



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola Politécnica

PLATAFORMA ROBÓTICA PARA REABILITAÇÃO DO MEMBRO
SUPERIOR HUMANO

GUILHERME MARTINHO DOBRIANSKYJ
ANDRÉ GARNIER COUTINHO

São Paulo
2013

GUILHERME MARTINHO DOBRIANSKYJ
ANDRÉ GARNIER COUTINHO

**PLATAFORMA ROBÓTICA PARA REABILITAÇÃO DO MEMBRO
SUPERIOR HUMANO**

Monografia apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do Título de Bacharel em
Engenharia Mecatrônica

Orientador:
Prof. Dr. Tarcísio Antônio Hess-Coelho

São Paulo
2013

FICHA CATALOGRÁFICA

Dobrianskyj, Guilherme Martinho

Plataforma robótica para reabilitação do membro superior humano / G.M. Dobrianskyj, A.G. Coutinho. -- São Paulo, 2013.
68 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1. Membros superiores 2. Reabilitação 3. Robótica I. André Garnier Coutinho II. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II. t.

À nossas famílias, centro eterno de
confiança e paz.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à nossas famílias, pelo seu suporte incondicional em todas as nossas ações durante nossas vidas.

Agradecemos à nossos amigos, pela confiança e pelo auxílio prestado sempre que necessitamos.

Agradecemos ao Prof. Dr. Tarcisio Antonio Hess-Coelho, pelo extenso apoio e pela oportunidade de participar deste projeto.

Agradecemos aos doutorandos Vitor Hartmann e Renato Orsino, pela atenção e disposição por eles apresentado para o sucesso deste trabalho.

"Uma jornada de mil milhas deve começar por um único passo." - Lao Tzu.

"Nós somos aquilo que fazemos repetidas vezes. Logo, excelência não é uma ação, mas sim um hábito." - Aristóteles

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de uma estrutura de controle para a reabilitação do membro superior humano para pacientes com dificuldades motores, particularmente com aqueles que sofreram um Acidente Vascular Cerebral (AVC). Será apresentado um mecanismo de cadeia fechada de três graus de liberdade, cuja modelagem dinâmica é deduzida e utilizada nas estruturas de controle apresentadas. O acionamento será efetuado por três motores de corrente contínua, e *drivers* de acionamento para a obtenção dos sinais necessários para o controle (posição, velocidade e corrente). Em relação ao controle do sistema, é apresentado o controle por torque computado, utilizado para validação e testes, e o controle de impedância, estratégia escolhida para a reabilitação. Simulações do sistema foram feitas no *software* MATLAB e LabVIEW, sendo este último o escolhido para a aplicação no mecanismo real.

Palavras-chave: Reabilitação. Membro superior. Robô. Controle de impedância

ABSTRACT

The purpose of this study is the development of a robotic manipulator and the respective control scheme for the human upper limb rehabilitation to provide adequate therapy for patients with motor disabilities, particularly those affected with a stroke. It will be presented a parallel mechanism with three degrees of freedom, whose dynamic model will be deduced and utilized in the control scheme. The actuation will be made with three CC motors, connected with drivers for the correct control and data acquisition (position, velocity and current). About the control scheme, the computed-torque control is used for validation and implementation of the mathematical modeling. Then, the impedance control scheme is chosen for the therapy. Simulations are made using the MATLAB and LabVIEW software, being the latter the chosen for the application on the mechanism.

Keywords: Rehabilitation. Upper limb. Robot. Impedance control

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Foto do mecanismo construído.....	17
Figura 2 - Modelo dinâmico do mecanismo anteriormente apresentado	17
Figura 3 - Semelhança de triângulos utilizada	26
Figura 4 - Arquitetura final do sistema	35
Figura 5 - Circuito Elétrico do Motor CC.....	38
Figura 6 - Diagrama de blocos da malha de controle dos motores.....	40
Figura 7 - Resposta a degrau unitário do sistema em malha fechada	43
Figura 8 - Diagrama de Bode do sistema em malha aberta.....	44
Figura 9 - Resposta da planta a um distúrbio degrau unitário (1Nm).....	45
Figura 10 - Resposta do sistema em malha fechada referente a um distúrbio (degrau unitário de 1Nm).....	46
Figura 11 - Estrutura de comunicação	47
Figura 12 - Programa-teste desenvolvido no LabVIEW.....	48
Figura 13 - Sistema de controle utilizado.....	50
Figura 14 - Malha de Controle de Impedância.....	51
Figura 15 - Resultado da simulação nos eixos X e Y, utilizando a malha de controle por torque computado (utilizando o <i>software</i> LabVIEW)	55
Figura 16 - Resultado da simulação nos três eixos de deslocamento, utilizando a malha de controle por torque computado (utilizando o <i>software</i> LabVIEW)	56
Figura 17 - Simulação com movimento nos três eixos, com novo ganho K_p	57
Figura 18 - Simulação com movimento nos três eixos, com novo ganho K_p	58
Figura 19 - Trajetória realizada na coordenada x	60
Figura 20 - Trajetória realizada na coordenada y	60
Figura 21 - Trajetória realizada na coordenada z	61
Figura 22 - Variação da força a ser feita pelo usuário	62
Figura 23 – Variação da força a ser aplicada pelo usuário, com restrição no valor máximo (1 N).....	63

Figura 24 - Variação da força a ser aplicada pelo usuário, com K_{py} e K_{vy} duas vezes maiores	64
Figura 25 – Variação da força a ser aplicada pelo usuário, com K_{py} e K_{vy} quatro vezes maiores	64
Figura 26 – Força em Newtons a ser aplicada pelo usuário, para $yd = 0$	65
Figura 27 – Força em Newtons a ser aplicada pelo usuário para $yd = 0,100m$	66
Figura 28 – Força em Newtons a ser aplicada pelo usuário para $yd = 0,200m$	66
Figura 29 – Força em Newtons a ser aplicada pelo usuário para $xd = 0$	67
Figura 30 - Força em Newtons a ser aplicada pelo usuário para $xd = 0,100m$	68
Figura 31 - Força em Newtons a ser aplicada pelo usuário para $xd = 0,200m$	68

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	13
2.	ESTADO DA ARTE.....	14
3.	DESENVOLVIMENTO	16
3.1	Sistema para Reabilitação	16
3.1.1.	Mecanismo (estrutura mecânica)	16
3.1.1.1.	Descrição.....	16
3.1.1.2.	Modelagem.....	18
3.1.1.2.1.	Análise Cinemática.....	19
3.1.1.2.2.	Modelo Dinâmico	23
3.1.2.	Acionamento do mecanismo: Motores e Microcontroladores	35
3.1.2.1.	Descrição.....	35
3.1.2.2.	Modelagem.....	38
3.2	Rede de Comunicação	46
3.3	Controle do Mecanismo.....	48
3.3.1.	Controle por Torque Computado	49
3.3.2.	Controle de Impedância.....	51
3.4	Simulações	54
3.4.1.	Controle por Torque Computado	54
3.4.2.	Controle de Impedância.....	58
4.	DISCUSSÕES	69
5.	CONCLUSÕES	70
6.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	71

1. INTRODUÇÃO

Estima-se que, a cada ano, 15 milhões de pessoas sofrem um Acidente Vascular Cerebral (AVC). Aproximadamente 6 milhões morrem e outros 5 milhões sofrem com sérias seqüelas permanentes. O AVC, ou derrame, é a segunda causa principal de deficiências, atrás de demência. Estas deficiências podem ser perda de visão e/ou fala, paralisia ou confusão (World Heart Federation, 2013). Das pessoas que sobrevivem a um AVC, 10% se recuperam totalmente. 25% sofrem com leves seqüelas, 40% com graves seqüelas, 10% necessitam de extensos cuidados especiais e 15% falecem logo após o derrame (University Hospital, 2013).

Nos casos de dificuldades motoras, a terapia utilizada para a reabilitação é a fisioterapia. Esta prática requer que um profissional esteja sempre presente, para garantir que o paciente siga as especificações da terapia, seja na força necessária a ser aplicada como nos movimentos a serem feitos. A utilização de mecanismos robóticos é uma das técnicas de reabilitação que vem sendo utilizadas, já que possuem excelente repetição, maior intensidade e maior duração comparada com os métodos convencionais (Dietz *et al*, 2012).

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento e implementação de um mecanismo robótico, de estrutura paralela, juntamente com sua estrutura de controle que permita a correta implementação dos movimentos previstos em terapias de reabilitação. Juntamente com o mecanismo, também serão projetados o *hardware* que será utilizado (acionamentos e microcontroladores) assim como o *software* a ser implementado.

No Capítulo 2, é apresentado o estado da arte (“*state of the art*”) sobre mecanismos robóticos. No Capítulo 3, apresentam-se os principais sistemas que compõem o mecanismo robótico: a parte mecânica com a modelagem dinâmica, os acionamentos (e sua modelagem matemática) e microcontroladores utilizados no sistema, estruturas de controle possíveis para o mecanismo, e por fim apresenta-se simulações utilizando os conceitos previamente apresentados. A discussão dos resultados obtidos com simulações é apresentada no Capítulo 4. Por fim, o Capítulo 5 apresenta as conclusões alcançadas com este trabalho e o Capítulo 6 lista as referências bibliográficas utilizadas no trabalho.

2. ESTADO DA ARTE

A fisioterapia é a principal forma de tratamento para a perda motora derivada de um Acidente Vascular Cerebral (AVC). Ela consiste em exercícios repetitivos, em que a experiência dos terapeutas possui influência significativa (Hess-Coelho *et al*, 2012). Além disto, é necessária a atenção constante do terapeuta na fisioterapia, já que ela precisa coordenarativamente o movimento do paciente. Manipuladores robóticos possuem as qualidades descritas aqui, sendo potenciais auxiliadores nestas funções. O MIT-MANUS, concebido em 1992, é um mecanismo de cadeia aberta com dois graus de liberdade desenvolvido pelo Massachusetts Institute of Technology (Hogan *et al*, 1992). Ele foi utilizado com sucesso em pacientes que sofreram AVC, obtendo melhora moderada nos movimentos do membro superior.

Outro mecanismo, o MIME (*Mirror Image Movement Enabler*), apresentado em 2000, também é utilizado em pacientes que sofreram um AVC (Burgar *et al*, 2000). Porém, a diferença reside em sua abordagem. O MIT-MANUS realiza as atividades no membro afetado mostrando por intermédio de um monitor que apresenta uma trajetória a ser seguida. Já o MIME reproduz os movimentos do membro sadio no membro afetado (isto é chamado de treinamento bilateral). Estudos de caso também demonstraram que houve melhora nos pacientes submetidos a tratamentos com este mecanismo.

Pode ser citado também o GENTLE/S, mecanismo com 6 graus de liberdade ativos e 3 graus de liberdades passivos (P. van de Hel *et al*, 2001). Assim como os outros mecanismos, também é utilizado em pacientes que sofreram algum dano cerebral que reflita em dificuldades motoras. Os estudos de caso utilizando este mecanismo também concluem que o mecanismo robótico auxilia na reabilitação dos pacientes.

Outro mecanismo desenvolvido é o ARMin. Este mecanismo é um semi-exoesqueleto, onde o cotovelo é acionado pela parte do exoesqueleto e o ombro é movido pelo efetuador do mecanismo. Este trabalho também utiliza um controle de impedância para garantir de que a terapia seja executada de acordo com o esperado (NEF *et al*, 2006). Este trabalho foi expandido, e foi a base para o desenvolvimento de mecanismos comerciais fabricado pela empresa Hocoma. Testes clínicos comprovaram a eficácia da utilização deste mecanismo.

Em relação às estratégias de controle, o controle de impedância ou o controle por admittance são em geral as mais utilizadas, visto que a interação com o ambiente é o foco da modelagem. Também são utilizados controle de lógica Fuzzy, visto que este controle permite boa aderência a controle não-linear e sistemas com incertezas (MING-SHAUNG *et al*, 2005).

3. DESENVOLVIMENTO

3.1 Sistema para Reabilitação

Neste tópico, é apresentado o sistema a ser utilizado para a reabilitação do membro superior. Primeiramente é apresentada a estrutura mecânica, seus graus de liberdade e limitações, assim como sua modelagem dinâmica. Também são apresentados seus acionamentos, responsáveis por possibilitar que os parâmetros desejados para a reabilitação sejam alcançados e mantidos durante toda a terapia, seguidos pela modelagem matemática correspondente.

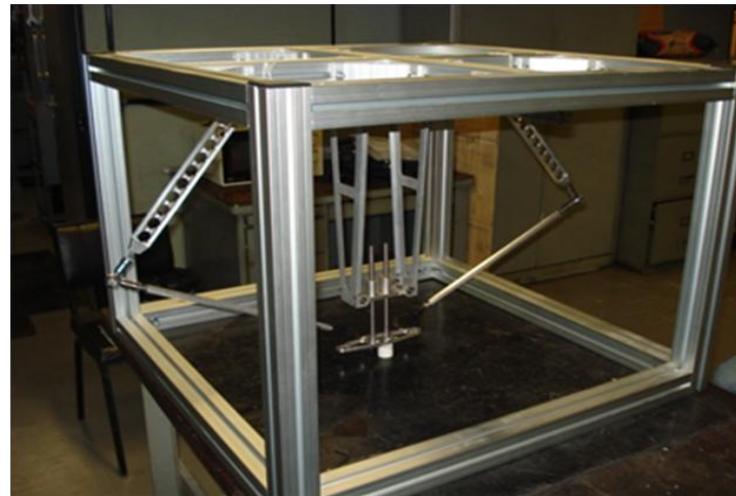
3.1.1. Mecanismo (estrutura mecânica)

3.1.1.1. Descrição

Mecanismos de reabilitação baseados no movimento do efetuador (“*end-effector*”) são uma alternativa para a realização das terapias necessárias. Mecanismos de cadeia aberta, como o MIT-MANUS e MIME, apresentados anteriormente, são particularmente utilizados, por sua facilidade na obtenção das características dinâmicas do mecanismo (Cinemáticas Direta e Inversa). Por outro lado, como os acionamentos ficam acoplados nas juntas do mecanismo, a inércia destes acionamentos é acrescida na inércia do mecanismo em si. Mecanismos de cadeia fechada de bases paralelas não possuem esta desvantagem, já que os atuadores ficam fixos em uma base. Além disso, por conta da cadeia fechada, há uma melhor distribuição de torques nos atuadores, visto que todos possuem certa contribuição para o movimento do efetuador. Visto isso, foi escolhido um mecanismo de cadeia fechada de bases paralelas para executar a reabilitação. O menor espaço de trabalho associado a este tipo de mecanismo não incorre em grandes problemas, já que não são necessários grandes cursos de movimento.

Graças a trabalhos do grupo de pesquisa coordenado pelo Prof. Dr. Tarcisio Antonio Hess-Coelho (Hess-Coelho *et al*, 2012), possui-se um mecanismo com a arquitetura cinemática já validada. Assim, prosseguiu-se para a elaboração do modelo dinâmico do mecanismo. O mecanismo utilizado é um mecanismo de estruturas paralelas com três graus de liberdade, apresentado na Figura 1.

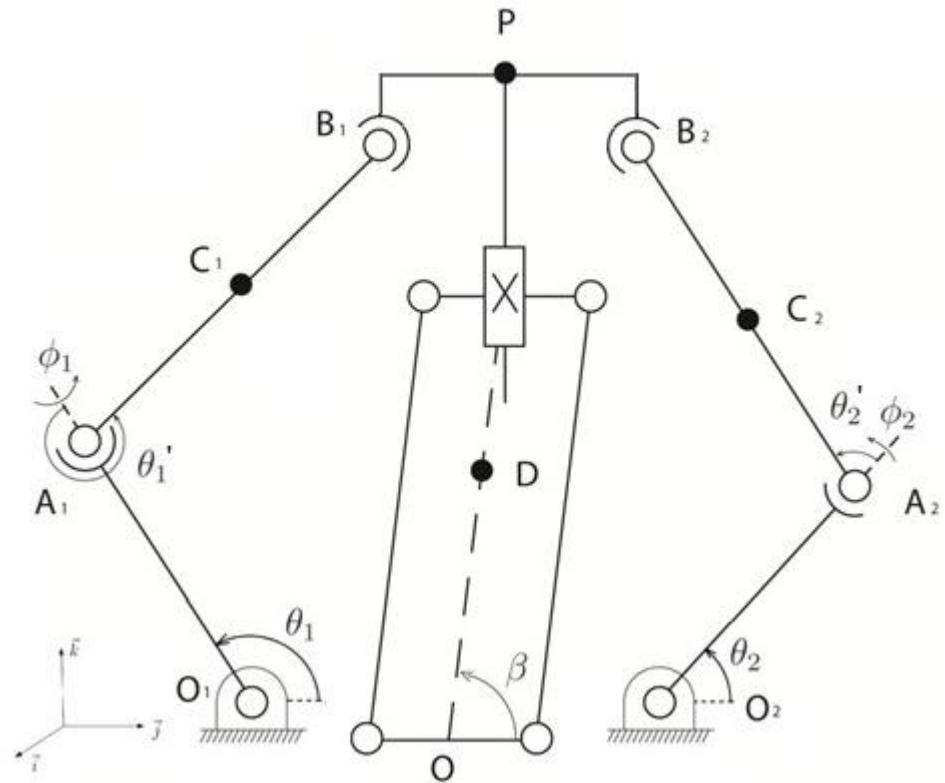
Figura 1 - Foto do mecanismo construído.



Fonte: Hess-Coelho *et al*, 2012

O modelo dinâmico pode ser representado como na Figura 2.

Figura 2 - Modelo dinâmico do mecanismo anteriormente apresentado



Fonte: Própria

Existem uma série de vantagens em utilizar mecanismos de cadeia cinemática paralela em vez dos tradicionais mecanismos seriais. Dentro delas podemos citar sua grande capacidade de carga, alta precisão de posicionamento do efetuador e uma redução significativa na inércia. Outra característica marcante desse tipo de arquitetura são as altas velocidades e aceleração atingidas, as quais superar muito os valores máximos atingidos utilizando arquitetura serial. Grande parte dessas vantagens se devem à possibilidade de ter todos os motores localizados na base. Como desvantagens podemos citar o menor espaço de trabalho e modelo dinâmico muito mais complexo e difícil de se obter.

Devido à grande dificuldade de se obter o modelo dinâmico completo de mecanismos paralelos, muitos pesquisadores preferem utilizar mecanismos seriais para realizar tarefas de reabilitação, pois é necessário um conhecimento detalhado do comportamento dinâmico do mecanismo utilizado para poder controlar as forças de interação entre o mecanismo e o paciente.

Graças ao novos métodos para modelagem de dinâmica multicorpos desenvolvidos pelo doutorando Renato Orsino, também orientado pelo professor Tarcísio Coelho, é possível obter modelos dinâmicos de sistemas extremamente complexos sem grandes dificuldades. Sendo assim, a única desvantagem de utilizar mecanismos paralelos em nosso trabalho poderia ser seu menor espaço de trabalho, porém para realizar exercícios fisioterapêuticos não necessitam de grande cursos. Desta maneira, podemos concluir que, apesar de ainda não serem muito utilizados para este tipo de aplicação, o uso de mecanismo paralelos é justificável e pode ser muito vantajoso para a realizar exercícios voltados à reabilitação.

3.1.1.2. Modelagem

Para a obtenção do modelo dinâmico do mecanismo, será necessária, primeiramente, que a análise cinemática do mecanismo seja realizada. Esta análise é feita para que seja possível encontrar a posição, velocidade e aceleração da plataforma, dada a posição, velocidade e aceleração dos atuadores, e também resolver o problema inverso.

3.1.1.2.1. Análise Cinemática

Pode-se dividir esta análise nos seguintes passos: Cinemática de Posição, Cinemática Inversa, Cinemática Direta, Cinemática de Velocidades e Cinemática de Acelerações.

- Cinemática de Posição

O objetivo da cinemática de posição é encontrar a relação entre as coordenadas $X = (x_p, y_p, z_p)$, da plataforma, e as coordenadas $\theta = (\theta_1, \theta_2, x^*)$, dos atuadores.

Abaixo seguem as coordenadas dos pontos $O_1, A_1, B_1, O_2, A_2, B_2$ e P em relação à base

O_{xyz} :

$$\begin{array}{ll} O_1\left(0, -\frac{b}{2}, h_1\right) & O_2\left(0, \frac{b}{2}, h_1\right) \\ A_1\left(0, -\frac{b}{2} + l_1 c\theta_1, h_1 + l_1 s\theta_1\right) & A_2\left(0, \frac{b}{2} + l_1 c\theta_2, h_1 + l_1 s\theta_2\right) \\ B_1\left(x_p, y_p - \frac{l}{2}, z_p - d\right) & B_2\left(x_p, y_p + \frac{l}{2}, z_p - d\right) \\ P(x_p, y_p, z_p) \end{array}$$

Utilizando as seguintes restrições geométricas, temos:

$$\|B_1 - A_1\|^2 = l_2^2 \Rightarrow x_p^2 + (y_p + \frac{b-l}{2} - l_1 c\theta_1)^2 + (z_p - l_1 s\theta_1 - d - h_1)^2 = l_2^2 \quad (1)$$

$$\|B_2 - A_2\|^2 = l_2^2 \Rightarrow x_p^2 + (y_p + \frac{l-b}{2} - l_1 c\theta_2)^2 + (z_p - l_2 s\theta_2 - d - h_1)^2 = l_2^2 \quad (2)$$

$$x_p = x^* \quad (3)$$

Reescrevendo como um sistema:

$$\begin{cases} x_p^2 + (y_p + \frac{b-l}{2} - l_1 c\theta_1)^2 + (z_p - l_1 s\theta_1 - d - h_1)^2 = l_2^2 \\ x_p^2 + (y_p + \frac{l-b}{2} - l_1 c\theta_2)^2 + (z_p - l_2 s\theta_2 - d - h_1)^2 = l_2^2 \\ x_p = x^* \end{cases}$$

- Cinemática Inversa

Supondo conhecidas as coordenadas X , deve-se encontrar as coordenadas θ .

Assim, desenvolvendo a equação (1):

$$\begin{aligned} x_p^2 + \left(y_p + \frac{b-l}{2}\right)^2 + l_1 c^2 \theta_1 - 2l_1 c \theta_1 \left(y_p - \frac{b-l}{2}\right) + \left(z_p - d - h_1\right)^2 + l_1^2 s^2 \theta_1 - 2l_1 s \theta_1 \left(z_p - d - h_1\right) &= l_2^2 \\ c \theta_1 \left[-2l_1 \left(y_p + \frac{b-l}{2}\right)\right] + s \theta_1 \left[-2l_1 \left(z_p - d - h_1\right)\right] + x_p^2 + \left(y_p + \frac{b-l}{2}\right)^2 + \left(z_p - d - h_1\right)^2 + l_1^2 - l_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

(4)

Obtemos uma equação no formato:

$$E_1 \cos \theta_1 + F_1 \sin \theta_1 + G_1 = 0 \quad (5)$$

Sendo:

$$\begin{cases} E_1 = -2l_1(y_p + \frac{b-l}{2}) \\ F_1 = -2l_1(z_p - d - h_1) \\ G_1 = x_p^2 + (y_p + \frac{b-l}{2})^2 + (z_p - d - h_1)^2 + l_1^2 - l_2^2 \end{cases} \quad (6)$$

Esta equação pode ser resolvida analiticamente, utilizando a mudança de variável $u = \tan \frac{\theta}{2}$:

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) &= u \Rightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = u \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= u^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow 1 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = u^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \therefore \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{1}{1+u^2} \\ \cos \theta &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ \tan \theta &= \frac{2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2u}{1-u^2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{2u}{1-u^2} \cos \theta = \frac{2u}{1+u^2} \\ E \frac{1-u^2}{1+u^2} + F \frac{2u}{1+u^2} + G &= 0 \Rightarrow (G-E)u^2 + (2F)u + (G+E) = 0 \\ G = E &\Rightarrow u = -\frac{F}{E} \\ G \neq E &\Rightarrow \Delta = 4F^2 - 4(G-E)(G+E) = 4(E^2 + F^2 - G^2) \\ u &= \frac{-2F \pm 2\sqrt{E^2 + F^2 - G^2}}{2(G-E)} = \frac{-F \pm \sqrt{E^2 + F^2 - G^2}}{G-E} \end{aligned}$$

Sendo assim, para montagem do mecanismo conforme a Figura 3, obtemos:

$$\theta_1 = \begin{cases} 2 \arctan\left(\frac{-F_1 + \sqrt{E_1^2 + F_1^2 - G_1^2}}{G_1 - E_1}\right), G_1 \neq E_1 \\ 2 \arctan\left(-\frac{E_1}{F_1}\right), G_1 = E_1 \end{cases} \quad (7)$$

Para a eq. (2), o procedimento é análogo, resultando em:

$$\theta_2 = \begin{cases} 2 \arctan \left(\frac{-F_2 + \sqrt{E_2^2 + F_2^2 - G_2^2}}{G_2 - E_2} \right), & G_2 \neq E_2 \\ 2 \arctan \left(-\frac{E_2}{F_2} \right), & G_2 = E_2 \end{cases} \quad (8)$$

Sendo:

$$\begin{cases} E_2 = -2l_1(y_p + \frac{l-b}{2}) \\ F_2 = -2l_1(z_p - d - h_1) \\ G_2 = x_p^2 + (y_p + \frac{l-b}{2})^2 + (z_p - d - h_1)^2 + l_1^2 - l_2^2 \end{cases} \quad (9)$$

- Cinemática Direta

Supondo conhecidas as coordenadas θ , deve-se encontrar as coordenadas X .

Podemos reescrever as equações (1) e (2) da seguinte forma:

$$\begin{cases} (y_p - y_{c1})^2 + (z_p - z_{c1})^2 = r^2 \\ (y_p - y_{c2})^2 + (z_p - z_{c2})^2 = r^2 \end{cases}$$

Sendo:

$$\begin{cases} y_{c1} = l_1 c \theta_1 - \frac{b-l}{2} \\ y_{c2} = l_1 c \theta_2 - \frac{l-b}{2} \\ z_{c1} = l_1 s \theta_1 + d + h_1 \\ z_{c2} = l_1 s \theta_2 + d + h_1 \\ r^2 = l_2^2 - x_p^2 \end{cases} \quad (10)$$

Assim, podemos enxergar as equações (1) e (2) como a intersecção de duas circunferências de raio r . Desta maneira, pode-se dizer que a solução está contida na reta que passa pelo ponto médio dos centros das circunferências, ortogonal à reta que passa pelos dois centros.

Definindo:

$$\begin{cases} y_m = \frac{y_{c1} + y_{c2}}{2} \\ z_m = \frac{z_{c1} + z_{c2}}{2} \\ dy = y_{c2} - y_{c1} \\ dz = z_{c2} - z_{c1} \end{cases} \quad (11)$$

A equação desta reta na forma vetorial é dada por:

$$(y_p, z_p) = (y_m, z_m) + \lambda(-dz, dy), \lambda \in \mathbb{R}$$

Ou seja:

$$\begin{cases} y_p = y_m - \lambda dz \\ z_p = z_m + \lambda dy \end{cases} \quad (12)$$

Substituindo (12) em (1):

$$\begin{aligned}
 (y_m - \lambda dz - y_{c_1})^2 + (z_m + \lambda dy - z_{c_1})^2 &= r^2 \\
 \left(\frac{dy}{2} - \lambda dz\right)^2 + \left(\frac{dz}{2} + \lambda dy\right)^2 &= r^2 \\
 \frac{dy^2}{4} - \lambda dy dz + \lambda^2 dz^2 + \frac{dz^2}{4} + \lambda dy dz + \lambda^2 dy^2 &= r^2 \\
 \lambda^2(dy^2 + dz^2) &= r^2 - \frac{dy^2 + dz^2}{4} \\
 \therefore \lambda &= \pm \sqrt{\frac{r^2}{dy^2 + dz^2} - \frac{1}{4}}
 \end{aligned}$$

Sendo assim, para montagem do mecanismo conforme a Figura 2, obtemos:

$$y_p = y_m - dz \sqrt{\frac{r^2}{dy^2 + dz^2} - \frac{1}{4}} \quad (13)$$

$$z_p = z_m + dy \sqrt{\frac{r^2}{dy^2 + dz^2} - \frac{1}{4}} \quad (14)$$

- Cinemática de Velocidades

Com o problema de posição resolvido, podemos facilmente resolver os problemas de velocidades. Assim, derivando as equações de posição (eq. (1), eq. (2) e eq. (3)), temos:

$$\begin{cases} 2x_p \dot{x}_p + 2(y_p + \frac{b-l}{2} - l_1 c \theta_1)(\dot{y}_p + l_1 s \theta_1 \dot{\theta}_1) + 2(z_p - l_1 s \theta_1 - d - h_1)(\dot{z}_p - l_1 c \theta_1 \dot{\theta}_1) = 0 \\ 2x_p \dot{x}_p + 2(y_p + \frac{l-b}{2} - l_1 c \theta_2)(\dot{y}_p + l_1 s \theta_2 \dot{\theta}_2) + 2(z_p - l_1 s \theta_2 - d - h_1)(\dot{z}_p - l_1 c \theta_2 \dot{\theta}_2) = 0 \\ \dot{x}_p - \dot{x}^* = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Podemos reescrever essas equações como:

$$J_x \dot{X} + J_\theta \dot{\theta} = 0 \quad (16)$$

Sendo:

$$J_x = \begin{bmatrix} x_p & y_p + \frac{b-l}{2} - l_1 c \theta_1 & z_p - l_1 s \theta_1 - d - h_1 \\ x_p & y_p + \frac{l-b}{2} - l_1 c \theta_2 & z_p - l_1 s \theta_2 - d - h_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$J_\theta = \begin{bmatrix} l_1[(y_p + \frac{b-l}{2})s\theta_1 - (z_p - d - h_1)c\theta_1] & 0 & 0 \\ 0 & l_1[(y_p + \frac{l-b}{2})s\theta_2 - (z_p - d - h_1)c\theta_2] & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Desta maneira conhecendo X pode-se determinar θ (cinemática inversa) ou conhecendo θ pode-se determinar X (cinemática direta).

- Cinemática de Acelerações

Derivando a equação (16), obtemos:

$$\dot{J}_x \dot{X} + J_x \ddot{X} + \dot{J}_\theta \dot{\theta} + J_\theta \ddot{\theta} = 0 \quad (19)$$

Sendo:

$$\dot{J}_x = \begin{bmatrix} \dot{x}_p & \dot{y}_p + l_1 s\theta_1 \dot{\theta}_1 & \dot{z}_p - l_1 c\theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{x}_p & \dot{y}_p + l_1 s\theta_2 \dot{\theta}_2 & \dot{z}_p - l_1 c\theta_2 \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\dot{J}_\theta = \begin{bmatrix} l_1 \{ \dot{y}_p s\theta_1 + [(y_p + \frac{b-l}{2}) c\theta_1 + (z_p - d - h_1) s\theta_1] \dot{\theta}_1 - \dot{z}_p c\theta_1 \} & 0 & 0 \\ 0 & l_1 \{ \dot{y}_p s\theta_2 + [(y_p + \frac{l-b}{2}) c\theta_2 + (z_p - d - h_1) s\theta_2] \dot{\theta}_2 - \dot{z}_p c\theta_2 \} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Como as coordenadas dos atuadores (θ) e da plataforma (X) e suas respectivas derivadas temporais já foram determinadas anteriormente, conhecendo X pode-se determinar θ ou conhecendo θ pode-se determinar X .

3.1.1.2.2. Modelo Dinâmico

Para chegarmos ao modelo dinâmico do mecanismo, utilizaremos um aperfeiçoamento do método de Lagrange, desenvolvido pelo doutorando Renato Orsino (Orsino, 2012).

Primeiro definimos um conjunto de variáveis convenientes para o cálculo da energia cinética do mecanismo, podendo este conjunto conter variáveis redundantes. O conjunto de variáveis adotado neste caso são os 7 ângulos, sendo 5 deles representados na figura, as coordenadas dos centros de massa das barras A_1B_1 e A_2B_2 (C_1 e C_2), do paralelogramo (D), e da plataforma (P), em relação à base O_{xyz} , sendo os eixos x, y e z paralelos a i , j e k , respectivamente, e O o ponto médio de O_1 e O_2 somado a um desnível $-h_1$ em z. Na dedução das equações também iremos considerar um desnível h_2 em z do centro da base do paralelogramo em relação ao ponto O, o qual não está representado na Figura 3.

Realizaremos as seguintes etapas para obter o modelo dinâmico do mecanismo:

- Cinemática de Posição das coordenadas redundantes
 - Determinação dos Jacobianos e suas Derivadas (considerando todas as coordenadas)
 - Derivação das Equações de Lagrange com multiplicadores
 - Eliminação dos multiplicadores
- Cinemática de Posição das coordenadas redundantes

Com a cinemática resolvida para as coordenadas dos atuadores e da plataforma, utilizamos algumas condições geométricas para resolver o problema de posição para as outras coordenadas.

Primeiro, analisemos a cadeia $O_1A_1B_1$, utilizando matrizes de transformação homogênea para definir os ângulos θ'_1 e ϕ_1 :

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p - \frac{l}{2} \\ z_p - d \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_1 & -s\theta_1 & -\frac{b}{2} \\ 0 & s\theta_1 & c\theta_1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta'_1 & -s\theta'_1 & l_1 \\ 0 & s\theta'_1 & c\theta'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\phi_1 & -s\phi_1 & 0 & 0 \\ s\phi_1 & c\phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p - \frac{l}{2} \\ z_p - d \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\phi_1 & -s\phi_1 & 0 & 0 \\ s\phi_1 c\alpha_1 & c\phi_1 c\alpha_1 & -s\alpha_1 & l_1 c\theta_1 - \frac{b}{2} \\ s\phi_1 s\alpha_1 & c\phi_1 s\alpha_1 & c\alpha_1 & l_1 s\theta_1 + h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 s\phi_1 \\ l_2 c\phi_1 c\alpha_1 + l_1 c\theta_1 - \frac{b}{2} \\ l_2 c\phi_1 s\alpha_1 + l_1 s\theta_1 + h_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sendo $\alpha_1 = \theta'_1 + \theta_1$

Fazendo o mesmo para a cadeia $O_2A_2B_2$:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p + \frac{l}{2} \\ z_p - d \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\phi_2 & -s\phi_2 & 0 & 0 \\ s\phi_2 c\alpha_2 & c\phi_2 c\alpha_2 & -s\alpha_2 & l_1 c\theta_2 + \frac{b}{2} \\ s\phi_2 s\alpha_2 & c\phi_2 s\alpha_2 & c\alpha_2 & l_1 s\theta_2 + h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 s\phi_2 \\ l_2 c\phi_2 c\alpha_2 + l_1 c\theta_2 + \frac{b}{2} \\ l_2 c\phi_2 s\alpha_2 + l_1 s\theta_2 + h_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sendo $\alpha_2 = \theta'_2 + \theta_2$

Podemos chegar às seguintes equações:

$$\begin{cases} x_p = -l_2 s\phi_1 \\ y_p = l_1 c\theta_1 + l_2 c\alpha_1 c\phi_1 - \frac{b-l}{2} \\ z_p = l_1 s\theta_1 + l_2 s\alpha_1 c\phi_1 + d + h_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_p = -l_2 s\phi_2 \\ y_p = l_1 c\theta_2 + l_2 c\alpha_2 c\phi_2 - \frac{l-b}{2} \\ z_p = l_1 s\theta_2 + l_2 s\alpha_2 c\phi_2 + d + h_1 \end{cases}$$

Sendo assim:

$$\begin{cases} s\phi_1 = s\phi_2 = s\phi = -x_p/l_2 \\ \tan \alpha_1 = \frac{z_p - l_1 s\theta_1 - d - h}{y_p + \frac{b-l}{2} - l_1 c\theta_1} \\ \tan \alpha_2 = \frac{z_p - l_1 s\theta_2 - d - h}{y_p + \frac{l-b}{2} - l_1 c\theta_2} \end{cases} \quad (22)$$

Também podemos aproveitar a matriz de rotação embutida na matriz de transformação homogênea final para calcular as velocidades angulares das barras A₁B₁ e A₂B₂.

Pelo que foi deduzido acima, temos que a matriz de rotação que relaciona a base O_{xyz} à base fixa na barra A_iB_i ($i = 1, 2$) é:

$$R_i = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi c\alpha_i & c\phi c\alpha_i & -s\alpha_i \\ s\phi s\alpha_i & c\phi s\alpha_i & c\alpha_i \end{bmatrix} \quad (23)$$

Sendo $S(\omega)$ a matriz tal que $\omega \Lambda v = S \omega \cdot v$, pode-se demonstrar que $S \omega_i = R_i^T R_i$, com ω na base fixa à barra A_iB_i. A expressão da matriz $S(\omega)$ é dada por:

$$S(\vec{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando R_i , temos:

$$\dot{R}_i = \begin{bmatrix} -s\phi\dot{\phi} & -c\phi\dot{\phi} & 0 \\ c\phi c\alpha_i\dot{\phi} - s\phi s\alpha_i\dot{\alpha}_i & -s\phi c\alpha_i\dot{\phi} - c\phi s\alpha_i\dot{\alpha}_i & -c\alpha_i\dot{\alpha}_i \\ c\phi s\alpha_i\dot{\phi} + s\phi c\alpha_i\dot{\alpha}_i & -s\phi s\alpha_i\dot{\phi} + c\phi c\alpha_i\dot{\alpha}_i & -s\alpha_i\dot{\alpha}_i \end{bmatrix} \quad (24)$$

Fazendo o produto $R_i^T \dot{R}_i$ e isolando as componentes de ω_i :

$$S(\vec{\omega}_i) = R_i^T \dot{R}_i = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi} & -\dot{\alpha}_i s\phi \\ \dot{\phi} & 0 & -\dot{\alpha}_i c\phi \\ \dot{\alpha}_i s\phi & \dot{\alpha}_i c\phi & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \vec{\omega}_i = (\dot{\alpha}_i c\phi, -\dot{\alpha}_i s\phi, \dot{\phi}) \quad (25)$$

Podemos aproveitar esse resultado para calcular a energia cinética de rotação da barra A_iB_i (a qual será necessária mais para frente). Sabendo que o tensor de inércia da barra A_iB_i na base fixa a ela, centrada em seu centro de massa é dado por:

$$I = \begin{bmatrix} J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$E_{c_i}^{Rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}_i^T I \vec{\omega}_i = \frac{1}{2} J_2 (c^2 \phi \dot{\alpha}_i^2 + \dot{\phi}^2) \quad (27)$$

As coordenadas dos pontos C_1 e C_2 podem ser definidas da seguinte maneira:

$$\vec{A_i C_i} = \vec{A_i B_i} \frac{l_{2g}}{l_2} \Rightarrow C_i = (B_i - A_i)S + A_i \\ \therefore C_i = B_i S + A_i(1 - S)$$

Definindo x_1, y_1, z_1 como sendo as coordenadas do ponto C_1 e x_2, y_2, z_2 como sendo as coordenadas do ponto C_2 , temos:

$$\begin{cases} x_1 = Sx_p \\ y_1 = S(y_p - \frac{l}{2}) + (1 - S)(-\frac{b}{2} + l_1 c \theta_1) \\ z_1 = S(z_p - d) + (1 - S)(h_1 + l_1 s \theta_1) \end{cases} \quad (28)$$

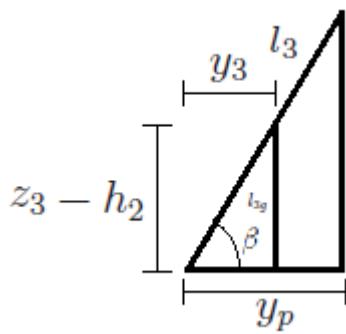
$$\begin{cases} x_2 = Sx_p \\ y_2 = S(y_p + \frac{l}{2}) + (1 - S)(\frac{b}{2} + l_1 c \theta_2) \\ z_2 = S(z_p - d) + (1 - S)(h_1 + l_1 s \theta_2) \end{cases} \quad (29)$$

Sendo:

$$S = \frac{l_{2g}}{l_2} \quad (30)$$

Quanto ao paralelogramo: podemos dizer que a coordenada x de seu centro de massa é x_p ; por semelhança de triângulos podemos relacionar sua coordenada y com y_p , o que torna possível definir o angulo β e consequentemente sua coordenada z .

Figura 3 - Semelhança de triângulos utilizada



Fonte: Própria

Definindo x_3, y_3, z_3 como sendo as coordenadas do ponto D , temos:

$$\begin{cases} y_3 = \frac{l_{3g}}{l_3} y_p \\ c\beta = \frac{y_p}{l_3} \\ z_3 = l_{3g}s\beta + h_2 \end{cases} \quad (31)$$

Juntando todos os vínculos cinemáticos em um sistema:

$$\begin{cases} x_p^2 + (y_p + \frac{b-l}{2} - l_1 c \theta_1)^2 + (z_p - l_1 s \theta_1 - d - h_1)^2 = l_2^2 \\ x_p^2 + (y_p + \frac{l-b}{2} - l_1 c \theta_2)^2 + (z_p - l_2 s \theta_2 - d - h_1)^2 = l_2^2 \\ x_1 = Sx_p \\ y_1 = S(y_p - \frac{l}{2}) + (1-S)(-\frac{b}{2} + l_1 c \theta_1) \\ z_1 = S(z_p - d) + (1-S)(h_1 + l_1 s \theta_1) \\ x_2 = Sx_p \\ y_2 = S(y_p + \frac{l}{2}) + (1-S)(\frac{b}{2} + l_1 c \theta_2) \\ z_2 = S(z_p - d) + (1-S)(h_1 + l_1 s \theta_2) \\ x_3 = x_p \\ y_3 = \frac{l_{3g}}{l_3} y_p \\ c\beta = \frac{y_p}{l_3} \\ z_3 = l_{3g}s\beta + h_2 \\ s\phi_1 = s\phi_2 = s\phi = -x_p/l_2 \\ \tan \alpha_1 = \frac{z_p - l_1 s \theta_1 - d - h_1}{y_p + \frac{b-l}{2} - l_1 c \theta_1} \\ \tan \alpha_2 = \frac{z_p - l_2 s \theta_2 - d - h_1}{y_p + \frac{l-b}{2} - l_1 c \theta_2} \end{cases} \quad (32)$$

Assim, temos todas as variáveis definidas e podemos eliminar algumas variáveis mais triviais, substituindo ϕ_1 e ϕ_2 por ϕ , x_3 por x_p , x_1 e x_2 por Sx_p e y_3 por $\frac{l_{3g}}{l_3} y_p$.

Definimos então o vetor das variáveis do problema como:

$$q^T = [x_p \ y_p \ z_p \ \theta_1 \ \theta_2 \ y_1 \ z_1 \ y_2 \ z_2 \ \beta \ z_3 \ \phi \ \alpha_1 \ \alpha_2] \quad (33)$$

Como desejamos obter o modelo dinâmico em relação às variáveis dos atuadores $q^\# = X$ definimos um vetor de variáveis redundantes como sendo as variáveis q que não pertencem a $q^\#$. Assim:

$$q^{oT} = [\theta_1 \ \theta_2 \ y_1 \ z_1 \ y_2 \ z_2 \ \beta \ z_3 \ \phi \ \alpha_1 \ \alpha_2] \quad (34)$$

Reescrevendo o sistema como um vetor de funções nulas, apenas nas variáveis q , temos:

$$\Phi(q) = \begin{bmatrix} x_p^2 + (y_p + \frac{b-l}{2} - l_1 c\theta_1)^2 + (z_p - l_1 s\theta_1 - d - h_1)^2 - l_2^2 \\ x_p^2 + (y_p + \frac{l-b}{2} - l_1 c\theta_2)^2 + (z_p - l_2 s\theta_2 - d - h_1)^2 - l_2^2 \\ y_1 - S(y_p - \frac{l}{2}) - (1-S)(-\frac{b}{2} + l_1 c\theta_1) \\ z_1 - S(z_p - d) - (1-S)(h_1 + l_1 s\theta_1) \\ y_2 - S(y_p + \frac{l}{2}) - (1-S)(\frac{b}{2} + l_1 c\theta_2) \\ z_2 - S(z_p - d) - (1-S)(h_1 + l_1 s\theta_2) \\ c\beta - \frac{y_p}{l_3} \\ z_3 - l_{3g} s\beta - h_2 \\ s\phi + x_p/l_2 \\ \tan \alpha_1 (y_p + \frac{b-l}{2} - l_1 c\theta_1) - z_p + l_1 s\theta_1 + d + h_1 \\ \tan \alpha_2 (y_p + \frac{l-b}{2} - l_1 c\theta_2) - z_p + l_1 s\theta_2 + d + h_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (35)$$

- Determinação dos Jacobianos e suas Derivadas

Derivando a equação (29), obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_p \dot{x}_p + (y_p + \frac{b-l}{2} - l_1 c\theta_1) \dot{y}_p + (z_p - l_1 s\theta_1 - d - h_1) \dot{z}_p + l_1 [(y_p + \frac{b-l}{2}) s\theta_1 - (z_p - d - h_1) c\theta_1] \dot{\theta}_1 = 0 \\ x_p \dot{x}_p + (y_p + \frac{l-b}{2} - l_1 c\theta_2) \dot{y}_p + (z_p - l_1 s\theta_2 - d - h_1) \dot{z}_p + l_1 [(y_p + \frac{l-b}{2}) s\theta_2 - (z_p - d - h_1) c\theta_2] \dot{\theta}_2 = 0 \\ \dot{y}_1 - S \dot{y}_p + (1-S) l_1 s\theta_1 \dot{\theta}_1 = 0 \\ \dot{z}_1 - S \dot{z}_p - (1-S) l_1 c\theta_1 \dot{\theta}_1 = 0 \\ \dot{y}_2 - S \dot{y}_p + (1-S) l_1 s\theta_2 \dot{\theta}_2 = 0 \\ \dot{z}_2 - S \dot{z}_p - (1-S) l_1 c\theta_2 \dot{\theta}_2 = 0 \\ s\beta \dot{\beta} + \frac{1}{l_3} \dot{y}_p = 0 \\ \dot{z}_3 - l_{3g} c\beta \dot{\beta} = 0 \\ c\phi \dot{\phi} + \frac{1}{l_2} \dot{x}_p = 0 \\ (\dot{y}_p + l_1 s\theta_1 \dot{\theta}_1) \tan \alpha_1 + (y_p + \frac{b-l}{2} - l_1 c\theta_1) \sec^2 \alpha_1 \dot{\alpha}_1 - \dot{z}_p + l_1 c\theta_1 \dot{\theta}_1 = 0 \\ (\dot{y}_p + l_1 s\theta_2 \dot{\theta}_2) \tan \alpha_2 + (y_p + \frac{l-b}{2} - l_1 c\theta_2) \sec^2 \alpha_2 \dot{\alpha}_2 - \dot{z}_p + l_1 c\theta_2 \dot{\theta}_2 = 0 \end{array} \right. \quad (36)$$

Podemos reescrever essas equações (eq. (30)) como:

$$J \dot{q} = 0 \quad (37)$$

Ou como:

$$J_d \dot{q}^\# + J_e \dot{q}^o = 0 \quad (38)$$

Sendo:

$$J_d = \begin{bmatrix} x_p & y_p + \frac{b-l}{2} - l_1 c\theta_1 & z_p - l_1 s\theta_1 - d - h_1 \\ x_p & y_p + \frac{l-b}{2} - l_1 c\theta_2 & z_p - l_1 s\theta_2 - d - h_1 \\ 0 & -S & 0 \\ 0 & 0 & -S \\ 0 & -S & 0 \\ 0 & 0 & -S \\ 0 & \frac{1}{l_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & \tan \alpha_1 & -1 \\ 0 & \tan \alpha_2 & -1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$J_e = \begin{bmatrix} l_1[(y_p + \frac{b-l}{2})s\theta_1 - (z_p - d - h_1)c\theta_1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_1[(y_p + \frac{l-b}{2})s\theta_2 - (z_p - d - h_1)c\theta_2] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1-S)l_1s\theta_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(1-S)l_1c\theta_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-S)l_1s\theta_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-S)l_1c\theta_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_{3g}c\beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c\phi & 0 \\ l_1(\tan \alpha_1 s\theta_1 + c\theta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y_p + \frac{b-l}{2} - l_1 c\theta_1}{c^2 \alpha_1} & 0 \\ 0 & l_1(\tan \alpha_2 s\theta_2 + c\theta_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y_p + \frac{l-b}{2} - l_1 c\theta_2}{c^2 \alpha_2} \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} = [J_d \quad J_e] \quad (41)$$

Assim podemos determinar derivadas temporais das coordenadas redundantes fazendo:

$$\dot{\mathbf{q}}^o = -J_e^{-1} J_d \dot{\mathbf{q}}^\# \quad (42)$$

Derivando eq.(32), obtemos:

$$\dot{J}_d \dot{\mathbf{q}}^\# + J_d \ddot{\mathbf{q}}^\# + \dot{J}_e \dot{\mathbf{q}}^o + J_e \ddot{\mathbf{q}}^o = 0 \quad (43)$$

Sendo:

$$\dot{J}_d = \begin{bmatrix} \dot{x}_p & \dot{y}_p + l_1 s\theta_1 \dot{\theta}_1 & \dot{z}_p - l_1 c\theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{x}_p & \dot{y}_p + l_1 s\theta_2 \dot{\theta}_2 & \dot{z}_p - l_1 c\theta_2 \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sec^2 \alpha_1 \dot{\alpha}_1 & 0 \\ 0 & \sec^2 \alpha_2 \dot{\alpha}_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\dot{J}_e =$$

$$\begin{bmatrix} J_{q_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{q_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1-S)l_1 c\theta_1 \dot{\theta}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1-S)l_1 s\theta_1 \dot{\theta}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-S)l_1 c\theta_2 \dot{\theta}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-S)l_1 s\theta_2 \dot{\theta}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 [\sec^2 \alpha_1 s\theta_1 \dot{\alpha}_1 + (\tan \alpha_1 c\theta_1 - s\theta_1) \dot{\theta}_1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(y_p + \frac{b-f}{2} - l_1 c\theta_1) \tan \alpha_1 \dot{\alpha}_1 + \dot{y}_p + l_1 s\theta_1 \dot{\theta}_1}{c^2 \alpha_1} & 0 \\ 0 & l_1 [\sec^2 \alpha_2 s\theta_2 \dot{\alpha}_2 + (\tan \alpha_2 c\theta_2 - s\theta_2) \dot{\theta}_2] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(y_p + \frac{f-b}{2} - l_1 c\theta_2) \tan \alpha_2 \dot{\alpha}_2 + \dot{y}_p + l_1 s\theta_2 \dot{\theta}_2}{c^2 \alpha_2} & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Assim podemos determinar derivadas temporais de segunda ordem das coordenadas redundantes fazendo:

$$\ddot{q}^\circ = -J_e^{-1}(\dot{J}_d \dot{q}^\# + J_d \ddot{q}^\# + \dot{J}_e \dot{q}^\circ) \quad (46)$$

- Derivação das Equações de Lagrange com multiplicadores

As equações de movimento do mecanismo podem ser obtidas utilizando o método de Lagrange com 11 multiplicadores, pois iremos utilizar as 3 coordenadas independentes e as 11 coordenadas redundantes definidas anteriormente. Sendo assim, as equações de movimento do mecanismo serão dadas por:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial \Phi^T}{\partial q} \lambda + Q \quad (47)$$

Sendo $L(q, \dot{q})$ a função Lagrangeana, dada pela diferença entre a energia cinética e a energia potencial do sistema, Φ o vetor dos vínculos cinemáticos que definem as coordenadas

redundantes, λ o vetor de multiplicadores de Lagrange, e Q o vetor de forças não conservativas aplicadas às coordenadas q .

O termo $\frac{\partial \Phi}{\partial q}$ já foi calculado anteriormente e é dado pela equação (37).

O vetor Q é dado por:

Sendo assim, para definir as equações dinâmicas só falta definir a função Lagrangeana $L(q, \dot{q})$ e calcular suas derivadas. Assim, calculamos a energia cinética e a energia potencial utilizando todas as coordenadas definidas:

$$E_c = \frac{1}{2} \left(J_1 + m_1 l_{1g}^2 \right) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \left[c^2 \phi_1 \dot{\alpha}_1^2 + \dot{\phi}_1^2 \right] + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2} \left(J_1 + m_1 l_{1g}^2 \right) \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \left[c^2 \phi_2 \dot{\alpha}_2^2 + \dot{\phi}_2^2 \right] + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2) + \frac{1}{2} (J_3 + m_3 l_{3g}^2) \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2 + \dot{z}_p^2) \quad (49)$$

$$E_p = - \left[m_1 g l_{1g} s\theta_1 + m_1 g l_{1g} s\theta_2 + m_2 g z_1 + m_2 g z_2 + m_3 g z_3 + m_p g z_p \right] \quad (50)$$

A energia potencial está com sinal negativo, pois o mecanismo será montado invertido, com a base acima da plataforma.

Agora eliminamos as variáveis mais triviais, já discutidas anteriormente, e calculamos o Lagrangeano apenas em função de q e \dot{q} :

$$L = \frac{1}{2} \left(J_1 + m_1 l_{1g}^2 \right) (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2} J_2 \left[c^2 \phi [\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2] + 2\dot{\phi}^2 \right] + \frac{1}{2} m_2 (2S^2 \dot{x}_p^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_p^2 + \frac{l_{3g}^2}{l_3^2} \dot{y}_p^2 + \dot{z}_3^2) + \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2 + \dot{z}_p^2) + \frac{1}{2} (J_3 + m_3 l_{3g}^2) \dot{\beta}^2 + g \left[m_1 (l_{1g} s \theta_1 + l_{1g} s \theta_2) + m_2 (z_1 + z_2) + m_3 z_3 + m_p z_p \right] \quad (51)$$

Derivando o Lagrangeano (Eq. (51)):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} (2S^2m_2 + m_3 + m_p)\dot{x}_p \\ (m_3 \frac{l_{3g}^2}{l_3^2} + m_p)\dot{y}_p \\ m_p \dot{z}_p \\ (J_1 + m_1 l_{1g}^2)\dot{\theta}_1 \\ (J_1 + m_1 l_{1g}^2)\dot{\theta}_2 \\ m_2 \dot{y}_1 \\ m_2 \dot{z}_1 \\ m_2 \dot{y}_2 \\ m_2 \dot{z}_2 \\ (J_3 + m_1 l_{3g}^2)\dot{\beta} \\ m_3 \dot{z}_3 \\ 2J_2 \dot{\phi} \\ J_2 c^2 \phi \dot{\alpha}_1 \\ J_2 c^2 \phi \dot{\alpha}_2 \end{bmatrix} = M\dot{q} \quad (52)$$

$$M =$$

$$\begin{bmatrix} 2S^2m_2 + m_3 + m_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 \frac{l_{3g}^2}{l_3^2} + m_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_1 + m_1 l_{1g}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_1 + m_1 l_{1g}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_3 + m_1 l_{3g}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2J_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_2 c^2 \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_2 c^2 \phi & 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = M\ddot{q} + \dot{M}\dot{q} \quad (54)$$

$$\dot{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_2 s(2\phi) \dot{\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_2 s(2\phi) \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_p g \\ m_{1g} g l_1 c \theta_1 \\ m_{1g} g l_1 c \theta_2 \\ 0 \\ m_2 g \\ 0 \\ m_2 g \\ 0 \\ m_3 g \\ -\frac{1}{2} J_2 s(2\phi) (\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -G \quad (56)$$

Desta maneira temos as equações de movimento já definidas por:

$$M\ddot{q} + \dot{M}\dot{q} + G = J^T \lambda + U^T F \quad (57)$$

- Eliminação dos multiplicadores

Esta maneira de escrever as equações de movimento é correta, porém apresenta a desvantagem de apresentar 14 incógnitas, 11 multiplicadores e 3 forças (F_x , F_y e F_z). Para diminuir o número de incógnitas iremos utilizar o método desenvolvido por Renato Orsino para eliminar os multiplicadores.

A ideia consiste em multiplicar a equação dos dois lados por uma matriz B^T , de modo que $B^T J^T = 0$.

Definindo:

$$B = \begin{bmatrix} I \\ -J_e^{-1}J_d \end{bmatrix} \quad (58)$$

Sendo I a matriz identidade de ordem 3.

Temos que:

$$B^T J^T = (JB)^T = \left([J_d \ J_e] \begin{bmatrix} I \\ -J_e^{-1}J_d \end{bmatrix} \right)^T = (J_d I - J_e J_e^{-1} J_d)^T = 0$$

Além disso:

$$B^T U^T = (UB)^T = \left([I \ 0_{3x11}] \begin{bmatrix} I \\ -J_e^{-1}J_d \end{bmatrix} \right)^T = (I \cdot I - 0_{3x11} \cdot J_e^{-1}J_d)^T = I$$

Assim, multiplicando pela esquerda por B^T a equação (57), temos:

$$\begin{aligned} B^T(M\ddot{q} + \dot{M}\dot{q} + G) &= B^T(J^T\lambda + U^TF) \\ \therefore B^T(M\ddot{q} + \dot{M}\dot{q} + G) &= F \end{aligned} \quad (59)$$

Sendo assim, obtemos o modelo dinâmico tendo como incógnitas apenas as forças aplicadas na plataforma.

Para fins de controle, é conveniente exprimir as equações em função de $\dot{q}^\#$.

A partir das equações (42) e (58) é possível chegar à seguinte relação:

$$\dot{q} = B\dot{q}^\# \quad (60)$$

Derivando no tempo:

$$\ddot{q} = \dot{B}\dot{q}^\# + B\ddot{q}^\# \quad (61)$$

Comparando com a equação (42), temos:

$$\dot{B} = \begin{bmatrix} 0_{3x3} \\ -J_e^{-1}(J_d - \dot{J}_e J_e^{-1} J_d) \end{bmatrix} \quad (62)$$

Utilizando (56) e (57), a equação (55) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\bar{M}\ddot{\bar{q}}^\# + \bar{V}\dot{\bar{q}}^\# + \bar{G} = F \quad (63)$$

Sendo:

$$\begin{cases} \bar{M} = B^T M B \\ \bar{V} = B^T(M\dot{B} + \dot{M}B) \\ \bar{G} = B^T G \end{cases} \quad (64)$$

3.1.2. Açãoamento do mecanismo: Motores e Microcontroladores

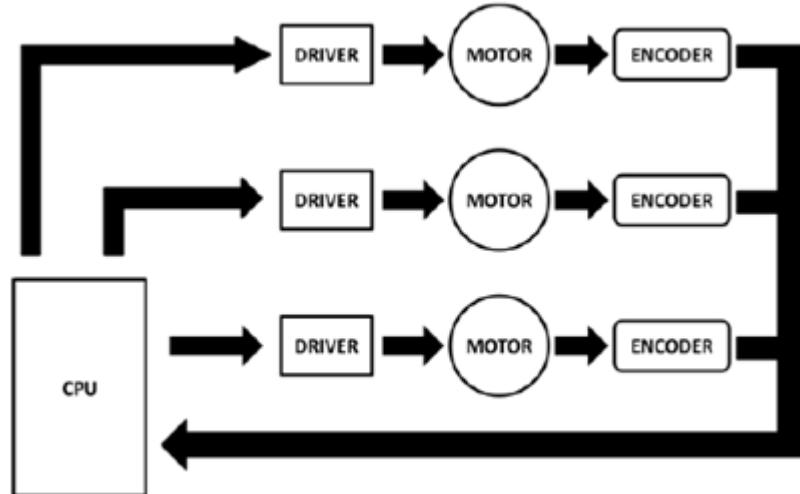
3.1.2.1. Descrição

Para o mecanismo, o sistema de açãoamento e controle será constituído de:

- três motores, com seus respectivos *drivers* de açãoamento. Estes estarão conectados diretamente, com o *driver* realizando leituras para a realimentação de variáveis necessárias na malha de controle;
- um computador, que estará conectados aos *drivers*, responsável pela execução da malha de controle. Para isso, será utilizado o *software* LabVIEW, que possui alta capacidade de processamento de dados, altamente programável e uma interface versátil, que permitirá uma correta comunicação com os *drivers*.

Assim, a arquitetura final do sistema é representada na Figura 4.

Figura 4 - Arquitetura final do sistema



Fonte: Adaptado de Hess-Coelho *et al*, 2012

O mecanismo em questão foi desenvolvido tanto para realizar tarefas de reabilitação quanto realizar tarefas de “*pick and place*”. Sendo assim, os requisitos do motor devem garantir que seja possível realizar ambas as tarefas.

A partir de simulações realizadas anteriormente pode-se observar que o torque máximo de saída dos redutores nunca ultrapassa 3N.m e a rotação máxima nunca ultrapassa 160rpm.

Como a potência mecânica é dada pelo produto do torque de saída do redutor pela velocidade de saída do redutodador dividado pelo rendimento do redutor, admitindo rendimento do redutor sendo 0,7, obtemos um potencia mecânica máxima de 71,81W. Admitindo um rendimento de 0.8 para o motor (conversão de energia elétrica em mecânica), obtemos uma potência elétrica de 89,76W. Como o modelo nunca representa totalmente a realidade e há um certo erro embutido nos parametros estimados para simulação, temos uma especificação de potência elétrica do motor entre 100W e 150W.

As especificação de tensão de alimentação entre 24V e 48V são para garantir que o motor não puxe uma corrente extremamente alta, evitando o uso de fios com bitola muito grande e possibilitando o uso de fontes com menor amperagem. Não foi cogitado o uso de motores com tensão de alimentação maior que 48V, pois existem poucos modelos com tensão de alimentação superior a essa, os quais normalmente são bem mais caros e exigiriam um driver mais complexo.

Assim, foram definidos os seguintes requisitos:

- Motor: DC, com potência entre 100W a 150W, com tensão de alimentação entre 24V e 48V. Peso máximo de 1,5kg. Dotado de *encoder* e redução acoplados.
- Redução: Planetário, com peso máximo de 1kg. Deve disponibilizar torque de saída de 3 N.m, com rotação máxima de 160 rpm.
- *Encoder*: Óptico, possuindo no mínimo 1000 pulsos/volta.
- Acionamento: servo-amplificador PWM (*Pulse Width Modulation*), que possua controle de corrente, velocidade e posição.

Dado estes requisitos, foi escolhido os seguintes modelos: para o motor, Maxon 148867 ; já para o controlador, EPOS2.

O motor Maxon 148867 possui as seguintes características:

Tabela 1 – Características do motor de corrente contínua

Propriedade	Valor
Tensão nominal	24 V
Rotação (em vazio)	7580 rpm
Rotação nominal	6930 rpm

Tabela 1 – Características do motor de corrente contínua (continuação)

Propriedade	Valor
Corrente (em vazio)	137 mA
Corrente nominal (máxima corrente em regime contínuo)	5,77 A
Torque nominal	170 mNm
Torque máximo com eixo travado	2280 mNm
Máxima eficiência	91%
Corrente de partida	75,7 A

A redução utilizada é de 43:1, com rendimento de 0,72, garantindo assim o torque necessário.

O controlador, além de atender os pré-requisitos anteriormente citados, também possui as seguintes características:

Tabela 2 – Características do *driver* do motor

Propriedade	Valor
Frequência de comutação	50 kHz
Eficiência maxima	94%
Taxa de amostragem – controle de corrente (PI)	10 kHz
Taxa de amostragem – controle de velocidade (PI)	1 kHz
Taxa de amostragem – controle de posição (PID)	1 kHz
Protocolos de comunicação	USB / CAN / RS232

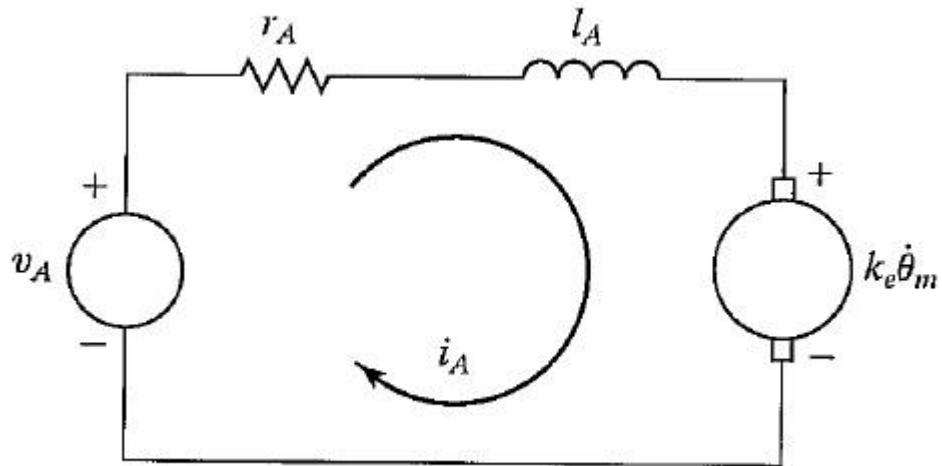
A definição precisa destes parâmetros é de suma importância, já que a malha de controle é altamente dependente destes parâmetros, seja para o próprio cálculo da dinâmica como para o processamento de informações e discretização, evitando assim degradação da resposta ou mesmo instabilidade do sistema.

3.1.2.2. Modelagem

Para projetar os controladores para a malha de controle dos motores, é necessário realizar a modelagem dos motores, para a correta identificação de sua dinâmica, que é introduzida no sistema.

Inicialmente, é modelado o sistema elétrico de um motor de corrente contínua. Este pode ser modelado como uma fonte de tensão, uma resistência, uma indutância e uma força eletromotriz proporcional à rotação do motor, todos em série.

Figura 5 - Circuito Elétrico do Motor CC



Fonte: Craig, 2005

Assim, aplicando a Lei de Ohm, obtemos a seguinte equação:

$$v_a = L \frac{di_a}{dt} + R i_a + k_e \dot{\theta}_m \quad (65)$$

- Sistema mecânico:

Como o motor está acoplado a um redutor com relação de redução r e eficiência η , obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \theta_m &= r\theta \\ P_m \eta &= P \quad \theta_m \tau_m \eta = \theta \tau \quad \tau_m = \frac{\tau}{\eta r} \end{aligned} \quad (66)$$

Sendo J_m a inércia do rotor somada à inércia do redutor e b_m o coeficiente de atrito viscoso do mancal do eixo do motor, aplicando o Teorema do Momento Angular e utilizando a equação (66), obtemos a seguinte equação:

$$T_m - J_m \theta_m - b_m \theta_m = \frac{\tau_{dist}}{\eta r} \quad (67)$$

O torque τ_{dist} é o torque que o mecanismo aplica no motor e será considerado como dissipativo em nossa modelagem.

- Sistema eletromecânico:

É possível acoplar o sistema elétrico com o sistema mecânico utilizando a hipótese de que o torque fornecido pelo motor é proporcional à corrente da armadura, ou seja:

$$T_m = k_t i_a \quad (68)$$

Substituindo a eq.(68) na eq.(67) e mantendo a equação 65, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} v_a &= L \frac{di_a}{dt} + R i_a + k_e \theta_m \\ k_t i_a - J_m \theta_m - b_m \theta_m &= \frac{\tau_{dist}}{\eta r} \end{aligned} \quad (*)$$

Aplicando a transformada de Laplace no sistema *, supondo condições iniciais nulas:

$$\begin{aligned} V_a s &= I_a s Ls + R + \theta_m s k_e s \\ k_t I_a s - \theta_m s J_m s^2 + b_m s &= \frac{\tau_{dist} s}{\eta r} \end{aligned} \quad (**)$$

Isolando $\theta_m s$ na segunda equação de **:

$$\theta_m s = \frac{k_t I_a s - \frac{\tau_{dist} s}{\eta r}}{J_m s^2 + b_m s} \quad (69)$$

Substituindo a eq.(69) na primeira equação de **:

$$\begin{aligned} V_a s &= I_a s Ls + R + \frac{k_t k_e}{J_m s + b_m} - \frac{\tau_{dist} s}{\eta r} \frac{k_e}{J_m s + b_m} \\ \therefore I_a s &= \frac{J_m s + b_m}{Ls + R} V_a s + \frac{k_e / \eta r}{Ls + R} \tau_{dist} s \end{aligned} \quad (70)$$

Assim, obtemos as funções de transferência do sistema:

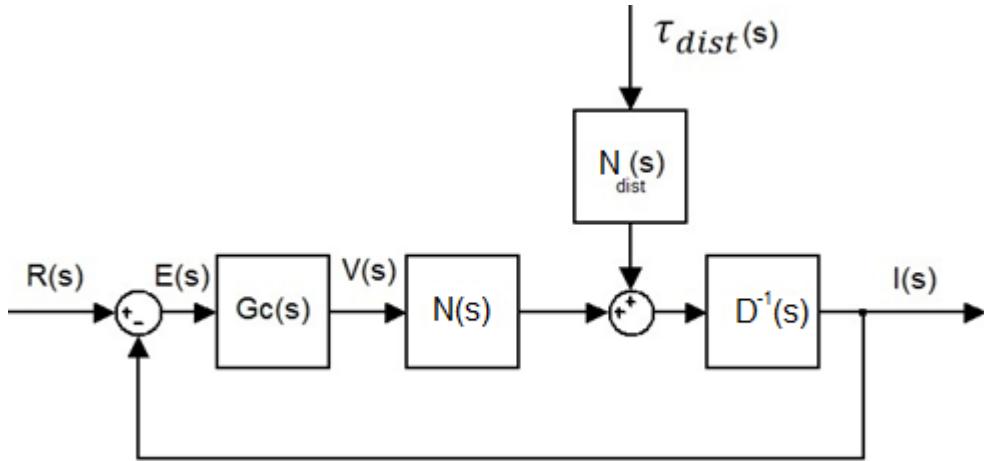
$$G(s) = \frac{I_a s}{V_a s} = \frac{J_m s + b_m}{Ls + R} \frac{J_m s + b_m + k_t k_e}{J_m s + b_m + k_t k_e} \quad (71)$$

$$G_{dist}(s) = \frac{I_a s}{\tau_{dist} s} = \frac{k_e / \eta r}{Ls + R} \frac{J_m s + b_m + k_t k_e}{J_m s + b_m + k_t k_e} \quad (72)$$

Tendo as funções de transferência dos motores já deduzidas e os parâmetros dos motores e dos redutores disponíveis no manual do fabricante, já é possível realizar o projeto dos controladores.

Aqui segue o diagrama de blocos da malha de controle que será utilizada:

Figura 6 - Diagrama de blocos da malha de controle dos motores



Fonte: Própria

Sendo $N(s)$ o numerador de $G(s)$, $N_{dist}(s)$ o numerador de $G_{dist}(s)$ e $D(s)$ o denominador de $G(s)$ e G_{dist}

Os drivers que estamos utilizando no projeto já tem a opção de programar os ganhos um controlador proporcional integral (PI) em tempo contínuo para o controle de corrente, discretizado a uma frequência 10kHz.

Sendo assim, realizamos o projeto de um controlador PI em tempo discreto e encontramos seu equivalente em tempo contínuo, obtendo assim os ganhos do controlador a ser programado.

Discretizando a planta, obtemos uma função de transferência no domínio Z no seguinte formato:

$$G_d \mid Z = \frac{az+b}{z^2+cz+d} \quad (73)$$

Um controlador PI em tempo discreto apresenta o seguinte formato:

$$G_{cd} \mid Z = K \cdot 1 + \frac{\alpha}{z-1} \quad (74)$$

Sendo K o ganho proporcional e α o ganho integral. Podemos reescrever a função de transferência do controlador da seguinte maneira:

$$G_{cd} z = \frac{Kz+K\alpha-1}{z-1} = \frac{xz+y}{z-1} \quad (75)$$

Tendo $G_d z$ e $G_{cd} z$, podemos encontrar a função de transferência em malha fechada:

$$G_{mfd} z = \frac{G_{cd} z G_d(z)}{1 + G_{cd} z G_d(z)} = \frac{axz^2 + bx + ay}{z^3 + ax + c - 1} \quad (76)$$

Obtida a função de transferência em malha fechada, podemos encontrar as constantes x e y que aloquem os polos do sistema em malha fechada o mais próximo possível dos polos desejados.

Um polinômio de grau 3 com raízes p_1 , p_2 e p_3 é dado por:

$$\begin{aligned} P z &= z - p_1 \quad z - p_2 \quad z - p_3 \\ &= z^3 + -p_1 - p_2 - p_3 \quad z^2 + p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 \quad z \\ &\quad - p_1 p_2 p_3 \end{aligned} \quad (77)$$

Comparando os coeficientes do polinômio com o denominador de $G_{mfd} z$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{matrix} a & 0 & x & -p_1 - p_2 - p_3 - c + 1 \\ b & a & y & p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 - d + c \\ 0 & b & & -p_1 p_2 p_3 + d \end{matrix} \quad (***)$$

Temos um sistema com 3 equações e 2 incógnitas. Sendo assim, dificilmente conseguiremos alocar os polos do sistema exatamente para o local desejado, porém podemos encontrar as constantes que deixam os polos do sistema o mais próximo possível dos polos desejados utilizando o método dos mínimos quadrados. Assim, multiplicando a equação pela esquerda pela transposta da matriz dos coeficientes, chegamos a um sistema 2x2 cuja solução são os valores de x e y que deixam os polos do sistema em malha fechada o mais próximo possível dos polos desejados.

Para concluir o projeto do controlador é necessário estabelecer os requisitos de controle:

- Erro estático de posição $\leq 2.5\%$
- Sobressinal $\leq 5\%$
- Tempo de assentamento (5%) $\leq 1\text{ms}$
- Margem de Ganho $\geq 6\text{dB}$
- Margem de Fase $\geq 30^\circ$

Dado os parâmetros da planta, encontrados no manual do fabricante:

- $R_a = 0,299\Omega$
- $L_a = 0,0823\text{mH}$

- $k_t = 30,2 \text{ mN.m/A}$
- $k_e = 30,124 \text{ mV.s/rad}$
- $J_{\text{rotor}} = 142 \text{ g.cm}^2$
- $J_{\text{redutor}} = 15 \text{ g.cm}^2$
- $r = 43$
- $\eta = 0,72$

Como o atrito viscoso normalmente é muito pequeno e não temos informação sobre ele no catálogo do fabricante, vamos inicialmente admitir $b_m = 0$. Logo, obtemos as seguintes funções de transferência da planta:

$$G(s) = \frac{12051s}{s^2 + 3633s + 704076}$$

$$G_{dist}(s) = \frac{753028}{s^2 + 3633s + 704076}$$

Discretizando a planta:

$$G_d(z) = \frac{1,018z - 1,018}{z^2 + 1,689z + 0,6954}$$

$$G_{distd}(z) = \frac{0,003346z - 0,002964}{z^2 + 1,689z + 0,6954}$$

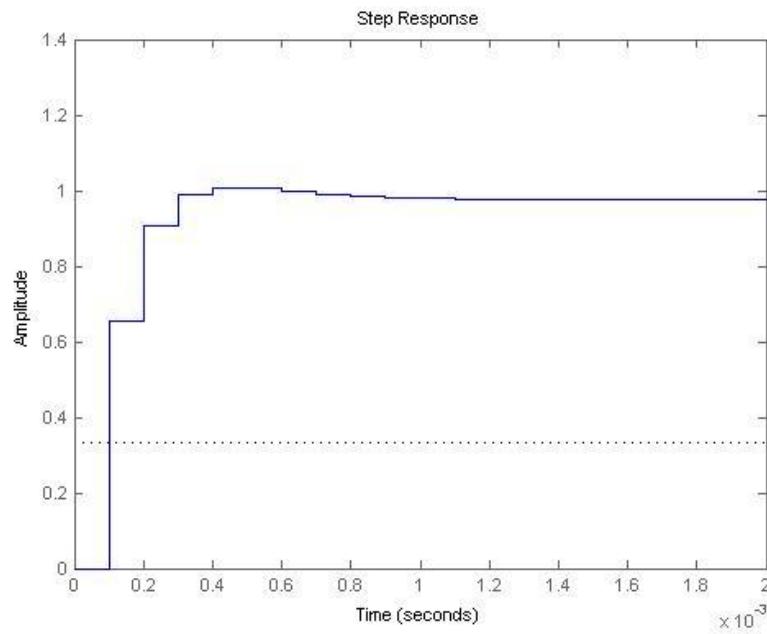
Resolvendo o sistema *** , utilizando o método dos mínimos quadrados, para vários valores de polos desejados diferentes, foi possível perceber que o sistema em malha fechada sempre ficava com um polo em $z = 1$. Sendo assim, adotando $p_3 = 1$ foi possível alocar os outros dois polos exatamente para os locais desejados. Como o sistema apresenta um zero em $z = 1$, o efeito do polo neste mesmo lugar é anulado e o sistema se comporta como um sistema de segunda ordem com um zero.

Depois de várias tentativas, encontramos um controlador que atende bem aos requisitos. Escolhendo $p_1 = p_2 = 0,5169$ (-6600 em s) e $p_3 = 1$, obtemos o seguinte controlador:

$$G_{cd}(z) = \frac{0,6444z - 0,4208}{z - 1}$$

Analizando a resposta a degrau unitário do sistema em malha fechada, pode-se perceber que o sistema apresenta um valor final de 0,975 (erro estático de posição de 2,5%), um sobresinal de 1% e um tempo de assentamento (5%) de 0,3ms.

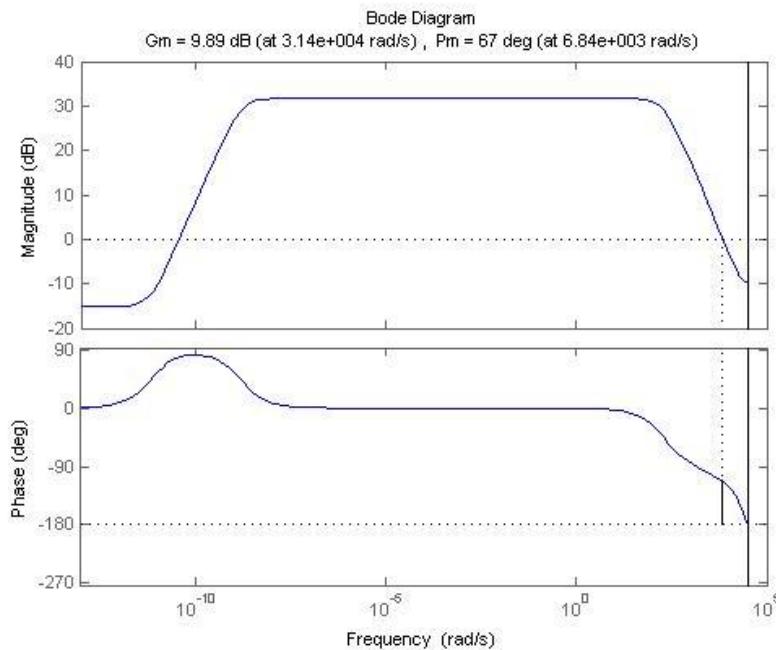
Figura 7 - Resposta a degrau unitário do sistema em malha fechada



Fonte: Própria

Analisando o diagrama de Bode do sistema em malha aberta, obtemos uma margem de ganho de 9,89dB e uma margem de fase de 67° .

Figura 8 - Diagrama de Bode do sistema em malha aberta



Fonte: Própria

Sendo assim, pode-se dizer que o controlador atende aos requisitos do sistema.

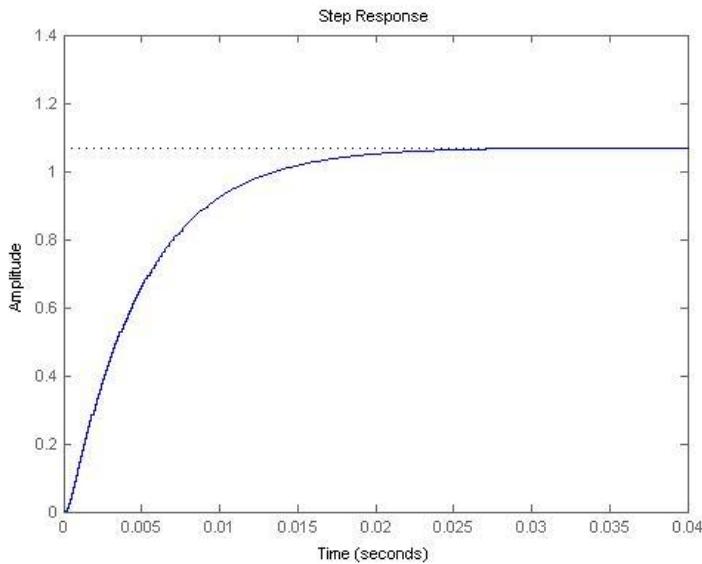
Passando o controlador para tempo contínuo, utilizando o método da equivalência de polos e zeros, chegamos ao seguinte controlador:

$$G_s = \frac{0.5247s + 2236}{s}$$

Ou seja, um ganho proporcional $K_p = 0.5247$ e um ganho integral $K_i = 4261$.

Outro aspecto importante a ser analisado é a rejeição aos distúrbios de torque. Aplicando um degrau unitário em $G_{distd}(z)$, obtemos a seguinte resposta:

Figura 9 - Resposta da planta a um distúrbio degrau unitário (1Nm)



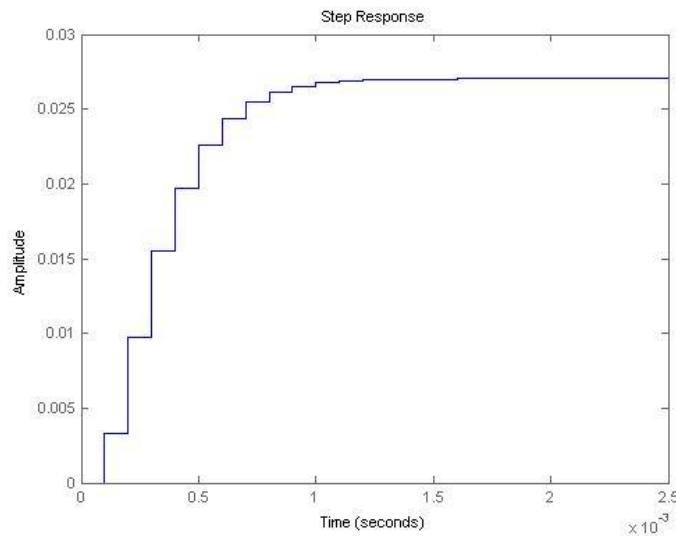
Fonte: Própria

Pode-se concluir que um distúrbio de torque de 1Nm provoca uma corrente indesejada de 1,07A em regime permanente. A função de transferência do distúrbio em malha fechada é obtida utilizando a seguinte expressão:

$$G_{distmfd} \frac{z}{z-1} = \frac{G_{distd} z}{1 + G_{cd} z G_d(z)} \quad (78)$$

Aplicando um degrau unitário de distúrbio no sistema em malha fechada, obtemos a seguinte resposta:

Figura 10 - Resposta do sistema em malha fechada referente a um distúrbio (degrau unitário de 1Nm)



Fonte: Própria

Pode-se observar que, utilizando o controlador projetado, o sistema em malha fechada possui grande rejeição aos distúrbios de torque. A resposta a um distúrbio de 1Nm em regime permanente cai para apenas 27mA, uma redução de aproximadamente 40 vezes em relação à malha aberta.

Todas as simulações foram feitas supondo coeficiente de atrito viscoso $b_m = 0$. Realizando simulações considerando diferentes valores de b_m , é possível concluir que a medida que o atrito viscoso aumenta, menor é o erro estático de posição e maior a rejeição à distúrbios de torque.

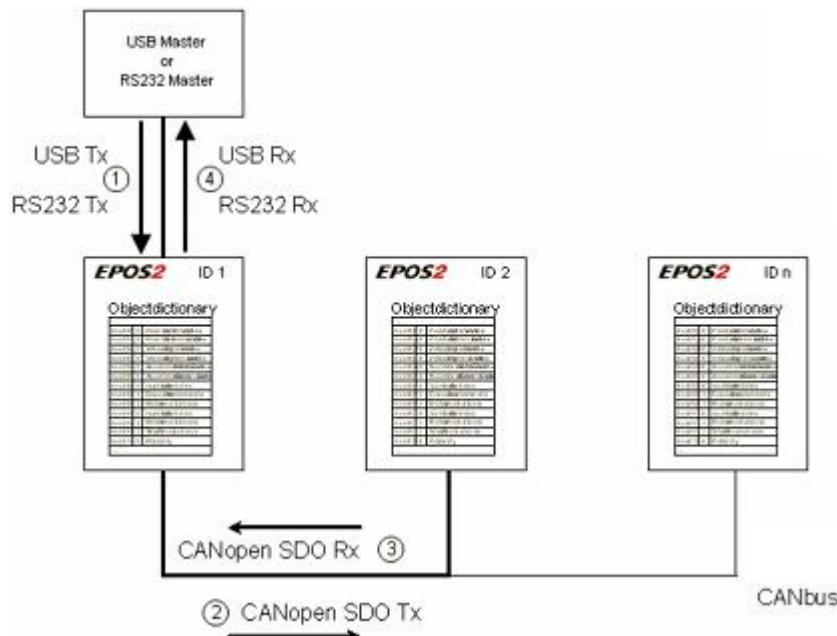
3.2 Rede de Comunicação

Por se tratar de um sistema com interação física do paciente com o mecanismo, a aplicação deve ser feita em tempo real. Assim, a comunicação entre o computador com os microcontroladores, assim como destes com os respectivos motores, deve ser feita com a maior taxa de transferência de dados possível.

Os controladores utilizados possuem interfaces USB, CAN e RS232 para comunicação. Assim, a comunicação do computador com os controladores é feita por um único cabo USB. Este controlador está conectado aos outros controladores por meio de uma rede CAN. Este con-

trolador repassa a informação pela rede CAN caso a instrução mandada não seja endereçada a ele. Tal configuração pode ser vista na Figura 11.

Figura 11 - Estrutura de comunicação



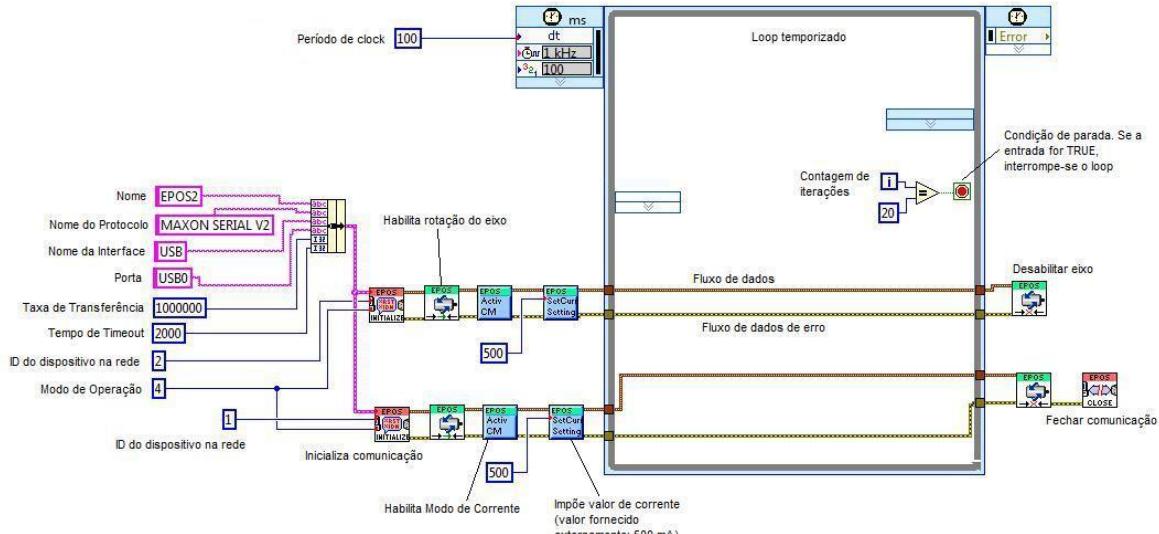
Fonte: EPOS2 Application Notes Collection, Maxon Motors

Tanto a conexão USB como a rede CAN possuem 1 Mb/s de taxa de transferência de dados. Comparado à taxa de comunicação da interface RS232 (115,2 kb/s), esta configuração permite que o controle em tempo real seja executado sem problemas de aquisição/envio de dados.

A transferência de dados do computador para os controladores é feita utilizando o *software* LabVIEW. Este *software* é muito utilizado para aplicações onde a instrumentação é muito presente, com bibliotecas específicas de apresentação de dados. Este *software* permite que sejam inseridos *scripts* desenvolvidos no *software* MATLAB, que foi extensivamente utilizado para validação da modelagem dos motores e mecanismo, assim como simulações das malhas de controle, que serão apresentadas a seguir.

Um programa teste para a realização da comunicação está descrito abaixo:

Figura 12 - Programa-teste desenvolvido no LabVIEW



Fonte: Própria

Este programa-teste apenas impõe aos controladores de ID 1 e 2 (definidos no EPOS Studio) uma corrente de 500 mA, e isto ocorre por 2s (20 iterações, cada uma com duração de 100 ms). Embora simples, este programa realiza com sucesso a comunicação entre o computador e os controladores, permitindo assim que a malha de controle a ser estabelecida seja implementada.

3.3 Controle do Mecanismo

O controle do sistema deve garantir que todos os requisitos necessários para uma terapia correta sejam alcançados e mantidos. Os principais requisitos que o controle deve garantir são:

- Segurança do paciente (estabilidade do sistema);
- Fidelidade à trajetória designada;
- O paciente deve exercer certa força para que o movimento ocorra. Esta força é um parâmetro que depende do nível de intensidade requerido na terapia.

A segurança refere-se ao modo de que o movimento deve ser feito. Não devem ocorrer alterações bruscas de direções no movimento, ou alterações nas amplitudes e direções das forças a serem exercidas pelo paciente. Além disso, o sistema deve ser estável, garantindo a integridade do mecanismo assim como o bem-estar do paciente. A fidelidade à trajetória é necessária

ria para garantir de que a terapia possua máxima eficácia, assim como o controle do valor da força a ser aplicado.

Para garantir que todos os requisitos da terapia sejam atendidos, optou-se por utilizar o controle de impedâncias como arquitetura de controle. Esta estrutura de controle possui como foco a interação de mecanismo com o ambiente (Hogan *et al*, 1985). O objetivo é alterar as características da estrutura (matrizes de inércia, por exemplo) para obter uma resposta dinâmica desejada para a reabilitação (Wang e Yangmin, 2010). Embora necessite de informações mais precisas do mecanismo e de uma malha de controle melhor estruturada, a possibilidade de controle do mecanismo como um todo considerando a interação com o ambiente sugere que seja uma melhor abordagem.

Inicialmente, para efeito de testes e verificação do modelo, foi simulada uma malha de controle por torque computado, baseado nos conceitos apresentados em (Craig, 2005). Decidiu-se pela utilização desta malha de controle por se tratar de uma malha mais simples, obtendo um passo intermediário durante o desenvolvimento do trabalho. Por sua simplicidade, os resultados obtidos com estas simulações serão usados como comparação de resultados, para a validação do resultado final.

3.3.1. Controle por Torque Computado

O controle por torque computado é uma estratégia de controle não-linear muito utilizada em manipuladores em que os parâmetros dinâmicos sofrem significativas variações, seja no tempo ou posição (Piltan *et al*, 2012). Em sistemas reais, as não-linearidades provém do atrito, reduções, sistemas hidráulicos, etc. Estas não-linearidades, geralmente desconhecidas, podem dominar a resposta dinâmica do sistema, impossibilitando o correto controle. Altos ganhos na realimentação são necessários, caso o modelo dinâmico do sistema não seja suficientemente conhecido (Nguten-Toung *et al*, 2008). Com a modelagem apresentada, e com o trabalho já desenvolvido pelo Prof. Dr. Tarcisio Antonio Hess-Coelho (Hess-Coelho *et al*, 2012) e pela simplicidade dos acionamentos, permitem que este controle seja implementado.

Assim, para o controle sugerido, devemos fornecer como entradas para o sistema de controle os ângulos, velocidades angulares e acelerações angulares, respectivamente representadas por $\ddot{\theta}_d, \dot{\theta}_d, \theta_d$.

De acordo com a eq.(57) ,a equação dinâmica do mecanismo, é possível o desacoplamento das equações utilizando a seguinte lei de controle:

$$\begin{aligned}\alpha &= \bar{M} \\ T &= \alpha T' + \beta \\ \beta &= \bar{V}\dot{\theta} + \bar{G} \\ T' &= \ddot{\theta}_d + K_v\dot{\theta}_d + K_p\theta\end{aligned}\quad (79)$$

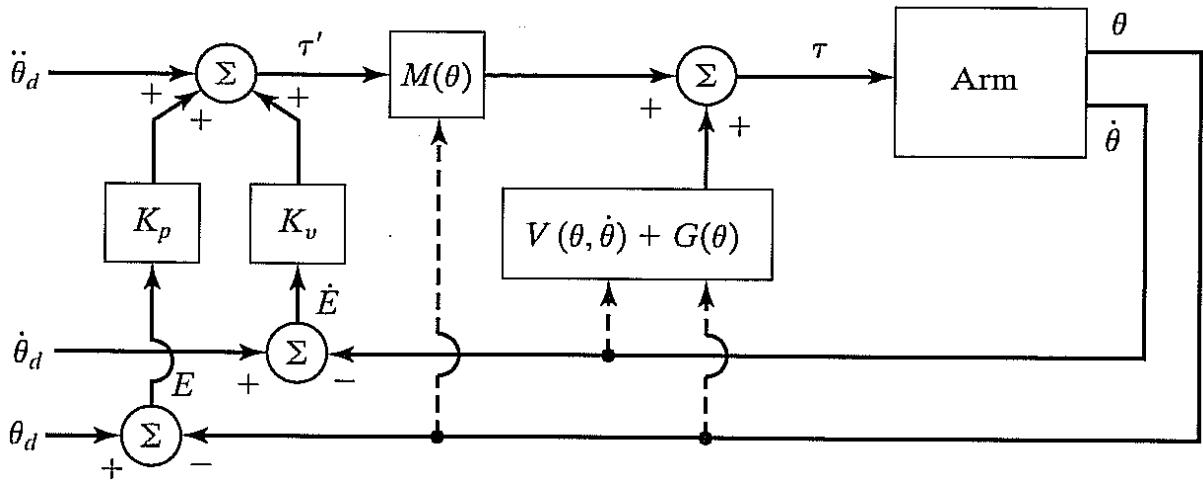
onde

$$E = \theta_d - \theta \quad (80)$$

pode ser definido como o erro entre o ângulo real com o ângulo desejado do motor.

Assim, o sistema de controle descrito é apresentado a Figura 13.

Figura 13 - Sistema de controle utilizada.



Fonte: Adaptado de Craig, 2005.

Com este sistema, e utilizando as equações Eq.(79) e Eq.(80), obtemos a equação de malha fechada:

$$\ddot{E} + K_v\dot{E} + K_pE = 0 \quad (81)$$

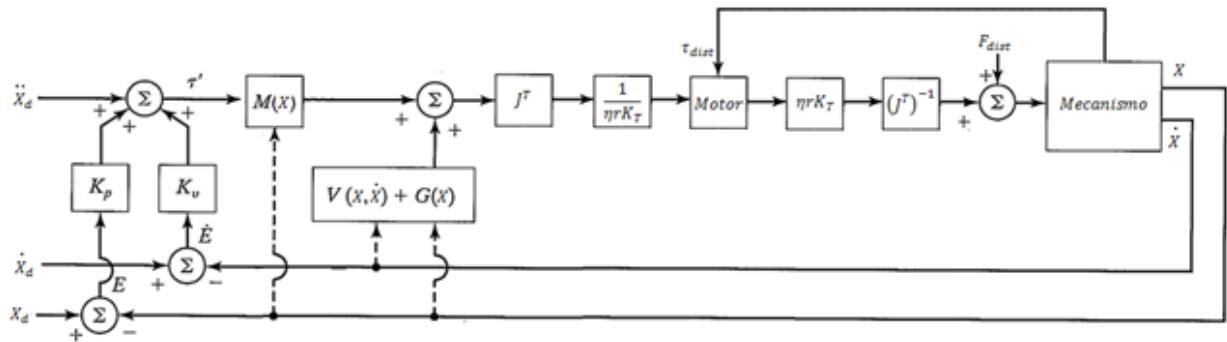
Esta equação pode desacoplar o sistema, apenas definindo as matrizes de ganhos como diagonais. Desacoplando o sistema, pode-se controlar a resposta em cada coordenada separadamente. Assim, pode-se obter uma resposta dinâmica específica para cada coordenada, alterando-a conforme a necessidade. Isso gera grandes vantagens caso este controle seja implementado para a reabilitação. Porém, como não há nenhum controle referente à força a ser aplicada, os ganhos deveriam ser cuidadosamente escolhidos e a força aplicada pelo paciente deveria ser

exatamente como prevista, para que o controle fosse aplicável. Como os usuários do mecanismo estão em reabilitação, não é garantida esta premissa, portanto esta estratégia de controle será utilizada apenas como um passo intermediário, para aplicação e validação do modelo.

3.3.2. Controle de Impedância

O controle de impedâncias será implementado utilizando a mesma estrutura de controle apresentada no controle por torque computado, escolhendo valores convenientes para as entradas X_d , \dot{X}_d , \ddot{X}_d , K_p e K_v . A malha de controle é apresentada na Figura 14.

Figura 14 - Malha de Controle de Impedância



Fonte: Adaptado de Craig, 2005

$$\text{Sendo } J = -J_x J_\theta$$

A equação dinâmica do mecanismo é dada por:

$$MX + VX + G = F \quad (82)$$

Sendo:

$$F = F_{control} + F_{dist} \quad (83)$$

A força $F_{control}$ é a força aplicada à plataforma devida à ação dos atuadores e F_{dist} são as forças de distúrbio aplicadas à plataforma, nesse caso as forças aplicadas pelo paciente que está impondo alguma trajetória à plataforma.

A lei de controle é dada por:

$$F_{ref} = M \cdot X_d + K_v \cdot \dot{X}_d - X + K_p \cdot X_d - X + VX + G \quad (84)$$

Supondo controlador de corrente ideal: $F_{control} = F_{ref}$

Portanto, a equação do sistema em malha fechada é dada por:

$$X - X_d + K_v X - X_d + K_p X - X_d = M^{-1} F_{dist} \quad (85)$$

Impondo $X_d = 0$ e $X_d = 0$, nossa malha fechada fica sendo:

$$X + K_v X + K_p X - X_d = M^{-1} F_{dist} \quad (86)$$

Desta maneira, se K_p e K_v forem diagonais com todos os elementos positivos e $F_{dist} = 0$, podemos enxergar nosso sistema em malha fechada como 3 sistemas massa-mola-amortecedor, com massa unitária, desacoplados. Variando os valores de K_p , K_v e X_d , podemos tornar algumas trajetórias preferenciais a outras. Para ilustrar, vamos supor que deseja-se realizar trajetórias no plano $z = C$, $C \in \mathbb{R}$, paralelas aos eixos x ou ao eixo y , com um distúrbio senoidal (devido aos problemas motores do paciente), também no plano $z = C$, ortogonal à trajetória. Vamos supor também que o movimento no eixo z só tem o intuito de tornar mais confortável a realização da trajetória. Sendo assim, escolhendo os seguintes valores de K_p e K_v :

$$K_p = \begin{matrix} K_{px} & 0 & 0 \\ 0 & K_{py} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad K_v = \begin{matrix} K_{vx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{vy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{vz} \end{matrix} \quad (87)$$

Sabendo que a matriz M do mecanismo apresenta o seguinte formato:

$$M = \begin{matrix} M_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & M_{yy} & M_{zy} \\ 0 & M_{yz} & M_{zz} \end{matrix} \quad (88)$$

Com $K_{px}, K_{py}, K_{vx}, K_{vy}, M_{xx}, M_{yy}, M_{zz} \geq 0$.

Desprezando a aceleração e velocidade na direção z , as equações do sistema em malha fechada ficam no seguinte formato:

$$\begin{aligned} M_{xx} x + K_{vx} x + K_{px}(x - x_d) &= F_x \\ M_{yy} y + K_{vy} y + K_{py}(y - y_d) &= F_y \\ \frac{M_{yz}}{M_{yy}} F_y &= F_z \end{aligned} \quad (89)$$

Supondo um movimento retilíneo paralelo ao eixo x , definimos os seguintes pontos iniciais e finais da trajetória:

$$X_i \ x_i, y_i, z_i \quad X_f \ x_f, y_f, z_i \quad (90)$$

Escolhendo os seguintes valores para as entradas do sistema:

$$X_d = X_i \quad K_{px} = 0 \quad (91)$$

O sistema fica da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} M_{xx}(x + K_{vx}x) &= F_x \\ M_{yy}y + K_{vy}y + K_{py}(y - y_i) &= F_y \\ \frac{M_{yz}}{M_{yy}}F_y &= F_z \end{aligned} \quad (92)$$

Desta maneira, o sistema se comporta com um sistema massa-amortecedor na direção x e um massa-mola-amortecedor na direção y , com a mola não tensionada quando $y = y_i$.

Assim, iremos mostrar a influência dos parâmetros K_{py} e K_{vy} na força necessária para realizar o movimento de distúrbio na direção y (F_y).

Supondo um movimento de distúrbio em y da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y(t) &= A \cos \omega t + y_i \\ \dot{y}(t) &= -A\omega \sin(\omega t) \\ \ddot{y}(t) &= -A\omega^2 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (93)$$

Substituindo em (92):

$$\begin{aligned} M_{yy}(-A\omega^2 \cos \omega t - K_{vy}A\omega \sin(\omega t) + K_{py}A \cos \omega t) &= F_y \\ M_{yy}A \cos \omega t (K_{py} - \omega^2) + \sin \omega t (-K_{vy}\omega) &= F_y \end{aligned} \quad (94)$$

Sendo assim o valor máximo que $|F_y|$ assume é dado por:

$$F_y^{Max} = M_{yy}A \sqrt{K_{vy}\omega^2 + K_{py} - \omega^2} \quad (95)$$

Desta maneira, supondo que existe um valor máximo de força que o usuário consegue fornecer para realizar o movimento de distúrbio, aumentando os valores de K_{py} (para $K_{py} \geq \omega^2$) e K_{vy} podemos diminuir o valor da amplitude do distúrbio.

Quando o usuário chegar ao ponto final da trajetória é só fazer $X_d = X_f$ e mudar os elementos das matrizes K_p e K_v se for o fim do exercício ou se houver alguma mudança na direção do movimento que o usuário deve realizar.

Como o movimento na direção x é completamente independente da direção y (como pode ser observado na equação (92)), a movimentação em trajetórias paralelas ao eixo y com distúrbios paralelos ao eixo x é análoga.

Todas essas conclusões foram tiradas supondo controlador de corrente ideal, o que não é possível na prática. Sendo assim, para que as conclusões obtidas serem válidas é necessário mostrar que, em nosso caso, utilizando o controlador de corrente projetado o comportamento

do sistema em malha fechada é muito próximo do comportamento supondo controlador de corrente ideal, o que será mostrado através de simulações.

3.4 Simulações

3.4.1. Controle por Torque Computado

Para a simulação do controle por torque computado, foi utilizado o *software* LabVIEW. Inicialmente, devem ser definidos os ganhos presentes na eq.(68). Os ganhos utilizados foram:

$$K_p = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad K_v = \begin{matrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{matrix} \quad (96)$$

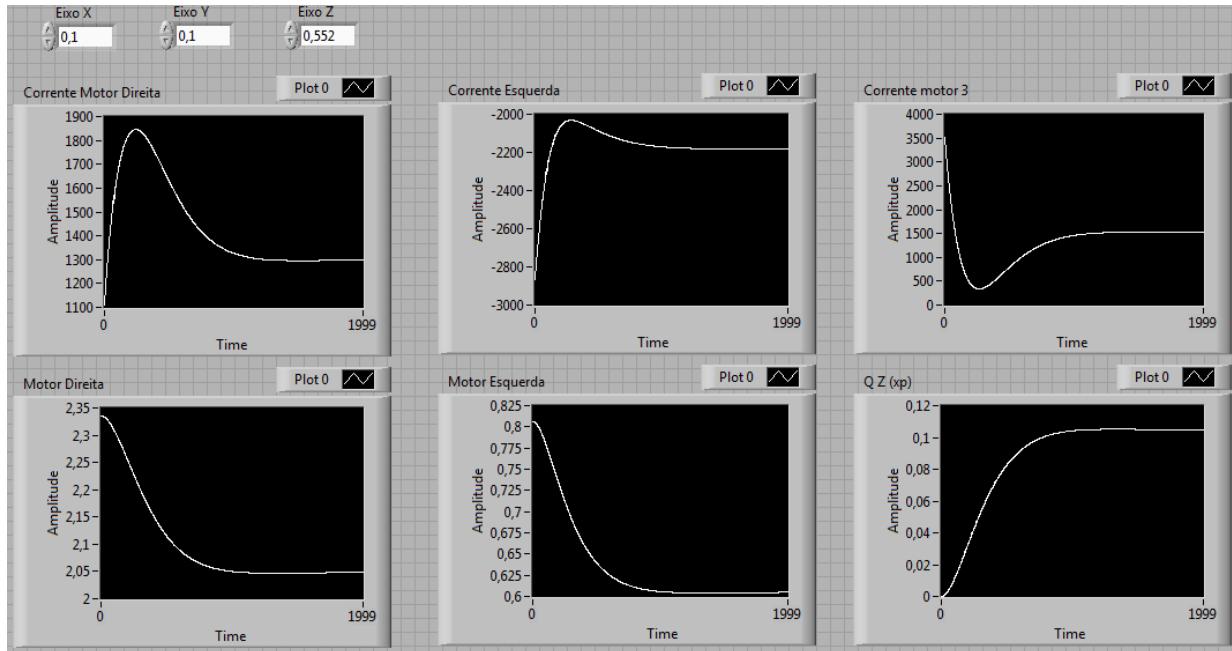
Este sistema de controle é passível de gerar erros em regime permanente. Assim, é incluído um termo integral para que este erro seja anulado, resultando na equação em malha fechada representada abaixo. A matriz de ganho deste termo (K_i), também diagonal, possui seus valores nas coordenadas iguais a 5.

$$\ddot{E} + K_v \dot{E} + K_p E + K_i \int E = 0 \quad (97)$$

Primeiramente, simulou-se um movimento nos eixos X e Y, mantendo o eixo Z constante. A velocidade e aceleração iniciais são nulas, enquanto que a posição inicial é $x_p, y_p, z_p = (0; 0; 0,552)$, de acordo com o modelo apresentado anteriormente. A posição final desejada é $x_p, y_p, z_p = (0,1; 0,1; 0,552)$, com velocidade e aceleração finais nulas.

Utilização a modelagem previamente apresentada, foram obtidos os seguintes resultados:

Figura 15 - Resultado da simulação nos eixos X e Y, utilizando a malha de controle por torque computado (utilizando o software LabVIEW)



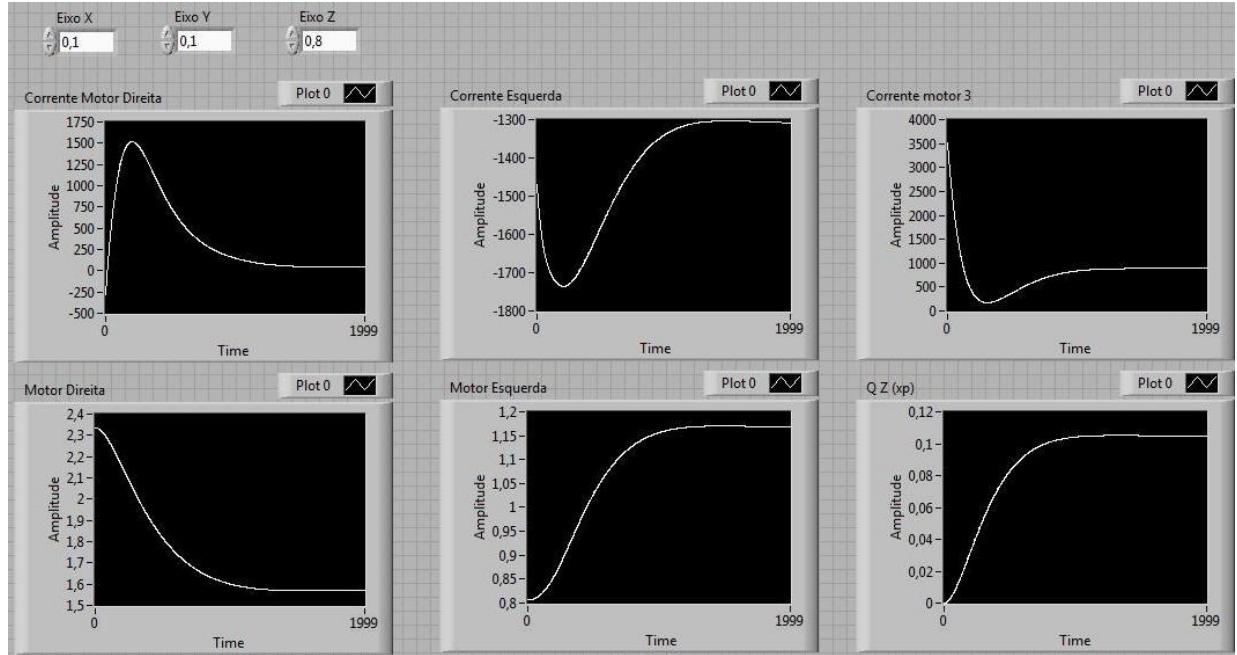
Fonte: Própria

Os valores de “Eixo X”, “Eixo Y” e “Eixo Z” definem a posição na qual o efetuador do mecanismo deve chegar. Os gráficos mostram os ângulos correspondentes nos motores em cada braço do mecanismo (“Motor Direita”, presente no ponto O_1 apresentado na modelagem; e “Motor Esquerda”, no ponto O_2), assim como do motor que está no eixo desacoplado do sistema. Também são apresentadas as correntes enviadas a cada motor. Como se trata de uma simulação, não há o *feedback* da posição e velocidade advinda dos *encoders* dos motores. Portanto, para obter estes parâmetros, foi utilizado o Método de Runge-Kutta para a resolução numérica da equação diferencial resultante da modelagem apresentada.

Observando inicialmente a posição do efetuador, nota-se que a posição foi alcançada. Os ganhos foram escolhidos para minimizar o sobressinal, mantendo o tempo de assentamento em níveis aceitáveis. Realizando a cinemática inversa, nota-se que a posição final foi alcançada com sucesso. Observando a evolução das correntes dos motores de acordo com a posição do efetuador, nota-se as interações do mecanismo modelado, como as correntes não-nulas com o mecanismo parado, o que indica que os motores estão sustentando o peso do mecanismo.

Simulou-se agora o movimento nos três eixos: a nova posição final é $x_p, y_p, z_p = 0,1; 0,1; 0,8$, mantendo velocidade e aceleração finais nulas. O resultado da simulação é apresentado na Figura 16.

Figura 16 - Resultado da simulação nos três eixos de deslocamento, utilizando a malha de controle por torque computado (utilizando o software LabVIEW)



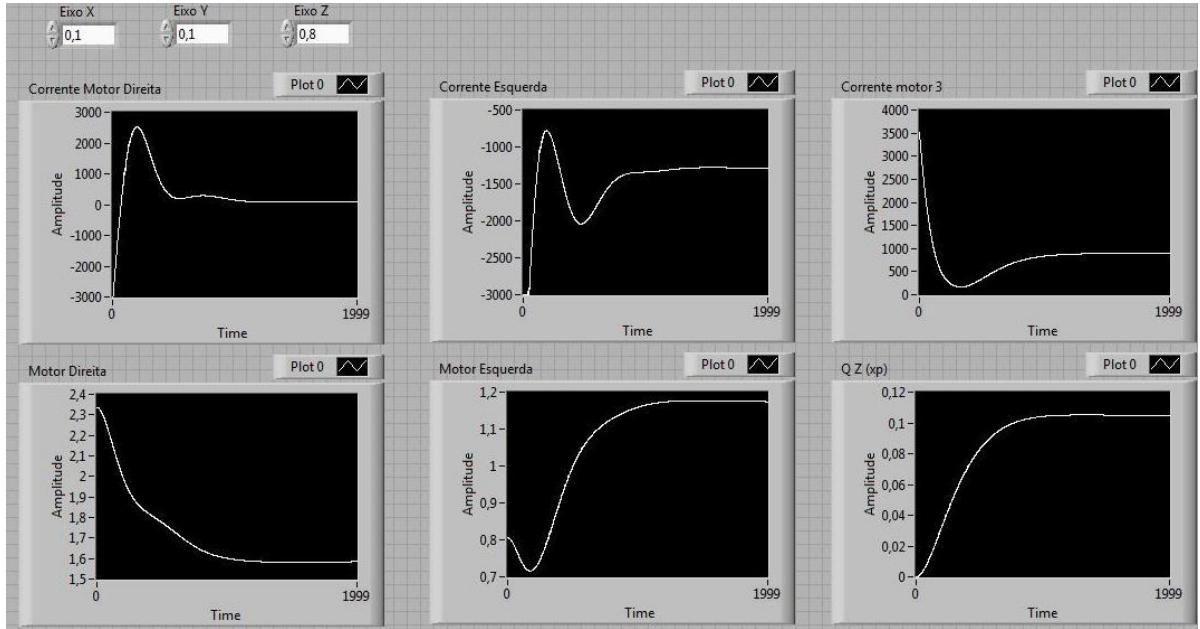
Fonte: Própria

Mesmo com a movimentação no terceiro eixo, novamente a posição final é alcançada. Os ganhos utilizados na primeira simulação foram mantidos, e geraram resultados similares (referente ao sobressinal e tempo de assentamento obtido). Referente às correntes nos motores, o comportamento foi o mesmo observado na simulação anterior.

A fim de verificar a influência dos ganhos, alterou-se o ganho K_p (eq.(98)). Com o ganho alterado, repetiu-se a simulação anterior. O resultado é apresentado na Figura 17

$$K_p = \begin{matrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 130 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{matrix} \quad (98)$$

Figura 17 - Simulação com movimento nos três eixos, com novo ganho K_p



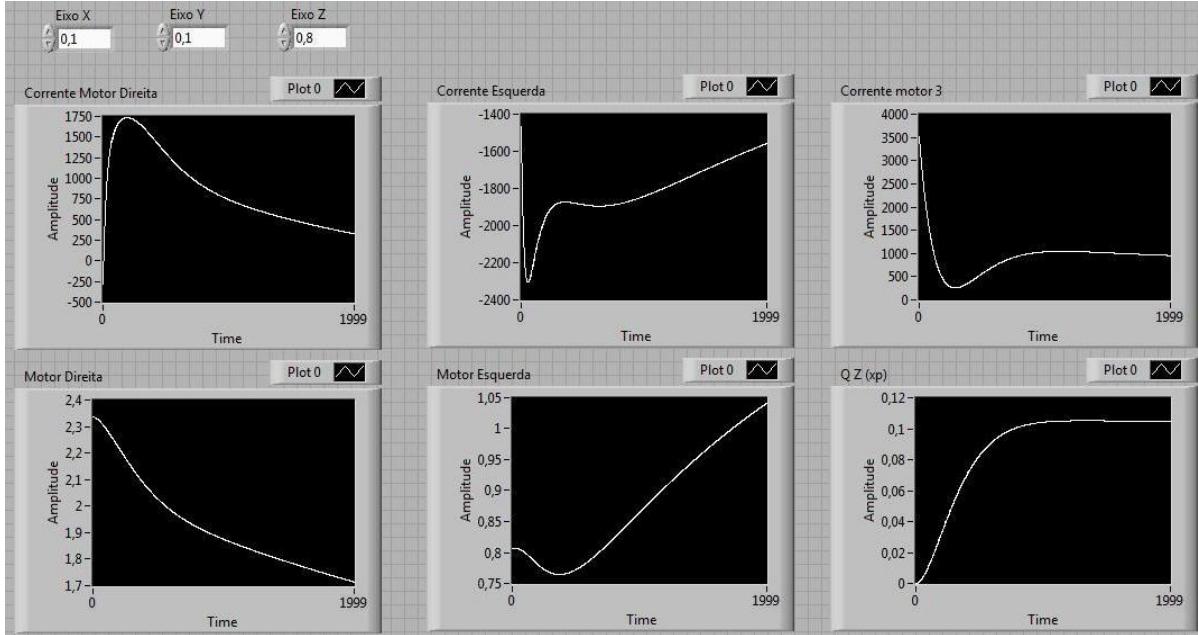
Fonte: Própria

Comparando com o resultado obtido na Figura 16, nota-se que o aumento do ganho proporcional gera degradação da resposta dinâmica do sistema, com o surgimento do sobressinal, já que, com o alto valor, a corrente inicial torna-se muito alta. Mesmo assim, o sistema ainda continua estável. Aqui também é verificado o desacoplamento entre as coordenadas, já que a alteração de ganho nas outras coordenadas não influenciou a resposta dinâmica da coordenada X.

Por fim, alterou-se o ganho K_v para verificação de sua influência. (eq.(99)). A simulação associada a este novo valor está apresentada na Figura 18.

$$K_v = \begin{matrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{matrix} \quad (99)$$

Figura 18 - Simulação com movimento nos três eixos, com novo ganho K_p



Fonte: Própria

Com o aumento do ganho, espera-se de que o amortecimento da coordenada Z aumente significativamente. O amortecimento foi tanto de que o mecanismo não alcançou a resposta no limite de iterações fixada (2000 iterações). Mais uma vez, é mostrado o desacoplamento da coordenada X frente às demais, já que sua resposta dinâmica continua a mesma.

Com isto, verificamos de que a malha de controle por torque computado foi efetivamente implementada.

3.4.2. Controle de Impedância

Iremos simular o movimento retilíneo do mecanismo no eixo x partindo do ponto $X_i = (0; 0; 0,552)$ até o ponto $X_f = (0,300; 0; 0,552)$ utilizando uma interpolação polinomial de quinto grau, de modo que as velocidades e acelerações no início e no fim da trajetória sejam nulas, somado a um distúrbio senoidal em y com $\omega = 3 \text{ rad/s}$ e $A = 0,020\text{m}$. São utilizadas as seguintes entradas na lei de controle:

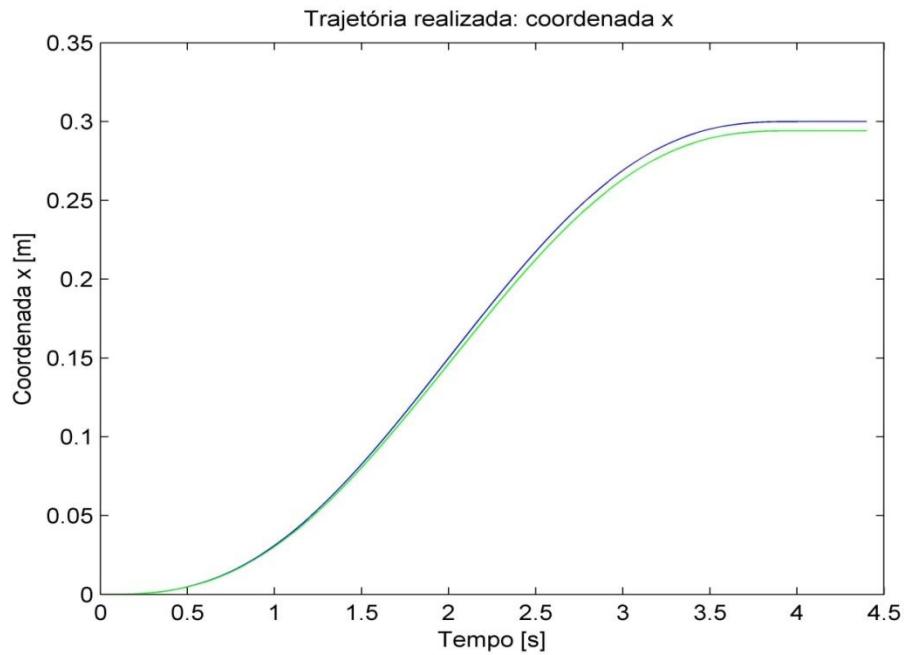
$$K_p = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad K_v = \begin{matrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{matrix} \quad X_d = (0; 0; 0,552) \quad (100)$$

Para mostrar que a análise utilizando a suposição de controlador de corrente ideal ainda é válida, realizamos o seguinte procedimento:

- Calculamos a força necessária (F) e os torques equivalentes aplicados nos atuadores (τ_{dist}) para o mecanismo realizar a trajetória desejada;
- Calculamos a força de referência (F_{ref}) dada pela lei de controle quando o mecanismo realiza tal trajetória;
- A partir da força de referência, calculamos a corrente de referência (I_{ref}) que será utilizada na malha dos motores;
- Utilizamos a corrente de referência e os torques causados pelo movimento do mecanismo (distúrbios de torque) para calcular a corrente de saída dos motores (I_{out}) através das equações de diferença do sistema em malha fechada;
- Calculamos os torques aplicados pelo motor e a força equivalente aplicada à plataforma ($F_{controle}$);
- Calculamos a força realizada pelo usuário para realizar tal movimento (F_{dist}) através da diferença entre F e $F_{controle}$;
- Realizamos a simulação dinâmica direta, supondo controlador ideal de corrente, utilizando F_{dist} calculado;
- Comparamos a trajetória imposta ao mecanismo com a obtida na simulação dinâmica direta.

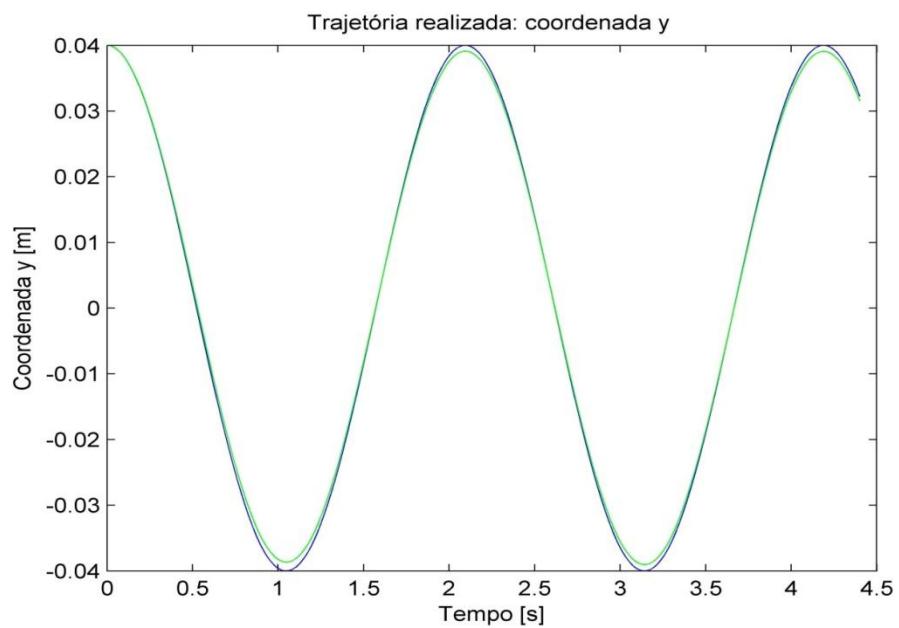
As simulações foram feitas utilizando o *software* MATLAB. Assim, obtemos os seguintes resultados (Figuras 19, 20 e 21):

Figura 19 - Trajetória realizada na coordenada x



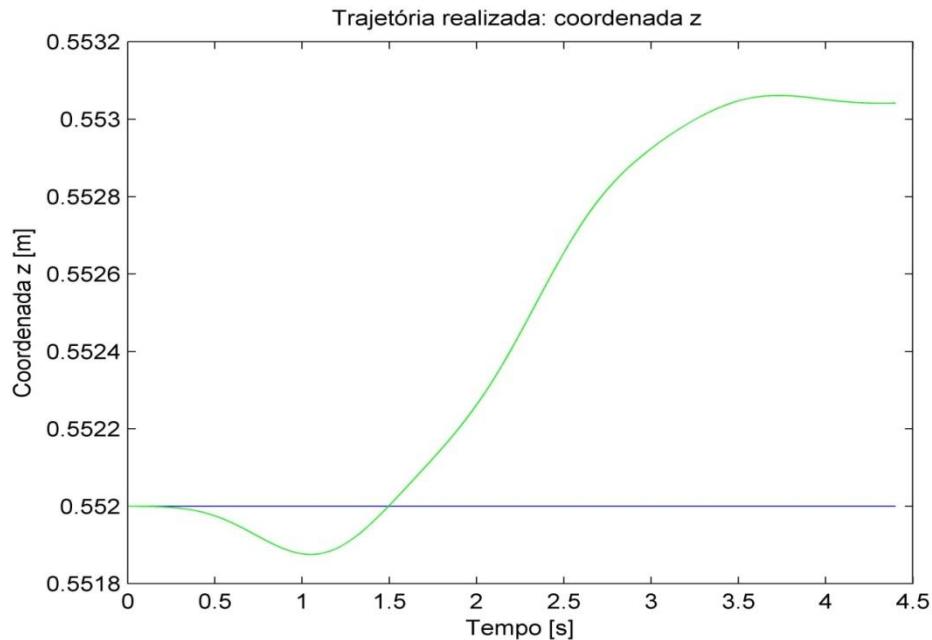
Fonte: Própria

Figura 20 - Trajetória realizada na coordenada y



Fonte: Própria

Figura 21 - Trajetória realizada na coordenada z



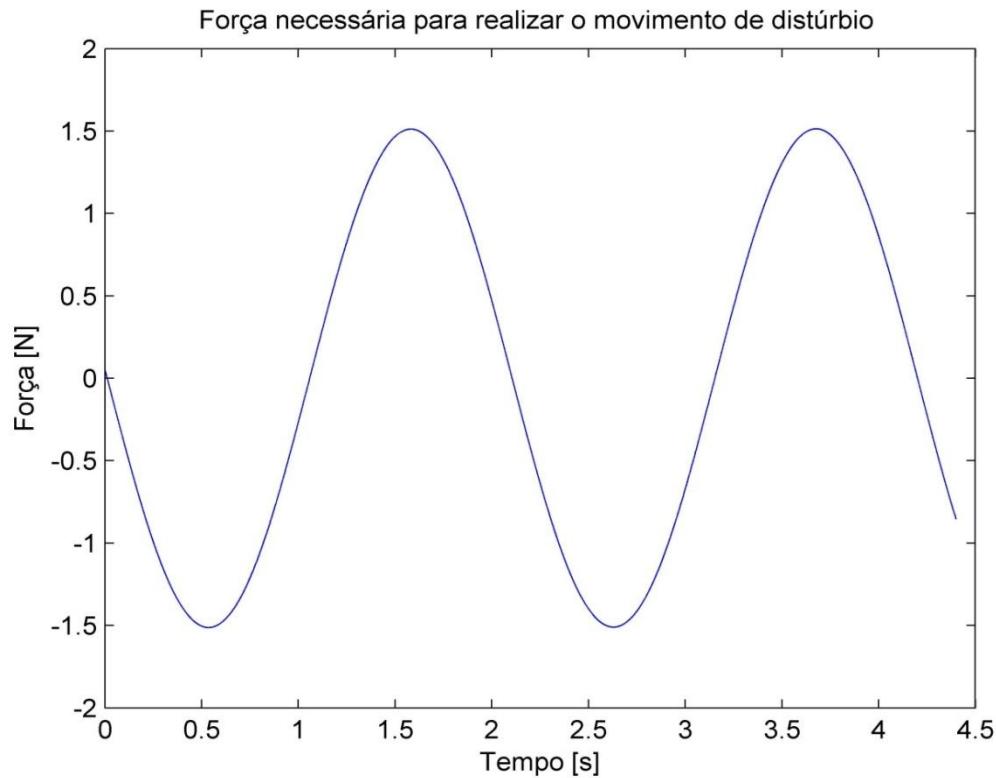
Fonte: Própria

Os gráficos em azul representam a trajetória imposta ao sistema e os em verde representam o movimento obtido pela simulação dinâmica direta, supondo controlador de corrente ideal, utilizando F_{dist} calculado.

A partir dos resultados obtidos, é possível concluir que o sistema com controlador de corrente projetado apresenta comportamento muito similar ao sistema com controlador de corrente ideal, visto que a diferença entre as trajetórias obtidas é pequena. Assim, podemos esperar que o desenvolvimento feito anteriormente seja válido.

Vamos agora analisar o gráfico da força necessária para o usuário realizar o movimento de distúrbio (componente y de F_{dist}), apresentado na Figura 22:

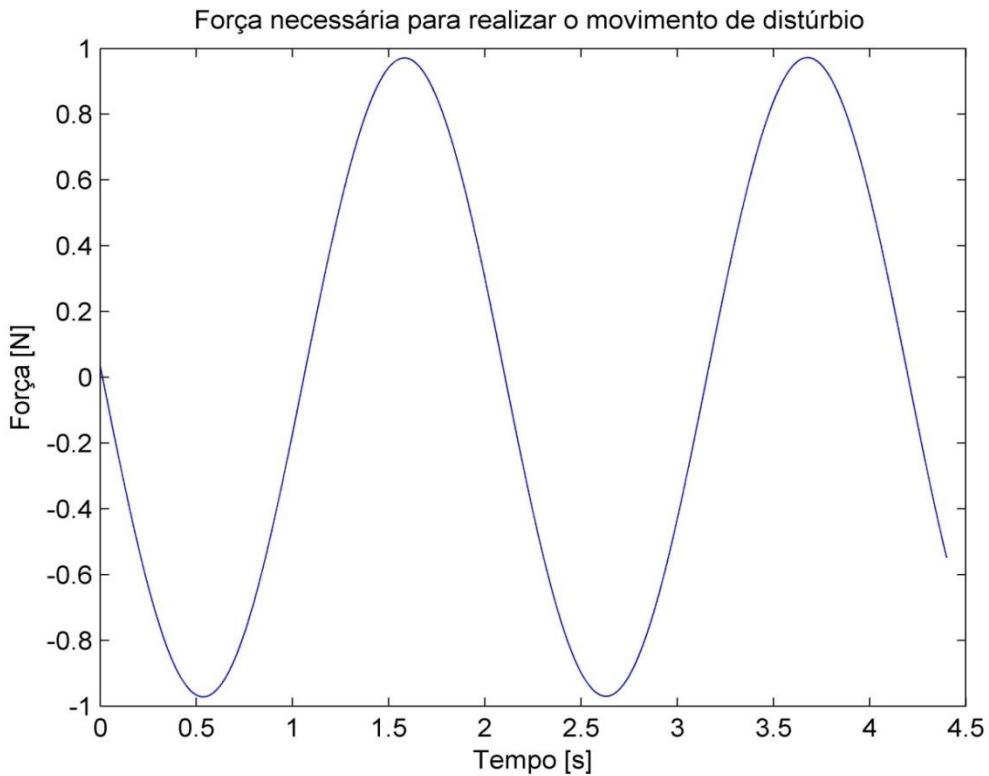
Figura 22 - Variação da força a ser feita pelo usuário



Fonte: Própria

Supondo que o usuário consiga realizar uma força máxima de apenas $1N$ para realizar o movimento de distúrbio, é possível calcular o valor máximo da amplitude da oscilação do movimento de distúrbio possível de ser realizado (supondo que não haja alteração na frequência), utilizando a equação (95). Fazendo isso, obtemos um valor de máxima amplitude $A = 0,0257m$. Rodando a simulação para este novo valor de amplitude, obtemos o seguinte resultado (Figura 23):

Figura 23 – Variação da força a ser aplicada pelo usuário, com restrição no valor máximo (1 N)



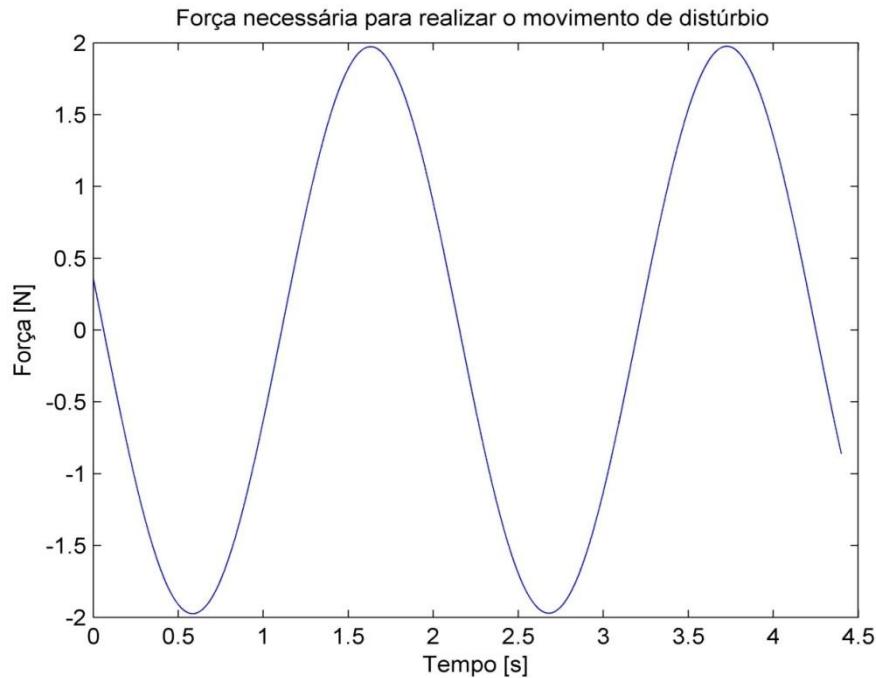
Fonte: Própria

Obtemos um valor de F_y^{Max} muito próximo previsto pela equação (95).

Outro resultado importante obtido através das simulações, é que como já havíamos previsto, a força necessária para realizar o movimento aumenta à medida que aumentamos K_{py} e K_{vy} . Utilizando a amplitude utilizada na última simulação ($A = 0,0257m$) e dobrando os valores de K_{py} e K_{vy} , podemos prever utilizando a equação (95) que o valor máximo $|F_y|$ será $2,03N$, o que pode ser verificado através da simulação (Figura 24). Dobrando mais uma vez os valores de K_{py} e K_{vy} , pode-se esperar uma força máxima de $4,13N$, o que condiz com o resultado ilustrado na Figura 25.

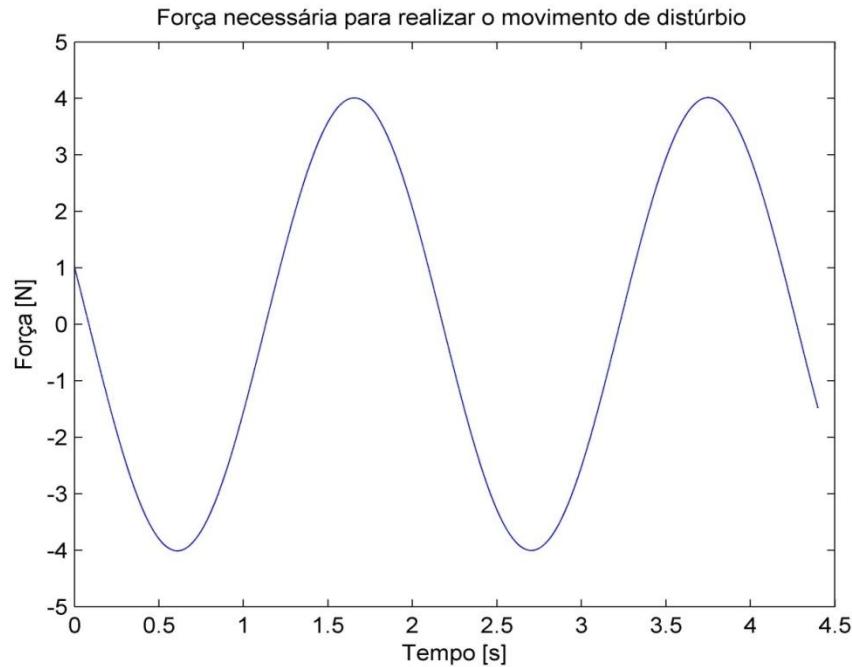
Assim, mostramos que utilizando a estrutura de controle apresentada é possível impor direções preferenciais e diminuir os movimentos indesejados controlando indiretamente a força necessária para realiza-los.

Figura 24 - Variação da força a ser aplicada pelo usuário, com K_{py} e K_{vy} duas vezes maiores



Fonte: Própria

Figura 25 – Variação da força a ser aplicada pelo usuário, com K_{py} e K_{vy} quatro vezes maiores

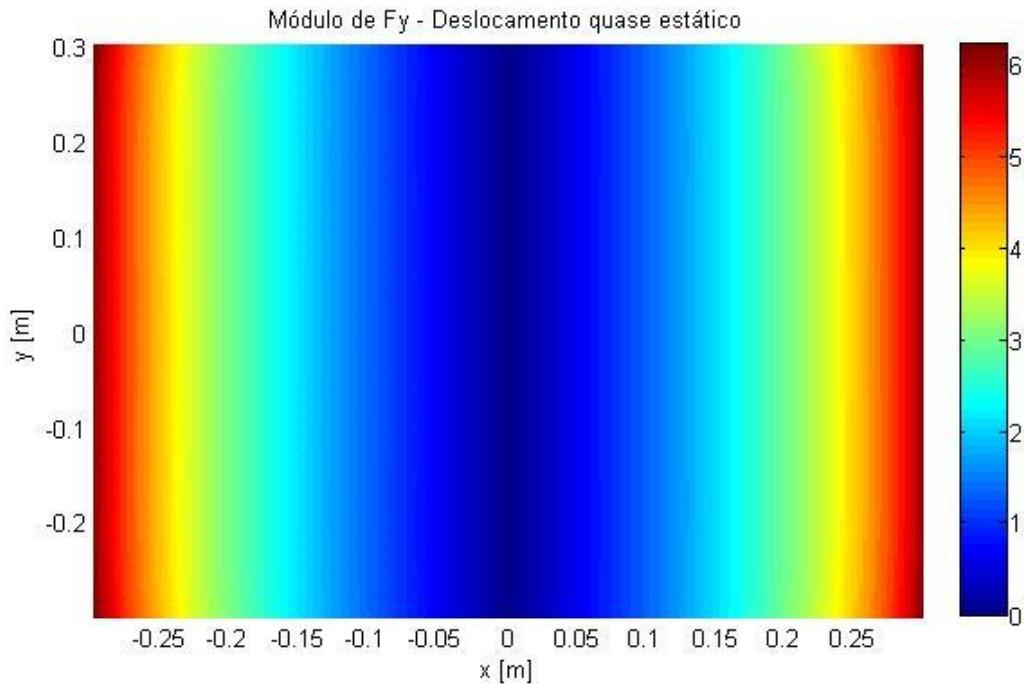


Fonte: Própria

Outra análise importante a ser feita em nosso trabalho é a do deslocamento quase estático. A partir dela podemos mostrar a força que deve ser realizada pelo usuário para realizar trajetórias em velocidades consideravelmente baixas.

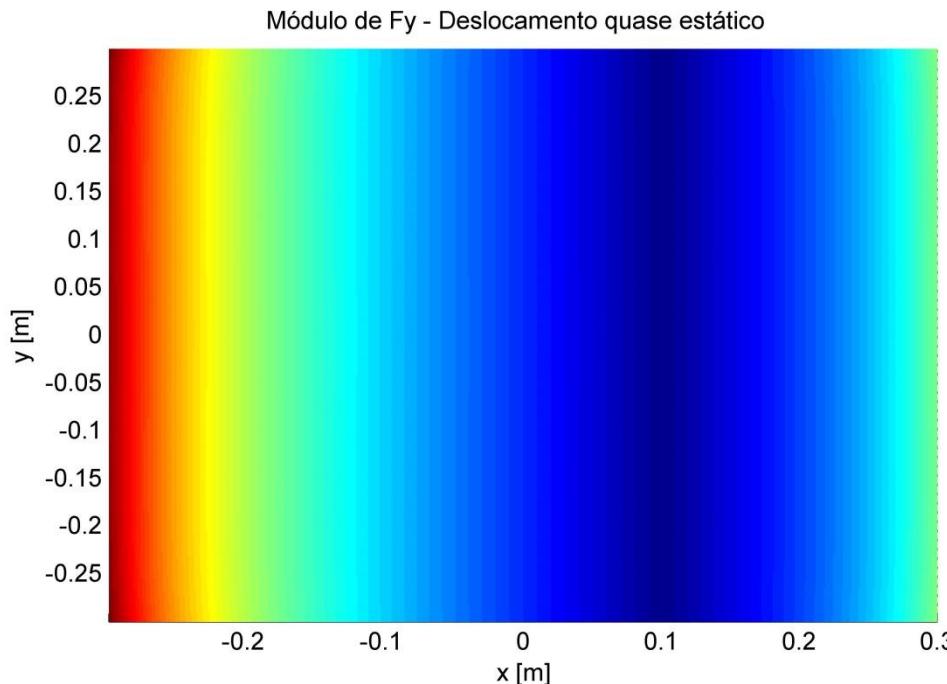
Escolhendo $K_{px} = 0$ e $K_{py} = 10$, devemos esperar que o sistema se comporte aproximadamente como um sistema massa-mola na direção y e sem restrições na direção x . Assim, fixando $z = 0.552m$, podemos encontrar o módulo de F_y em função das coordenadas x e y :

Figura 26 – Força em Newtons a ser aplicada pelo usuário, para $y_d = 0$



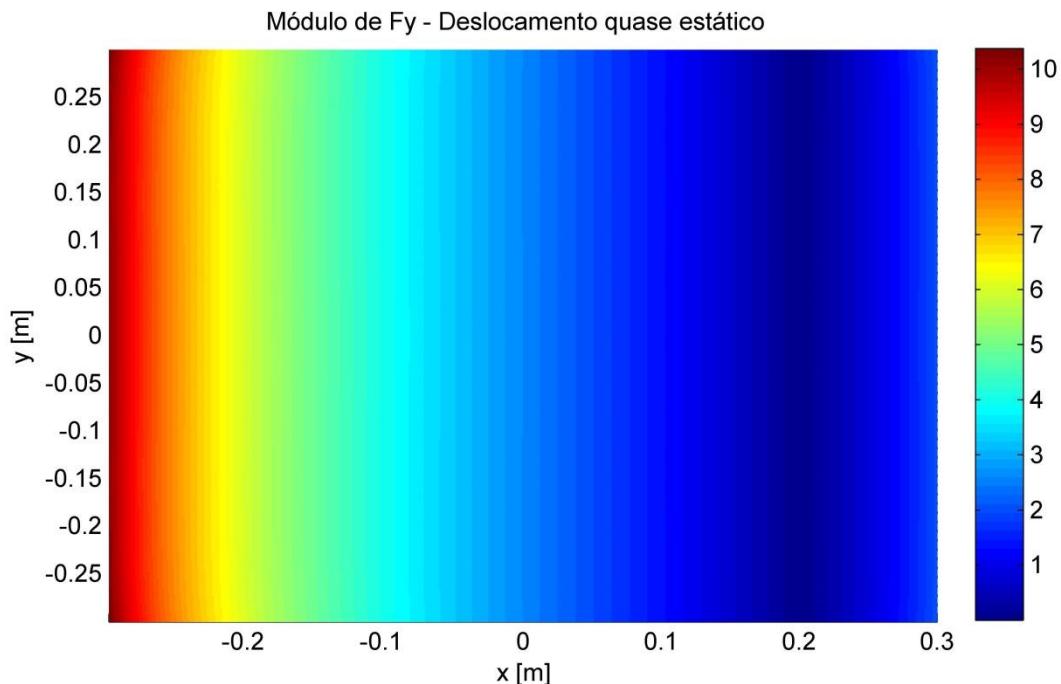
Fonte: Própria

Figura 27 – Força em Newtons a ser aplicada pelo usuário para $y_d = 0,100\text{m}$



Fonte: Própria

Figura 28 – Força em Newtons a ser aplicada pelo usuário para $y_d = 0,200\text{m}$



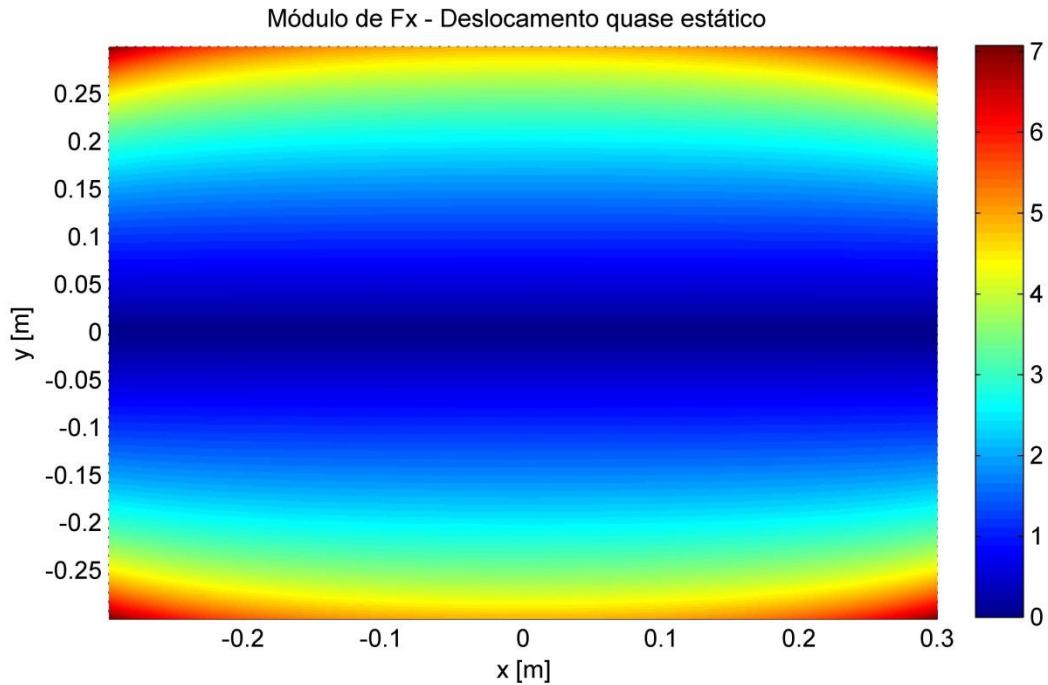
Fonte: Própria

Pela equação (89), pode-se concluir que a componente x da força nesse (deslocamento quase estático e $K_{px} = 0$) caso será nula.

Vamos agora fazer uma análise similar, desta vez com $K_{px} = 10$ e $K_{py} = 0$ (Figuras 29, 30 e 31).

Analogamente ao caso anterior, temos que neste caso $F_y = 0$. Assim, mostramos que utilizando a estrutura de controle apresentada é possível impor direções preferenciais e diminuir os movimentos indesejados controlando indiretamente a força necessária para realiza-los.

Figura 299 – Força em Newtons a ser aplicada pelo usuário para $x_d = 0$



Fonte: Própria

Figura 30 - Força em Newtons a ser aplicada pelo usuário para $x_d = 0,100\text{m}$

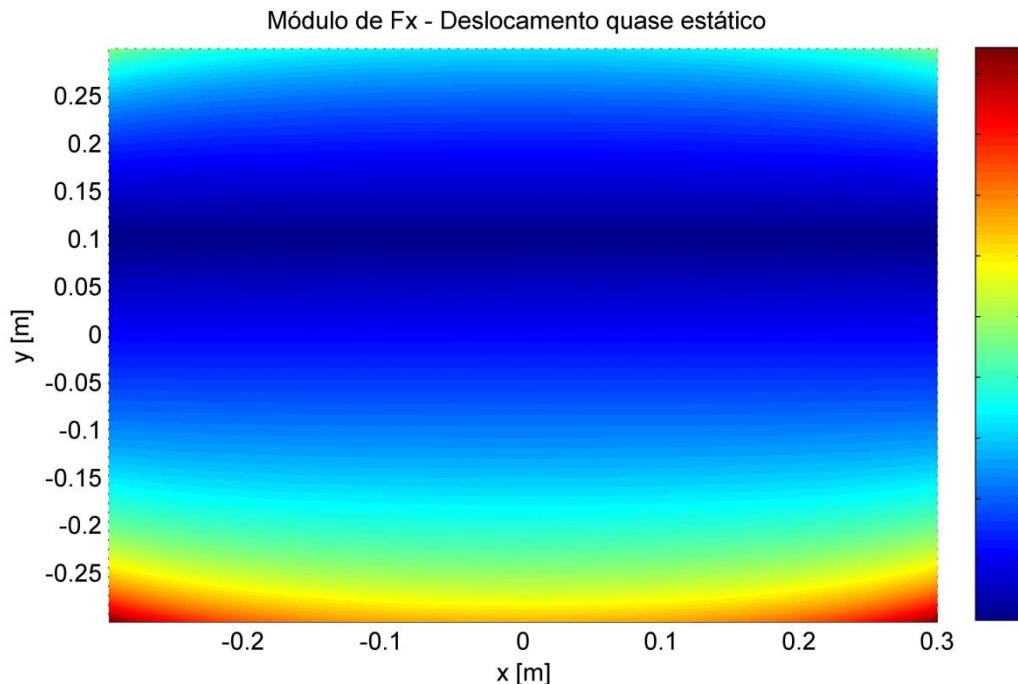
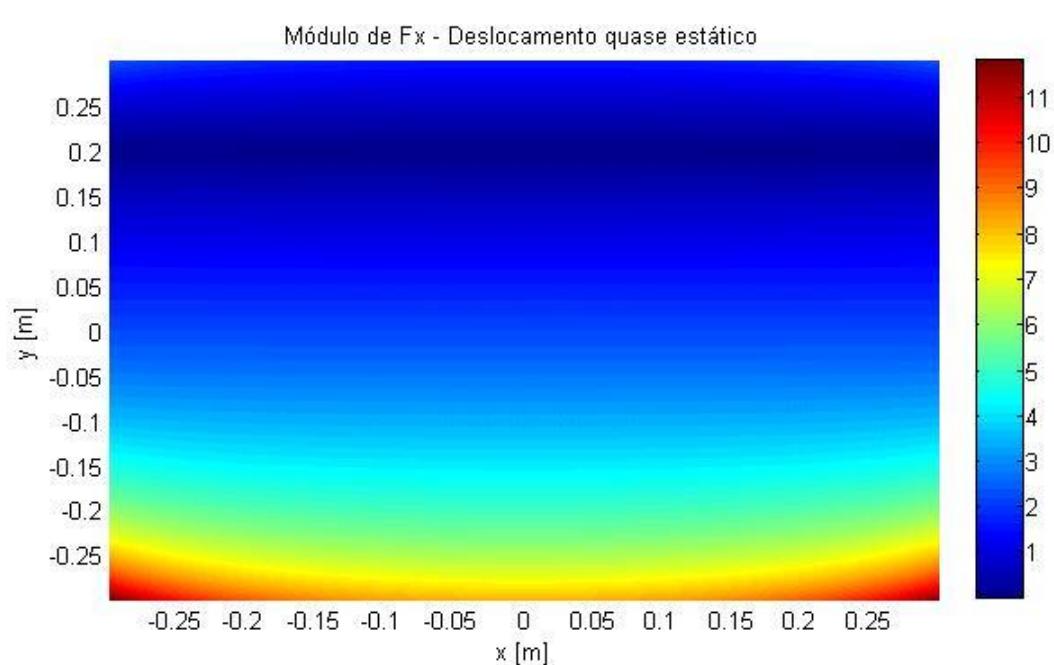


Figura 31 - Força em Newtons a ser aplicada pelo usuário para $x_d = 0,200\text{m}$



4. DISCUSSÕES

Os resultados das simulações apresentadas mostram que os resultados esperados foram devidamente alcançados. As variações nas entradas de cada simulação ou então nos parâmetros de controle permitem a observação de diferentes situações, sendo que estas podem ocorrer em testes no mecanismo.

Sobre o controle por torque computado, é possível a visualização da variação da corrente em cada atuador do sistema, juntamente com a variação da posição do efetuador do mecanismo. Assim, verifica-se que a dinâmica do sistema é considerada, já que os atuadores devem compensar os esforços associados à força gravitacional, por exemplo. Já no controle de impedância, como o foco é a interação do mecanismo com o ambiente (no caso apresentado neste trabalho, o ambiente seria o paciente a ser tratado), erros na posição do efetuador podem ser tolerados, desde que não sacrificuem a segurança do paciente. Estes erros podem até ser benéficos, já que permitem que o paciente possua certa liberdade para acomodação. Porém, erros na força a ser aplicada pelo paciente não podem ser tolerados, e as simulações mostram que este erro não ocorre.

5. CONCLUSÕES

Após o levantamento dos requisitos necessários para a terapia, buscou-se estratégias de controle que fossem capazes de atender estes requisitos. Assim, iniciou-se a pesquisa na literatura, obtendo assim as estratégias previamente apresentadas. Paralelamente a isto, também buscou-se na literatura experiências anteriores neste tema para entendimento do *know-how* já adquirido nesta área. O resultado desta pesquisa pode ser visto no Capítulo 2, Estado da Arte.

As estratégias de controle escolhidas e aqui apresentadas demandam que o sistema seja bastante conhecido, pois erros de modelagem geram grandes variações da resposta dinâmica do sistema, tendo enorme importância no controle do sistema. Assim, seguiu-se com a modelagem matemática do sistema, abrangendo parte mecânica e elétrica do sistema. Finalmente, com o conhecimento adquirido, foram enunciadas as malhas de controle possíveis, e as respectivas simulações numéricas. Esta linha de pensamento seguida no trabalho visa a minimização de quaisquer erros, gerando assim uma base sólida de conhecimento, que pode ser aproveitada em futuros trabalhos utilizando o mesmo mecanismo e acionamentos.

Em relação às estratégias de controle, estas possuíam objetivos diferentes: em relação ao controle por torque computado, sua utilização no trabalho é apenas para validação e comparação. Ou seja, foi utilizado como um passo intermediário no trabalho, e o sucesso na simulação permitiu que o trabalho fosse desenvolvido. Já o controle de impedância é de suma importância, já que sua principal característica é a interação do sistema com o ambiente, o que está totalmente alinhada com os requisitos necessários para a reabilitação. As simulações associadas mostram que os resultados esperados em cada estratégia de controle foram alcançados, possibilitando que testes no mecanismo real sejam efetuados com uma base teórica já estabelecida, mitigando possíveis problemas a serem enfrentados.

Porém, as simulações não permitem afirmar que a estratégia apresentada é correta e atenderá todos os requisitos da terapia. Como previamente dito, incertezas no modelo do sistema são críticas para o controle do mesmo, e o desconhecimento de certos fatores, como o atrito nos atuadores e aproximações nos parâmetros mecânicos do sistema, podem ser muito críticos, impossibilitando a terapia. Assim, torna-se crucial de que sejam realizados testes no mecanismo, a fim de corroborar as informações presentes neste trabalho.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BONITZ, R.; HSIA, T., 1996. Internal Force-based Impedance Control for Cooperating Manipulators, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 12, No. 1, p. 78-89.
- BURGAR, C.G.; LUM, P.S.; SHOR, P.C.; VAN DER LOOS, H.F.M., 2000. Development of robots for rehabilitation therapy: the Palo Alto VA/Stanford experience, *Journal of Rehabilitation R&D*, Vol. 37, No.6, p. 663-673.
- CRAIG, J.J., 2005. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc.
- DENÈVE, A., MOUGHAMIR, S., AFILAL, L., ZAYTOON, J., 2008. Control system design of a 3-DOF upper limbs rehabilitation robot, *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, v.89 n.2, p.202-214.
- DIETZ, V., NEF, T., RYMER, W. Z., 2012. *Neurorehabilitation Technology*. London ; New York: Springer.
- HESS-COELHO, T. A. ; FORNER-CORDERO, A. ; ALMEIDA, R. Z. H. ; ROSSI, L., 2012. Development of a robotic platform for the upper limb rehabilitation, *5th Workshop in Applied Robotics and Automation (Robocontrol)*.
- HOGAN, N.; KREBS, H.I.; CHARNNARONG, J.; SRIKRISHNA, P.; SHARON, A., 1992. MIT-MANUS: a workstation for manual therapy and training. I, *Robot and Human Communication, 1992. Proceedings., IEEE International Workshop on*, vol., no., pp.161-165.
- HOGAN, N, 1985. Impedance control: An approach to manipulation: Parts i, ii, iii," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, vol.107, pp.1.
- MING-SHAUNG, JU; LIN, C.-C.K.; DONG-HUANG LIN; H., I.-S.; SHU-MIN CHEN, 2005. "A rehabilitation robot with force-position hybrid fuzzy controller: hybrid fuzzy control of rehabilitation robot," *Neural Systems and Rehabilitation Engineering, IEEE Transactions on*, vol.13, no.3, pp.349,358
- NEF, T.; MIHELJ, M.; COLOMBO, G.; RIENER, R., 2006. "ARMin - robot for rehabilitation of the upper extremities," *Robotics and Automation, 2006. ICRA 2006. Proceedings 2006 IEEE International Conference on*, vol., no., pp.3152,3157

NGUYEN-TUONG, D.; PETERS, J. 2008. Learning robot dynamics for computed torque control using local gaussian processes regression. *Proceedings of the 2008 ECSIS Symposium on Learning and Adaptive Behaviors for Robotic Systems*, p. 59-64.

ORSINO, R.M.M., 2012. *Aprimoramento de metodologias para a modelagem de sistemas mecânicos multicorpos, agregando abordagens da teoria de mecanismos e sistemas robóticos*. Monografia, Doutorado em Engenharia Mecânica, Escola Politécnica, USP, São Paulo.

PILTAN, F ; BOROOMAND, B; JAHD, A.; REZAIE, H., *Performance-Based Adaptive Gradient Descent Optimal Coefficient Fuzzy Sliding Mode Methodology*, IJISA, vol.4, no.11, pp.40-52, 2012.

UNIVERSITY HOSPITAL, NEWARK, NEW JERSEY. *Stroke Statistics: Stroke Center at University Hospital, Newark, New Jersey*. Disponível em: <<http://www.theuniversityhospital.com/stroke/stats.htm>>. Acesso em Junho, 2013.

VAN DE HEL, P.; DRIESSEN, B.J.F.; ODERWALD, M.P.; COOTE, S.; STOKES, E., 2001 Gentle/s: Robot mediated therapy for stroke patients in a virtual world makes exercising more enjoyable and effective, *Assistive technology - added value to the quality of life AAATE'01*, IOS Press Amsterdam C. Marincek et al. pp.256-261.

WANG, J.; LI, Y., 2010. Hybrid impedance control of a 3-DOF robotic arm used for rehabilitation treatment, *Automation Science and Engineering (CASE), 2010 IEEE Conference on*, vol., no., pp.768,773, 21-24.

WORLD HEART FEDERATION, *Stroke*. Disponível em: <<http://www.world-heart-federation.org/cardiovascular-health/stroke/>>. Acesso em Junho, 2013.