

Daniel Augusto de Souza Mello Monteiro

## **Modelagem dinâmica de veículo**

São Paulo

31/10/2016

Daniel Augusto de Souza Mello Monteiro

## **Modelagem dinâmica de veículo**

Relatório final, apresentado à disciplina  
PME 2600 - Projeto Integrado III. Orientador: Prof. Dr. Roberto Spinola Barbosa

Universidade de São Paulo – USP  
Escola Politécnica

São Paulo  
31/10/2016

## Catalogação-na-publicação

Monteiro, Daniel

Modelagem dinâmica da veículo / D. Monteiro -- São Paulo, 2016.  
66 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Dinâmica veicular 2.Modelagem matemática 3.Modelagem multicorpos  
4.Formula SAE I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.  
Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

# Resumo

O presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de modelos matemáticos para estudos de dinâmica veicular. Foram realizadas deduções e simulações dos modelos linear e não linear em planta, a fim de se analisar a dinâmica lateral e de guinada. No modelo não linear fez-se uso da modelagem do pneu, feita a partir de dados experimentais. A fim de se analisar os movimentos de vibração no plano vertical realizou-se a modelagem de meio veículo lateral. Desse modelo, linear, estendeu-se também para o modelo não linear, utilizando-se as curvas de um amortecedor, obtidas através de testes em dinamômetro. Foi desenvolvida também uma simulação em multicorpos utilizando software comercial. Os parâmetros empregados nas simulações são provenientes do protótipo *FP – 07*, concebido pela Equipe de Fórmula SAE da Escola Politécnica. Esses modelos terão como finalidade o aprimoramento dos projetos de veículos pela Equipe, orientando na tomada de decisões.

# Abstract

The present work aims to develop mathematical models to describe aspects of vehicular dynamics. Deduction and simulations of the linear and nonlinear planar model were made in order to analyze lateral and yaw dynamics. In the nonlinear model, the tire dynamics was modeled using experimental data. Aiming to analyze displacements and vibrations in the vertical plane, a four degree of freedom half-vehicle model was deduced. Next, this linear model was sophisticated with the introduction of nonlinear damper data, gathered from dynamometer tests. Using a commercial multibody software, the suspension and full vehicle dynamics were also modeled and simulated. The parameters utilized in all simulations were obtained from the FP-07 prototype, conceived by the Polytechnic School's Formula SAE team. The mathematical models here developed have the purpose to improve the team's vehicles project, guiding the decision-taking process.

# Lista de símbolos

$\alpha$	ângulo de escorregamento, <i>rad</i>
$\alpha_f$	ângulo de escorregamento do pneu dianteiro, <i>rad</i>
$\alpha_r$	ângulo de escorregamento do pneu traseiro, <i>rad</i>
$\beta$	escorregamento do veículo, <i>rad</i>
$\kappa$	razão de escorregamento
$\gamma$	ângulo de cambagem, <i>rad</i>
$a$	distância do centro de gravidade ao eixo dianteiro, <i>m</i>
$b$	distância do centro de gravidade ao eixo traseiro, <i>m</i>
$l$	comprimento entre eixos, <i>m</i>
$F_x$	força longitudinal no pneu, <i>N</i>
$F_y$	força lateral no pneu, <i>N</i>
$F_z$	força normal no pneu, <i>N</i>
$F_{fy}$	força lateral no pneu dianteiro, <i>N</i>
$F_{ry}$	força lateral no pneu traseiro, <i>N</i>
$F$	ponto de contato do pneu dianteiro
$R$	ponto de contato do pneu traseiro
$v_x$	velocidade na direção <i>x</i> , <i>m/s</i>
$v_y$	velocidade na direção <i>y</i> , <i>m/s</i>
$V$	velocidade do centro de gravidade, <i>m/s</i>

# Listas de ilustrações

Figura 1 – Protótipo <i>FP-06</i> , desenvolvido em 2013.	12
Figura 2 – Equipamento para testes de pneus do <i>Calspan Tire Test Facility</i> . Fonte: <a href="http://www.calspan.com">http://www.calspan.com</a>	14
Figura 3 – Sinal do ângulo de escorregamento e ponto de interesse	16
Figura 4 – Sistema de coordenadas e convenção de sinais	17
Figura 5 – Ângulo de escorregamento	18
Figura 6 – Curva característica de $-F_y$ em função do ângulo de escorregamento (GENTA, 1997)	18
Figura 7 – Força lateral em função do ângulo de escorregamento - $F_z = -209N$	19
Figura 8 – Superfície de força lateral em função do escorregimento e carga vertical	20
Figura 9 – Superfície de rigidez ao esterçamento em função do escorregimento e carga vertical	20
Figura 10 – Momento auto-alinhante em função de ângulo de escorregimento e carga vertical	21
Figura 11 – Momento de derrube em função de ângulo de escorregimento e carga vertical	21
Figura 12 – <i>Pneumatic trail</i> em função de ângulo de escorregimento e carga vertical	22
Figura 13 – <i>Pneumatic scrub</i> em função de ângulo de escorregimento e carga vertical	23
Figura 14 – Força lateral em função de ângulo de cambagem e carga vertical	24
Figura 15 – Momento auto-alinhante em função de ângulo de cambagem e carga vertical	24
Figura 16 – Momento de derrube em função de ângulo de cambagem e carga vertical	25
Figura 17 – Força longitudinal em função da carga vertical e da razão de escorre- gamento	25
Figura 18 – Rigidez longitudinal em função da carga vertical e razão de escorrega- mento	26
Figura 19 – Torque alinhante em função da carga vertical e razão de escorregamento	26
Figura 20 – Momento de derrube em função da carga vertical e razão de escorrega- mento	27
Figura 21 – Modelo em planta, adaptado de (PACEJKA, 2005)	29
Figura 22 – Representação gráfica do sistema dinâmico	32
Figura 23 – Velocidade lateral $v$	33
Figura 24 – Velocidade angular $r$	33
Figura 25 – Aceleração lateral	34
Figura 26 – Atitude do veículos	34
Figura 27 – Trajetória percorrida pelos CGs	35

Figura 28 – Velocidade lateral no teste de mudança de faixa . . . . .	36
Figura 29 – Velocidade angular no teste de mudança de faixa . . . . .	36
Figura 30 – Aceleração lateral no teste de mudança de faixa . . . . .	37
Figura 31 – Atitude dos veículos no teste de mudança de faixa . . . . .	37
Figura 32 – Trajetórias no teste de mudança de faixa . . . . .	38
Figura 33 – Velocidade lateral para o modelo linear (Veículo 1) e não linear (Veículo 2) . . . . .	39
Figura 34 – Velocidade angular para o modelo linear (Veículo 1) e não linear (Veículo 2) . . . . .	40
Figura 35 – Aceleração lateral para o modelo linear (Veículo 1) e não linear (Veículo 2) . . . . .	40
Figura 36 – Atitude do veículo para o modelo linear (Veículo 1) e não linear (Veículo 2) . . . . .	41
Figura 37 – Trajetórias - modelo de veículo + modelo de pneu . . . . .	41
Figura 38 – Esquema físico de meio veículo lateral . . . . .	43
Figura 39 – Diagrama de corpo livre . . . . .	44
Figura 40 – Resposta do modelo a uma entrada senoidal . . . . .	46
Figura 41 – Dinamômetro de amortecedores da empresa <i>byLG Shock Absorber Tech Center</i> (o amortecedor na imagem não corresponde ao aqui modelado) . . . . .	47
Figura 42 – Curvas do amortecedor para 4 regulagens distintas . . . . .	48
Figura 43 – Resposta do modelo não linear a uma entrada senoidal . . . . .	49
Figura 44 – Representação do subsistema no software Adams/Car . . . . .	50
Figura 45 – Cambagem . . . . .	51
Figura 46 – Ângulo de <i>toe</i> . . . . .	51
Figura 47 – Deslocamento dos amortecedores. . . . .	52
Figura 48 – Forças normais nos pneus. . . . .	52
Figura 49 – Modelo de veículo completo em multicorpos. . . . .	53
Figura 50 – Veículo em pista de raio constante igual a 8m. . . . .	53
Figura 51 – Escorregamento lateral do eixo dianteiro. . . . .	54
Figura 52 – Escorregamento lateral do eixo traseiro. . . . .	54

# Sumário

<b>Sumário . . . . .</b>	<b>8</b>
<b>1      INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>10</b>
<b>1.1     Objetivo . . . . .</b>	<b>10</b>
<b>1.2     Motivação . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>1.3     Metodologia . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>2      MODELO DE PNEU . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>2.1     Introdução . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>2.2     O <i>Tire Test Consortium</i> . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>2.3     Estratégia de modelagem . . . . .</b>	<b>15</b>
<b>2.4     Processamento dos dados . . . . .</b>	<b>15</b>
<b>2.5     Dinâmica lateral . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>2.6     Força lateral . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>2.7     Rigidez ao esterçamento . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>2.8     Momento auto-alinhante e de derrube . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>2.9     <i>Pneumatic trail</i> . . . . .</b>	<b>22</b>
<b>2.10    <i>Pneumatic scrub</i> . . . . .</b>	<b>22</b>
<b>2.11    Força lateral em função do ângulo de cambagem . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>2.12    Dinâmica longitudinal . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>3      MODELO EM PLANTA LINEAR . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>3.1     Introdução . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>3.2     Modelo Físico . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>3.3     Modelo Matemático . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>3.4     Simulação dinâmica . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>3.4.1    Curva de raio constante . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>3.4.2    Mudança de faixa . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>3.4.3    Conclusões . . . . .</b>	<b>38</b>
<b>4      MODELO EM PLANTA NÃO LINEAR . . . . .</b>	<b>39</b>

5	<b>MEIO VEÍCULO LATERAL . . . . .</b>	42
5.1	<b>Modelo Físico . . . . .</b>	42
5.2	<b>Modelo Matemático . . . . .</b>	43
5.3	<b>Simulação . . . . .</b>	46
6	<b>MODELO DE AMORTECEDOR . . . . .</b>	47
7	<b>MEIO VEÍCULO LATERAL NÃO LINEAR . . . . .</b>	49
8	<b>MODELOS EM MULTICORPOS . . . . .</b>	50
8.1	<b>Introdução . . . . .</b>	50
8.2	<b>Suspensão dianteira . . . . .</b>	50
8.3	<b>Curva de raio constante . . . . .</b>	52
9	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	55
10	<b>APÊNDICES . . . . .</b>	56
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	69

# 1 INTRODUÇÃO

Modelos matemáticos de dinâmica veicular são ferramentas de extrema importância nos projetos da indústria automobilística e nas categorias de automobilismo de alto desempenho. Isso se deve às inúmeras possibilidades e facilidades que as simulações computacionais oferecem.

Enquanto a realização de um único teste em campo de prova é uma atividade de alto custo e que demanda preparação e repetição de experimentos, o uso de simulações permite, de forma relativamente rápida e barata, que importantes observações sobre desempenho do veículo sejam feitas e as mais diversas configurações sejam avaliadas.

Além disso, o desenvolvimento de veículos automotores é uma atividade de alta complexidade e que demanda o esforço conjunto de um grande número de profissionais. Engenheiros de diferentes especialidades, e responsáveis por distintos subsistemas do veículo, devem trabalhar em harmonia para que os objetivos definidos no projeto sejam devidamente atingidos.

No entanto, não raramente, os projetistas encontram-se em situações conflitantes. O chassi, por exemplo, deve ser rígido o suficiente para que o sistema de suspensão seja eficiente, mas deve ser leve o bastante para que a agilidade do automóvel não seja comprometida. Os sistemas de propulsão e transmissão, por sua vez, devem ser posicionados levando-se em conta a altura do centro de gravidade do veículo, que influí na sua estabilidade. Somam-se a esses conflitos entre subsistemas, os tradicionais compromissos entre custo e qualidade ou entre desempenho e conforto.

As simulações são, portanto, ferramentas importantes para a concepção de veículos e permitem que eles sejam competitivos, seja no mercado ou em competições esportivas. No entanto, embora os modelos matemáticos permitam a economia de recursos e de tempo, eles não substituem os testes em pista. Sua função é determinar a configuração geral do automóvel e estimar seu comportamento, de forma que um menor número de testes seja necessário. Por essa razão, é de extrema importância que se conheça os modelos matemáticos a fundo, sabendo-se claramente sobre quais hipóteses eles são definidos e quais são suas limitações, de forma que as simulações sejam devidamente interpretadas e as melhores decisões sejam tomadas.

## 1.1 Objetivo

Esse trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de modelos matemáticos que permitam a tomada de decisão no âmbito da dinâmica veicular. Tais modelos são direcionados a orientar na definição de componentes veiculares e também na determinação de parâme-

tros do veículo. Por essa razão, são modelados pneus, amortecedores e o automóvel em si, na forma de meio veículo em planta e meio veículo lateral. Pretende-se, portanto, obter modelos capazes de descrever a dinâmica de guinada, que possibilita estudos de dirigibilidade e estabilidade, e a dinâmica vertical, que permite o estudo do curso de suspensão e vibração. Como um objetivo secundário, deseja-se comparar as respostas dos modelos lineares de veículo, que consideram pneus e amortecedores ideais e lineares, e modelos não lineares de veículo, que encorporam modelos não lineares de pneus e amortecedores.

## 1.2 Motivação

O tema deste trabalho tem como principal motivação orientar a concepção do protótipo desenvolvido anualmente pela equipe de Fórmula SAE da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (Figura 52).

A Fórmula SAE é uma categoria de competição de nível universitário criada pela *Society of Automotive Engineers* nos Estados Unidos em 1979. Atualmente, diversos países possuem competições anuais próprias, sendo que no Brasil ela ocorre desde 2004 e é organizada pela SAE Brasil.

O propósito da categoria é que estudantes projetem e fabriquem um protótipo de veículo do tipo fórmula. As equipes são avaliadas por engenheiros da indústria automobilística em provas estáticas e dinâmicas. Sendo assim, o automóvel deve não só ter um bom desempenho em pista, como também ser projetado de acordo com os princípios das ciências de engenharia.

Uma das mais importantes e valorizadas provas é a de *Design*. Nela, os estudantes devem justificar as decisões tomadas na elaboração de cada subsistema do protótipo e também mostrar os resultados de testes, de forma que o projeto esteja validado. Além disso, estimula-se que os participantes sejam inovadores e apresentem soluções criativas. Portanto, este trabalho pretende contribuir positivamente para os resultados da equipe da Escola Politécnica da USP na competição.



Figura 1 – Protótipo *FP-06*, desenvolvido em 2013.

### 1.3 Metodologia

Nesse trabalho são utilizadas duas formas de modelagem: a analítica, que parte de um modelo físico idealizado, e a experimental, que toma por base dados obtidos em laboratório. Os modelos de pneu e amortecedor são definidos através de dados experimentais, enquanto os modelos de meio veículos são deduzidos de forma puramente teórica.

Na modelagem do pneu, realizou-se o processamento dos dados experimentais utilizando-se o programa *MATLAB*. Nesse processo, que é explicado com mais detalhes no capítulo seguinte, o recurso mais utilizado foi o de interpolação por *splines*, a fim de que os dados discretos dos testes fossem expressos de forma contínua em curvas ou superfícies. Já a modelagem do amortecedor foi feita através da ferramenta *cftool*, interpolando os pontos medidos por polinômios de quarto grau.

Nas modelagens de meio veículo, utilizou-se dos conhecimentos básicos de Mecânica Geral para obtenção das equações diferenciais que descrevem o sistema. Em seguida, utilizando-se também do software *MATLAB*, simulações dinâmicas foram realizadas.

Por fim, foi realizada a composição dos modelos. Obteve-se, dessa maneira, um modelo de veículo em planta que, ao invés de adotar a hipótese de comportamento linear dos pneus, utiliza dados experimentais. E outro modelo de meio veículo lateral que utiliza as curvas de um amortecedor real, ao invés da hipótese de linearidade.

## 2 MODELO DE PNEU

### 2.1 Introdução

As forças que agem sobre um veículo em deslocamento podem pertencer a três classes distintas: aquelas devidas ao campo gravitacional, as que se originam de escoamentos aerodinâmicos e as forças devidas ao contato dos pneus com o solo.

Quando se pretende realizar simulações cujos focos são a dirigibilidade e a estabilidade, é natural, em uma primeira abordagem, se desprezar as forças de origem aerodinâmica, uma vez que elas têm maior influência em situações de altas velocidades. As forças gravitacionais, por sua vez, nos casos de simulações em superfície plana e que não levam em conta transferências de carga, podem ser desprezadas. Assim sendo, os contatos dos pneus com o solo são as principais fontes de forças e torques que promovem o controle do veículo. Logo, em simulações de dinâmica veicular, a modelagem do comportamento mecânico dos pneus é fundamental.

No entanto, o pneu é um componente muito complexo para ser abordado de uma única vez. Faz-se necessário antes isolar e explicar suas características separadamente (MILLIKEN; MILLIKEN, 1995). Por essa razão, o presente capítulo restringe-se em modelar dinâmica lateral do pneu, que é o aspecto mais relevante ao escopo deste trabalho.

A seguir uma revisão teórica sobre as forças laterais em pneus é realizada. Em seguida são apresentadas informações sobre os experimentos realizados, as estratégias de modelagem adotadas e os resultados obtidos.

### 2.2 O *Tire Test Consortium*

Os dados experimentais de pneus utilizados nesse trabalho são provenientes do *Tire Test Consortium* (KASPRZAK; GENTZ, 2006), que é o consórcio formado entre equipes de Formula SAE de universidades de diversos países e o laboratório norte-americano *Calspan*, localizado em Buffalo, Nova Iorque. As equipes que aderem ao consórcio tem acesso aos dados de testes de pneus utilizados na categoria.

Os resultados, no entanto, são fornecidos sem nenhum tipo de processamento, sendo esta etapa final de responsabilidade das equipes.

Os testes foram realizados no apresentado na figura 2 e seguiram um extenso roteiro de medições, que foram repetidos para diferentes pressões e ângulos de cambagem. Para o que se propõe nesse trabalho, é necessário utilizar apenas uma pequena parcela dos dados disponíveis. O roteiro dos testes, fornecido pelo laboratório, é apresentado no Apêndice 1.

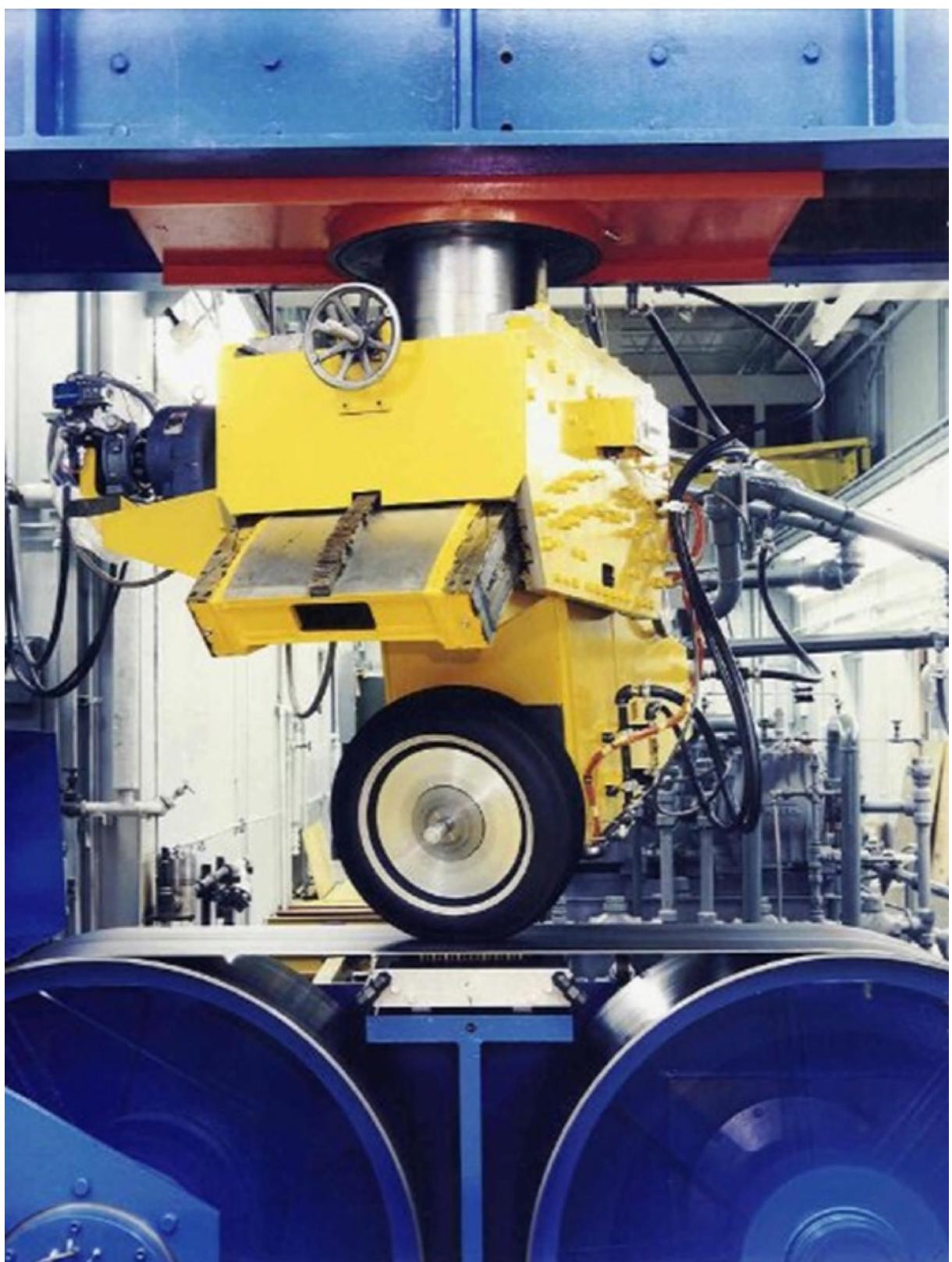


Figura 2 – Equipamento para testes de pneus do *Calspan Tire Test Facility*. Fonte: <http://www.calspan.com>

## 2.3 Estratégia de modelagem

Diversos modelos matemáticos de pneus foram desenvolvidos na última metade do século. Cada tipo para um propósito específico e, a cada um deles, diferentes níveis de precisão e complexidade podem ser introduzidos. Pode-se classificar esses métodos de modelagem em quatro categorias (PACEJKA, 2005):

Tabela 1 – Diferentes formas de modelagem de pneus

Método	Descrição
A partir de dados experimentais	Utiliza técnicas de regressão para interpolar dados de teste de grande escala
Método de semelhança	Combina, adapta e distorce curvas para que representem características dos pneus
Modelo físico simples	Utiliza representações mecânicas simples, geralmente para problemas específicos
Modelo físico complexo	Descreve o pneu em grande detalhe, através de simulação computacional de elementos finitos

O método adotado nesse trabalho é a interpolação dos dados experimentais. Essa forma de modelagem apresenta a vantagem de ser a mais imediata, uma vez que é possível se utilizar as funções de interpolação presentes no *MATLAB* para se obter de forma direta as curvas que caracterizam o pneu. Uma desvantagem, porém, é que esse método incorpora os erros provenientes das medições e, também, as particularidades construtivas e mecânicas do pneu testado. No entanto, espera-se que a magnitude desses desvios não seja suficiente para tornar os modelos de veículo a serem desenvolvidos menos representativos.

## 2.4 Processamento dos dados

Como pode ser verificado no roteiro do experimento (Apêndice 1), todas as medições são realizadas através de sucessivas varreduras de ângulos de escorregamento. Dessa maneira, para se separar os trechos de interesse do experimento seleciona-se todos os pontos para os quais se tem um ângulo de escorregamento igual a 3 graus. A cada seção compreendida entre esses pontos alternados define-se uma amostra, que é utilizada para o processamento dos sinais, como pode ser observado na figura a seguir.

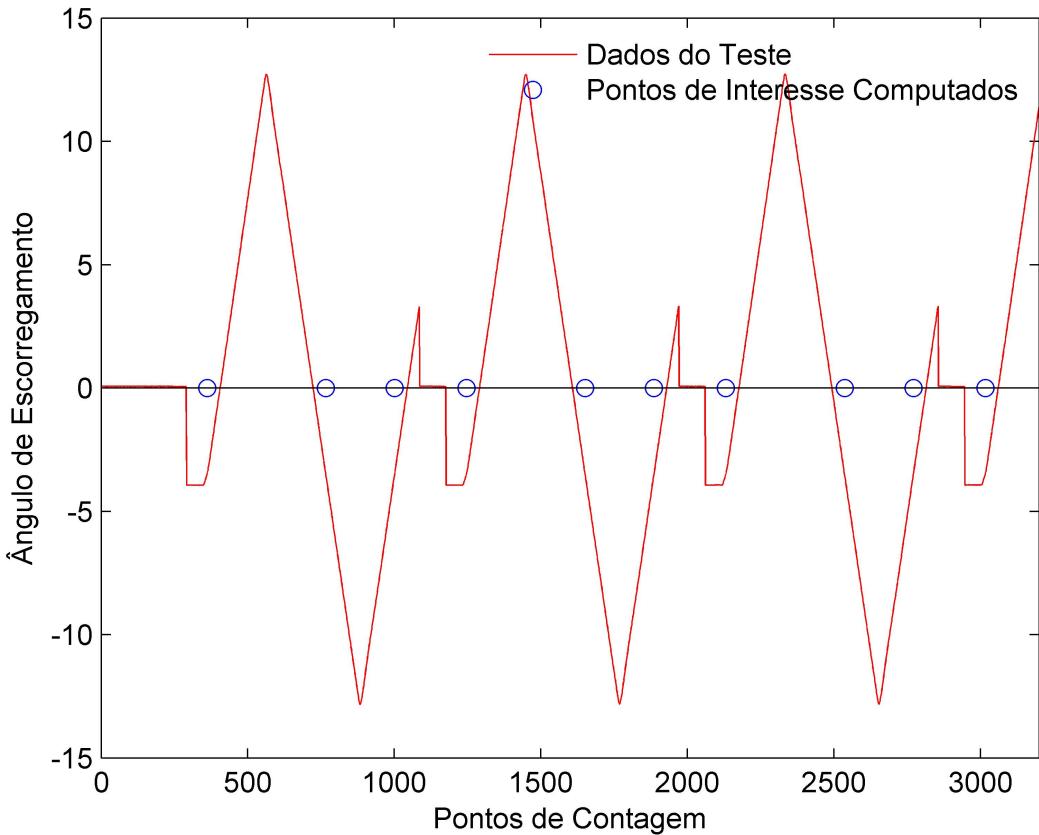


Figura 3 – Sinal do ângulo de escorregamento e ponto de interesse

## 2.5 Dinâmica lateral

Em um pneu, as forças  $F_x$ ,  $F_y$  e o torque auto-alinhante  $M_z$ , representados na figura 42, são funções das componentes de escorregamento, da cambagem e da carga vertical (PA-CEJKA, 2005):

$$F_y = F_y(\kappa, \alpha, \gamma, F_z) \quad (2.1)$$

No presente estudo, admite-se que  $F_y$  é função somente do ângulo de escorregamento  $\alpha$  e da carga vertical  $F_z$ . Desconsidera-se, portanto, os efeitos do escorregamento longitudinal  $\kappa$  e do ângulo de cambagem  $\gamma$ , que será admitido nulo.

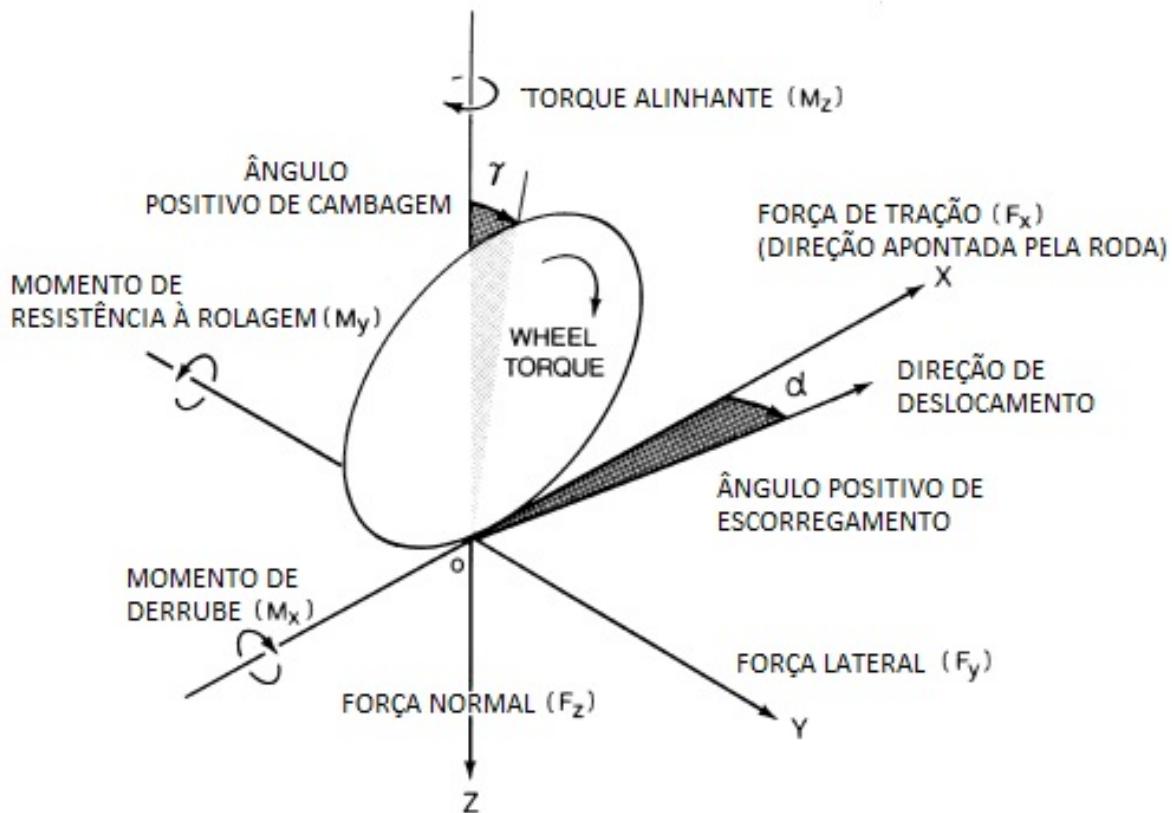


Figura 4 – Sistema de coordenadas e convenção de sinais

Na figura anterior, deve-se observar o ângulo  $\alpha$  formado entre o plano  $xz$  e a velocidade instantânea do centro do pneu. A existência desse ângulo é possível graças às deformações elásticas que surgem no contato da banda de rodagem com solo quando o pneu é submetido a um esforço lateral. Tais deformações elásticas dão ao pneu a capacidade de se deslocar em uma direção distinta daquela para qual ele aponta. Define-se  $\alpha$  como a razão entre a velocidade lateral  $v_y$  e longitudinal  $v_x$ :

$$\tan(\alpha) = \frac{v_y}{v_x} \quad (2.2)$$

É importante deixar claro que o nome dado ao ângulo  $\alpha$  pode levar a uma compreensão equivocada do fenômeno, permitindo a interpretação de que, na presença da força lateral, todo o pneu escorrega sobre o solo. Porém, o escorregamento ocorre somente na parte anterior da região de contato entre a banda de rodagem e o solo, como mostra a figura 5 abaixo:

A relação entre a força lateral e o ângulo de escorregamento é representada graficamente pela seguinte curva característica:

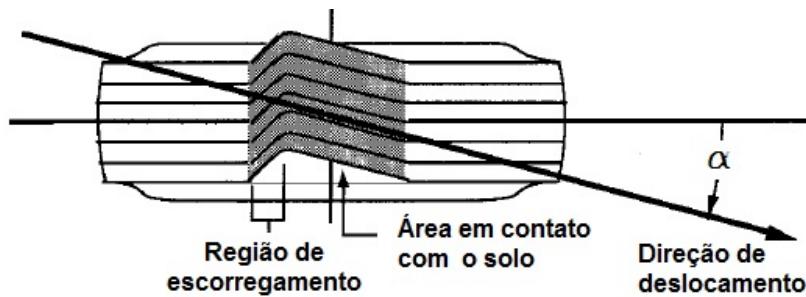
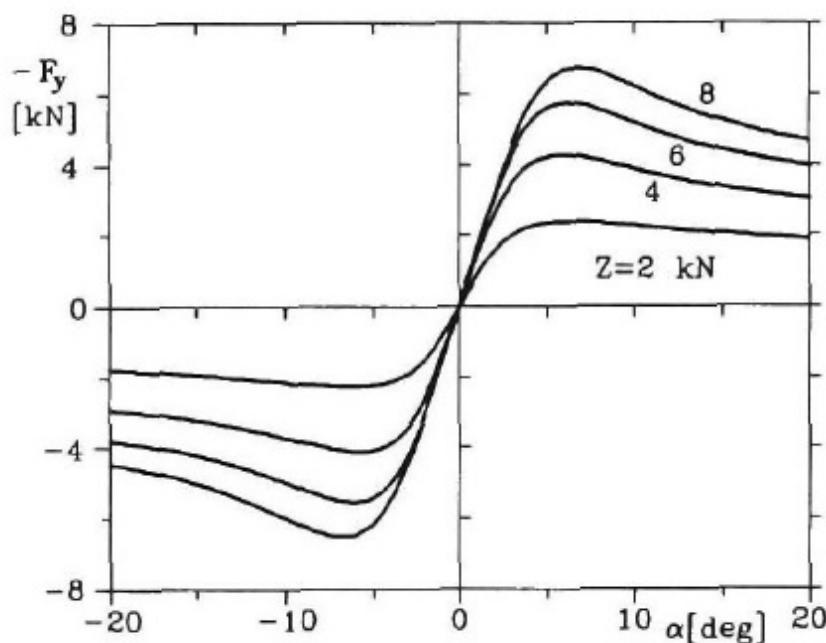


Figura 5 – Ângulo de escorregamento

Figura 6 – Curva característica de  $-F_y$  em função do ângulo de escorregamento (GENTA, 1997)

Algumas observações em relação à dependência da força lateral em função do escorregamento podem ser feitas. Em primeiro lugar, nota-se que, para pequenos valores de escorregimento, a relação é aproximadamente linear. Esse fato será explorado no modelo desenvolvido no próximo capítulo. Outra observação importante é que a curva apresenta um ponto de máximo. Esse comportamento é conhecido e muito aproveitado por pilotos experientes, que, através da resposta no volante, são capazes de sentir se o pneu está operando próximo ao limite de tração.

Por fim, no gráfico acima é possível notar também que a força lateral tende a aumentar com maiores valores de carga vertical. Essa relação, no entanto, não é linear e não é sempre verdadeira, pois envolve aspectos da rigidez do pneu. Esse fenômeno será abordado com maior profundidade em outra oportunidade, quando modelos de veículo que levam em consideração a transferência de carga.

## 2.6 Força lateral

Nessa seção apresenta-se o resultado dos dados processados, referentes ao pneu Continental 205/510 R13, utilizado atualmente pela equipe de Formula SAE da Escola Politécnica. As medições foram realizadas com a pressão do pneu igual a  $10\text{psi}$  e velocidade de aproximadamente  $40\text{km/h}$  ( $25\text{mph}$ ). As medida foram tomadas para cinco valores distintos de cargas verticais:  $-209\text{N}$ ,  $-440\text{N}$ ,  $-665\text{N}$ ,  $-1111\text{N}$  e  $-1567\text{N}$ .

A seguir, na figura são apresentadas as medições feitas, representadas graficamente pelos ponto em cinza e, em azul, a curva obtida da interpolação dos dados. Utilizou-se, para isso, a função *csaps* do programa MATLAB, que interpola os pontos através de uma *spline* cúbica. Da interpolação dos pontos medidos para cada um dos casos de carga vertical obteve-se uma curva de força lateral em função de ângulo de escorregamento, como se vê abaixo:

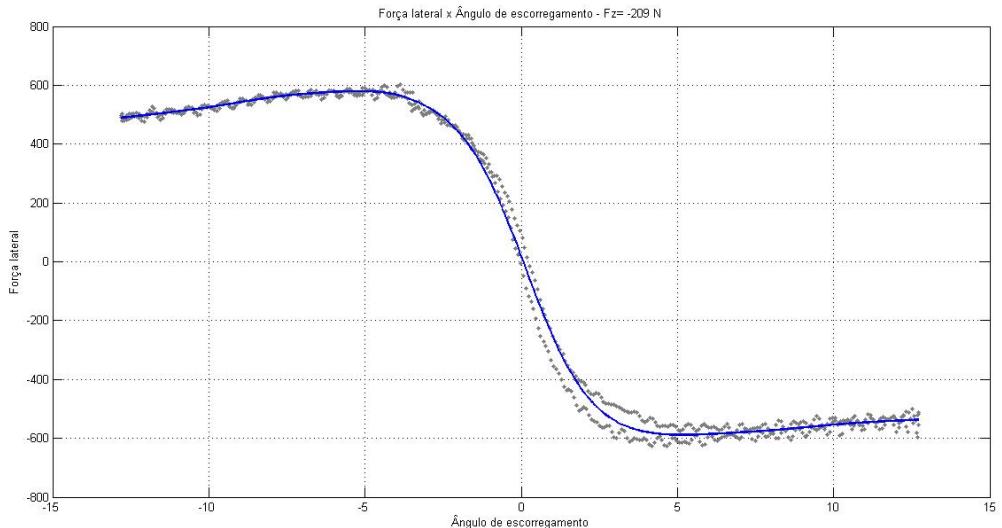


Figura 7 – Força lateral em função do ângulo de escorregamento -  $F_z = -209\text{N}$

Interpolando-se em seguida cada uma das curvas, para diferentes casos de carga vertical, obtém-se a superfície apresentada abaixo, que é utilizada na forma de *lookup table* nas simulações de dinâmica veicular.

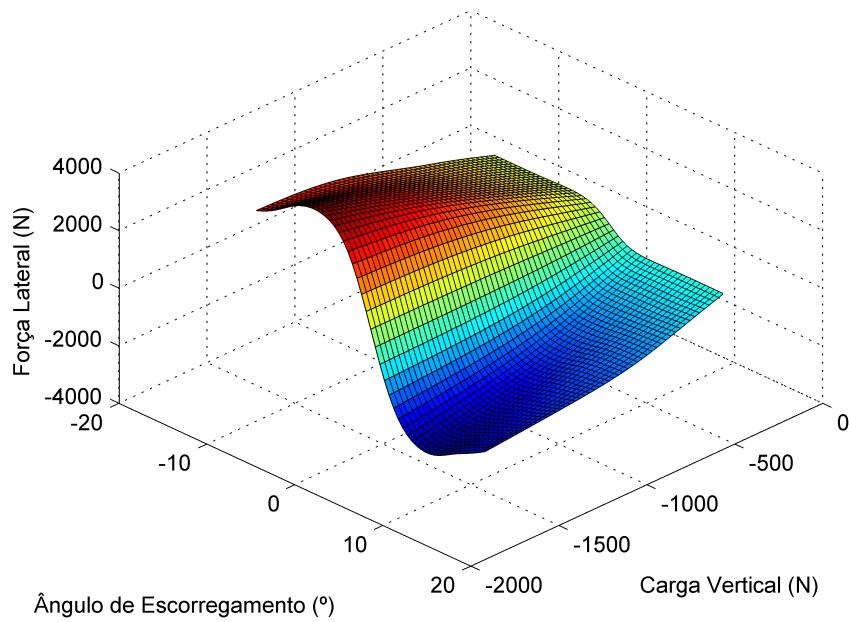


Figura 8 – Superfície de força lateral em função do escorregamento e carga vertical

## 2.7 Rigidez ao esterçamento

Calculando-se a derivada a superfície apresentada anteriormente obtém-se a superfície de rigidez ao esterçamento em função da carga vertical e do ângulo de escorregamento.

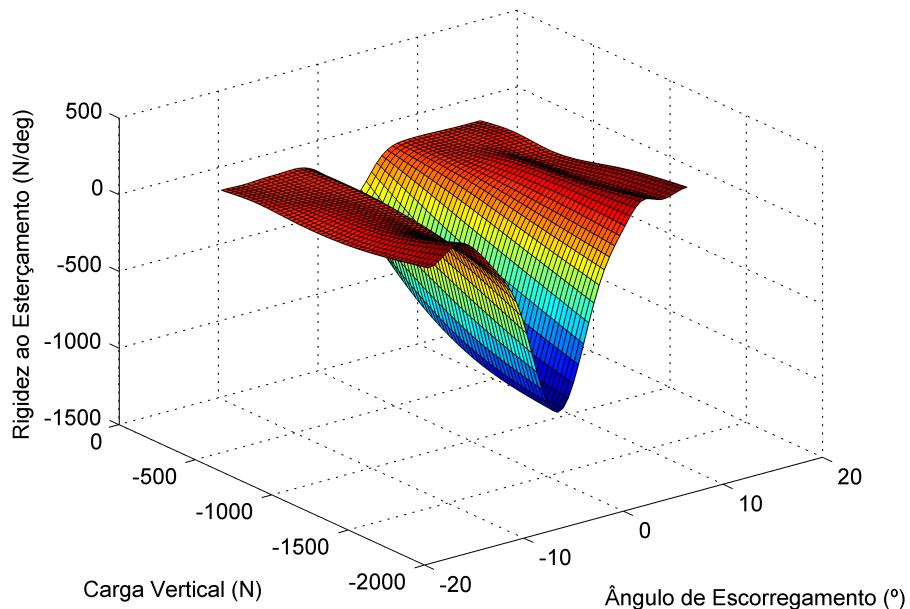


Figura 9 – Superfície de rigidez ao esterçamento em função do escorregamento e carga vertical

## 2.8 Momento auto-alinhante e de derrube

Utilizando-se um procedimento análogo ao realizado para obtenção da curva de força lateral, obtém-se as superfícies de momento auto-alinhante e momento de derrube.

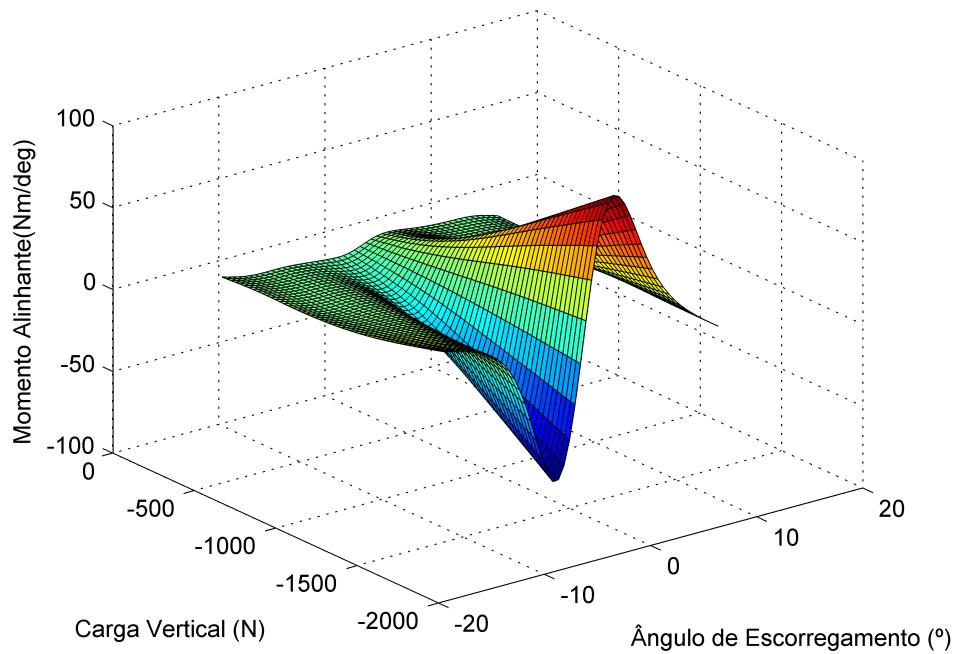


Figura 10 – Momento auto-alinhante em função de ângulo de escorregamento e carga vertical

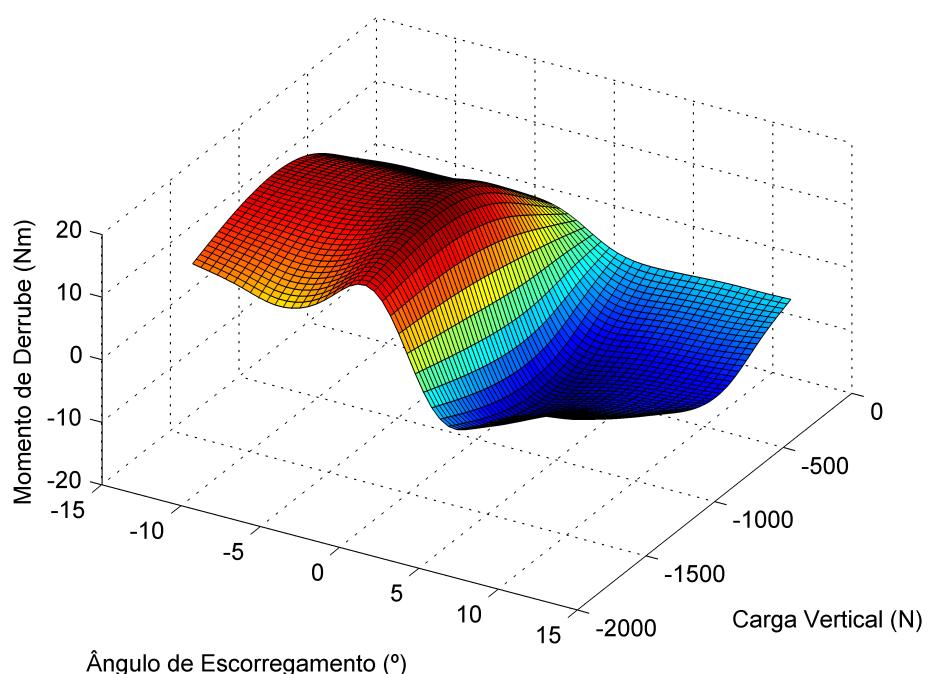


Figura 11 – Momento de derrube em função de ângulo de escorregamento e carga vertical

## 2.9 *Pneumatic trail*

Da razão entre o momento auto-alinhante e a força lateral produzida, tem-se o *pneumatic trail*, que é o braço do momento auto-alinhante.

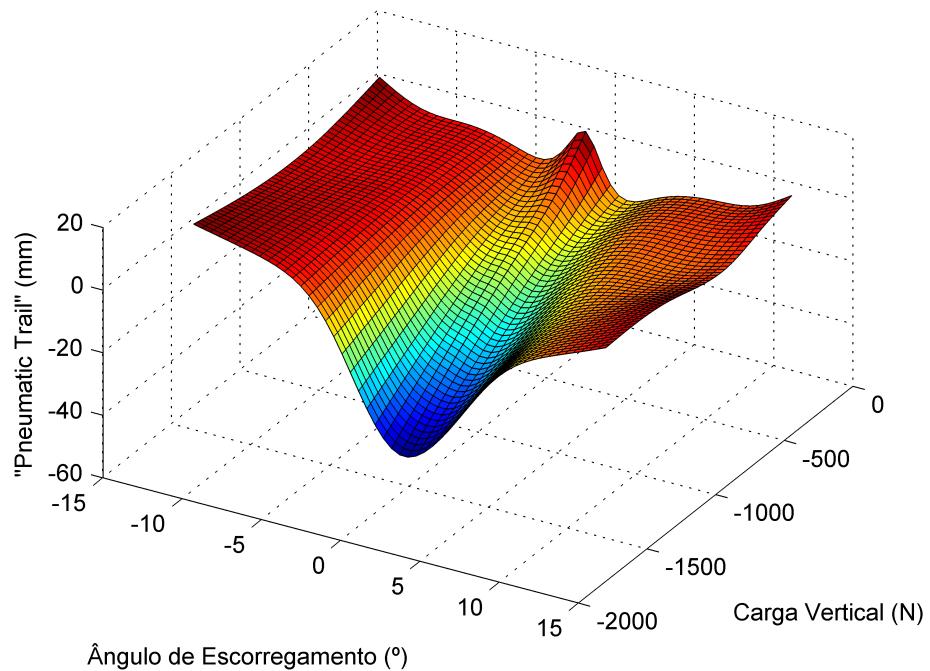


Figura 12 – *Pneumatic trail* em função de ângulo de escorregamento e carga vertical

## 2.10 *Pneumatic scrub*

De forma análoga obtém-se o *pneumatic scrub*, que refere-se ao braço do momento de derrube.

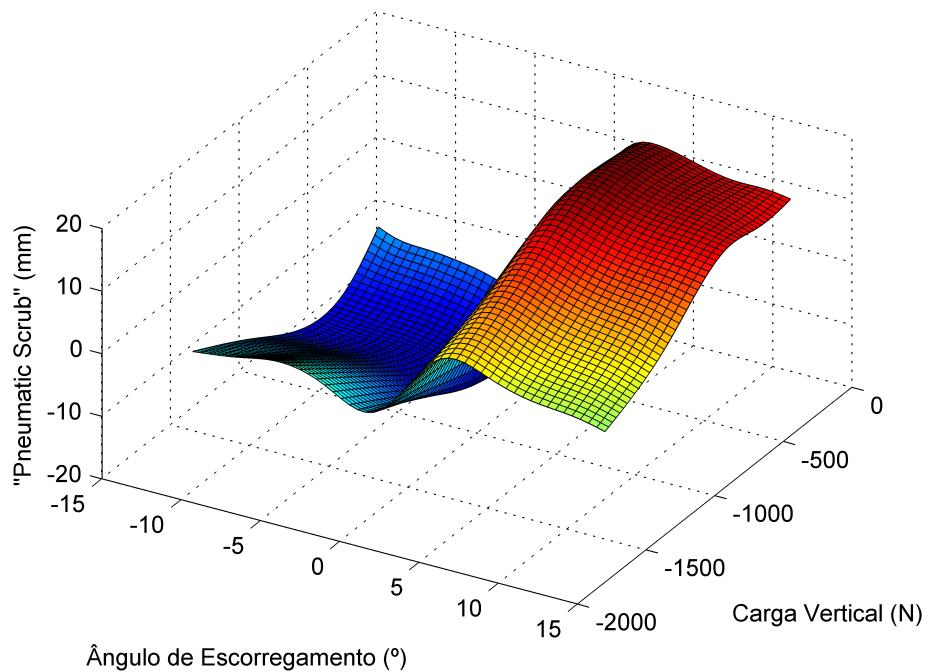


Figura 13 – *Pneumatic scrub* em função de ângulo de escorregamento e carga vertical

## 2.11 Força lateral em função do ângulo de cambagem

As medições realizadas permitem ainda a identificação do comportamento das forças e momentos no pneu para diferentes ângulos de cambagem. São mostradas abaixo as curvas de força lateral, momento auto-alinhante e momento de derrube em função da carga vertical e ângulos de cambagem.

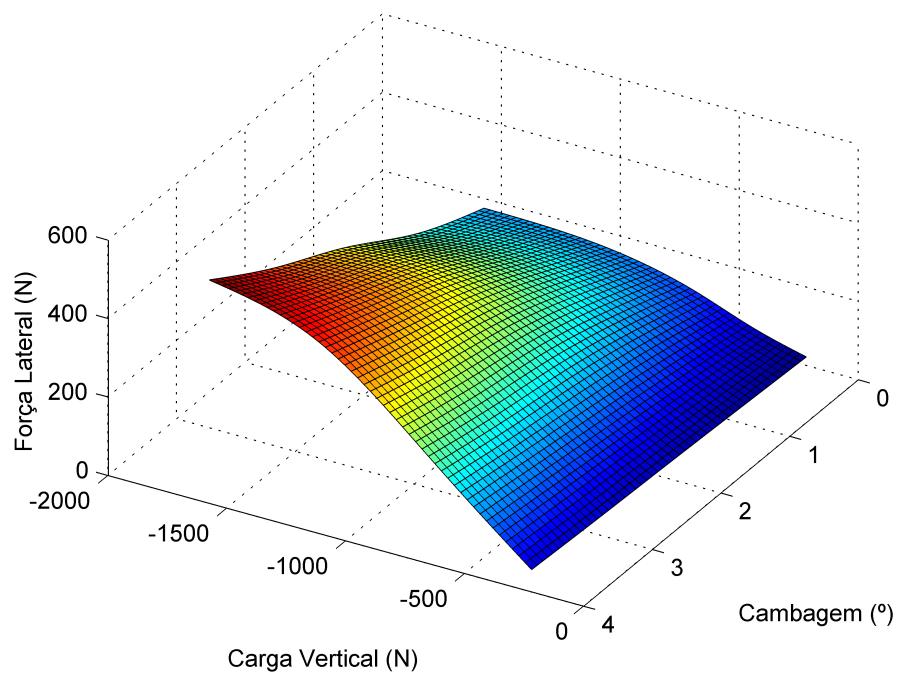


Figura 14 – Força lateral em função de ângulo de cambagem e carga vertical

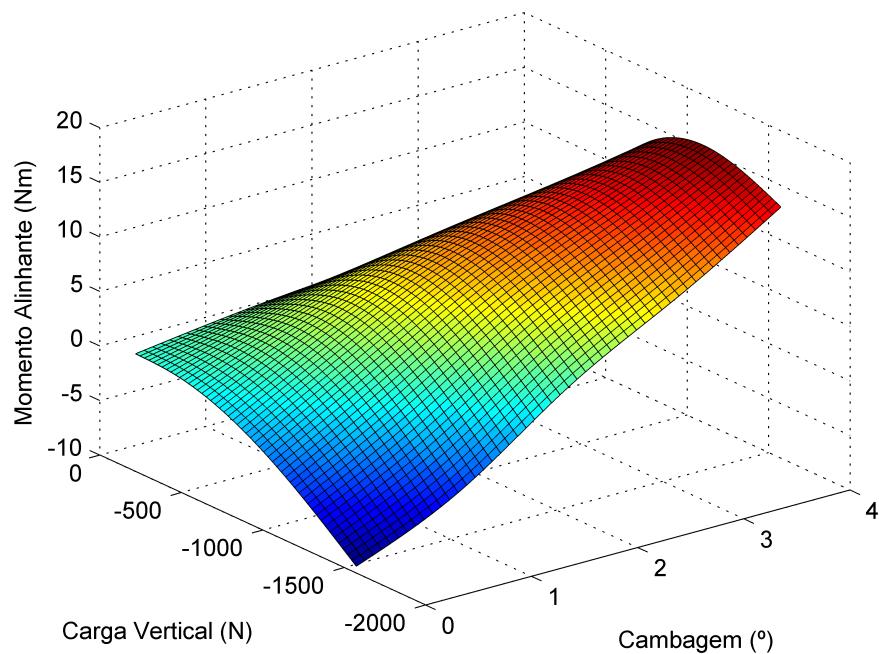


Figura 15 – Momento auto-alinhante em função de ângulo de cambagem e carga vertical

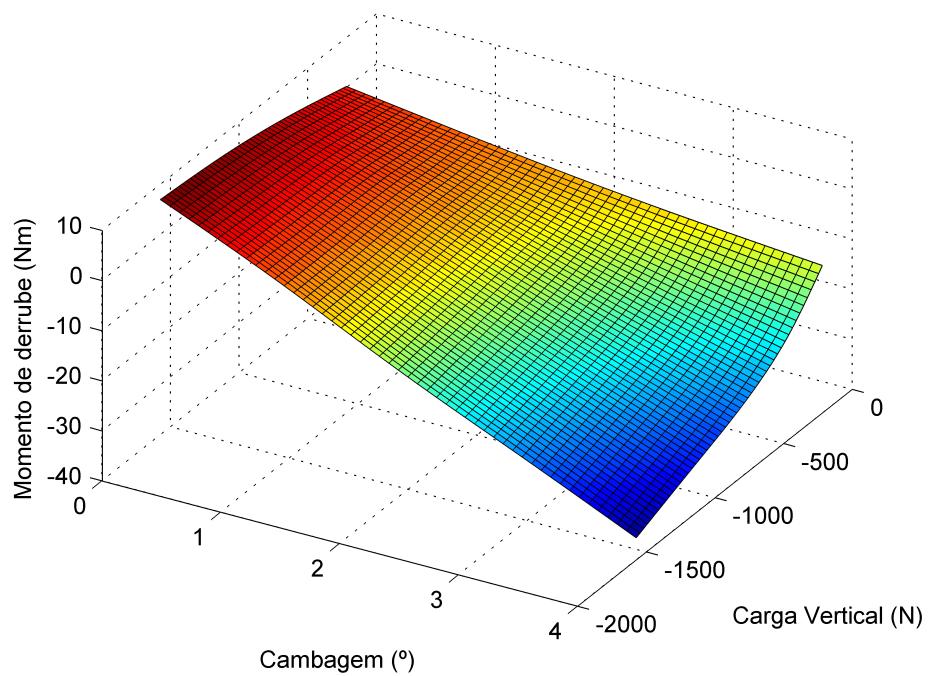


Figura 16 – Momento de derrube em função de ângulo de cambagem e carga vertical

## 2.12 Dinâmica longitudinal

Nessa seção são apresentadas as superfícies relacionadas às forças e momentos relativos aos testes de aceleração e frenagem.

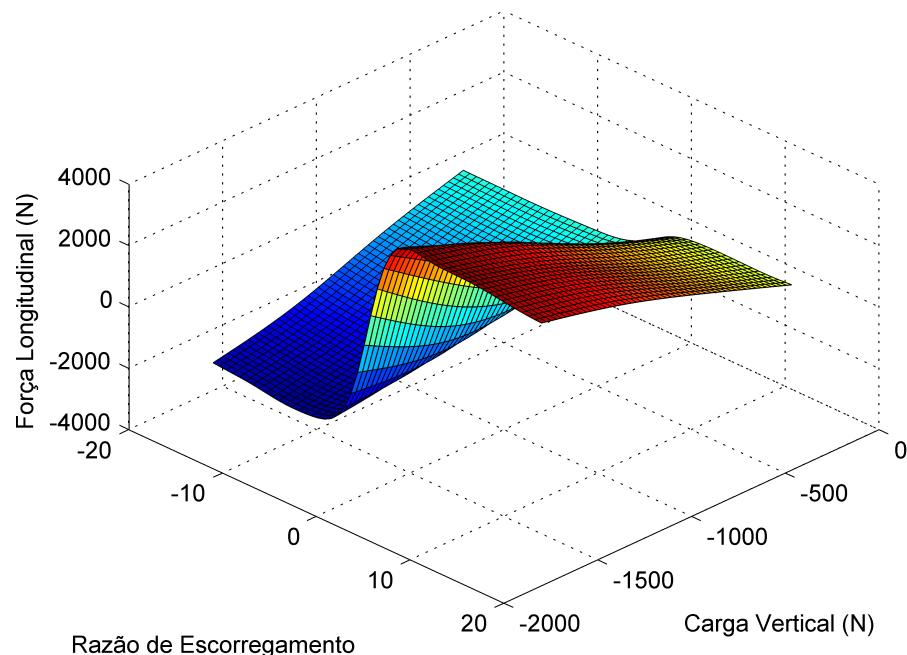


Figura 17 – Força longitudinal em função da carga vertical e da razão de escorregamento

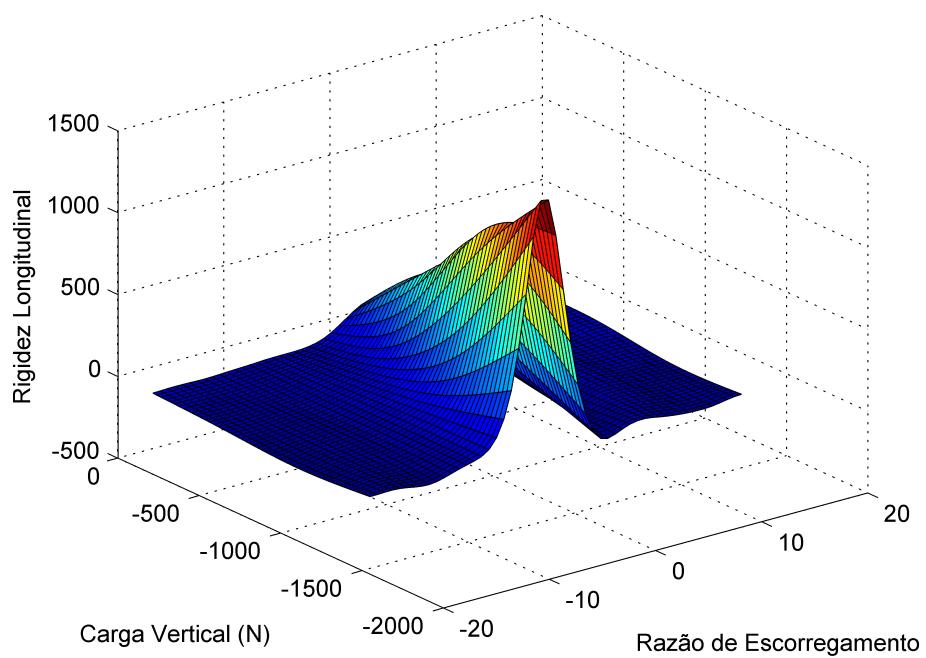


Figura 18 – Rrigidez longitudinal em função da carga vertical e razão de escorregamento

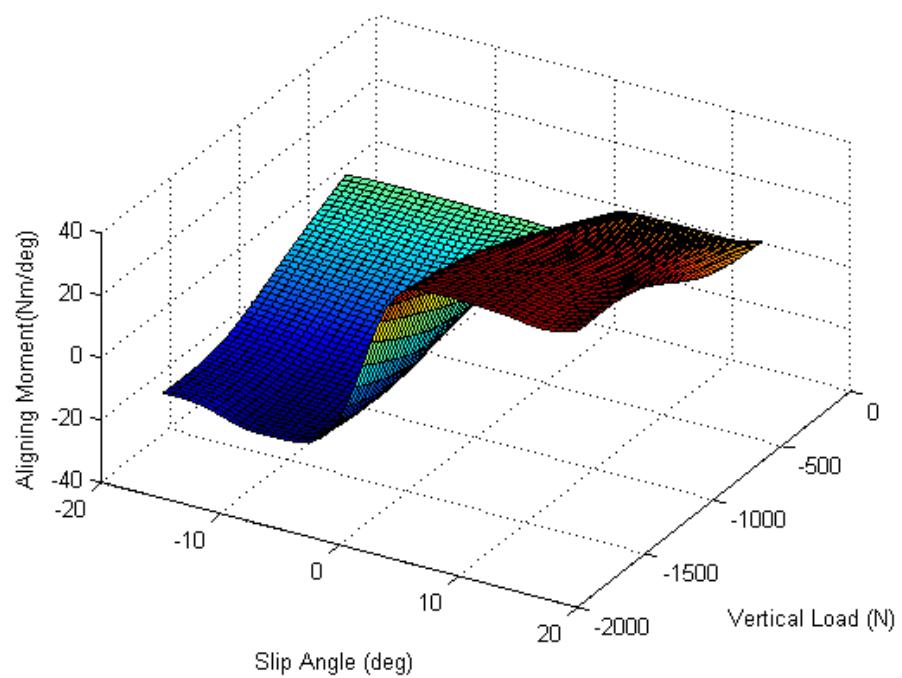


Figura 19 – Torque alinhante em função da carga vertical e razão de escorregamento

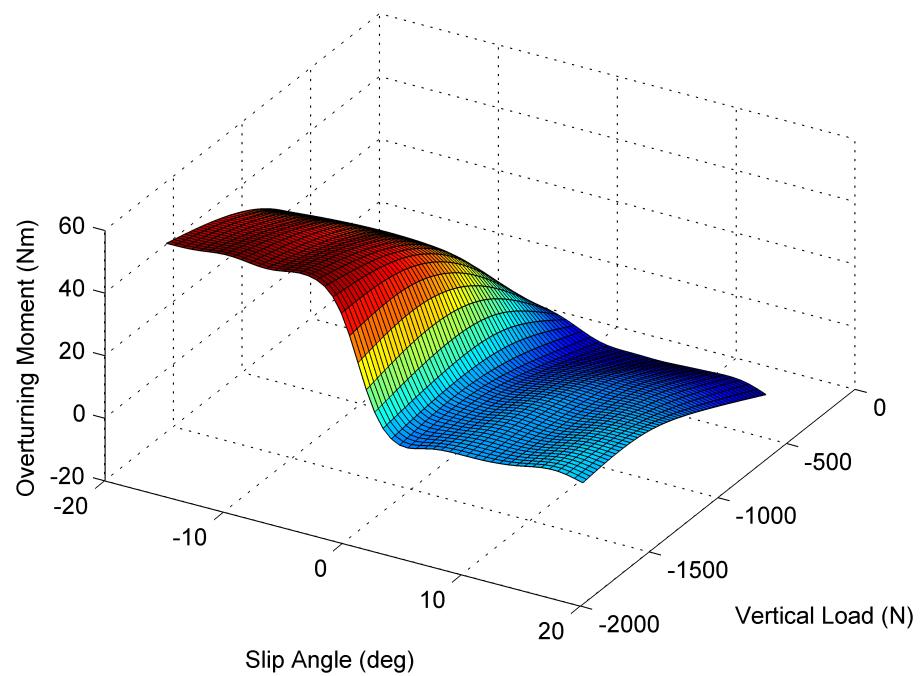


Figura 20 – Momento de derrube em função da carga vertical e razão de escorregamento

# 3 MODELO EM PLANTA LINEAR

## 3.1 Introdução

Nesse capítulo será desenvolvido o modelo linear clássico de veículo em planta (RIEKERT; SCHUNCK, 1940), também conhecido como modelo de bicicleta. Essa abordagem permite a descrição da dinâmica lateral do automóvel, bem como de aspectos de sua dirigibilidade e estabilidade. São analisadas as respostas dinâmicas do sistema às manobras de curva de raio constante e mudança de faixa. O parâmetro avaliado nas simulações é a posição do centro de gravidade do veículo.

Posteriormente, o modelo de pneu apresentado no capítulo anterior será integrado ao do veículo e sua respostas serão novamente analisadas. Dessa forma, torna-se possível verificar qual a distinção entre o modelo clássico, que admite o comportamento linear do pneu, e aquele não-linear, que parte de dados experimentais. Essa comparação é também uma maneira de se identificar possíveis problemas no tratamento dos dados do experimento.

## 3.2 Modelo Físico

O esquema físico do sistema dinâmico estudado nesse capítulo é o corpo rígido apresentado na figura 21. Ele é composto por um único eixo que possui um pneu em cada extremidade. O pneu traseiro mantém-se sempre alinhado ao eixo, enquanto dianteiro pode apresentar um ângulo de esterçamento, que será designado por  $\delta$ . Considera-se que toda massa do veículo se concentra em um único ponto  $O_v$  (centro de gravidade), situado sobre o eixo a uma distância  $a$  do pneu dianteiro e  $b$  do pneu traseiro. Adota-se, ainda, as seguintes hipóteses simplificadoras:

- A velocidade longitudinal do centro de gravidade ao longo da trajetória é constante.
- O centro de gravidade move-se em um único plano e os movimentos de arfagem e rolagem são desprezados.
- As forças longitudinais nos pneus são desprezadas.
- A distribuição de carga vertical sobre os pneus é assumida constante.
- Os pontos de contato do pneu com o solo  $F$  e  $R$ , onde atuam as forças dos pneus, estão alinhados com o eixo.

As duas primeiras hipóteses restringem quatro dos seis graus de liberdade do corpo rígido, logo, o sistema em estudo possui dois graus de liberdade.

São definidos também dois sistemas de coordenadas: um deles inercial  $K_e = \{O_e; x_e, y_e, z_e\}$  e outro solidário ao veículo, com sua origem coincidente ao centro de gravidade e representado por  $K_v = \{O_v; x_v, y_v, z_v\}$ .

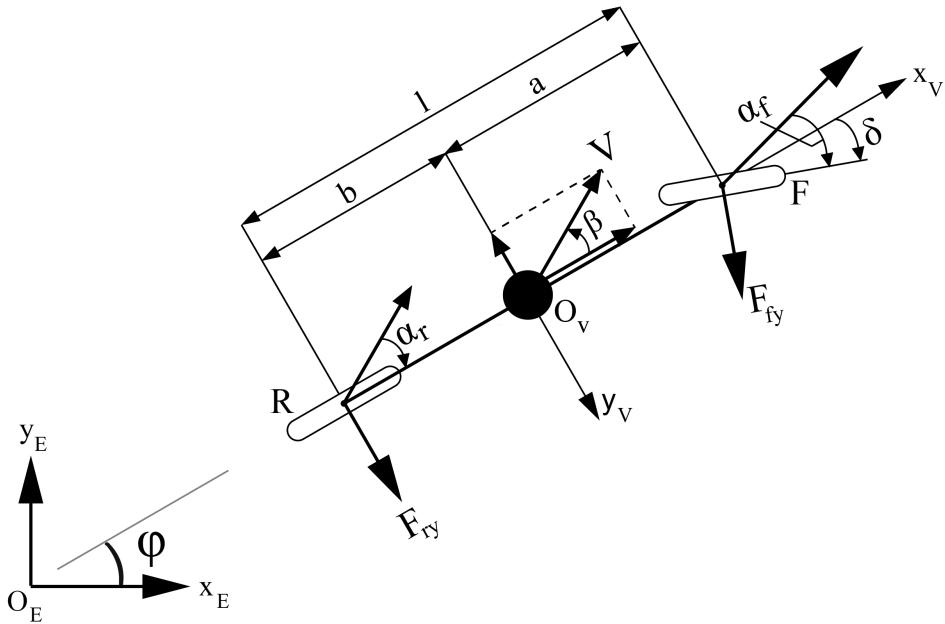


Figura 21 – Modelo em planta, adaptado de (PACEJKA, 2005)

As forças  $F$  que atuam sobre os pneus são identificadas por dois índices. O primeiro deles refere-se a qual pneu está aplicada a força, sendo que  $r$  designa o pneu traseiro (do inglês, *rear*) e  $f$  designa o pneu dianteiro (do inglês, *front*). Já o segundo índice indica a direção da força em relação ao pneu, sendo  $y$  utilizado para forças laterais.

Aos ângulos de escorregamento  $\alpha$  também são atribuídos os índices  $r$  e  $f$ . Outros parâmetros relevantes na definição do modelo são o ângulo  $\delta$ , que representa o esterçamento do pneu dianteiro, e  $\varphi$ , que é o ângulo compreendido entre o veículo e o eixo  $x_e$ . Por fim,  $u$  e  $-v$  representam as velocidades em  $x_v$  e  $y_v$ , respectivamente, sendo a resultante destas duas representada pela velocidade  $V$ .

### 3.3 Modelo Matemático

Nesta seção serão deduzidas as equações diferenciais que regem o sistema dinâmico apresentado na Figura 21. Para esse fim será utilizado como referência o sistema de eixos solidário ao veículo e serão aplicados o Teorema do Movimento do Baricentro (*TMB*) e o Teorema do Movimento Angular (*TMA*).

Deve-se, em primeiro lugar, definir as velocidades e acelerações nos pontos de interesse em relação a  $K_v$ . Para a velocidade de  $O_v$  tem-se:

$$V_{o_v} = \begin{bmatrix} V \cos \beta \\ V \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

A aceleração de  $O_v$ , por sua vez, é:

$$a_{o_v} = \frac{d}{dt}(V_v) + \omega \times V_v = \begin{bmatrix} -V \sin \beta \dot{\beta} \\ V \cos \beta \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V \cos \beta \\ V \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$a_{o_v} = \begin{bmatrix} -V(\dot{\varphi} + \dot{\beta}) \sin \beta \\ V(\dot{\varphi} + \dot{\beta}) \cos \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Dada a hipótese de velocidade longitudinal constante, a aceleração do corpo é puramente normal:  $a_n = V(\dot{\varphi} + \dot{\beta})$ . Logo, o raio da curva descrita pelo ponto  $O_v$  é:

$$\rho_v = \frac{V}{(\dot{\varphi} + \dot{\beta})} \quad (3.4)$$

Para pequenos valores de  $\beta$ , a aceleração de  $O_v$  perpendicular à velocidade longitudinal é:

$$a_y = \frac{V^2}{\rho_v} \quad (3.5)$$

Em seguida, o cálculo da força lateral dos pneus exige ainda a determinação das velocidades em  $F$  e  $R$ :

$$V_{F_v} = V_{o_v} + \omega \times (F - O_v) = \begin{bmatrix} V \cos \beta \\ V \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \cos \beta \\ V \sin \beta + a \dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$V_{R_v} = V_{o_v} + \omega \times (R - O_v) = \begin{bmatrix} V \cos \beta \\ V \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \cos \beta \\ V \sin \beta - b \dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Substituindo os valores de  $\beta$  encontrados nas expressões anteriores das velocidades de  $F$  e  $R$ :

$$V_{F_v} = \begin{bmatrix} V_F \cos(\delta - \alpha_f) \\ V_F \sin(\delta - \alpha_f) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$V_{R_v} = \begin{bmatrix} V_R \cos(\alpha_r) \\ -V_R \sin(\alpha_f) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Da definição de ângulo de escorregamento, apresentada na equação (2.2), é possível escrever para o pneu dianteira, considerando pequenos valores de  $\delta$ :

$$\tan(\delta - \alpha_f) = \frac{V \sin \beta + a \dot{\varphi}}{V \cos \beta} \approx \beta + \frac{a \dot{\varphi}}{V} \quad (3.10)$$

$$\implies \alpha_f \approx \delta - \beta - \frac{a \dot{\varphi}}{V} \quad (3.11)$$

E para o pneu traseiro:

$$\tan(\alpha_r) = \frac{-V \sin \beta + b \dot{\varphi}}{V \cos \beta} \approx -\beta + \frac{b \dot{\varphi}}{V} \quad (3.12)$$

$$\implies \alpha_r \approx -\beta + \frac{b \dot{\varphi}}{V} \quad (3.13)$$

Além disso, adota-se a hipótese de que os pneus operam somente no regime linear. Dessa forma, sejam  $C_r$  e  $C_f$  as rigidezes ao esterçamento dos pneus traseiro e dianteiro, as forças laterais nos pneus são das por:

$$F_{ry} = C_r \alpha_r \quad (3.14)$$

$$F_{fy} = C_f \alpha_f \quad (3.15)$$

Portanto, seja  $m$  a massa do veículo, aplicando o TMB no eixo  $y_v$  têm-se:

$$mV(\dot{\varphi} + \dot{\beta}) = F_{ry} + F_{fy} \cos(\delta) \quad (3.16)$$

Seja  $I_z$  o momento de inércia em relação ao eixo  $z_v$ , da aplicação do Teorema do Momento Angular têm-se:

$$I_z \ddot{\varphi} = -F_{ry}b + F_{fy} \cos(\delta)a \quad (3.17)$$

Substituindo (3.14) e (3.15) nas expressões obtidas acima e adotando as aproximações  $\cos \beta \approx 1$  e  $\cos \delta \approx 1$  para  $|\beta|$  e  $|\delta| \ll 1$ , obtém-se as seguintes equações do movimento:

$$mV \dot{\beta} + (mV^2 + C_f a - C_r b) \frac{\dot{\varphi}}{V} + (C_f + C_r) \beta = C_f \delta \quad (3.18)$$

$$I_z \ddot{\varphi} + (C_f a^2 + C_r b^2) \frac{\dot{\varphi}}{V} + (C_f a - C_r b) \beta = C_f a \delta \quad (3.19)$$

Fazendo ainda a substituição:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \beta \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

é possível representar o sistema no espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{C_f a^2 + C_r b^2}{C_f a - C_r b} & -\frac{C_f a - C_r b}{I_z} \\ -1 - \frac{v_x I_z}{m v_x^2} & -\frac{I_z}{C_f + C_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_f a}{I_z} \\ \frac{C_f}{m v_x} \end{bmatrix} [\delta] \quad (3.21)$$

Dessa forma, o sistema estudado pode ser representado graficamente da seguinte maneira:

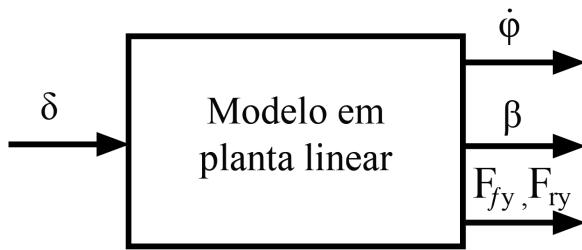


Figura 22 – Representação gráfica do sistema dinâmico

## 3.4 Simulação dinâmica

Como o propósito dos modelos desenvolvidos nesse trabalho é orientar a concepção de protótipos, é desejável que as simulações permitam a comparação entre veículos. Dessa maneira torna-se possível verificar como a mudança de um parâmetro altera o comportamento dinâmico do automóvel. Por essa razão, os resultados das simulações apresentados em seguida são compostos sempre por duas curvas, uma na cor azul e outra em vermelho, representando os veículos 1 e 2, respectivamente.

Os veículos de ambas simulações possuem massa de  $270\text{kg}$ , assume-se que o momento de inércia em  $z$  de ambos é igual a  $65\text{kg}\cdot\text{m}^2$ , o entre-eixos de  $1,525\text{m}$  e a velocidade em  $x$  de  $20\text{m/s}$ . A distinção entre os dois é a distância do centro de gravidade ao eixo dianteiro. No veículo 1 o CG está a  $762,5\text{mm}$ , ou seja, no ponto médio do entre-eixos, e no veículo 2 ele está a  $962,5\text{mm}$ .

### 3.4.1 Curva de raio constante

Os testes de curva em raio constante são realizados desde 1930 pela indústria automobilística, sendo essenciais na avaliação da estabilidade e dirigibilidade de veículos, podendo revelar muitas informações sobre seu comportamento. Mesmo em um modelo matemático simples como o deduzido no presente capítulo, o teste de curva em raio constante é

capaz de mostrar muito sobre a dinâmica lateral do automóvel. No gráfico apresentado na figura 23 a seguir, por exemplo, é possível ver como a velocidade lateral  $v$  do CG dos veículos respondem a um esterçamento de  $10^\circ$  no pneu dianteiro. A diferença entre o comportamento de 1 e 2 é clara. Enquanto o veículo 1 responde rapidamente ao esterçamento e entra quase instantaneamente em regime permanente, o veículo 2 mostra-se menos estável, sendo possível observar um evidente *overshoot* na curva vermelha. Além do mais, vê-se que o segundo automóvel possui velocidade em regime permanente de sentido contrário e de menor intensidade.

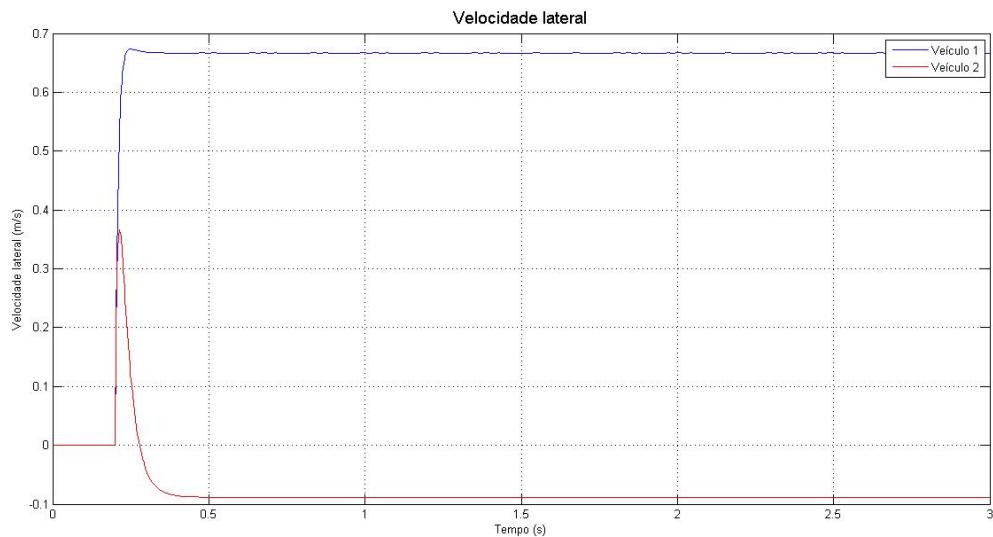


Figura 23 – Velocidade lateral  $v$

No gráfico da figura 24 seguinte é possível ver que o segundo veículo apresenta maior velocidade angular durante a curva, o que complementa o fato verificado no gráfico anterior.

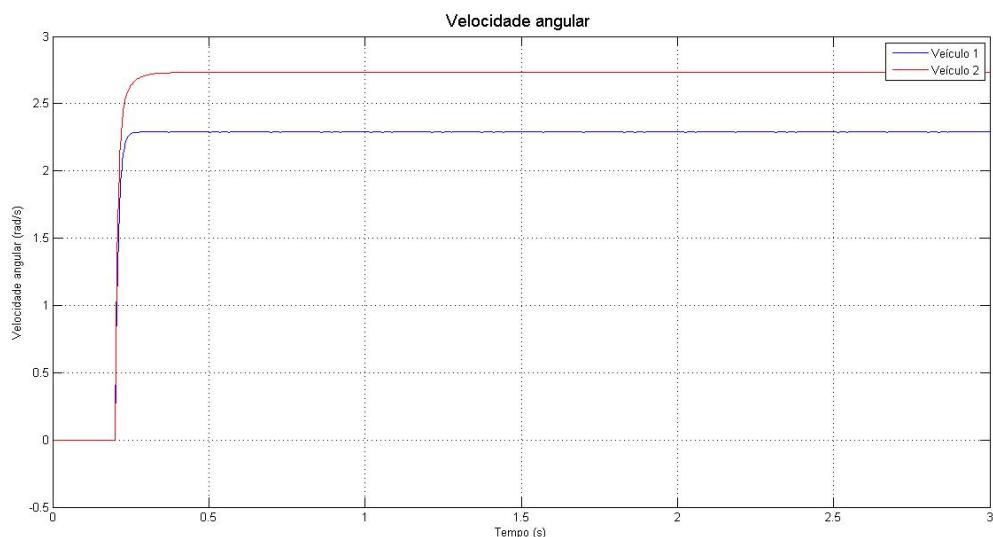


Figura 24 – Velocidade angular  $r$

Como esperado, a aceleração lateral do veículo 2 é também superior e ele também se revela menos estável.

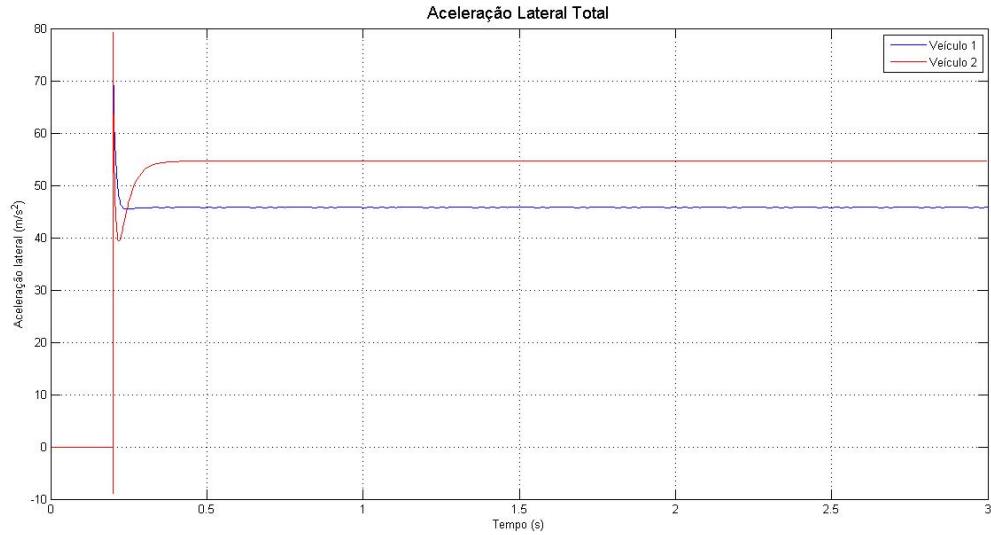


Figura 25 – Aceleração lateral

Apresenta-se a seguir a atitude do veículo, definida como a razão  $\arctan(v/u)$ , que é o ângulo compreendido entre o vetor velocidade instantânea do CG e o corpo do automóvel. Nota-se da comparação, novamente, que essa grandeza possui sinais oposto em 1 e 2.

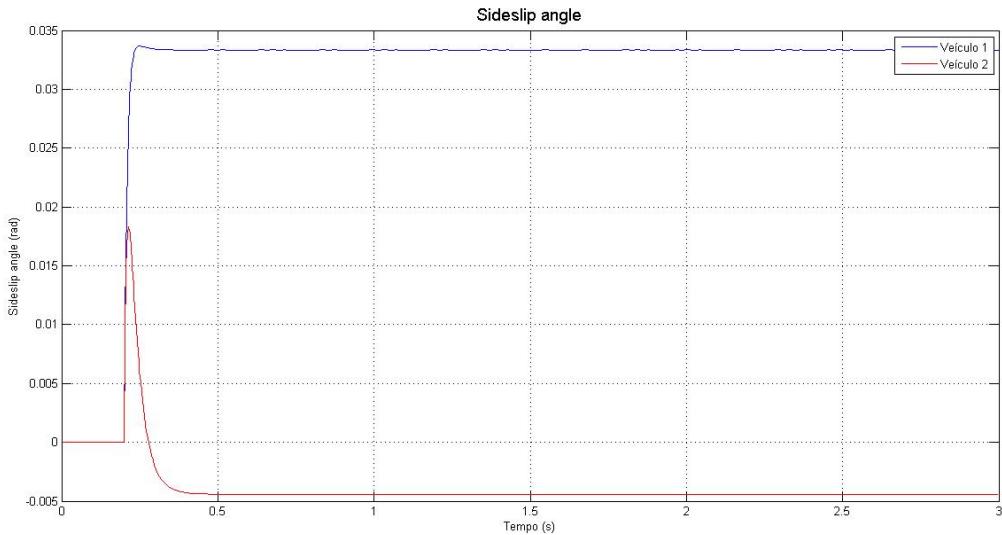


Figura 26 – Atitude do veículos

Na figura 27 são apresentadas as trajetórias dos dois automóveis, sendo a curva em verde a trajetória do veículo 2.

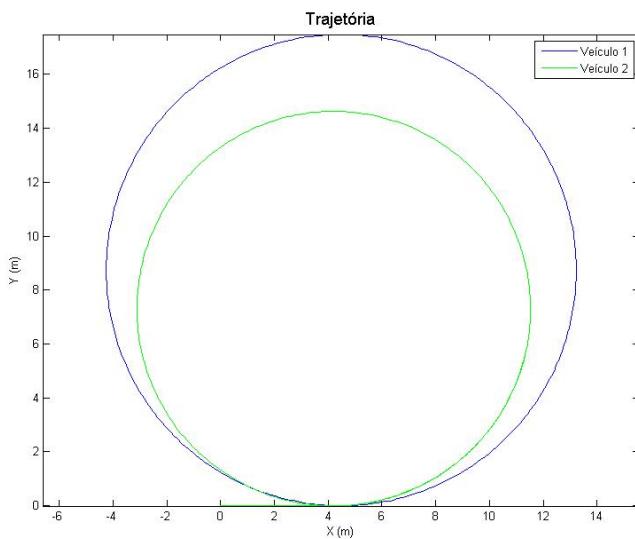


Figura 27 – Trajetória percorrida pelos CGs

### 3.4.2 Mudança de faixa

Outro teste de extrema importância na avaliação de estabilidade e dirigibilidade é a manobra de mudança de faixa. Ele permite a verificação do comportamento do veículo em situações transientes.

Serão utilizadas na simulação as seguintes entradas:

Tabela 2 – Entradas utilizadas na simulação de mudança de faixa

Tempo (s)	$\delta$ (rad)
0 – 0,25	0
0,25 – 0,50	$+\pi/15$
0,50 – 0,75	$-\pi/15$
0,75 – 1,00	0
1,00 – 1,25	$-\pi/15$
1,25 – 1,50	$+\pi/15$
1,50 – 1,75	0

Na figura 28 é possível notar que o carro 2, após o início da manobra, apresenta grandes variações na velocidade lateral, que em momento algum assume um valor constante, como 1. Nota-se, assim como no teste de curva de raio constante, que o veículo 2 responde de forma mais “agressiva” ao esterçamento do pneu dianteiro.

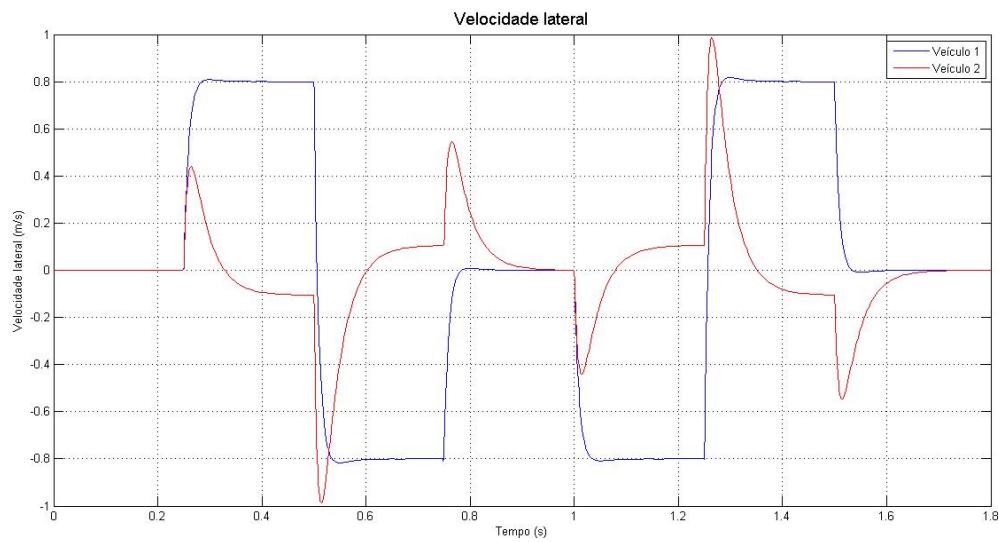


Figura 28 – Velocidade lateral no teste de mudança de faixa

Nas figuras 29 a 32 podem ser verificadas as demais respostas dos automóveis ao teste de mudança de faixa.

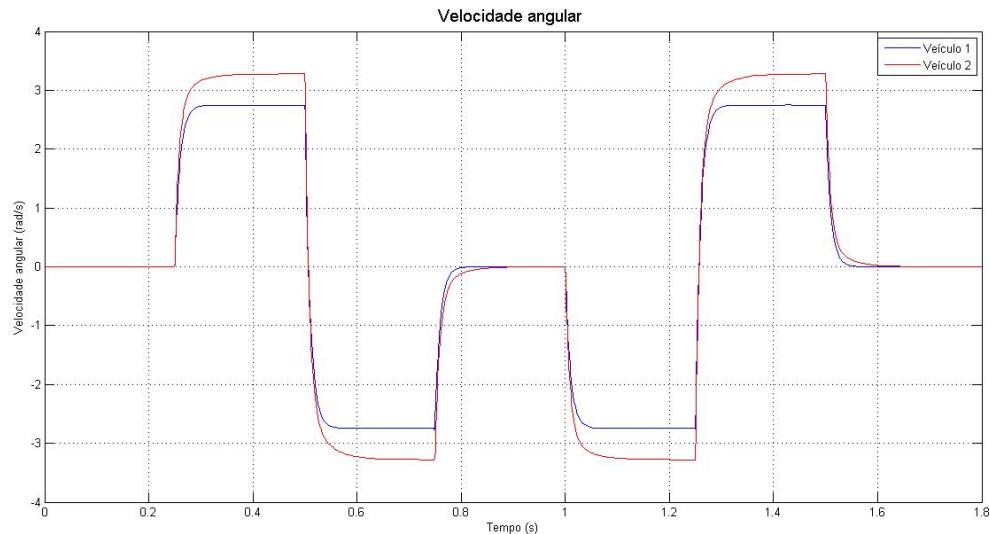


Figura 29 – Velocidade angular no teste de mudança de faixa

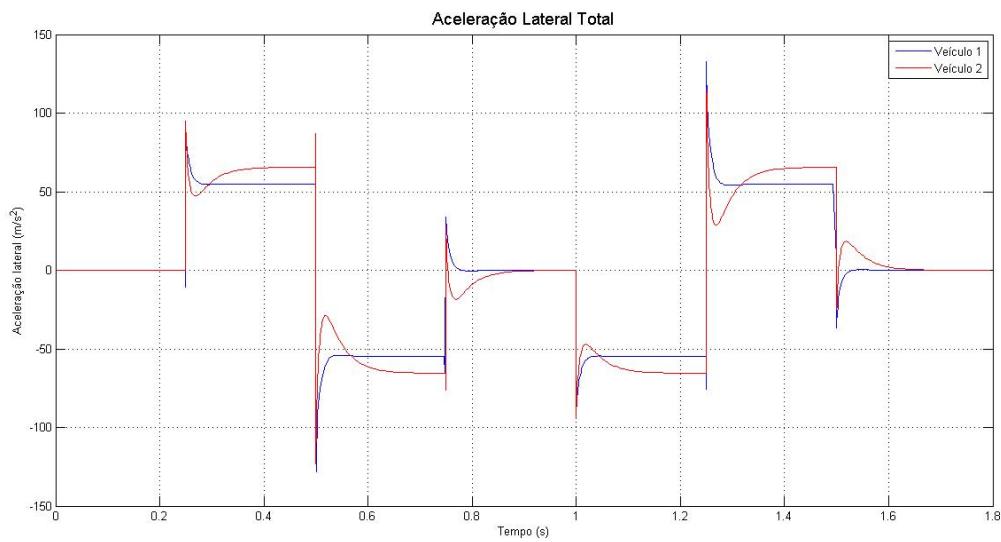


Figura 30 – Aceleração lateral no teste de mudança de faixa

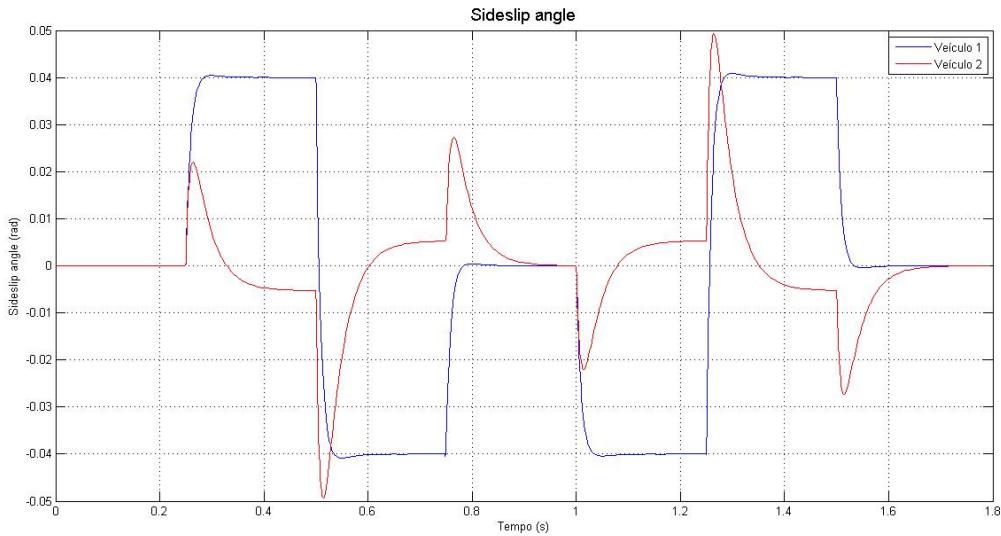


Figura 31 – Atitude dos veículos no teste de mudança de faixa

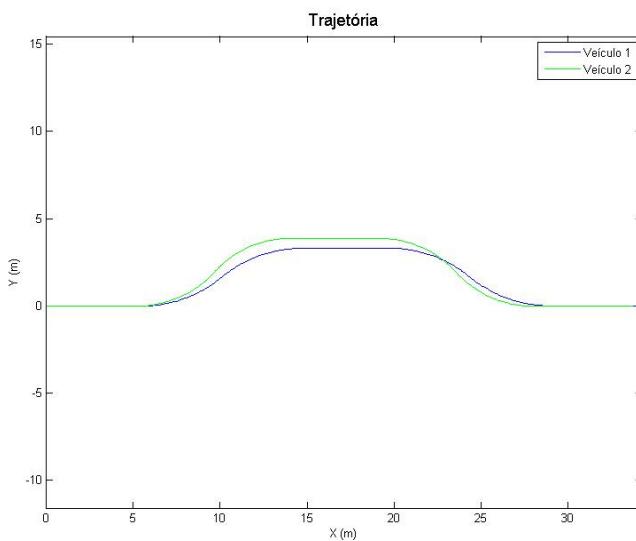


Figura 32 – Trajetórias no teste de mudança de faixa

### 3.4.3 Conclusões

Os resultados das simulações permitem concluir qual a influência da posição do centro de gravidade na estabilidade do veículo. Um ponto importante verificado é que o automóvel com CG no ponto médio do seu entre-eixos (veículo 1) responde muito mais rapidamente à entrada  $\delta$ . Com poucos sobressaltos ele atinge prontamente o regime permanente. Diz-se que esse é o comportamento de um veículo “neutro” e muitas equipes de competição buscam ajustar seus carros para que tenham esse tipo de comportamento. Nessa configuração o veículo tende a apontar para a direção em que ele se desloca, o que dá aos pilotos a sensação de controle sobre o veículo. Já o veículo 2 mostrou ter menor estabilidade em suas respostas e, por ter maior velocidade angular notou-se que, para um mesmo  $\delta$  ele descreve curvas de menor raio. Este veículo, portanto, tende a responder com mais intensidade o piloto deseja, o que pode ser um ponto positivo em situações que muitas curvas fechadas precisam ser feitas.

Portanto, verifica-se que o modelo aqui desenvolvido apresenta respostas coerentes com o que se espera, representando assim, dentro de suas limitações, os comportamentos de um veículo. Logo, o modelo cumpre seu papel e poderá auxiliar a Equipe de Formula SAE da Escola Politécnica em suas simulações preliminares.

## 4 MODELO EM PLANTA NÃO LINEAR

Do modelo desenvolvido no capítulo 2, obteve-se a força lateral produzida pelo pneu em função do ângulo de escorregamento e da carga vertical. Concatenando esses dados com o modelo do veículo em planta pode-se chegar a um modelo que represente, de forma mais fiel, a realidade. A seguir são apresentados os resultados para a simulação de curva de esterçamento constante para o veículo em planta com modelo de pneu linear (Veículo 1) e não linear (Veículo 2).

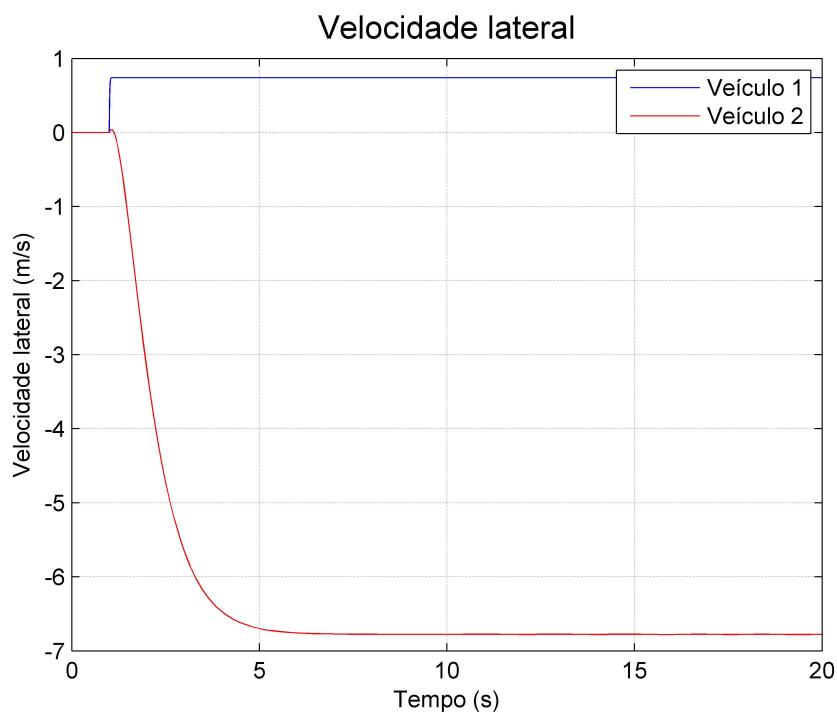


Figura 33 – Velocidade lateral para o modelo linear (Veículo 1) e não linear (Veículo 2)

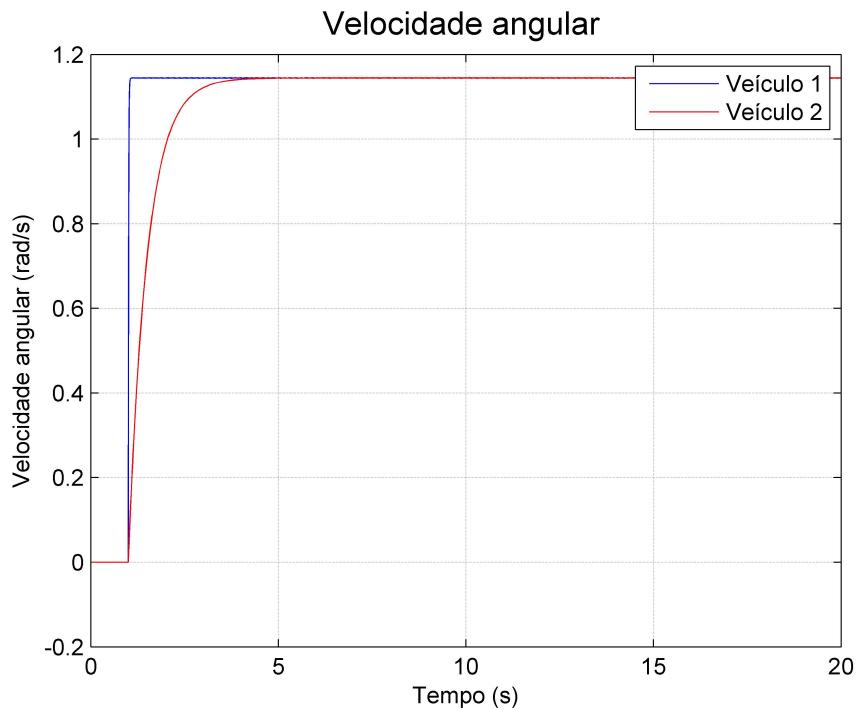


Figura 34 – Velocidade angular para o modelo linear (Veículo 1) e não linear (Veículo 2)

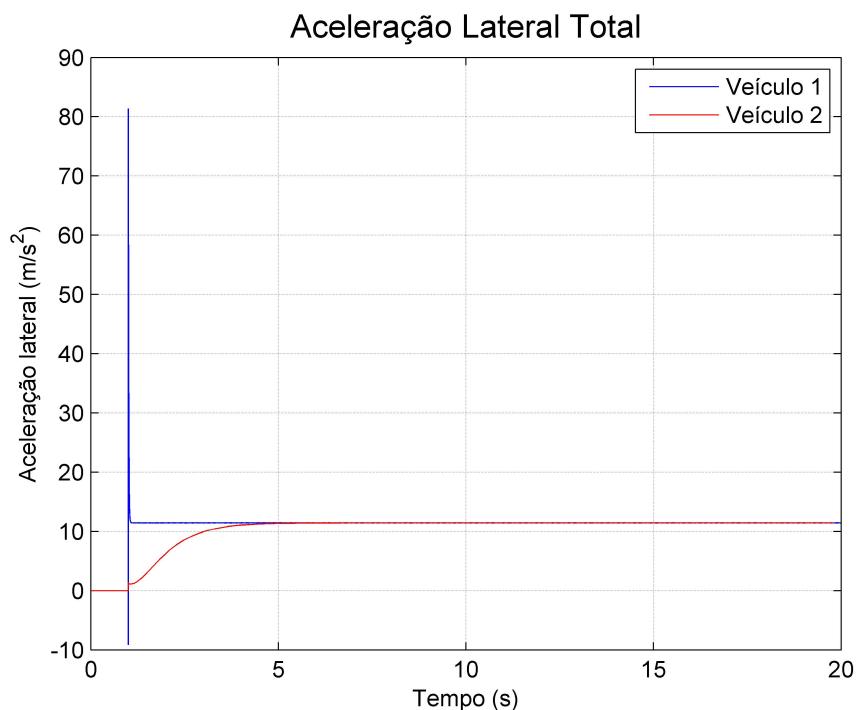


Figura 35 – Aceleração lateral para o modelo linear (Veículo 1) e não linear (Veículo 2)

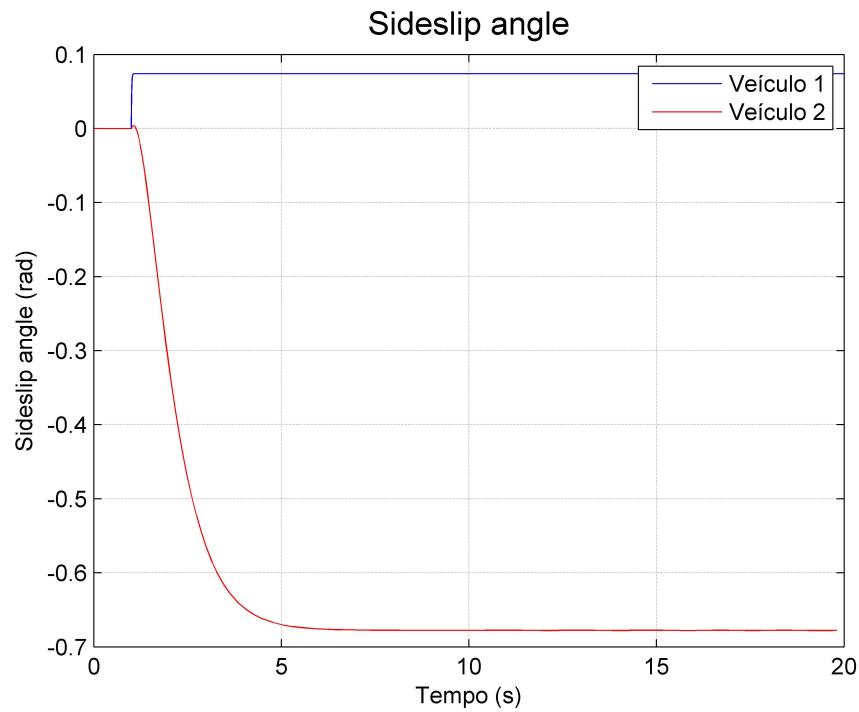


Figura 36 – Atitude do veículo para o modelo linear (Veículo 1) e não linear (Veículo 2)

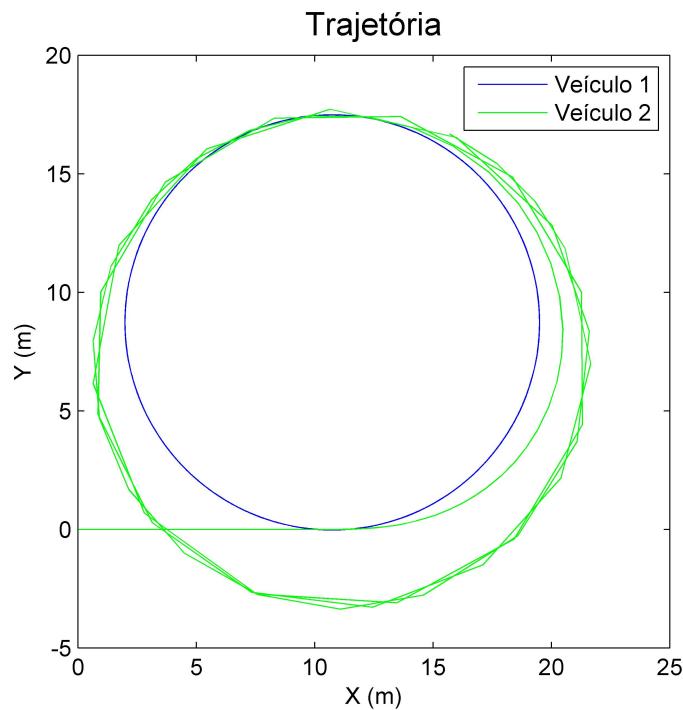


Figura 37 – Trajetórias - modelo de veículo + modelo de pneu

# 5 MEIO VEÍCULO LATERAL

Nesse capítulo será desenvolvida a modelagem e simulação de meio-veículo lateral. Pretende-se, com esse desenvolvimento, analisar os movimentos de vibração em baixa frequência de *pitch* e *bounce* no plano vertical.

## 5.1 Modelo Físico

O modelo físico do sistema em estudo é composto por duas massa pontuais  $m_1$  e  $m_2$ , que representam as massas não suspensas dos eixos dianteiro e traseiro, respectivamente, e um corpo rígido de massa  $m_3$  e momento de inércia  $I_y$ . Este, por sua vez, representa o chassi do veículo e tudo que nele está compreendido, ou seja, toda a massa suspensa.

Os sistemas de suspensão dianteiro e traseiro são modelados pelos pares de mola e amortecedor  $k_3-d_3$  e  $k_4-d_4$ . Desconsidera-se, portanto, a cinemática do sistema de suspensão. Os pneus dianteiro e traseiro, de modo semelhante, são também modelados como pares de mola e amortecedor  $k_1-d_1$  e  $k_2-d_2$ .

Sendo o sistema composto por duas massas pontuais e um corpo rígido confinados no plano vertical, observa-se portanto a existência de quatro graus de liberdade. Assim sendo, são adotadas as seguintes coordenadas generalizadas:  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  e  $\beta$ . Considera-se, na adoção dessas coordenadas que, na posição de equilíbrio, as forças gravitacionais são compensadas pelas pré-cargas nas molas. Dessa maneira as coordenadas representam o afastamento das posições de equilíbrio ( $z_{10}$ ,  $z_{20}$  e  $z_{30}$ ). Considera-se, ainda, que no equilíbrio a massa  $m_3$  encontra-se na posição horizontal.

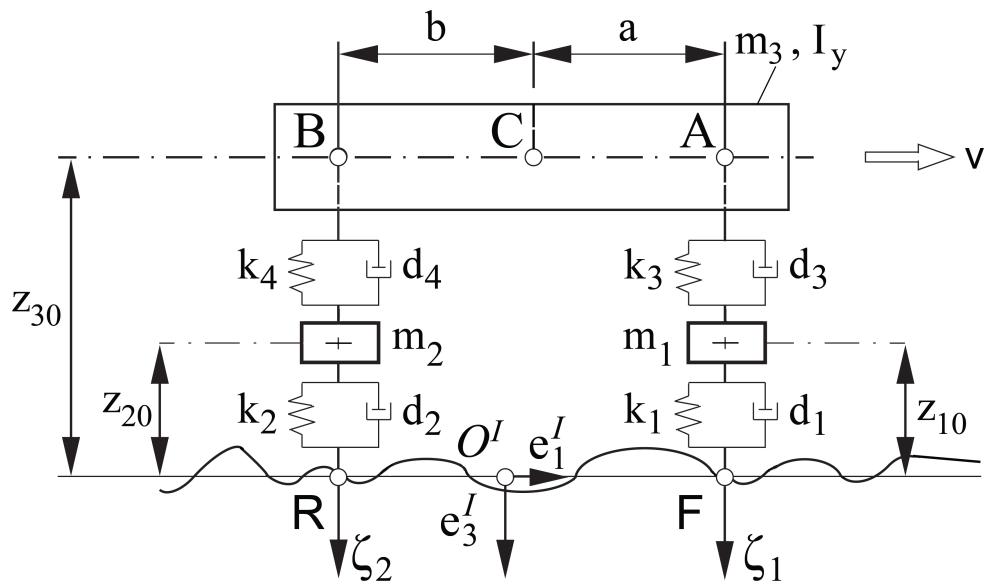


Figura 38 – Esquema físico de meio veículo lateral

As distâncias  $a$  e  $b$  indicam, assim como no modelo em planta do capítulo 4, as distâncias entre o centro de gravidade da massa  $m_3$  e os eixos dianteiro e traseiro, respectivamente. Os pontos  $F$  e  $R$  são os pontos de contato dos pneu com o perfil do solo,  $\zeta$ , ao se deslocar com uma velocidade constante  $v$ .

## 5.2 Modelo Matemático

Para a dedução do modelo matemático aplica-se às massas o Teorema do Movimento do Baricentro e, para o corpo rígido, aplica-se também o Teorema do Momento Angular. As forças que atuam sobre cada uma das massas são representadas por  $f_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) no diagrama de corpo livre apresentado na figura 43 a seguir.

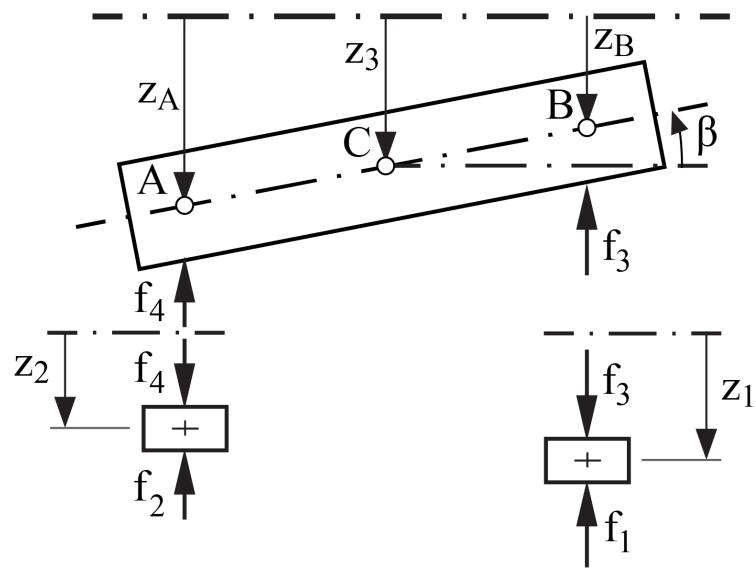


Figura 39 – Diagrama de corpo livre

Para cada um dos corpos pode-se deduzir que:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{z}_1 &= -f_1 + f_3 \\
 m_2 \ddot{z}_2 &= -f_2 + f_4 \\
 m_3 \ddot{z}_3 &= -f_3 + f_4 \\
 I_y \ddot{\beta} &= -af_3 + bf_4
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= k_1(z_1 - \zeta_1) + d_1(\dot{z}_1 - \dot{\zeta}_1) \\
 f_2 &= k_2(z_2 - \zeta_2) + d_2(\dot{z}_2 - \dot{\zeta}_2) \\
 f_3 &= k_3(z_A - z_1) + d_3(\dot{z}_A - \dot{z}_1) \\
 f_4 &= k_4(z_B - z_2) + d_4(\dot{z}_B - \dot{z}_2)
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Em que  $z_A$  e  $z_B$  são:

$$\begin{aligned}
 z_A &= z_3 - a\beta \\
 z_B &= z_3 + b\beta
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Substituindo-se as equações (5.2) e (5.3) em (5.1) tem-se que:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + k_1 z_1 + d_1 \dot{z}_1 - k_3(z_3 - a\beta - z_1) - d_3(\dot{z}_3 - a\dot{\beta} - \dot{z}_1) &= k_1 \zeta_1 + d_1 \dot{\zeta}_1 \\ m_2 \ddot{z}_2 + k_2 z_2 + d_2 \dot{z}_2 - k_4(z_3 + b\beta - z_2) - d_4(\dot{z}_3 + b\dot{\beta} - \dot{z}_2) &= k_2 \zeta_2 + d_2 \dot{\zeta}_2 \\ m_3 \ddot{z}_3 + k_3(z_3 - a\beta - z_1) + d_3(\dot{z}_3 - a\dot{\beta} - \dot{z}_1) + k_4(z_3 + b\beta - z_2) + d_4(\dot{z}_3 + b\dot{\beta} - \dot{z}_2) &= 0 \\ I_y \ddot{\beta} - ak_3(z_3 - a\beta - z_1) - ad_3(\dot{z}_3 - a\dot{\beta} - \dot{z}_1) + bk_4(z_3 + b\beta - z_2) + bd_4(\dot{z}_3 + b\dot{\beta} - \dot{z}_2) &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Fazendo  $y = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ \beta]^T$  pode-se escrever o sistema de equações (5.4) na forma matricial  $M\ddot{y} + D\dot{y} + Ky = h$ :

$$y = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ \beta]^T \quad (5.5)$$

$$M = \text{diag} [m_1 \ m_2 \ m_3 \ I_y] \quad (5.6)$$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 + d_3 & 0 & -d_3 & ad_3 \\ 0 & d_2 + d_4 & -d_4 & -bd_4 \\ -d_3 & -d_4 & d_3 + d_4 & -ad_3 + bd_4 \\ ad_3 & -bd_4 & -ad_3 + bd_4 & a^2 d_3 + b^2 d_4 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & 0 & -k_3 & ak_3 \\ 0 & k_2 + k_4 & -k_4 & -bk_4 \\ -k_3 & -k_4 & k_3 + k_4 & -ak_3 + bk_4 \\ ak_3 & -bk_4 & -ak_3 + bk_4 & a^2 k_3 + b^2 k_4 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$h = [k_1 \zeta_1 + d_1 \dot{\zeta}_1 \ k_2 \zeta_2 + d_2 \dot{\zeta}_2 \ 0 \ 0]^T \quad (5.9)$$

Pode-se, por fim, deduzir as expressões para as cargas verticais nos pneus:

$$\begin{aligned} f_F(t) &= f_{10} + f_1(t) \\ f_R(t) &= f_{20} + f_2(t) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Onde se tem que:

$$\begin{aligned} f_{10} &= \left( m_1 + \frac{a}{a+b} m_3 \right) g \\ f_{20} &= \left( m_2 + \frac{b}{a+b} m_3 \right) g \end{aligned} \quad (5.11)$$

As cargas dinâmicas  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  dependem da solução das equações de movimento (que por sua vez dependem da superfície do solo).

### 5.3 Simulação

Tendo definido o modelo matemático do sistema, pode-se utilizá-lo em ferramentas computacionais de simulação para obtenção de respostas para diversas entradas. Para a simulação desse modelo optou-se pelo uso do software *Simulink*. O diagrama de blocos dessa simulação é apresentado no Apêndice 5.

Abaixo é apresentada a resposta das massas para uma entrada senoidal de amplitude de 5 mm e frequência de 1 rad/s, sendo que adota-se que sinal de entrada no pneu dianteiro está em quadratura com o do pneu traseiro.

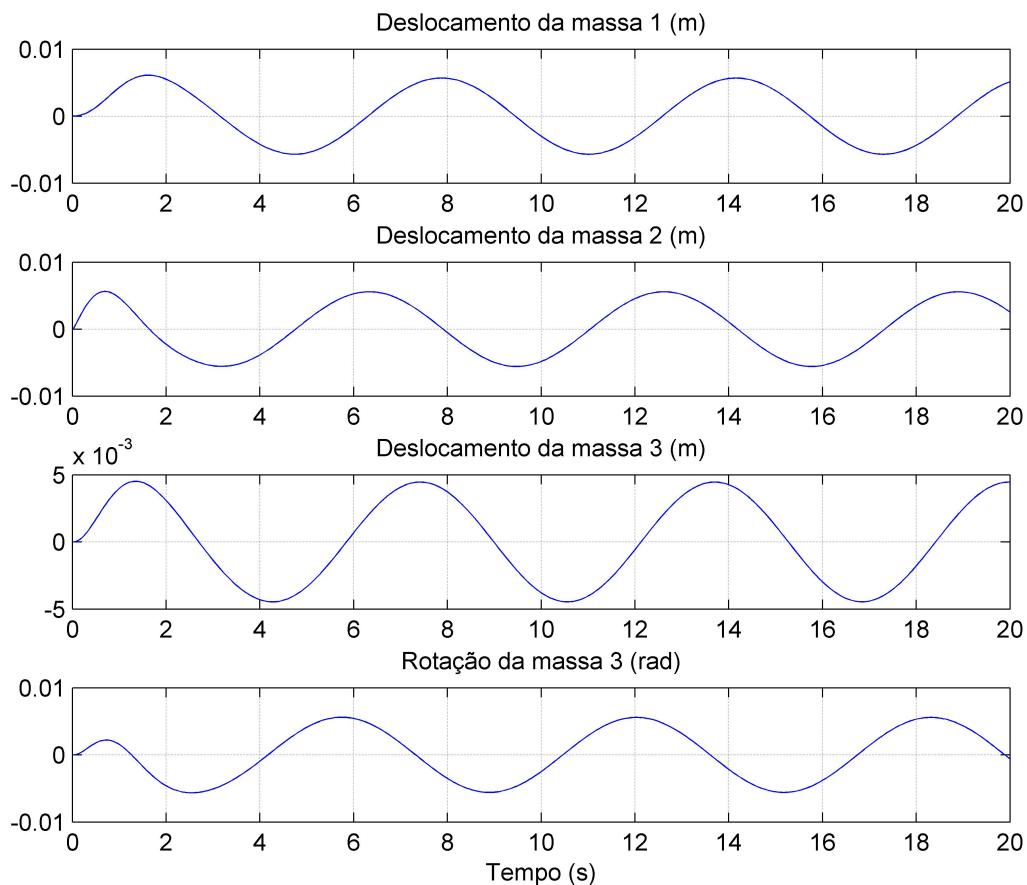


Figura 40 – Resposta do modelo a uma entrada senoidal

## 6 MODELO DE AMORTECEDOR

Utilizando-se o dinamômetro de amortecedores *DynoShock Soft-engine* da empresa *byLG Shock Absorber Tech Center*, situada em São Paulo, testou-se os amortecedores *Marzocchi Moto C2R* utilizado pela equipe no seu protótipo *FP-07*.



Figura 41 – Dinamômetro de amortecedores da empresa *byLG Shock Absorber Tech Center* (o amortecedor na imagem não corresponde ao aqui modelado)

Para que os dados obtidos diretamente do dinamômetro possam ser utilizados nas simulações de veículos, necessita-se que eles estejam em uma forma que possa ser implementada no diagrama de blocos do *Simulink*. Para isso, escolheu-se interpolar os pontos experimentais por um polinômio de quarta ordem. Esse polinômio foi escolhido, pois é capaz de representar satisfatoriamente o comportamento do amortecedor tanto em tração quanto em compressão. Obteve-se, dessa forma, quatro curvas: uma para cada possível regulagem do amortecedor. Elas foram incorporadas no modelo de meio veículo lateral na forma de um bloco *Function*, que tem como entrada a velocidade relativa entre as massas não suspensas e a massa suspensa, tendo como saída a força no amortecedor. As curvas, para as quatro possíveis regulagens, pode ser vista abaixo:

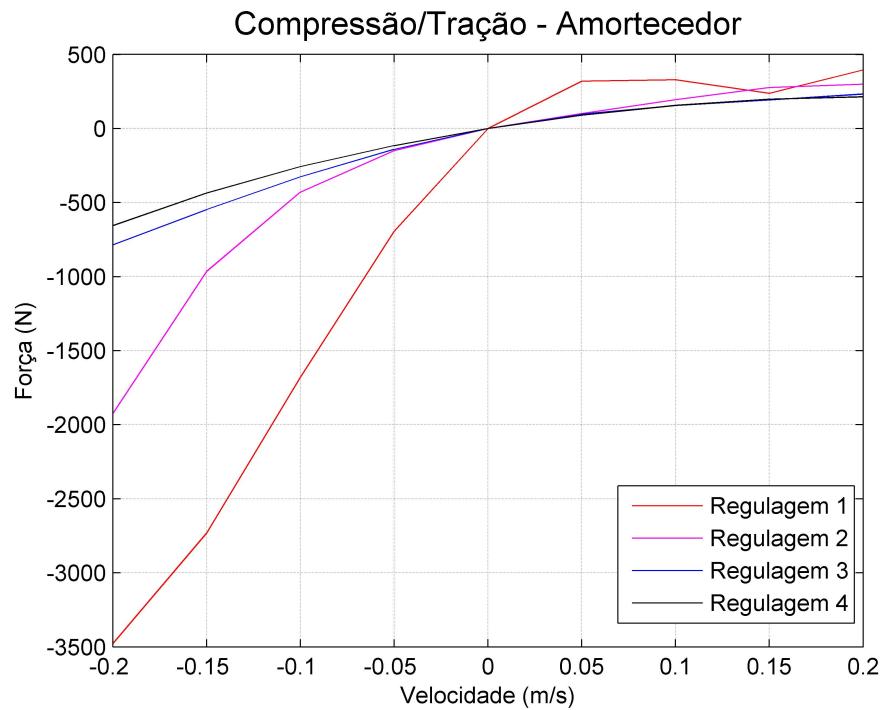


Figura 42 – Curvas do amortecedor para 4 regulagens distintas

# 7 MEIO VEÍCULO LATERAL NÃO LINEAR

Nesse capítulo, para fim de comparação com a resposta do modelo linear obtido no capítulo 5, é feita uma simulação considerando-se a mesma entrada utilizada na simulação daquele modelo.

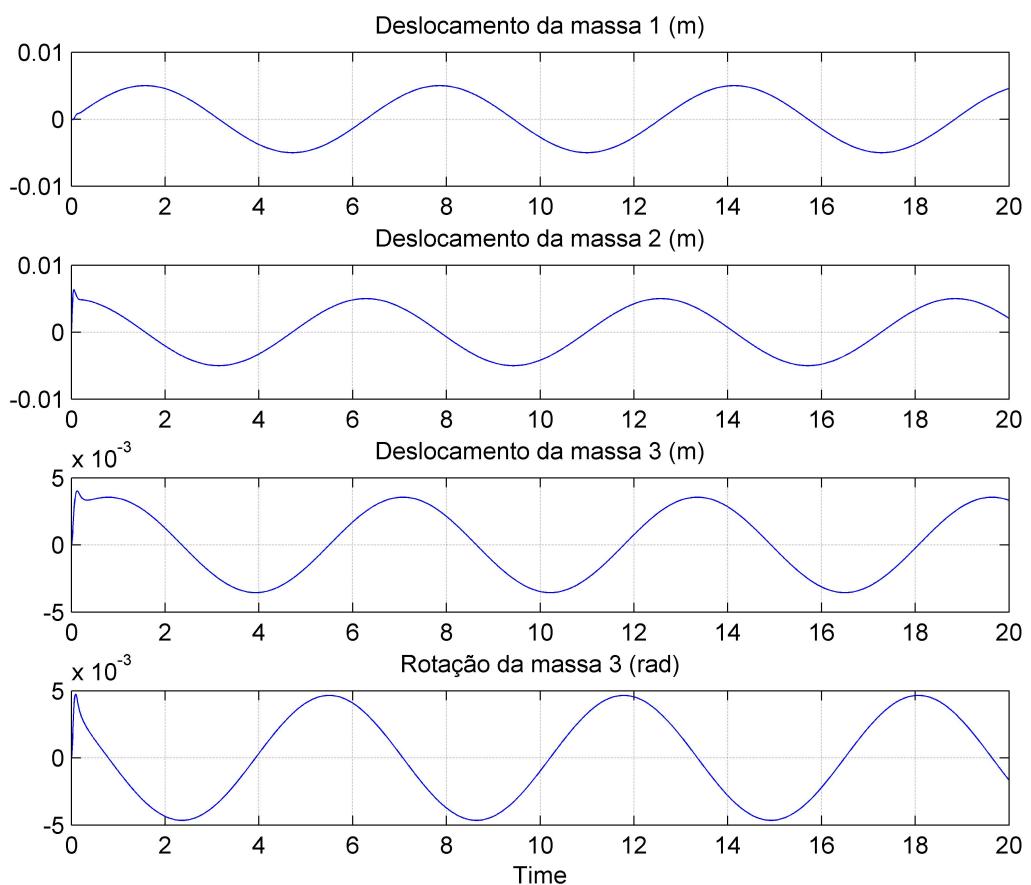


Figura 43 – Resposta do modelo não linear a uma entrada senoidal

# 8 MODELOS EM MULTICORPOS

## 8.1 Introdução

Para simulações mais completas utilizou-se o software Adams/Car. Abaixo são demonstradas simulações envolvendo a suspensão dianteira do veículo e uma simulação de veículo completo em curva de raio constante.

## 8.2 Suspensão dianteira

Nesta seção são apresentados os resultados da simulação em que os pneus dianteiro sofrem deslocamentos opostos de 20mm.

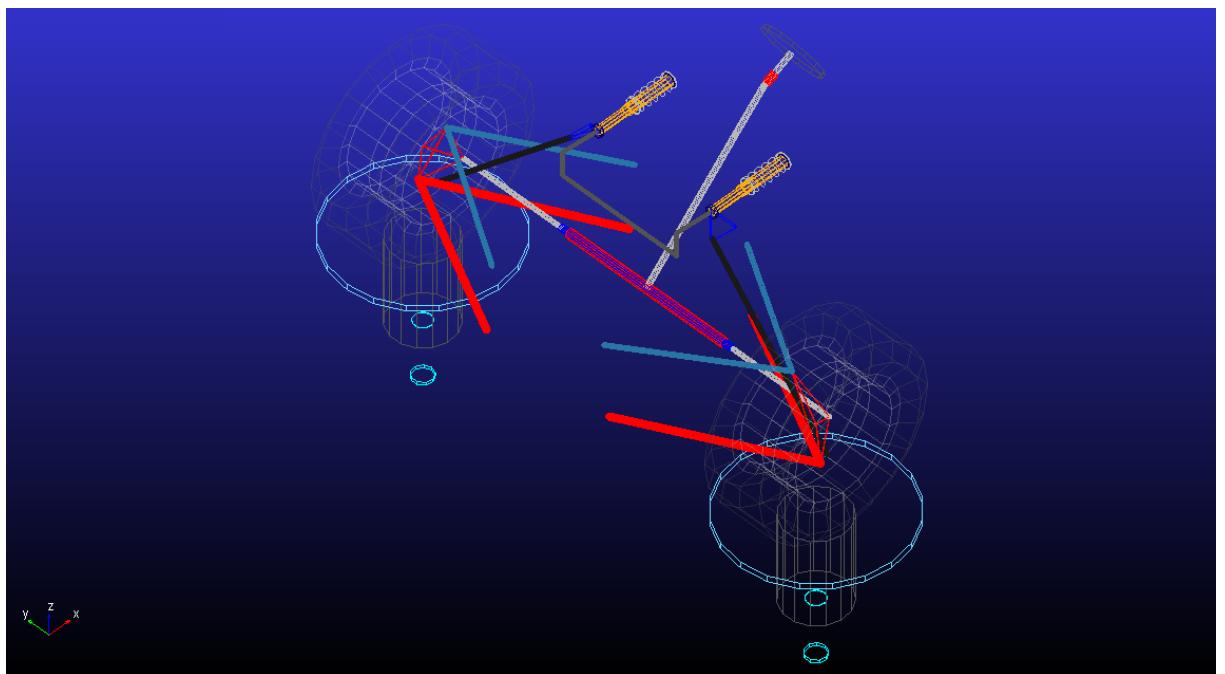


Figura 44 – Representação do subsistema no software Adams/Car

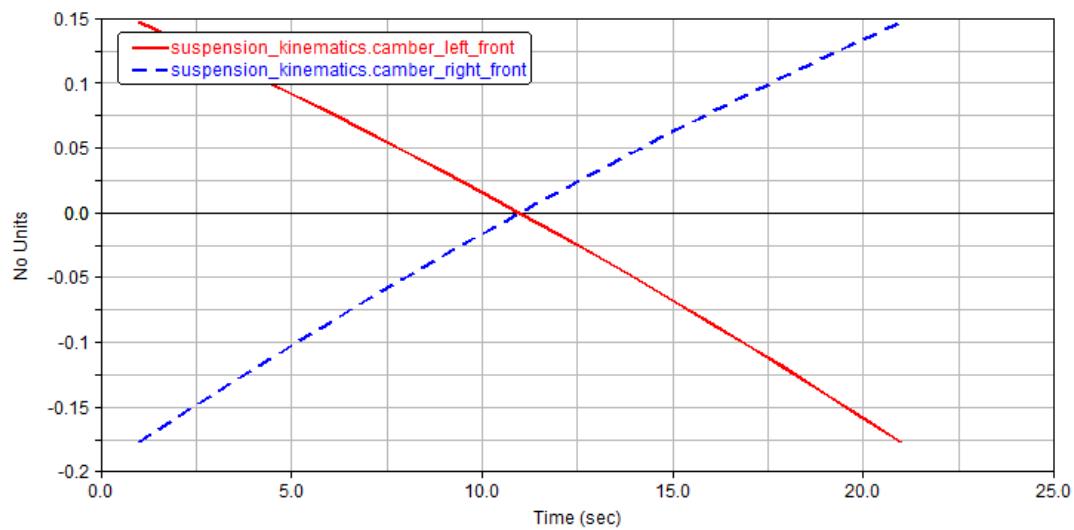
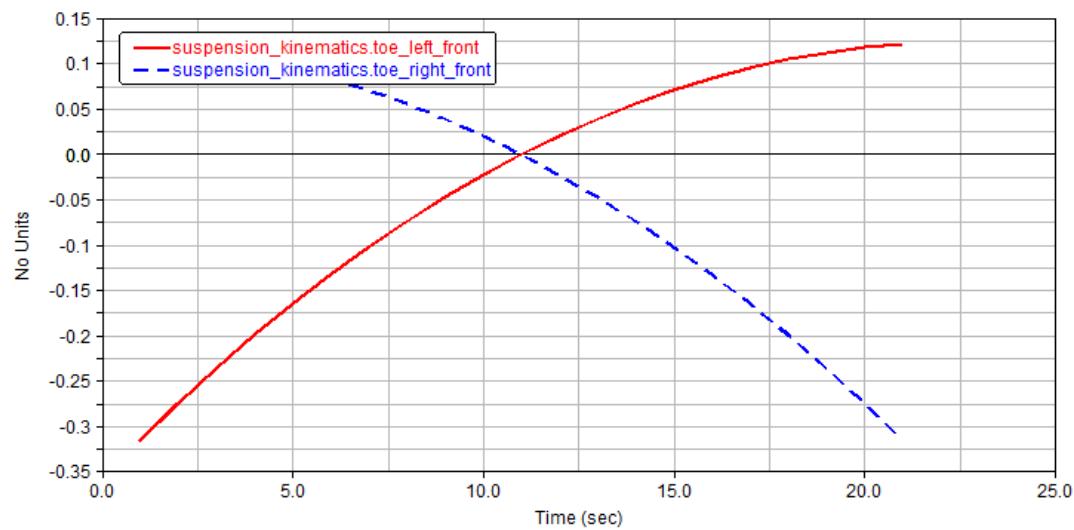


Figura 45 – Cambagem

Figura 46 – Ângulo de *toe*

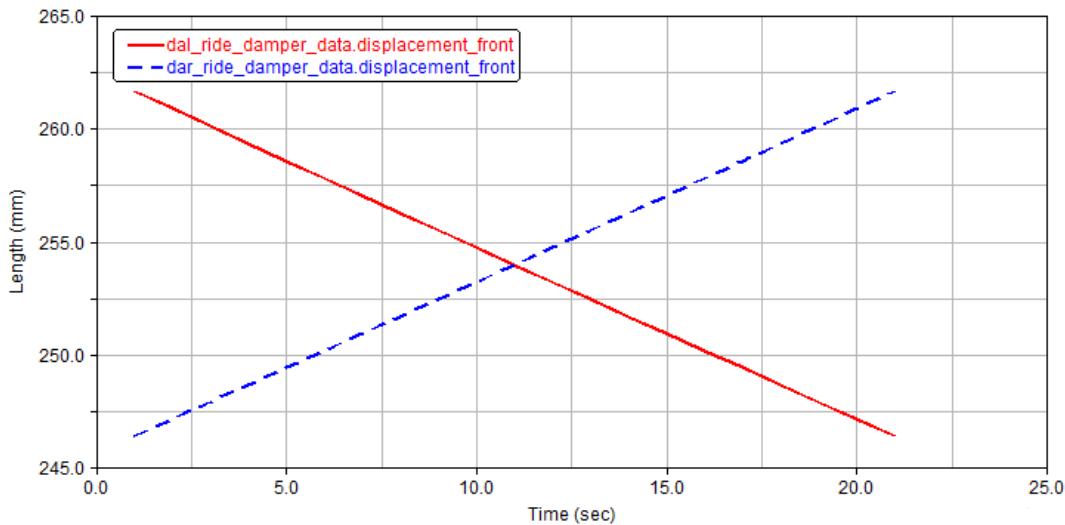


Figura 47 – Deslocamento dos amortecedores.

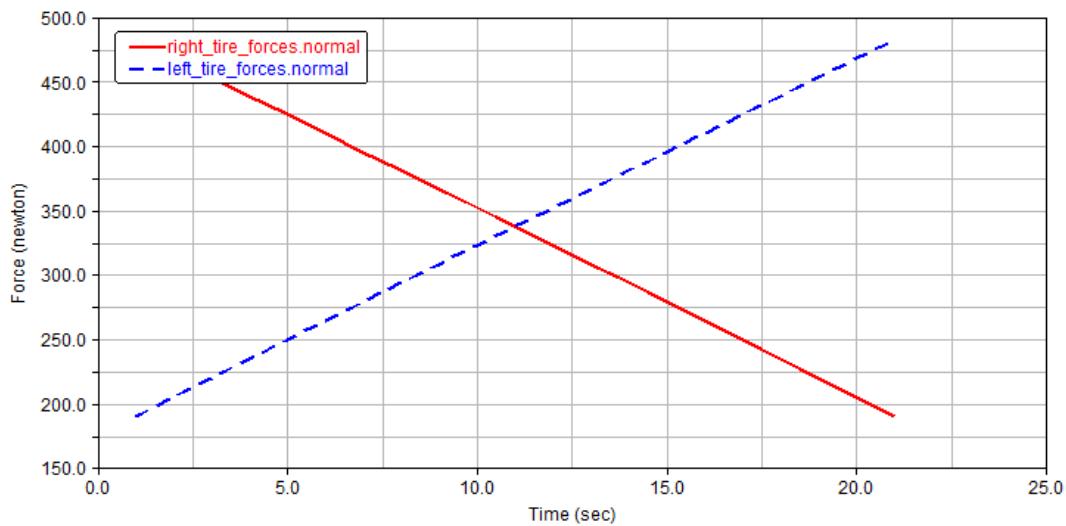


Figura 48 – Forças normais nos pneus.

### 8.3 Curva de raio constante

Na presente seção é simulada um curva de raio constante igual a 8m em que o veículo inicia o trajeto com aceleração lateral de  $0,5g$  e no fim apresenta  $1,1g$ . Abaixo são apresentados os modelos de veículo completo e de veículo em pista.

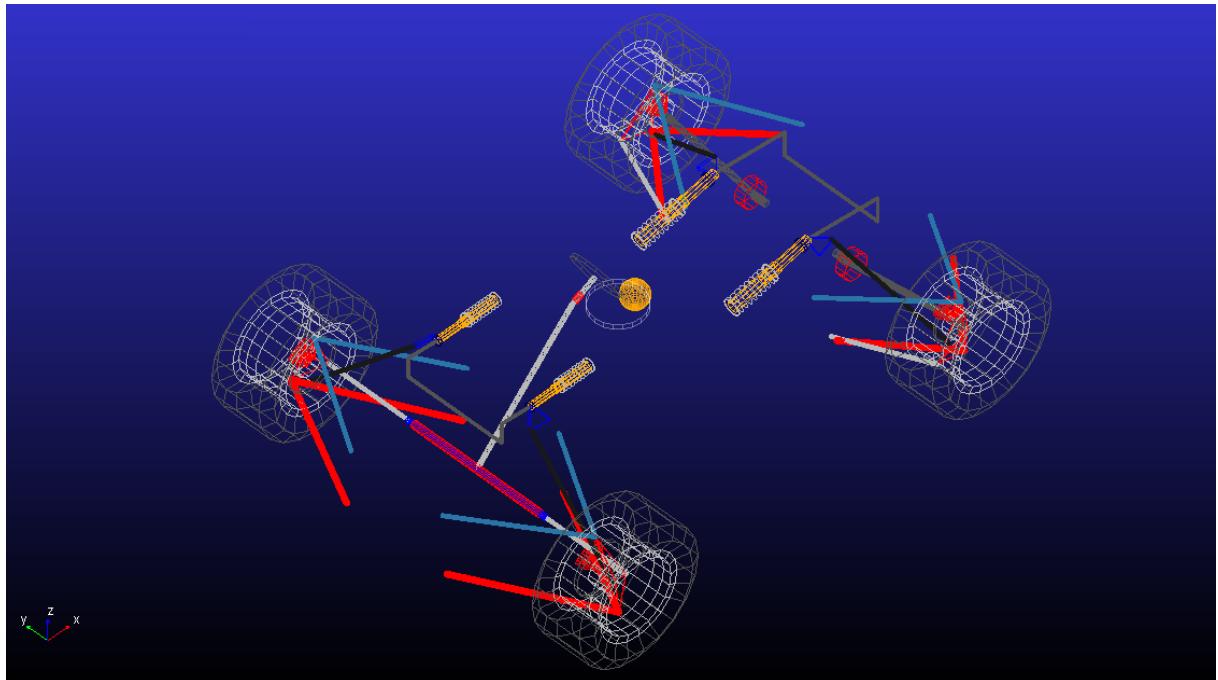


Figura 49 – Modelo de veículo completo em multicorpos.

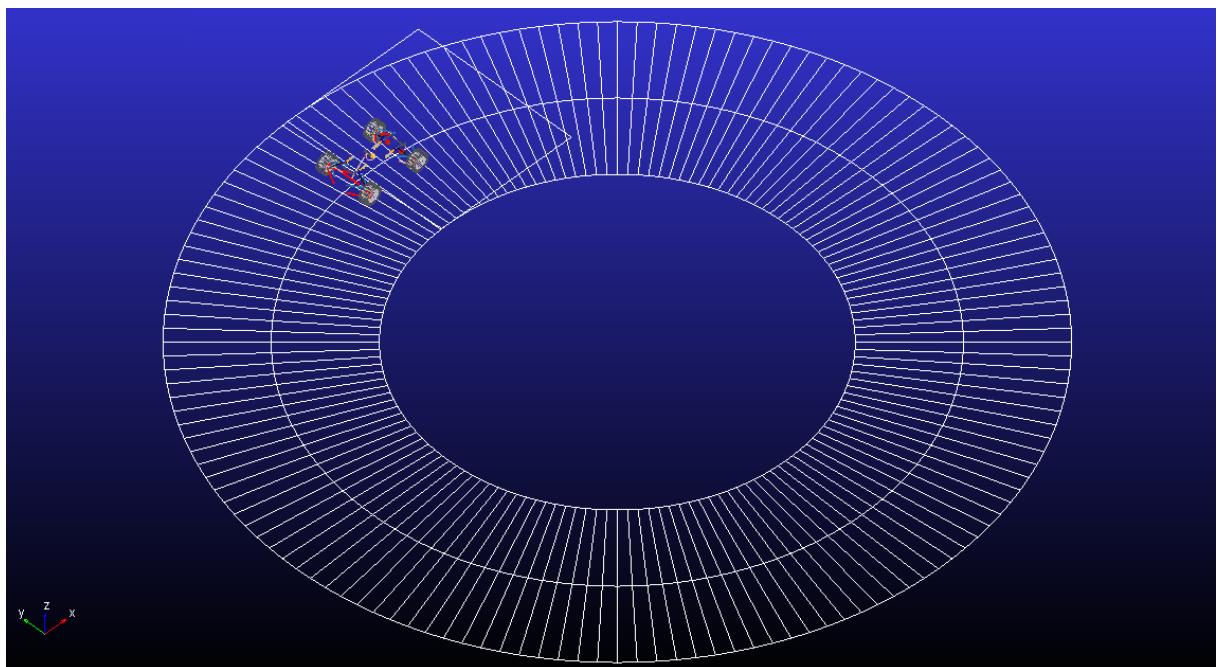


Figura 50 – Veículo em pista de raio constante igual a 8m.

Abaixo são apresentados os escorregamentos laterais dos pneus, sendo possível observar o momento em que há perda de aderência.

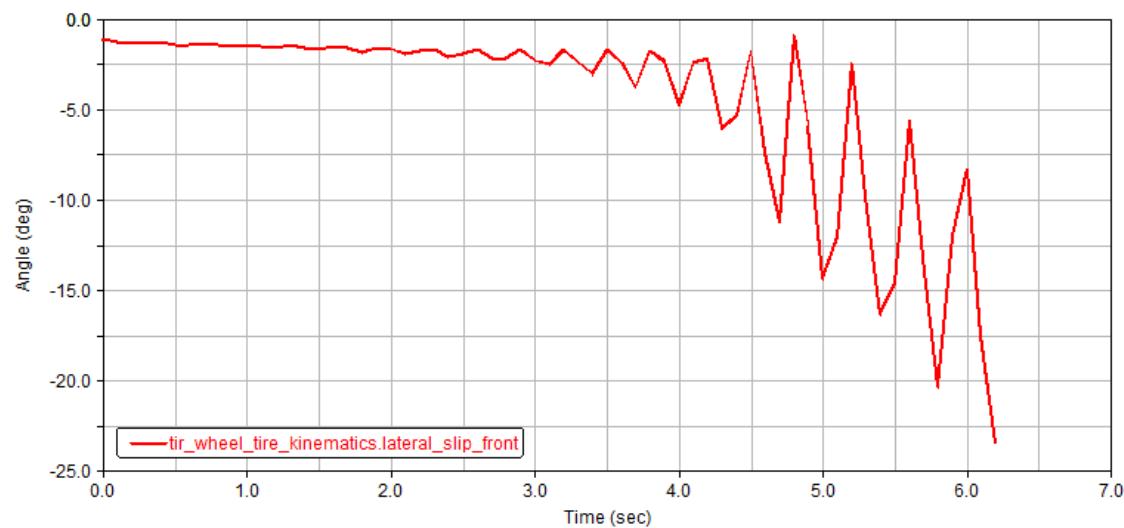


Figura 51 – Escorregamento lateral do eixo dianteiro.

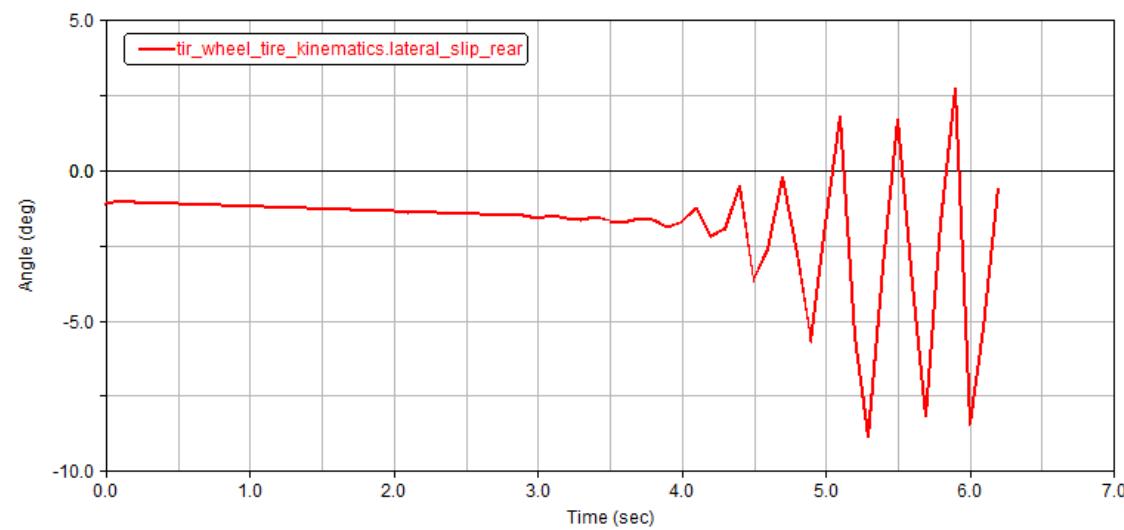


Figura 52 – Escorregamento lateral do eixo traseiro.

## 9 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram estudados dois modelos de meio veículo: em planta e no plano vertical lateral. Cada um desses modelos foi aprimorado com a introdução de componentes não lineares. Essas simulações permitiram a compreensão das dinâmicas dos movimentos estudados e da influência das não linearidades, assim como a limitação dos modelos. Embora sejam muitos simples, ambos modelos podem ser úteis à Equipe, tanto em caráter didático para seus membros, como em análise da influência de diferentes pneus e amortecedores.

Foram realizadas também simulações em multicorpos. As simulações mostraram-se coerentes, embora careçam de validação prática. Tal validação não foi possível devido à indisponibilidade do protótipo da equipe para testes. No entanto, considera-se que ter em mãos uma modelagem em multicorpos já representa um considerável avanço para a Equipe de Fórmula SAE da Escola Politécnica.

## 10 APÊNDICES

Nas páginas seguintes, nos apêndices de 1 a 5, são apresentados os códigos em MATLAB do processamento dos dados experimentais, da função que contém as equações do modelo em planta, do código utilizado na simulação dinâmica e roteiro dos testes de pneus (fornecido pelo próprio laboratório que os realizou), respectivamente. Por último é apresentado o diagrama de blocos em Simulink do modelo de meio veículo no plano vertical.

# APÊNDICE 1

Speed: 25 mph for all tests

Note: Below, “SA1” means “sweep  $\pm$  12 degrees ( $-4$  to  $+12$  to  $-12$  to  $+3$ ) @ 4deg/sec”

Spring rate at 0 mph: 0, 2 and 4 IA @ 12 psi (IA: inclination angle)

Spring rate at 25 mph: 0, 2 and 4 IA @ 12 psi

Cold to Hot test:  $\pm$ 12 deg SA @ 8 deg/sec, 0 IA, 250 lb, 12 psi --repeat 12 sweeps

Spring rate at 25 mph: 0, 2 and 4 IA @ 12 psi

Warmup:  $\pm$ 8 deg SA,  $\pm$ 4 deg IA for about 1 minute @ 250 lb, 12 psi

Pressure = 12, 10, 14, 8, 12 psi

Slip angle: SA1 @ 0 deg IA @ 250 lb (2 sweeps, conditioning)  
for Inclination angle = 0, 2, 4, 1, 3 deg.

for Load = 350, 150, 50, 250, 100

Slip angle: SA1

next Load

next Inclination angle

Spring rate at 25 mph: 0, 2 and 4 IA

Pause for data collection at the end of 14 psi (this marks the end of a “run”)

next Pressure

## APÊNDICE 2

```
% || Processamento de dados do Tire Test Consortium
% || Equipe Poli Racing de Formula SAE
% || Baseado no tutorial de Bill Cobb (william.a.cobb@gm.com)
% || Daniel Augusto de S. M. Monteiro (daniel.smmonteiro@gmail.com)

close all
clear all
clc

% Abre uma janela com os arquivos .dat da pasta indicada e permite
% a seleção de um deles

% SELECCIONAR ARQUIVO B1464run8
[filename pathname]= uigetfile('*.dat','Enter TIRF Test File', ...
'C:\Users\Daniel
Monteiro\Desktop\TTC\Round_5\Raw_Data_Cornering_ASCII_SI')

t = importdata([pathname filename])

names = t.textdata{2}
nchans = size(t.data,2)

% O numero abaixo varia dependendo de qual teste estamos processando
t.data(61459:89481,:)=[];
t.data(1:39133,:)=[];

for n=1:nchans
[name,names]=strtok(names);
eval(['upper(name) '=' t.data(:, num2str(n) ')']);
end

m = 1:length(SA);
sp = spline(m,SA+3.5);

z=fnzeros(sp); % localizações dos cruzamentos em zero
z=round(z(1,:));

figure('Name','Localização do Test Slip Sweep', 'NumberTitle','Off')
plot(m,SA,'r')

z([1:4:length(z)])=[]; % dispensa pontos desnecessários;

hold on
xlim([0 3200])
plot(z,zeros(length(z)), 'bo')
line([0 m(end)], [0 0], 'color', 'k')
xlabel('Contagem dos Pontos')
ylabel('Ângulo de Escorregamento')
legend('Dados do Teste', 'Pontos de interesse calculados'), legend
Boxoff

clear fmdata

q = 0;
```

```

for n=1:3:length(z) % atenção: pular testes repetidos
    sa=SA(z(n):z(n+2));
    fz=FZ(z(n):z(n+2));
    fy=FY(z(n):z(n+2));
    mz=MZ(z(n):z(n+2));
    mx=MX(z(n):z(n+2));
    rl=RL(z(n):z(n+2));
    ia=IA(z(n):z(n+2));

    [tmp,imn]=min(sa);
    [tmp,imx]=max(sa);
    p=1:length(sa);
    rng=imx-50:imx+50;

warning off

pp=polyfit(p(rng),mz(rng)',3);

warning on
mzf=polyval(pp,p(rng));

ind=find(abs(mzf-mz(rng)) > 7);
mz(rng(ind))=mzf(ind);
rng=imn-50:imn+50;
warning off
pp=polyfit(p(rng),mz(rng)',3);

warning on
mzf=polyval(pp,p(rng));
ind=find(abs(mzf-mz(rng)) > 7);
mz(rng(ind))=mzf(ind);

%% Spline fitting

sp_fy=csaps(sa,fy,.1);
sp_mz=csaps(sa,mz,.1);
sp_mx=csaps(sa,mx,.1);
sp_rl=csaps(sa,rl,.1);
%% Checagem
if isequal(n,16)

figure('Name',[upper(filename) ...
': Aligning Moment vs. Slip Angle & Vertical Load'], ...
'numbertitle','off')
subplot(3,1,1)
hold on
plot(sa,fy,'.', 'color',[.5 .5 .5])
fnplt(sp_fy,'b')
title({'[Fz= ' num2str(round(mean(fz))) ' N]; ... ...
[IA= ' num2str(round(mean(ia))) ' °]'});
xlabel('Slip Angle')
ylabel('Lateral Force')
line([min(sa) max(sa)], [0 0], 'color', 'k')
line([0 0], [min(fy) max(fy)], 'color', 'k')
legend('Test Data','Fitted Data')
subplot(3,1,2)
hold on
plot(sa,mz,'.', 'color',[.5 .5 .5])
fnplt(sp_mz,'b')
xlabel('Slip Angle')

```

```

ylabel('Aligning Moment')
line([min(sa) max(sa)], [0 0], 'color', 'k')
line([0 0], [min(mz) max(mz)], 'color', 'k')
subplot(3,1,3)
hold on
plot(sa,mx,'.', 'color', [.5 .5 .5])
fnplt(sp_mx,'b')
xlabel('Slip Angle')
ylabel('Overturning Moment')
line([min(sa) max(sa)], [0 0], 'color', 'k')
line([0 0], [min(mz) max(mz)], 'color', 'k')
end
for sl=floor(min(sa)):1:ceil(max(sa));
q=q+1;
fmdata(q,1)=sl;
fmdata(q,2)=round(mean(ia));
fmdata(q,3)=mean(fz);
fmdata(q,4)=fnval(sp_fy,sl);
fmdata(q,5)=fnval(sp_mz,sl);
fmdata(q,6)=fnval(sp_mx,sl);
end
fmdata = sortrows(fmdata,[2,1,3]);

incls = unique(round(fmdata(:,2)))'
nincls = length(incls)
slips = unique(round(fmdata(:,1)))'
nslips = length(slips)

inx0 = find(fmdata(:,2) == 0); % pontos de cambagem nula
fmdata0 = fmdata(inx0,:);

loads = mean(reshape(fmdata0(:,3),[],nslips),2)'
nloads = length(loads)

fz0 = reshape(fmdata0(:,3),nloads,nslips)';
fy0 = reshape(fmdata0(:,4),nloads,nslips)';
mz0 = reshape(fmdata0(:,5),nloads,nslips)';
mx0 = reshape(fmdata0(:,6),nloads,nslips)';

% FY normalizado
nfy0 = fy0./fz0

LATE_SLIP_VERT_10 = csaps({slips,loads},fy0,.9)
figure('Name',[upper(filename) ...
    ': Lateral Force vs. Slip Angle & Vertical Load'],'numbertitle','off')
fnplt(LATE_SLIP_VERT_10)
xlabel('Ângulo de Escorregamento (°)')
ylabel('Carga Vertical (N)')
zlabel('Força Lateral (N)')
view(45,45)

CS_10=fnder(LATE_SLIP_VERT_10,[1,0])
figure('Name',[upper(filename) ...
    ': Cornering Stiffness vs. Slip Angle & Vertical Load'], ...

```

```

'numbertitle','off')
fnplt(CS_10)
xlabel('Slip Angle (deg)')
ylabel('Vertical Load (N)')
zlabel('Cornering Stiffness (N/deg)')

NLATE_SLIP_VERT = csaps({slips,loads},nfy0)
figure('Name',[upper(filename) ...
': Load Normalized Lateral Force vs. Slip Angle & Vertical Load
'],...
'numbertitle','off')
fnplt(NLATE_SLIP_VERT)
xlabel('Slip Angle (deg)')
ylabel('Vertical Load (N)')
zlabel('Lateral Force (N)')
view(45,45)

NCS=fnder(NLATE_SLIP_VERT,[1,0])
figure('Name',[upper(filename) ...
': Normalized Cornering Stiffness vs. Slip Angle & Vertical Load
'],...
'numbertitle','off')
fnplt(NCS)
xlabel('Slip Angle (deg)')
ylabel('Vertical Load (N)')
zlabel('Normalized Cornering Stiffness (N/deg/N)')

ALNT_SLIP_VERT = csaps({slips,loads},mz0,.9)
figure('Name',[upper(filename) ...
': Aligning Moment vs. Slip Angle & Vertical Load '],...
'numbertitle','off')
fnplt(ALNT_SLIP_VERT)
xlabel('Slip Angle (deg)')
ylabel('Vertical Load (N)')
zlabel('Aligning Moment (Nm/deg)')

OVTM_SLIP_VERT = csaps({slips,loads},mx0,.9)
figure('Name',[upper(filename) ...
': Overturning Moment vs. Slip Angle & Vertical Load '],...
'numbertitle','off')
fnplt(OVTM_SLIP_VERT)
view(30,45)
xlabel('Slip Angle (deg)')
ylabel('Vertical Load (N)')
zlabel('Overturning Moment (Nm)')

PSCRUB_SLIP_VERT = csaps({slips,loads},1000*mx0./fz0,.9)
figure('Name',[upper(filename) ...
': Pneumatic Scrub vs. Slip Angle & Vertical Load '],...
'numbertitle','off')
fnplt(PSCRUB_SLIP_VERT)
view(30,45)
xlabel('Slip Angle (deg)')
ylabel('Vertical Load (N)')
zlabel('Pneumatic Scrub (mm)')

PTRAIL_SLIP_VERT = csaps({slips,loads},1000*mz0./fy0,.707)
figure('Name',[upper(filename) ...
': Pneumatic Trail vs. Slip Angle & Vertical Load '],...
'numbertitle','off')

```

```

fnplt(PTRAIL_SLIP_VERT)
view(30,45)
xlabel('Slip Angle (deg)')
ylabel('Vertical Load (N)')
zlabel('Pneumatic Trail (mm)')

inx0 = find(fmdata(:,1) == 0);
fmdata0 = fmdata(inx0,:);
loads = mean(reshape(fmdata0(:,3),[],nincls),2)';
nloads = length(loads)
fy0 = reshape(fmdata0(:,4),nloads,nincls)';
mz0 = reshape(fmdata0(:,5),nloads,nincls)';
mx0 = reshape(fmdata0(:,6),nloads,nincls)';

LATE_INCL_VERT = csaps({incls,loads},fy0,.9)
figure('Name',[upper(filename) ...
    ': Lateral Force vs. Camber Angle & Vertical Load '],...
    'numbertitle','off')
fnplt(LATE_INCL_VERT)
xlabel('Camber Angle (deg)')
ylabel('Vertical Load (N)')
zlabel('Lateral Force (N)')

ALNT_INCL_VERT = csaps({incls,loads},mz0,.9)
figure('Name',[upper(filename) ...
    ': Aligning Moment vs. Camber Angle & Vertical Load '],...
    'numbertitle','off')
fnplt(ALNT_INCL_VERT)
xlabel('Camber Angle (deg)')
ylabel('Vertical Load (N)')
zlabel('Aligning Moment (Nm)')

OVTM_INCL_VERT = csaps({incls,loads},mx0,.9)
figure('Name',[upper(filename) ...
    ': Overturning Moment vs. Camber Angle & Vertical Load '],...
    'numbertitle','off')
fnplt(OVTM_INCL_VERT)
xlabel('Camber Angle (deg)')
ylabel('Vertical Load (N)')
zlabel('Overturning Moment (Nm)')

```

## APÊNDICE 3

```
% Modelo de bicicleta clássico

function dy = bicicleta(m,Iz,a,b,vx,t,y)

% ----- Parâmetros da simulação -----
-- %
%FXf=0; % Força trativa na dianteira (N)
delta=estercamento(t); % Ângulo de esterçamento (rad)
Fd=disturbio(t); % Distúrbio lateral (N)
% -----
-- %

% ----- Modelo do pneu -----
-- %
Cf=-1000/(pi/180); % Rígidez ao esterçamento dianteira (N/rad)
Cr=-1000/(pi/180); % Rígidez ao esterçamento traseira (N/rad)

alfaf=delta-(y(1)+a*y(2))/vx; % Slip angle dianteiro
alfar=-(1/vx)*(y(1)-b*y(2)); % Slip angle traseiro

% y(1) = vy = velocidade de translação lateral (m/s)
% y(2) = wz = velocidade de guinada (rad/s)
FYf=-2*Cf*alfaf; % Regime linear - pneu dianteiro
FYr=-2*Cr*alfar; % Regime linear - pneu traseiro
% -----
-- %

% ----- Equações do modelo -----
-- %
dy = zeros(7,1);

% ---> Sistema de coordenadas solidário ao veículo
dy(1)=(1/m)*(FYr+FYf-m*vx*y(2)+Fd); % TMB em y
dy(2)=(1/Iz)*(a*FYf-b*FYr); % TMA em z
dy(3)=y(1); % y'=vy
dy(4)=y(2); % fi'=r
dy(5)=vx; % x'=vx
% ---> Sistema de coordenadas fixo no solo
dy(6)=vx*cos(y(4))+y(1)*sin(y(4)); % X
dy(7)=vx*sin(y(4))-y(1)*cos(y(4)); % Y
% -----
-- %

% ISO Lane Change

%{
function d = estercamento(t)
if t<=0.25
    d = 0;
elseif and(t>0.25,t<0.5)
    d=12*pi/180;
elseif and(t>0.5,t<0.75)
    d=-12*pi/180;
elseif and(t>0.75,t<1)
    d=0;
elseif and(t>1,t<1.25)
```

```

        d=-12*pi/180;
elseif and(t>1.25,t<1.5)
    d=12*pi/180;
else
    d=0;
end
%}

% Skip Pad raio constante

function d = estercamento(t)
if t<=0.2
    d = 0;
else
    d=pi/18;
end

function f = disturbio(t)
if t<4
    f = 0;
else
    f = 0;
end

```

## APÊNDICE 4

% Modelo de bicicleta clássico - Simulação dinâmica

```
clear all
close all
clc

% ----- Parâmetros do veículo 1 -----
-- %
m1=270;      % Massa do veículo + piloto (kg)
Iz1=65;       % Momento de inércia em z (kg.m^2)
a1=0.7625;    % Distância do CG ao eixo dianteiro
b1=0.7625;    % Distância do CG ao eixo traseiro
l1=a1+b1;     % Entre-eixos (m)
vx1=20;        % Velocidade longitudinal (m/s)
%
% ----- Parâmetros do veículo 2 -----
-- %
m2=270;      % Massa do veículo + piloto (kg)
Iz2=65;       % Momento de inércia em z (kg.m^2)
a2=0.9625;    % Distância do CG ao eixo dianteiro
b2=0.5625;    % Distância do CG ao eixo traseiro
l2=a2+b2;     % Entre-eixos (m)
vx2=20;        % Velocidade longitudinal (m/s)
%
% ----- Parâmetros de integração -----
-- %
t01=0;        % Instante inicial da integração - veículo 1 (s)
tf1=3.0;       % Instante final da integração - veículo 1 (s)
vy01=0;        % Velocidade lateral incial - veículo 1 (m/s)
wz01=0;        % Velocidade de guinada incial - veículo 1 (m/s)
y01=0;         % Posição inicial em y (ref. móvel) - veículo 1 (m)
fi01=0;        % Posição angular inicial (ref. móvel) - veículo 1 (rad)
x01=0;         % Posição inicial em x (ref. móvel) - veículo 1 (m)
X01=0;         % Posição inicial em X (ref. fixo) - veículo 1 (m)
Y01=0;         % Posição inicial em Y (ref. fixo) - veículo 1 (m)

t02=0;        % Instante inicial da integração - veículo 2 (s)
tf2=3.0;       % Instante final da integração - veículo 2 (s)
vy02=0;        % Velocidade lateral incial - veículo 2 (m/s)
wz02=0;        % Velocidade de guinada incial - veículo 2 (m/s)
y02=0;         % Posição inicial em y (ref. móvel) - veículo 2 (m)
fi02=0;        % Posição angular inicial (ref. móvel) - veículo 2 (rad)
x02=0;         % Posição inicial em x (ref. móvel) - veículo 2 (m)
X02=0;         % Posição inicial em X (ref. fixo) - veículo 2 (m)
Y02=0;         % Posição inicial em Y (ref. fixo) - veículo 2 (m)
%
% Sintaxe: [T,Y] = ode45(A, B, C);
% A - Sistema de EDOs a ser integrado
% B - Intervalo de integração
% C - Condições inciais [vy_0 wz_0]
```

```

[T1,Y1] = ode45(@(t,y) bicicleta(m1,Iz1,a1,b1,vx1,t,y),[t01 tf1],...
    [vy01 wz01 y01 fi01 x01 X01 Y01]);
[T2,Y2] = ode45(@(t,y) bicicleta(m2,Iz2,a2,b2,vx2,t,y),[t02 tf2],...
    [vy02 wz02 y02 fi02 x02 X02 Y02]);

dY1=diff(Y1(:,1))./diff(T1);
dY2=diff(Y2(:,1))./diff(T2);

figure
plot(T1,Y1(:,1),'b-',T2,Y2(:,1),'r-')
title('\fontsize{14}Velocidade lateral')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Velocidade lateral (m/s)')
legend('Veículo 1','Veículo 2')
grid

figure
plot(T1,Y1(:,2),'b-',T2,Y2(:,2),'r-')
title('\fontsize{14}Velocidade angular ')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Velocidade angular (rad/s)')
legend('Veículo 1','Veículo 2')
grid

T1(length(T1))=[];
T2(length(T2))=[];

figure
plot(T1,dY1,'b-',T2,dY2,'r-')
title('\fontsize{14}Aceleração Lateral Direta')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Aceleração lateral (m/s^2)')
legend('Veículo 1','Veículo 2')
grid

Y1(length(Y1),:)=[];
Y2(length(Y2),:)=[];

aY1=dY1+vx1*Y1(:,2);
aY2=dY2+vx2*Y2(:,2);

figure
plot(T1,aY1,'b-',T2,aY2,'r-')
title('\fontsize{14}Aceleração Lateral Total')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Aceleração lateral (m/s^2)')
legend('Veículo 1','Veículo 2')
grid

figure
plot(T1,Y1(:,4),'b-',T2,Y2(:,4),'r-')
title('\fontsize{14}Ângulo de guinada')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Ângulo de guinada (rad)')
legend('Veículo 1','Veículo 2')
grid

beta1=Y1(:,1)/vx1;

```

```

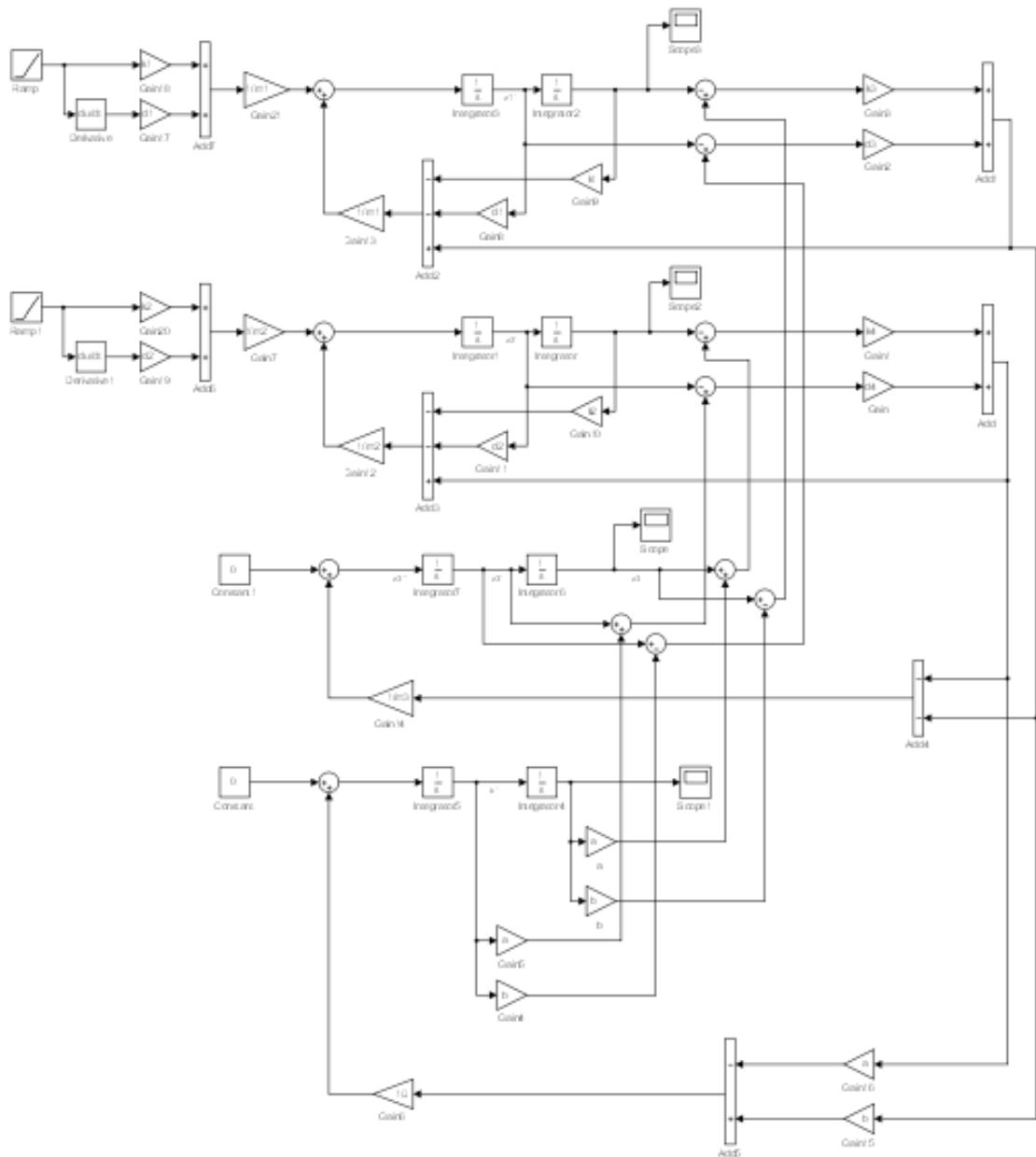
beta2=Y2 (:,1)/vx2;

figure
plot(T1,beta1,'b-',T2,beta2,'r-')
title('\fontsize{14}Sideslip angle')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Sideslip angle (rad)')
legend('Veículo 1','Veículo 2')
grid

figure('Name','Trajetória','NumberTitle','off')
plot(Y1(:,6),Y1(:,7),'b-',Y2(:,6),Y2(:,7),'g-')
axis equal
title('\fontsize{14}Trajetória')
xlabel('X (m)')
ylabel('Y (m)')
legend('Veículo 1','Veículo 2')

```

## APÊNDICE 5



## Referências

- GENTA, G. *Motor Vehicle Dynamics: Modeling and Simulation*. [s.n.], 1997. (Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences). ISBN 9789814497992. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=5wftCgAAQBAJ>>. 6, 18
- KASPRZAK, E. M.; GENTZ, D. The formula sae tire test consortium-tire testing and data handling. *SAE Technical Paper 2006-01-3606*, 2006. 13
- MILLIKEN, W.; MILLIKEN, D. *Race Car Vehicle Dynamics*. Society of Automotive Engineers, 1995. (R: Society of Automotive Engineers, v. 1). ISBN 9781560915263. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=opgHfQzlnLEC>>. 13
- PACEJKA, H. *Tire and Vehicle Dynamics*. Elsevier Science, 2005. ISBN 9780080543338. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=JCHDuED3WIkC>>. 6, 15, 16, 29
- RIEKERT, P.; SCHUNCK, T. E. Zur fahrmechanik des gummibereiften kraftfahrzeugs. *Ingenieur-Archiv*, v. 11, n. 3, p. 210–224, 1940. ISSN 1432-0681. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF02086921>>. 28