meinzer's coefficient of permeability denotes a characteristic of the material; the coefficient of transmissibility denotes the analogous characteristic of the aquifer as a whole.) The continuous strength of the sink is analogous to the discharge rate divided by the specific yield. Making these substitutions, we have

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \int_{r^2 S/4Tt}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (4)$$

in which the symbols have the meanings given with equation (5). In equation (4) the same units must of course be used throughout. Equation (4) may be adapted to units commonly used

$$s = \frac{114.6Q}{T} \int_{1.87r^2S/Tt}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (5)$$

where s = the drawdown, in feet, at any point in the vicinity of a well discharged at a uniform rate; Q = the discharge of the well, in gallons a minute; T = the coefficient of transmissibility of the aquifer, in gallons a day, through each 1-foot strip extending the height of the aquifer, under a unit-gradient--this is the average coefficient of permeability (Meinzer) multiplied by the thickness of the aquifer; r = the distance from pumped well to point of observation, in feet; S = the specific yield, as a decimal fraction; and t = the time the well has been pumped, in days.

Equation (5) gives the draw-down at any point around a well being discharged uniformly (and continuously) from a homogeneous aquifer of constant thickness and infinite areal extent at any time. The introduction of the function, time, is the unique and valuable feature of the equation. Equation (5) reduces to Thiem's or Slichter's equation for artesian conditions when the time of discharge is large.

Empirical tests of the equation are best made with the data obtained by L. K. Wenzel (Recent investigations of Thiem's method for determining permeability of water-bearing sediments, Trans. Amer. Geophys. Union, 13th annual meeting, pp. 313-317, 1932; also Specific yield determined from a Thiem's pumping test, Trans. Amer. Geophys. Union, 14th Annual Meeting, pp. 475-477, 1933) from pumping tests in the Platte Valley in Nebraska. Figure 1 presents the comparison of the computed and observed draw-downs after two days of pumping. The observed values are those of the generalized depression of the water-table as previously determined by Mr. Wenzel. The computed values are obtained by equation (5), using values of permeability and specific yield that are within one per cent of those determined by Mr. Wenzel by other methods. The agreement represented may be regarded as showing either that the draw-downs have been computed from known values of transmissibility and specific yield or that these factors have been computed from the known draw-downs.

Theoretically, the equation applies rigidly only to water-bodies (1) which are contained in entirely homogeneous sediments, (2) which have infinite areal extent, (3) in which the well penetrates the entire thickness of the water-body, (4) in which the coefficient of transmissibility is constant at all times and in all places, (5) in which the pumped well has an infinitesimal diameter, and (6) - applicable only to unconfined water-bodies - in which the water in the volume of sediments through which the water-table has fallen is discharged instantaneously with the fall of the water-table.

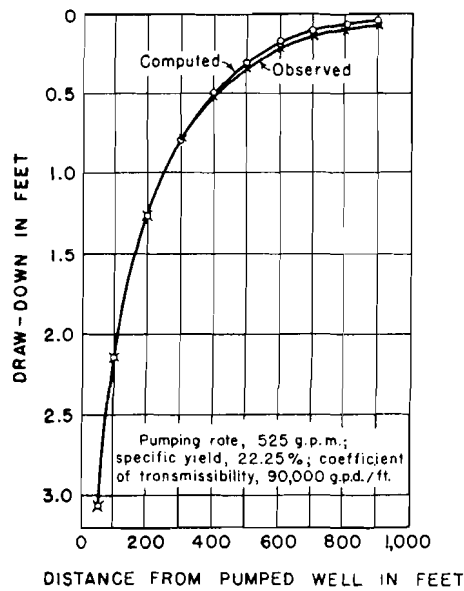


FIGURE 1.—OBSERVED AND
COMPUTED DRAW-DOWNS IN
VICINITY OF A WELL AFTER
PUMPING 48 HOURS

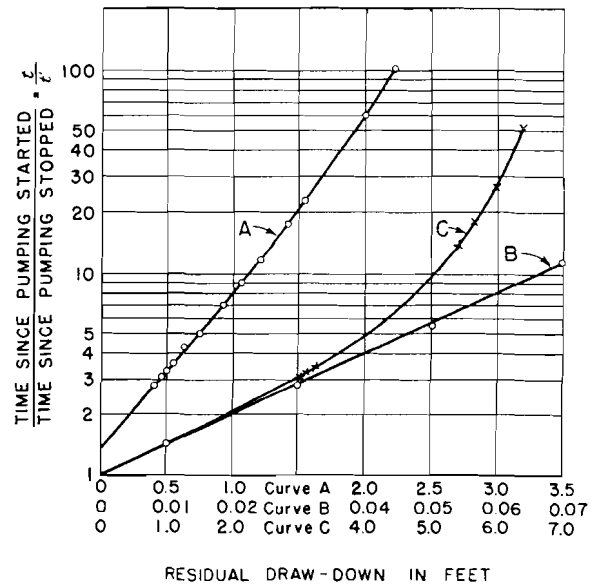


FIGURE 2.—RECOVERY-CURVES OF
CERTAIN WELLS

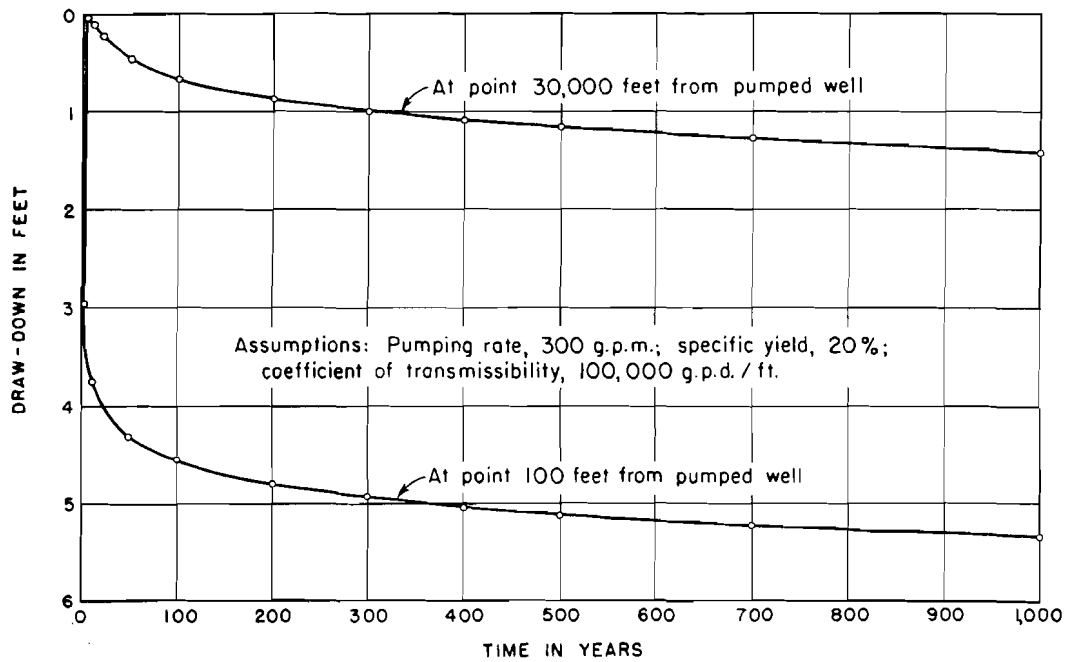


FIGURE 3.—LOWERING OF WATER-TABLE NEAR WELL PUMPING
CONTINUOUSLY FROM THICK AQUIFER

These theoretical restrictions have varying degrees of importance in practice. The effect of heterogeneity in the aquifer can hardly be foretold. The effect of boundaries can be considered by more elaborate analyses, once they are located. The effect of the well failing to penetrate the entire aquifer is apparently negligible in many cases. The pumped well used in the set-up that yielded the data for Figure 1 penetrated only 30 feet into a 90-foot aquifer. The coefficient of transmissibility must decrease during the process of pumping under water-table conditions, because of the diminution in the cross-section of the area of flow due to the fall of the water-table; however, it appears from Figure 1 that if the water-table falls through a distance equal only to a small percentage of the total thickness of the aquifer the errors are not large enough to be observed. In artesian aquifers the coefficient of transmissibility probably decreases because of the compaction of the aquifer, but data on this point are lacking. The error due to the finite diameter of the well is apparently always insignificant.

In heat-conduction a specific amount of heat is lost concomitantly and instantaneously with fall in temperature. It appears probable, analogously, that in elastic artesian aquifers a specific amount of water is discharged instantaneously from storage as the pressure falls. In non-artesian aquifers, however, the water from the sediments through which the water-table has fallen drains comparatively slowly. This time-lag in the discharge of the water made available from storage is neglected in the mathematical treatment here given. Hence an error is always present in the equation when it is applied to water-table conditions. However, inasmuch as the rate of fall of the water-table decreases progressively after a short initial period, it seems probable that as pumping continues the rate of drainage of the sediments tends to catch up with the rate of fall of the water-table, and hence that the error in the equation becomes progressively smaller.

For instance, although the draw-downs computed for a 24-hour period of pumping in Mr. Wenzel's test showed a definite lack of agreement with the observations, similar computations for a 48-hour period gave the excellent agreement shown in Figure 1. Unfortunately data for periods of pumping longer than 48 hours have not been available.

The equation implies that any two observations of draw-down, whether at different places or at the same place at different times, are sufficient to allow the computation of specific yield and transmissibility. However, more observations are always necessary in order to guard against the possibility that the computations will be vitiated by the heterogeneity of the aquifer. Moreover, it appears that the time-lag in the drainage of the unwatered sediments makes it impossible at present to compute transmissibility and specific yield from observations on water-levels in only one observation-well during short periods of pumping. Good data from artesian wells have not been available, but such data as we have hold out the hope that transmissibility and specific yield may be determined from data from only one observation-well.

A useful corollary to equation (5) may be derived from an analysis of the recovery of a discharged well. If a well is discharged for a known period and then left to recover, the residual draw-down at any instant will be the same as if discharge of the well had been continued but a recharge well with the same flow had been introduced at the same point at the instant discharge stopped. The residual draw-down at any instant will then be

$$s' = \frac{114.6Q}{T} \int_{1.87r^2S/Tt}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{1.87r^2S/Tt'}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (6)$$

where t is the time since discharge started and t' is the time since discharge stopped.

In and very close to the well the quantity $\frac{1.87r^2S}{Tt'}$ will be very small as soon as t' ceases to be small because r is very small. In many problems ordinarily met in ground-water hydraulics, all but the first two terms of the series of equation (3) may be neglected, so that, if $Z = \frac{1.87r^2S}{Tt}$ and $Z' = \frac{1.87r^2S}{Tt'}$ equation (6) may be approximately rewritten

$$\begin{aligned} s' &= \frac{114.6Q}{T} \left[-0.577 - \log_e Z' + 0.577 + \log_e Z \frac{t}{t'} \right] \\ &= \frac{114.6Q}{T} \log_e \frac{t}{t'} \end{aligned}$$

Transposing and converting to common logarithms, we have

$$T = \frac{264Q}{s'} \log_{10} \frac{t}{t'} \quad (7)$$

This equation permits the computation of the coefficient of transmissibility of an aquifer from an observation of the rate of recovery of a discharged well.

Figure 2 shows a plot of observed recovery-curves. The ordinates are $\log(t/t')$; the abscissas are the distances the water-table lies below its equilibrium-position. According to equation (7) the points should fall on a straight line passing through the origin. Curve A is a plot of the recovery of a well within 3 feet of the well pumped for Mr. Wenzel's test, previously mentioned. Most of the points lie on a straight line, but the line passes to the left of the origin. This discrepancy is probably due to the fact that the water-table rises faster than the surrounding pores are filled. The coefficient of permeability computed from the equation is about 1200, against a probably correct figure of 1000. Curve B is plotted from data obtained from an artesian well near Salt Lake City. The points all fall according to theory.

Curve C shows the recovery of a well penetrating only the upper part of a nonartesian aquifer of comparatively low transmissibility. It departs markedly from a straight line. This curve probably follows equation (6), but it does not follow equation (7), for in this case $(1.87r^2S/Tt')$ is not small. Equation (6), involving r and S , neither of which may be known in practice, is not of practical value for the present purpose. Further empirical tests may show that it is feasible to project the curve to the origin, in the neighborhood of which $1.87r^2S/Tt'$ becomes small, owing to the increase in t and t' , and apply equation (7) to the extrapolated values so obtained in order to determine at least an approximate value of the transmissibility.

The paramount value of equation (5) apparently lies in the fact that it gives part of the theoretical background for predicting the future effects of a given pumping regimen upon the water-levels in a district that is primarily dependent on ground-water storage. Such districts may include many of those tapping extensive nonartesian bodies of ground-water. Figure 3 shows the vertical rate of fall of the water-level in an infinite aquifer, the water being all taken from storage. The curves are plotted for certain definite values of pumping rate, transmissibility, and specific yield, but by changing the scales either curve could be made applicable to any values set up.

These theoretical curves agree qualitatively with the facts generally observed when a well is pumped. The water-level close to the well at first falls very rapidly, but the rate of fall soon slackens. In the particular case considered in Figure 3 the water-level at a point 100 feet from the pumped well would fall during the first year of pumping more than half the distance it would fall in 1000 years. A delayed effect of the pumping is shown at distant points. The water-level at a point about 6 miles from the pumped well of Figure 3 would fall only minutely for about five years but would then begin to fall perceptibly, although at a much less rate than the water-level close to the well. Incidentally the rate of fall after considerable pumping is so small that it might easily lead to a false assumption of equilibrium. The danger in a pumping district using ground-water storage lies in the delayed interference of the wells. For instance, although in 50 years one well would cause a draw-down of only 6 inches in another well 6 miles away, yet the 100 wells that might lie within 6 miles of a given well would cause in it a total draw-down of more than 50 feet.

In the preparation of this paper I have had the indispensable help not only of Dr. Lubin, who furnished the mathematical keystone of the paper, but also of Dr. C. E. Van Orstrand, of the United States Geological Survey, and of my colleagues of the Ground Water Division of the Survey, who cordially furnished data and criticism.

Author's Note:

The factor S in the equations given is called "specific yield" in the text of the paper. Later consideration has shown it advisable to call this term the "coefficient of storage" of the aquifer and to define it as the quantity of water in cubic feet that is discharged from each vertical prism of the aquifer with basal area equal to 1 square foot and height equal to that of the aquifer when the water level falls 1 foot. For non-artesian aquifers this concept is closely akin to that of specific yield and, as shown in the paper, computations of its value seem to be in close agreement with those determined for specific yield. For artesian aquifers, the concept is related to the compressibility of the aquifer and the value of the coefficient is of a smaller order of magnitude than that for non-artesian aquifers.

A GENERALIZED GRAPHICAL METHOD FOR EVALUATING FORMATION
CONSTANTS AND SUMMARIZING WELL-FIELD HISTORY

H. H. Cooper, Jr. and C. E. Jacob

(Published with the approval of the Director of the Geological Survey,
United States Department of the Interior)

Abstract--The capacities of a water-bearing formation to transmit water under a hydraulic gradient and to yield water from storage when the water table or artesian pressure declines, are generally expressed, respectively, in terms of a coefficient of transmissibility and a coefficient of storage. Determinations of these two constants are almost always involved in quantitative studies of ground-water problems.

C. V. THEIS [1935, see "References" at end of paper] gave an equation, adapted from the solution of the analogous problem in heat conduction, for computing the non-steady drawdown accompanying the radial flow of water to a well of constant discharge. This equation has been used successfully many times for determining coefficients of transmissibility and storage from observed drawdowns. As it involves a transcendental function known as the exponential integral and two unknown coefficients, one of which occurs both in the argument and as a divisor of the function, the coefficients cannot be determined directly. However, they may be determined by a graphical method devised by THEIS and described by JACOB [1940, p. 582] and WENZEL [1942, pp. 88-89]. This method requires the use of a "type curve," on which the observed data are superimposed to determine the coefficients.

Later, WENZEL and GREENLEE [1944] gave a generalization of THEIS' graphical method by which the coefficients may be determined from tests of one or more discharging wells operated at changing rates. This method requires the computation of a special type curve for each observation of drawdown used. It is without doubt a worth-while contribution to the quantitative techniques of ground-water hydraulics, but in tests that involve more than a very few discharging wells or a very few changes in the rates of discharge, the computation of the special type curves is necessarily so laborious as to make the method difficult to apply.

The present paper gives a simple straight-line graphical method for accomplishing the same purposes as the methods developed by THEIS and by WENZEL and GREENLEE. Type curves are not required. The writers believe that the straight-line method, where applicable, has decided advantages, in ease of application and interpretation, over the other graphical methods. However, as the method will not be applicable in some cases, it is expected to supplement, rather than supersede, the other methods. The method is designed especially for artesian conditions, but it may be applied successfully to tests of non-artesian aquifers under favorable circumstances.

This paper first gives the development of the method for tests involving a single discharging well operating at a steady rate, and then generalizes the method to make it applicable to tests involving one or more wells discharging intermittently or at changing rates. Examples are given to demonstrate the method.

Straight-line method for a single well discharging at a steady rate

When sufficient time has elapsed after an artesian well has begun discharging at a steady rate, the drawdown within a given distance increases approximately in proportion to the logarithm of the time since the discharge began, and decreases in proportion to the logarithm of the distance from the well. By virtue of this relationship, it is possible to determine the coefficients of transmissibility and storage of an aquifer from a simple semi-logarithmic plot of observed drawdowns.

The drawdown produced by a well discharging at a steady rate from an extensive artesian aquifer of uniform thickness and permeability is given by equation (1) [THEIS, 1935].

$$s = (Q/4\pi T)W(u)$$

$$= (Q/4\pi T) (-0.5772 - \log_e u + u - u^2/2.2! + u^3/3.3! - \dots) \dots \dots \dots (1)$$

Here $u = r^2 S / 4Tt$, r = distance from the discharging well, t = time elapsed since start of discharge, T = transmissibility of the aquifer (discharge per unit normal width per unit hydraulic gradient), S = coefficient of storage (volume of water that a unit decline of head releases from storage in a vertical prism of the aquifer of unit cross section), and Q = discharge of the well.

For small values of (r^2/t) compared to the value of $(4T/S)$, u will be so small that the series following the first two terms in the series in equation (1) may be neglected. Thus, where values of (r^2/t) are relatively small, equation (1) may, for all practical purposes, be approximated as in equation (2).

$$s = (Q/4\pi T)[\log_e(1/u) - 0.5772]$$

$$= (Q/4\pi T)[\log_e(4Tt/r^2 S) - 0.5772]$$

or
$$s = (Q/4\pi T)\log_e(4e^{-0.5772} Tt/r^2 S) = (Q/4\pi T)\log_e(2.25Tt/r^2 S) \dots \dots \dots (2)$$

The approximation will be tolerable where u is less than about 0.02. Converting to the common logarithm, we may rewrite equation (2) in any one of the three forms in equations (3), (4), and (5).

$$s = - (2.303Q/2\pi T)[\log_{10} r - (1/2)\log_{10}(2.25Tt/S)] \dots \dots \dots (3)$$

$$s = (2.303Q/4\pi T)[\log_{10} t - \log_{10}(r^2 S/2.25T)] \dots \dots \dots (4)$$

$$s = - (2.303Q/4\pi T)[\log_{10}(r^2/t) - \log_{10}(2.25T/S)] \dots \dots \dots (5)$$

The only variables in these equations are the drawdown s , the distance r , and the time t . It is apparent that when t is constant, (3) will be the equation of the straight-line plot of s against $\log_{10} r$. Similarly, when r is constant, (4) will be the equation of the straight-line plot of s against $\log_{10} t$. Moreover, with r and t combined into the single variable (r^2/t) , (5) will be the equation of the straight-line plot of s against $\log_{10}(r^2/t)$.

In each equation the slope of the corresponding straight-line plot is represented by the quantity on the outside of the brackets, and the intercept of the straight line on the zero-drawdown line is represented by the second term within the brackets.

As T is the only unknown in the quantity representing the slope, the coefficient of transmissibility is readily determined from a semi-logarithmic plot of observed data by equating the slope of the plot with the corresponding quantity in equation (3), (4), or (5), and solving for T . After T is determined, the only unknown remaining in the term representing the intercept will be S . Therefore, the coefficient of storage may then be determined by equating the intercept of the plot with the corresponding term, and solving for S .

The plots will be straight lines only where (r^2/t) is relatively small so that u is small. A measurement of drawdown that is made too soon after the discharge is begun, or too far from the discharging well, will plot not on the straight line, but on a curve asymptotic to it. However, in tests of artesian aquifers u becomes small soon after the discharge is begun, and hence in most cases little, if any, of the data will fall off the straight line.

The three types of graphs that correspond respectively to equations (3), (4), and (5) may be referred to as the distance-drawdown graph, the time-drawdown graph, and the composite-drawdown graph. The type of graph to be selected for determining the coefficients from a given discharging-well test will depend on the set of data collected in the field.

Distance-drawdown graph--This is a graph of the drawdown at a time t after the discharge begins, plotted against r on semi-logarithmic paper with r on the logarithmic scale. It may be thought of as a radial profile of the (logarithmic) cone of depression. Equating the quantity outside of the brackets in equation (3) with the slope of the graph, $2.303Q/2\pi T = \Delta s / \Delta \log_{10} r$ = slope of plot, whence $T = - (2.303Q/2\pi)(\Delta \log_{10} r / \Delta s)$. The negative sign indicates that s decreases as $\log_{10} r$ increases. For convenience, $\Delta \log_{10} r$ may be made unity by having it represent one logarithmic cycle, whereupon

$$T = - 2.303Q/2\pi \Delta s \dots \dots \dots (6)$$

where Δs is the difference in drawdown over one logarithmic cycle.

Equating the second term in brackets in equation (3) with the intercept of the straight line on the zero-drawdown line, and solving for the coefficient of storage, gives equation (7).

$$S = 2.25Tt/r_0^2 \dots \dots \dots (7)$$

where r_0 is the value of r at the $s = 0$ -intercept.

Figure 1 is a distance-drawdown graph for wells that are 49, 100, and 150 feet from another well discharging at the rate of 2.23 cfs [test by S. W. LOHMAN reported by WENZEL, 1942]. The drawdowns at these distances after 18 days of continuous discharge were 5.09, 4.08, and 3.10 feet, respectively. The difference in drawdown over one logarithmic cycle is $(0.69 \text{ ft} - 4.07 \text{ ft}) = -3.38$ ft. Therefore, from equation (6), $T = 2.303(2.23 \text{ cfs})/(2 \times 3.38 \text{ ft}) = 0.242 \text{ cfs/ft}$.

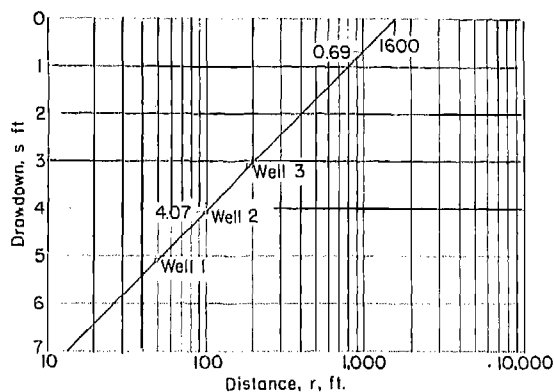


Fig. 1--Distance-drawdown graph based on drawdowns in three wells after 18 days of continuous discharge from an unconfined sand, $Q = 2.23 \text{ cfs}$

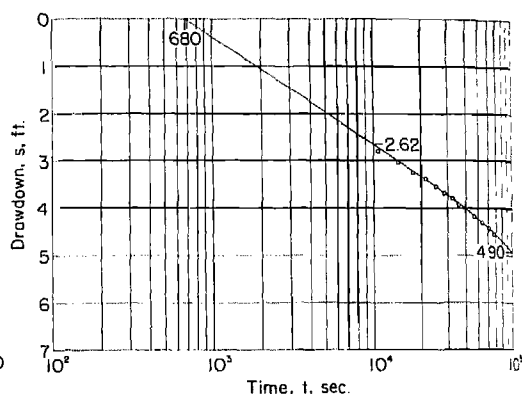


Fig. 2--Time-drawdown graph for a well 1200 feet from another well discharging from a confined sand, $Q = 3.00 \text{ cfs}$

The straight line drawn through the plotted points intersects the zero-drawdown line at $r_0 = 1600 \text{ ft}$. Thus, from equation (7), $S = 2.25(0.242 \text{ cfs/ft})(18 \text{ days} \times 86,400 \text{ sec/day})/(1600 \text{ ft})^2 = 0.33$.

Time-drawdown graph--This graph is a plot of the drawdowns in one of the observed wells against t on semi-logarithmic paper, with t on the logarithmic scale. The formulas for T and S are as in equations (8) and (9).

$$T = 2.303Q/4\pi\Delta s \dots \dots \dots (8)$$

$$S = 2.25Tt_0/r^2 \dots \dots \dots (9)$$

where t_0 is the value of t at the intercept.

Figure 2 is a time-drawdown graph for a well 1200 feet from another well discharging 3.00 cfs from a confined aquifer [JACOB, 1946]. The plotted points represent water-level readings from an automatic water-stage recording instrument, selected first at one-hour intervals and later at two-hour intervals. The change in drawdown over one logarithmic cycle is 2.28 feet. Accordingly, from equation (8), $T = 2.303 (3.00 \text{ cfs})/(4\pi \times 2.28 \text{ ft}) = 0.241 \text{ cfs/ft}$.

The fact that this value for the coefficient of transmissibility agrees closely with that in the preceding example is fortuitous inasmuch as the two sets of data are from tests on different aquifers.

The intercept on the zero-drawdown line is $t_0 = 680$ seconds. Therefore, from equation (9), $S = 2.25 (0.241 \text{ cfs/ft})(680 \text{ sec})/(1200 \text{ ft})^2 = 0.00026$.

Composite drawdown graph--This graph is a plot of the drawdowns in several observed wells at different times against (r^2/t) , on semi-logarithmic paper. The formulas for the coefficients of transmissibility and storage are as in equations (10) and (11).

$$T = -(2.303Q/4\pi)/\Delta s \dots\dots\dots (10)$$

$$S = 2.25T/(r^2/t)_0 \dots\dots\dots (11)$$

where $(r^2/t)_0$ is the value of (r^2/t) at the intercept.

Figure 3 is a composite drawdown graph that includes, in addition to the drawdowns in Figure 2, the drawdowns in a second idle well 1300 feet from the discharging well, and the drawdowns in the discharging well itself. The drawdowns in the discharging well are adjusted for an inferred screen loss of 28.5 feet [JACOB, 1946]. The discharging well is gravel-walled and its screen has a nominal diameter of 18 inches. The effective radius of the well is assumed to be 0.75 foot.

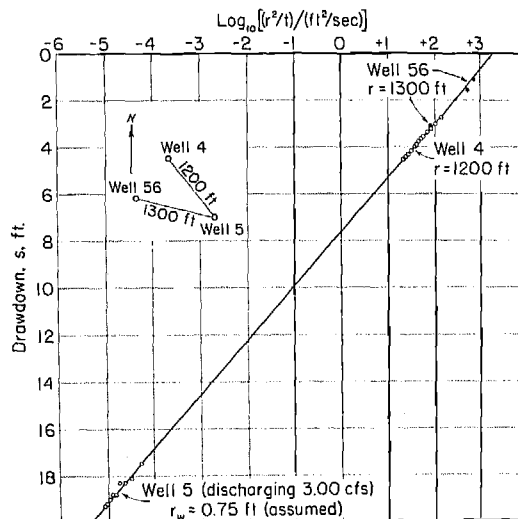


Fig. 3--Composite drawdown graph based on drawdowns observed in a discharging well and two neighboring wells in a confined sand (compare with Fig. 2)

The change in drawdown over one logarithmic cycle is -2.31 feet. This value substituted in equation (10) gives a coefficient of transmissibility of 0.238 cfs/ft. Inasmuch as the measurement of the discharge is correct only to two significant figures, this value does not differ significantly from that determined from Figure 2.

The intercept on the zero-drawdown line is $(r^2/t)_0 = 2000 \text{ sq ft/sec}$. From this value, the coefficient of storage is computed to be 0.00027, which agrees closely with the value determined from Figure 2.

Generalized straight-line method

Before proceeding with the generalization of the straight-line method, it will be necessary to adopt a set of distinctive symbols to represent the various physical elements involved. The numerals 1, 2, 3, . . . will be used to identify the observed wells, and the letter i will be the general symbol for indicating any one of them. Thus, "Well i " will be understood to mean Well 1, Well 2, Well 3, etc., in turn. Other symbols are: ΔQ_k = increment of discharge for $k = 1, 2, 3, 4, \dots n$;

t^k = time elapsed since the inception of ΔQ_k for $t^k = t', t'', t''', t^{iv}, \dots, t^n$; r_{ik} = distance from observed well i to the discharging well in which ΔQ_k occurred; Δs_i^k = partial drawdown in observed well i produced by the increment of discharge ΔQ_k at the time t^k ;

$$Q_n = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 + \dots + \Delta Q_n = \sum_{k=1}^n \Delta Q_k$$

which is the algebraic sum of increments of discharge ΔQ_1 to ΔQ_n ; and s_i^n = total drawdown in observed well i produced by increments of discharge ΔQ_1 to ΔQ_n .

An increment of discharge ΔQ_k may be the initial discharge or a subsequent increase or decrease in discharge in any one of the discharging wells. Increases in discharge will be positive increments, and decreases will be negative. It will be convenient to assign numerals to k in chronological order, but where two or more increments of discharge occur simultaneously, the numerals may be assigned arbitrarily.

In the treatment of problems involving multiple discharging wells, or changes in the discharge of a single well, use is made of the principle of superposition, whereby it is assumed that the total drawdown produced in a given well at a given time by several increments of discharge is the algebraic sum of the drawdowns that would be produced independently by those increments of discharge. So far, the results of discharging-well tests have verified this assumption for artesian conditions.

Equation (12) is according to the principle of superposition.

$$s_i^n = \Delta s_i^1 + \Delta s_i^2 + \Delta s_i^3 + \dots + \Delta s_i^n = \sum_{k=1}^n \Delta s_i^k \dots \dots \dots (12)$$

From equation (2) the partial drawdown produced in an observed well i by an increment of discharge ΔQ_k is approximately $\Delta s_i^k = (2.303\Delta Q_k/4\pi T)\log_{10}(2.25Tt^k/r_{ik}^2S)$, and from equation (12) the total drawdown, after n increments of discharge, is in equation (13), for $n = 1, 2, 3$, etc

$$s_i^n = \sum_{k=1}^n \Delta s_i^k = \sum_{k=1}^n (2.303\Delta Q_k/4\pi T)\log_{10}(2.25Tt^k/r_{ik}^2S) \dots \dots \dots (13)$$

Dividing both sides of equation (13) by Q_n , equation (13a) results

$$s_i^n/Q_n = \sum_{k=1}^n (2.303\Delta Q_k/4\pi TQ_n)\log_{10}(2.25Tt^k/r_{ik}^2S) \dots \dots \dots (13a)$$

This may be written as in equation (14) or (15)

$$(s/Q)_i^n = - (2.30/4\pi T)[2 \sum_{k=1}^n (\Delta Q_k/Q_n)\log_{10}r_{ik} - \sum_{k=1}^n (\Delta Q_k/Q_n)\log_{10}t^k - \log_{10}(2.25T/S)] \dots (14)$$

$$(s/Q)_i^n = - (2.30/4\pi T)[\sum_{k=1}^n (\Delta Q_k/Q_n)\log_{10}(r_{ik}^2/t^k) - \log_{10}(2.25T/S)] \dots \dots \dots (15)$$

The first and second terms in brackets in equation (14) and the first term in brackets in equation (15) are the logarithms of the weighted logarithmic means of r_{ik}^2 , t , and (r^2/t) respectively. The weighted logarithmic means may be represented by \bar{r}_{in}^2 , \bar{t}^n , and $(\bar{r}^2/\bar{t})_i^n$. Substituting these symbols in equations (14) and (15), we may now write the three equations (16), (17), and (18).

$$(s/Q)_i^n = - (2.303/2\pi T)[\log_{10}\bar{r}_{in}^2 - (1/2)\log_{10}(2.25\bar{t}^n/S)] \dots \dots \dots (16)$$

$$(s/Q)_i^n = (2.303/4\pi T)[\log_{10}\bar{t}^n - \log_{10}(\bar{r}_{in}^2/S/2.25T)] \dots \dots \dots (17)$$

$$(s/Q)_i^n = - (2.303/4\pi T)[\log_{10}(\bar{r}^2/\bar{t})_i^n - \log_{10}(2.25T/S)] \dots \dots \dots (18)$$

These equations correspond with equations (3), (4), and (5) for single discharging wells, but include in addition to \bar{s}_i^n , \bar{r}_{in}^2 , and \bar{t}^n , a fourth variable, Q_n . So that equations (16), (17), and (18) will be the equations of straight-line plots, Q_n has been combined with s_i^n into a single variable $(s/Q)_i^n$, which may be referred to as the "specific drawdown" (drawdown per unit discharge). Thus, (16), (17), and (18) are the equations of the straight-line plots of the specific drawdown against \bar{r}_{in}^2 , \bar{t}^n , and $(\bar{r}^2/\bar{t})_i^n$, respectively, where \bar{t}^n is constant in equation (16), \bar{r}_{in}^2 is constant in equation (17), and \bar{r}_{in}^2 and \bar{t}^n are combined into a single variable in equation (18). As in equations (3), (4), and (5), the slope of each plot is represented by the quantity on the outside of the brackets in the corresponding equation, and the intercept of the extension of the plot at $(s/Q)_i^n = 0$ is represented by the second term within the brackets.

The weighted logarithmic mean distance \bar{r}_{in} for a given observed well at a given time may be computed in the following manner: (1) Multiply each increment of discharge that occurred before the given time by the logarithm of the distance from the observed well to the well in which the increment occurred; (2) sum the products algebraically; (3) divide the sum of the products by the algebraic sum of the increments of discharge; and (4) extract the antilogarithm of the quotient. The result will be the distance \bar{r}_{in} . The weighted logarithmic means \bar{t}^n and $(\bar{r}^2/t)_i^n$ are computed in a similar manner, but where \bar{r}_{in} and \bar{t}^n are already computed, $(\bar{r}^2/t)_i^n$ may be obtained more conveniently by dividing \bar{r}_{in}^2 by \bar{t}^n directly.

The weighted logarithmic means \bar{r}_{in} and \bar{t}^n both have physical significance. From a comparison of equation (16) with equation (3) it is evident that \bar{r}_{in} is the distance at which a single well discharging at a rate Q_n would produce the drawdown s_i^n at the elapsed time \bar{t}^n after the discharge began. A recognition of the significance of these quantities is helpful in interpreting the plots.

The three types of graphs corresponding, respectively, to equations (16), (17), and (18) are referred to as the generalized distance-drawdown graph, the generalized time-drawdown graph, and the generalized composite drawdown graph. The formulas for determining the coefficients of transmissibility and storage from these graphs may be derived in the same manner as in the method for a single well discharging uniformly; that is, by equating the slopes and the intercepts of the plots with the corresponding quantities in the respective equations. The formulas are as in the following paragraphs.

Generalized distance-drawdown graph

$$T = -2.303/[2\pi\Delta(s/Q)_i^n] \dots\dots\dots (19)$$

where $\Delta(s/Q)_i^n$ is the change in specific drawdown over one logarithmic cycle.

$$S = 2.25T\bar{r}_0^2/\bar{r}_{in}^2 \dots\dots\dots (20)$$

where \bar{r}_0 is the value of \bar{r}_{in} at the intercept.

Generalized time-drawdown graph

$$T = 2.303/[4\pi\Delta(s/Q)_i^n] \dots\dots\dots (21)$$

$$S = 2.25T\bar{t}_0/\bar{r}_{in}^2 \dots\dots\dots (22)$$

where \bar{t}_0 is the value of \bar{t}^n at the intercept.

Generalized composite drawdown graph

$$T = -2.303/[4\pi\Delta(s/Q)_i^n] \dots\dots\dots (23)$$

$$S = 2.25T/(\bar{r}^2/\bar{t})_0 \dots\dots\dots (24)$$

where $(\bar{r}^2/\bar{t})_0$ is the value of $(\bar{r}^2/\bar{t})_i^n$ at the intercept. The use of the generalized composite drawdown graph is demonstrated in the example that follows.

Figure 4(a) shows the locations of wells at the Central Plant of the municipal water supply of Houston, Texas [GUYTON and ROSE, 1945]. The columnar sections, based on well logs, show by stippling the sands penetrated by the wells. The positions of the well screens are also indicated.

Figure 4(b) is a graph of the drawdown and subsequent partial recovery observed in Well F5 on October 10, 1939 [JACOB, 1941]. Well F10, 850 feet from Well F5, began pumping 2.27 cfs at 10^h00^m and stopped pumping at 18^h45^m. Well F1, 780 feet away, began pumping 2.79 cfs at 10^h30^m and stopped pumping at 20^h05^m. Well F12, 1060 feet away, began pumping 3.56 cfs at 11^h00^m and continued pumping through the end of the test. Measurements of the water level in Well F5 were made throughout the day. Some of these measurements, expressed as drawdowns, are plotted in Figure 4(b), where the measurements used in applying the generalized straight-line graphical method are plotted each as two concentric circles.

Computations to determine values of the weighted logarithmic mean $(\bar{r}^2/\bar{t})^n$ and the corresponding values of the specific drawdown $(s/Q)^n$ are given in Table 1. (The subscript i, which refers to

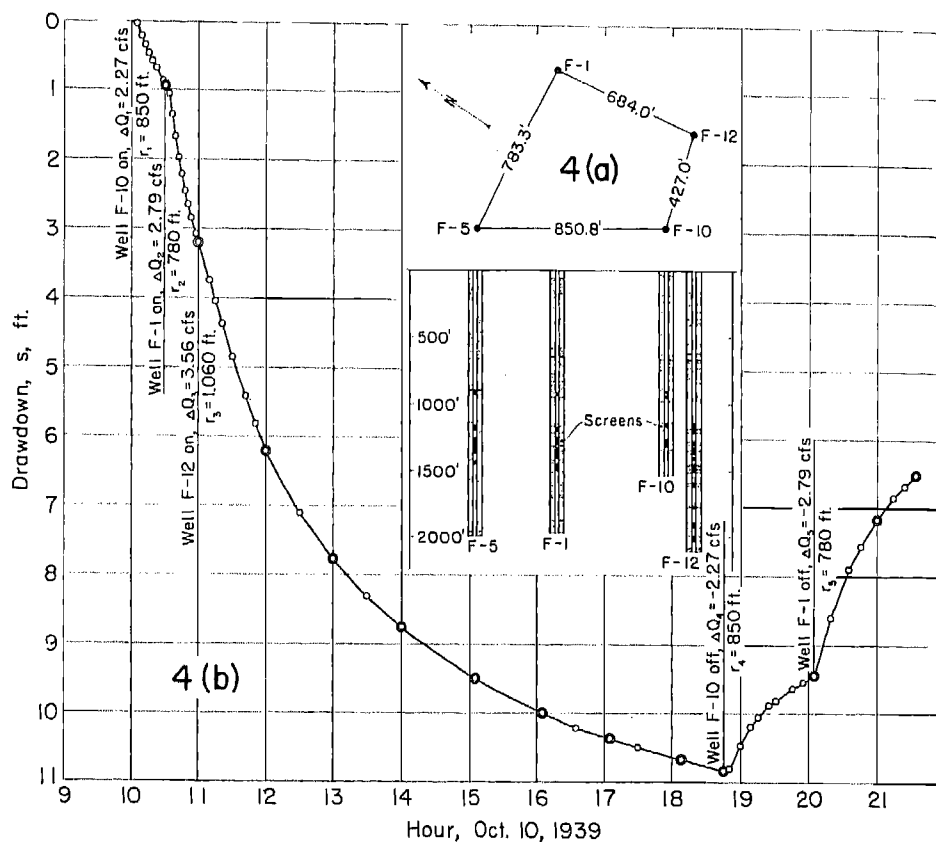


Fig. 4--(a) Map showing relative location of wells at Central Plant, Houston, Texas, and columnar sections based on well logs (after GUYTON and ROSE)
(b) Drawdown and subsequent partial recovery observed in Well F5, October 10, 1939, resulting from staggered operation of wells F10, F1, and F12

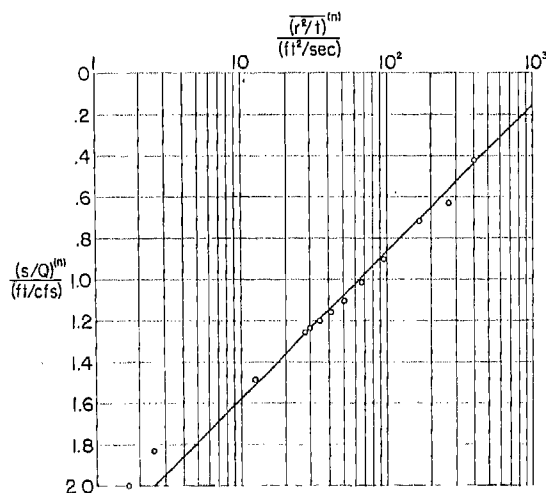


Fig. 5--Generalized composite drawdown graph for Well F5, Central Plant, Houston, Texas, October 10, 1939

Table 1--Computations of specific drawdown and weighted logarithmic mean $(r^2/t)^n$ for Well F5, Central Plant, Houston, Texas, October 10, 1939

Time	k	n	Dis-charge well	r_k	t^k	(r^2_k/t^k)	$\text{Log}_{10}(r^2_k/t^k)$	ΔQ_k	$(9) \times (8)$	$\text{Log}_{10}(r^2/t)^n$	$(r^2/t)^n$	s^n	$(s/Q)^n$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
h m				ft	sec	ft ² /sec	ft ² /sec	cfs	cfs		ft ² /sec	ft	ft/cfs
10 30	1	1	F10	850	1800	402	2.604	2.27	2.604	402	0.96	0.423
11 00	1	..	F10	850	3600	201	2.303	2.27	5.23
	2	..	F1	780	1800	338	2.529	2.79	7.06
		2	5.06	12.29	2.429	269	3.20	0.632
12 00	1	..	F10	850	7200	100.4	2.002	2.27	4.54
	2	..	F1	780	5400	112.6	2.052	2.79	5.73
	3	..	F12	1060	3600	312	2.494	3.56	8.88
		3	8.62	19.15	2.222	167	6.21	0.720
13 00	1	..	F10	850	10800	66.9	1.826	2.27	4.15
	2	..	F1	780	9000	67.6	1.830	2.79	5.11
	3	..	F12	1060	7200	156	2.194	3.56	7.81
		3	8.62	17.07	1.980	95.5	7.77	0.901
14 00	1	..	F10	850	14400	50.2	1.701	2.27	3.86
	2	..	F1	780	12600	48.3	1.684	2.79	4.70
	3	..	F12	1060	10800	104	2.017	3.56	7.18
		3	8.62	15.74	1.826	67.0	8.76	1.016
15 05	1	..	F10	850	18300	39.5	1.597	2.27	3.63
	2	..	F1	780	16500	36.9	1.567	2.79	4.37
	3	..	F12	1060	14700	76.4	1.883	3.56	6.70
		3	8.62	14.70	1.705	50.7	9.50	1.102
16 05	1	..	F10	850	21900	33.0	1.518	2.27	3.45
	2	..	F1	780	20100	30.3	1.481	2.79	4.13
	3	..	F12	1060	18300	61.4	1.788	3.56	6.37
		3	8.62	3.95	1.618	41.5	10.00	1.180
17 05	1	..	F10	850	25500	28.3	1.453	2.27	3.30
	2	..	F1	780	23700	25.7	1.410	2.79	3.93
	3	..	F12	1060	21900	51.3	1.710	3.56	6.09
		3	8.62	13.32	1.545	35.1	10.37	1.203
18 08	1	..	F10	850	29280	24.7	1.392	2.27	3.160
	2	..	F1	780	27480	22.1	1.345	2.79	3.753
	3	..	F12	1060	25680	43.8	1.641	3.56	5.842
		3	8.62	12.755	1.4797	30.18	10.67	1.238
18 45	1	..	F10	850	31500	22.9	1.361	2.27	3.089
	2	..	F1	780	29700	20.5	1.311	2.79	3.658
	3	..	F12	1060	27900	40.3	1.605	3.56	5.714
		3	8.62	12.461	1.4456	27.90	10.84	1.258
20 05	1	..	F10	850	36300	19.9	1.299	2.27	2.949
	2	..	F1	780	34500	17.6	1.246	2.79	3.476
	3	..	F12	1060	32700	34.4	1.536	3.56	5.468
	4	..	F10	850	4800	150.5	2.177	-2.27	-4.942
		4	6.35	6.951	1.0946	12.43	9.45	1.488
21 00	1	..	F10	850	39600	18.2	1.261	2.27	2.862
	2	..	F1	780	37800	16.1	1.207	2.79	3.368
	3	..	F12	1060	36000	31.2	1.494	3.56	5.319
	4	..	F10	850	8100	89.2	1.950	-2.27	-4.427
	5	..	F1	780	3300	184.4	2.266	-2.79	-6.322
		5	3.56	0.800	0.2247	1.678	7.16	2.011
21 35	1	..	F10	850	41700	17.3	1.239	2.27	2.813
	2	..	F1	780	39900	15.2	1.183	2.79	3.301
	3	..	F12	1060	38100	29.5	1.470	3.56	5.233
	4	..	F10	850	10200	70.8	1.850	-2.27	-4.199
	5	..	F1	780	5400	112.7	2.052	-2.79	-5.725
		5	3.56	1.423	0.3997	2.51	6.51	1.829

Note: The subscript i, which refers to the observation well, is omitted, because only one observation well is involved in the example.

the observation well, is omitted from the symbols because only one observation well is involved in the example.) The computation procedure may be observed by following the headings of the columns in the Table. The increments of discharge that occurred before the time given in column (1) are listed and summed algebraically in column (9). These increments of discharge are multiplied by the logarithms of the corresponding values of (r^2/t) , and the products are listed and summed algebraically in column (10). The sum of the products given in column (10) is then divided by the sum of the increments of discharge given in column (9), and the quotient is listed in column (11). The antilogarithm of this quotient, listed in column (12) is the weighted logarithmic mean $(\bar{r}^2/t)^n$. The corresponding value of the specific drawdown $(s/Q)^n$ is listed in column (14).

The data given in columns (12) and (14) are plotted in Figure 5. The alignment of the plotted points is not bad in view of the fact that the screens of the four wells are set at various depths and also the fact that the water-bearing sands are lenticular and vary in thickness and permeability from one well to another. The extent to which these or other circumstances might vitiate the method used may be judged most readily from the alignment of the points on a simple, straight-line graph such as Figure 5.

The change in specific drawdown $\Delta(s/Q)^n$ over one logarithmic cycle is -0.71 ft per cfs. Therefore, from equation (23) $T = 2.303/(4\pi \times 0.71 \text{ ft/cfs}) = 0.26 \text{ cfs/ft}$.

The extension of the straight line in Figure 5 intersects the line of zero drawdown at $(\bar{r}^2/t)^n = (\bar{r}^2/t)_0^n = 1650 \text{ ft}^2/\text{sec}$. Thus, from equation (24) $S = 2.25(0.26 \text{ cfs/ft})/(1650 \text{ ft}^2/\text{sec}) = 0.00035$.

References

- GUYTON, W. F., and ROSE, N. A., Quantitative studies of some artesian aquifers in Texas, *Econ. Geol.*, pp. 193-226, May, 1945.
- JACOB, C. E., On the flow of water in an elastic artesian aquifer, *Trans. Amer. Geophys. Union*, v. 21, pp. 574-586, 1940.
- JACOB, C. E., Coefficients of storage and transmissibility obtained from pumping tests in the Houston district, Texas, *Trans. Amer. Geophys. Union*, v. 22, pp. 744-756, 1941.
- JACOB, C. E., Drawdown test to determine screen loss and effective radius of an artesian well, to be published in *Proc. Amer. Soc. Civil Engrs.*, 1946.
- THEIS, C. V., The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using ground-water storage, *Trans. Amer. Geophys. Union*, v. 16, pp. 519-524, 1935.
- WENZEL, L. K., Methods for determining permeability of water-bearing materials, *U. S. Geol. Surv. W.-S. Paper* 887, 1942.
- WENZEL, L. K., and GREENLEE, A. L., A method for determining transmissibility and storage coefficients by tests of multiple well systems, *Trans. Amer. Geophys. Union*, v. 25, pp. 547-560, 1944.
- U. S. Geological Survey,
Tallahassee, Florida (HHC) and Washington, D. C. (CEJ)

(Manuscript received February 28, 1946; presented at the Twenty-Sixth Annual Meeting, Washington, D. C., June 1, 1945; open for formal discussion until January 1, 1947.)