Departamento de Engenharia Metalúrgica e de Materiais
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Trabalho de Formatura 1999
PMT 594

Precificação de Opções com Volatilidade Estocástica através de Simulação de Monte Carlo.

NºUSP: 745561
Prof. Orientador: Marcelo A. Martorano

Índice.

1. OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é implementar um modelo matemático para precificação de opções, a partir da técnica de Monte Carlo, considerando a volatilidade estocástica. O preço da opção fornecido pelo modelo em função da razão entre o preço à vista (*S*) e o preço de exercício (*E*) da ação foi analisado para diversos parametros, a saber, tempo para o vencimento da opção e volatilidade da volatilidade do retorno dos preços.

1.1. Lista dos Principais Símbolos Utilizados no Texto.

S: Preço da ação(ativo objeto) no mercado à vista.

E: Preço de exercício da opção.

σ : Volatilidade (desvio padrão).

ξ : Volatilidade da volatilidade(desvio padrão da série de desvio padrão).

r: Taxa de juros livre de risco.

ε : número aleatório retirado de uma distribuição Normal de média zero e desvio padrão igual a 1.

dz: Processo de Wiener.

μ : Tendência instantânea.

ρ : Correlação.

2. INTRODUÇÃO

OPERAÇÕES COM OPÇÕES:

Opção é o direito de uma parte de comprar ou vender a outra parte, até determinada data, uma quantidade definida de ações a um preço fixo. Nesse mercado são negociados direitos, isto é, o investidor adquire o direito de possuir determinada quantidade de ações a um preço predeterminado, pagando por isso um prêmio. Podemos ilustrar de uma melhor maneira através do seguinte exemplo:

No dia 02/xx as opções de compra estavam sendo negociadas pelo preço de $ 5,00 (C=$5,00), com preço de exercício de $ 10,00 (E= $10,00). No dia 10/xx a Ação objeto estava sendo negociada à $ 20,00. Nesse caso o investidor exerce seu direito no mercado de Opções. Em 02/xx adquire-se 10.000 Opções de compra a preço de $ 5,00 (C= $5,00) com preço de exercício $ 10,00 (E= $ 10,00). Com vencimento no dia 10/xx (T=6 dias Úteis) .Lembrando que cada opção de compra dá o direito de adquirir uma ação.

No dia 10/xx a Ação objeto dessa Opção de compra era negociada a $ 20,00. O investidor resolve exercer seu direito, o que resulta em:Preço de custo do investidor: Preço de Exercício: $ 10,00 + Preço da Opção de compra: $ 5,00 = $15,00. Sendo o preço no mercado a Vista igual a $ 20,00, resultará no seguinte resultado: Preço no Mercado a Vista: $20,00 – Preço de Custo Para o investidor : $ 5,00 = Lucro de $ 5,00.

A tabela a seguir dá uma visão geral do ganho ou perda nesse tipo de operação (compra/ venda).

Obs: Não foi considerado o custo da corretagem que incide sobre essa operação.

Prêmio Preço da Opção de Compra	Preço de Exercício	Preço no Mercado a Vista	Lucro/Perda
$ 5,00	$ 10,00	$ 9,00	$ -5,00
$ 5,00	$ 10,00	$ 8,00	$ -5,00
$ 5,00	$ 10,00	$ 10,00	$ -5,00
$ 5,00	$ 10,00	$ 15,00	$ 0,00
$ 5,00	$ 10,00	$ 20,00	$ 5,00

Tabela 1: Resultado de operações com opções.

Nota-se que o prejuízo é limitado a \$ 5,00, valor que o investidor pagou para adquirir determinado número de (lote) de ações. Quando o preço no Mercado a Vista (S) não é superior ao Prêmio mais o preço de Exercício (C + E), o Investidor não exercerá seu direito.

Vimos que no exemplo acima o valor da opção foi de \$ 5,00, para um preço de ação de \$ 20,00, contudo este foi somente um exemplo para permitir o funcionamento mecânico deste mercado. A principal motivação deste trabalho é exatamente o valor que deve ser precificada a opção para uma dado preço de ação no mercado a vista. O problema de precificação de opções e de outros derivativos é um problema relativamente novo e que vem contando com muitos avanços nos últimos 25 anos. A primeira coisa a ser observada é a grande complexidade do assunto tratado, onde entre outros a utilização de ferramentas matemáticas, observação dos fatos e bom senso são essenciais. Qualidades estas que devem ser inerentes a um engenheiro para resolução de problemas que aparecem durante a sua trajetória profissional. Nortar-se-á que para resoluções de muitos dos problemas levantados utilizaremos conceitos já adquiridos durante o curso de engenharia, sendo que o propósito (produto) final é diferente, mas processos de pesquisa e desenvolvimento praticamente iguais.

3. Revisão da Literatura

Para compreensão deste trabalho é fundamentalmente necessário conhecer os principias modelos existentes na literatura. Para isto, torna-se fundamental conhecer-se o mínimo necessário sobre processos estocásticos e suas aplicações em modelagem financeira. Estes conceitos serão apresentados a seguir.

3.1. MODELO DE COMPORTAMENTO DO PREÇO DE UMA AÇÃO

Um modo simplificado de definição, com pouco rigor matemático é dizer que qualquer variável cujo valor muda com o tempo de uma maneira incerta é dita seguir um Processo Estocástico . Um Processo Estocástico pode ser classificado como contínuo sobre o tempo ou como discreto sobre o tempo. Um processo discreto no tempo é aquele onde o valor da variável pode somente mudar em pontos fixos sobre o tempo, enquanto um P.E contínuo é aquele onde as mudanças podem ocorrer sobre todo o intervalo de tempo. Processo Estocásticos podem também serem classificados como de variável contínua ou discreta, com conceito análogo ao acima apresentado.

3.1.1. PORPRIEDADES DE MARKOV.

Um processo de Markov é um tipo particular de processo estocástico onde o valor presente da variável é o único fator relevante para predizer o futuro, isto é, a história passada desta variável e o caminho que o valor presente foi determinado são irrelevantes[3].

Assume-se que os preços das ações seguem um processo de Markov. Suponha que o preço de uma ação da IBM possui neste instante um valor de $100. Se o preço deste ativo segue um processo de Markov, nossa previsão para o futuro não deve ser afetada pelo o preço de uma semana, um mês ou um ano atrás. A única informação relevante é o fato de que agora o preço é $100. Predições para o futuro são incertas e devem ser expressas em termos de uma distribuição de probabilidades. Deste modo, a propriedade de Markov implica que a distribuição de probabilidades do preço da ação em qualquer tempo futuro depende somente do preço de $100[3].

A propriedade de Markov é consistente com a forma fraca da "eficiência de mercado"[3]. Isto significa que o preço atual da ação implica que todas as informações passadas já estejam contidas no presente. É a competição existente no mercado que costuma assegurar esta forma fraca de "eficiência de mercado". O fato é que há muitos investidores observando o mercado acionário de perto e ao mesmo tempo tentado obter lucro, fato este que leva à situação em que o preço das ações a qualquer tempo confiscam as informações dos preços passados.

3.1.2 PROCESSOS DE WIENER.

Modelos de comportamento dos preços de ações são usualmente expressos em termos do que é conhecido como processos de Wiener. Um processo de Wiener é um tipo particular do processo estocástico de Markov[3]. Tem sido utilizado em Física para descrever o movimento de uma partícula que está sujeita a um grande número de pequenos choques moleculares e que são comumente referidos como movimento Browniano.

O comportamento de uma variável , z, que segue um processo de Wiener pode ser entendida pela consideração das mudanças no seu valor em pequenos intervalos de tempo. Considere um pequeno intervalo de tempo de magnitude Δt e definimos Δz como a mudança em z durante Δt. há duas propriedades básicas que Δz deve possuir para z seguir um processo de Wiener.

Propriedade 1

Δz é relacionado com Δt pela equação

$$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{1}$$

onde ε é um número aleatório, obtido de uma distribuição normal padronizada com média média 0 e variância 1.

Propriedade 2

Os valores de Δz para dois pequenos e diferentes intervalos de tempo Δt são independentes. Segue da propriedade 1 que Δz possui uma distribuição normal com média 0, desvio padrão $\sqrt{\Delta t}$, e variância Δt. A propriedade 2 implica que z segue um processo de Markov.

Considere agora um aumento no valor de z durante um período de tempo relativamente longo, T. denotaremos por $z(T) - z(0)$, que pode ser estimado como a soma dos incrementos em z em N pequenos intervalos de tempo de magnitude Δt, onde $N=(T/\Delta t)$.

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \tag{2}$$

onde $\varepsilon i(i=1,2,\ldots N)$ são amostras randômicas da distribuição normal padronizada. Da propriedade 2 os ε_i's são independentes. Segue da equação (2) que $z(T) - z(0)$ é normalmente distribuído com média 0, desvio padrão $\sqrt{T}$, e variância $N\Delta t=T$.

Então, em qualquer intervalo de tempo de magnitude Δt, o aumento no valor da variável que segue um processo de Wiener é normalmente distribuída com média zero e desvio padrão $T^{1/2}$. Portanto deve estar claro por que Δz é definido como produto de ε e $\Delta t^{1/2}$ ao invés do produto de ε e Δt. Variâncias são aditivas para distribuições normalmente distribuídas, enquanto que o desvio padrão não segue esta propriedade. Fazendo, deste modo, definir o processo estocástico como aquele que a variância ,ao invés do desvio padrão, das mudanças é proporcional ao comprimento do intervalo de tempo considerado. Pela figura 1 podemos observar o comportamento de uma variável que segue um processo de Wiener.

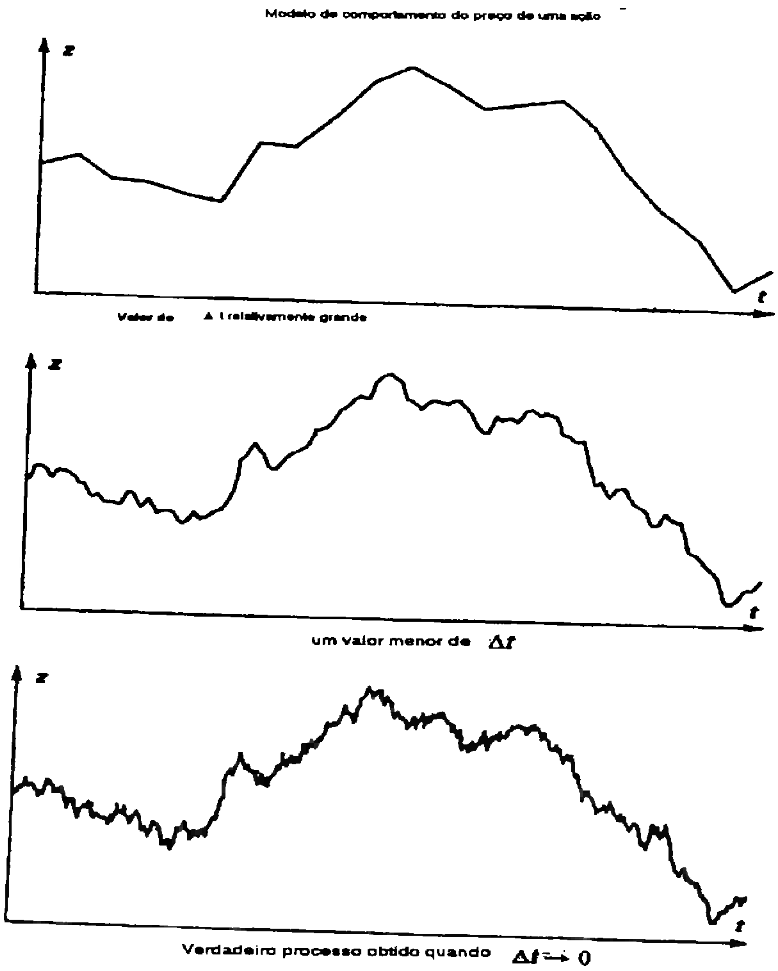

Figura 1 PROCESSO DE WIENER QUANDO $\Delta t \longrightarrow 0$

3.1.3. PROCESSO DE WIENER GENERALIZADO.

O básico do processo de Wiener que vem sendo desenvolvido possui uma "taxa de crescimento" zero e uma taxa de variância igual a 1.0 (um). A taxa média de crescimento significa que o valor esperado de z em qualquer ponto do futuro é igual ao seu valor corrente. A taxa de variância 1.0 significa que a variância de mudança em z num intervalo de tempo T é 1.0xT. Já um processo de Wiener generalizado para a variável x pode ser definido em termos de dz como segue[3]:

$$dx = a\,dt + b\,dz \qquad (3)$$

onde a e b são constantes. Num pequeno intervalo de tempo Δt, a mudança do valor de x, Δx, pela equação (1) e (3) é dado por:

$$\Delta x = a\,\Delta t + \varepsilon \Delta z \qquad (3.1)$$

onde, como antes, ε é uma variável aleatória com distribuição normal padronizada.

Então Δx possui uma distribuição normal com média $a\Delta t$, Desvio Padrão $b\sqrt{\Delta t}$, e variância $b^2\Delta t$.

Argumentos similares demonstram que a mudança no valor da variável x em qualquer intervalo de tempo T é normalmente distribuído com média aT, desvio padrão $b\sqrt{T}$ E variância b^2T. Então o processo de Wiener generalizado dado pela equação (3) possui uma "taxa de crescimento médio" de a e uma taxa de variância de b^2 conforme ilustrado na figura 2, a seguir:

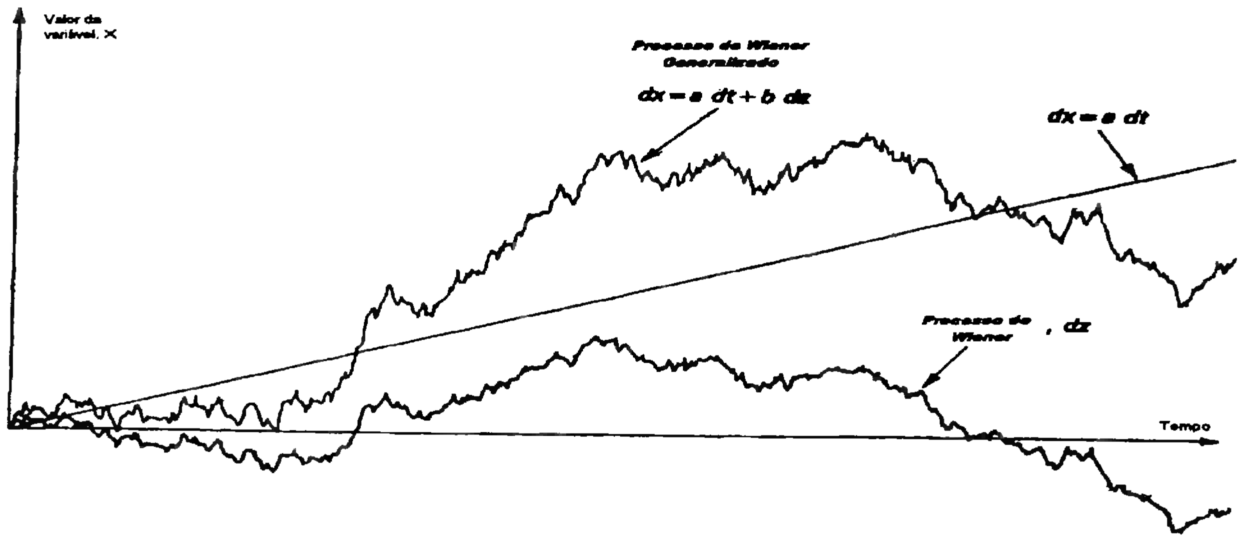

Figura 2 Processo de Wiener Generalizado $a = 0.3$, $b = 1.5$

3.1.4. PROCESSO DE ITO

É o processo de Wiener generalizado onde os parâmetros a e b são funções da variável x e do tempo t. Algebricamente pode ser expresso da seguinte maneira

$$dx = a\,(x,\,t)\,dt + b\,(x,\,t)\,dz \qquad (4)$$

3.1.5. PROCESSO DE PRECIFICAÇÃO DE AÇÕES.

Ao mostrar que o preço das ações segue um processo de Wiener generalizado, deixou-se de lado um importante fator, isto é, este modelo falha em capturar o aspecto chave do preço de uma ação. Isto é devido ao fato que a porcentagem de retorno esperada e requerida, pelo investidor, é independente do preço da ação. Se um investidor requer uma taxa de retorno de 15 % por ano quando o preço da ação é \$ 10, este mesmo investidor pede a mesma taxa de retorno anual quando o preço do ativo for $50.

Claramente a constante "taxa média de retomo esperada" é inapropriada e necessita ser trocada pela suposição que o retomo esperado, expresso como uma proporção do preço da ação, é constante. Esta última afirmação implica que se S é o preço da ação, a taxa de retomo esperada em S é μS, para um dado parâmetro μ. Então num pequeno intervalo de tempo, Δt, o incremento esperado em S é $\mu S \Delta t$. o parâmetro , μ, é a taxa média de retomo esperada no preço da ação, expressa em forma decimal.

Se a taxa de variância do preço da ação é sempre zero, este modelo implica em:

$$dS=\mu\, S\, dt$$

o que implica em $S = S0 \, Exp(\mu t)$ (5)

onde S0 é o preço inicial da ação. A equação (5) mostra que , quando a taxa de variância é igual a zero, o preço da ação cresce a uma taxa, μ, continuamente composta por unidade de tempo, tornando-se, deste modo, um processo determinístico.

Na prática o preço da ação exibe volatilidade. Uma suposição razoável é que a variância da percentagem de retomo em um curto período de tempo, Δt, é a mesma independentemente do preço da ação[3]. Definimos σ^2 como a taxa de variância da mudança proporcional no preço da ação. Isto significa que $\sigma^2 \Delta t$ é a variância da mudança proporcional no preço da ação num período de tempo Δt e que $\sigma^2 S^2 \Delta t$ é a variância da mudança atual no preço da ação, S, durante Δt. A taxa instantânea de variância é portanto $\sigma^2 S^2$.

Estes argumentos sugerem que S pode ser representado por um processo de Ito que possui uma taxa média de retomo μS e uma taxa instantânea de variância $\sigma^2 S^2$. Podendo, então, da seguinte forma:

$$ds = \mu\, S\, dt + \sigma\, S\, dz \qquad (6)$$

A equação (6) é o modelo mais vastamente usado do comportamento do preço de ações[3,4,5]. A variável σ é usualmente referida como sendo a volatilidade do preço do ativo e a variável μ é a taxa de retomo esperada. Uma versão discreta da equação (6) é:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad (7)$$

onde ΔS é a mudança do preço da ação relativo a S, num curto intervalo de tempo,Δt; ε é um número aleatório retirado de uma distribuição normal padronizada. μ é a taxa de retorno esperado por unidade de tempo da ação e o parâmetro σ é a volatilidade do preço da ação. Estes dois últimos parâmetros são assumidamente constantes.

A equação (7) mostra que $\Delta S / S$ é normalmente distribuído com média $\mu\Delta t$ e desvio padrão $\sigma\sqrt{\Delta t}$

Em outras palavras:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \Phi\left(\mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}\right) \quad (8)$$

onde Φ(m, s) denota uma distribuição normal com média m e desvio padrão s.

Essa discretização já permite a visualização de uma Simulação de Monte Carlo para gerar preço de uma ação, contudo este assunto será abordado posteriormente.

3.2. Análise de Black – Scholes

3.2.1. LEMA DE ITO.

O preço de uma opção é função do preço da ação que está opção se refere e do tempo. De uma maneira mais geral podemos dizer que o preço de qualquer derivativo é uma função de uma função estocástica do ativo subjacente e do tempo. Portanto para entendermos melhor o mecanismo de precificação de opções é necessário a compreensão do funcionamento de funções de variáveis estocásticas. Um importante resultado nesta área foi a descoberta, pelo matemático Ito, em1951[3]. Chamado lema de Ito.

Lema de Ito.

Suponha que o valor da variável x siga um processo de Ito, definido como:

$$dx = a(x,t)\, dt + b\,(x,t)\, dz \quad (9)$$

Onde dz é um processo de Wiener, a e b são funções de x e t . A variável x possui uma tendência instantânea (drift rate) de a e uma taxa de variância b^2. O lema de Ito mostra que uma função G=G(x,t) pode ser expressa como:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz \qquad (10)$$

Onde dz é o processo de Wiener apresentado na equação (9). então G também segue um processo de Ito. Com tendência média instantânea de:

$$\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \qquad (10.1)$$

e uma taxa de variância de

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 b^2 \qquad (10.2)$$

De posse deste resultado ,vamos aplica-lo na equação (1)

$$ds = \mu S dt + \sigma S dz \qquad (11)$$

Onde μ e σ constante, fornecendo, então, um modelo razoável do movimento do preço de uma ação. Do lema de Ito, segue que um processo dado por uma função G=G(S,t) é:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz \qquad (12)$$

Observe que tanto S e G são afetados pela mesma fonte causadora de incerteza[iii] dz . Este resultado mostra será muito importante na derivação dos resultados de Black – Scholes.

3.2.2. APLICAÇÃO PARA O LOGARITMO DO PREÇO DE AÇÕES.

Quando se analisa o retorno que uma ação obteve num determinado intervalo de tempo a maneira mais simples de se fazer é calcular ($\Delta S/S_0$), onde S_0 é o preço inicial da ação do período em análise. Para retornos pequenos pode-se substituir por

[iii] Ambos estão relacionados com a mesma fonte de incerteza.

ln(S/S_0). A justificativa mais forte para isto é pelo fato de que ao se usar o logaritmo ao invés de diferenças, temos um tratamento matemático mais simplificado e prático, como é mostrado a seguir:

Utiliza-se agora o lema de Ito para derivar o processo seguido por ln S. defini-se G = ln S, tem-se então:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2} \quad (12.1) \qquad \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \quad (12.2) \qquad \frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S} \quad (12.3)$$

o que resulta pela equação (12) que o processo seguido por G é :

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma . dz \qquad (13)$$

Uma vez que μ e σ são constantes, esta equação indica que G segue um processo de Wiener generalizado. Possui uma tendência instantânea de (μ - $\sigma^2/2$) e uma taxa de variância constante σ^2. Logo podemos dizer que mudanças em G entre o tempo presente, t, e algum tempo futuro T, é normalmente distribuído com média $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)$ e variância σ^2 (T - t).

O valor de G no período de tempo t é ln S. Seu valor no tempo T é ln S_T, onde S_T é o preço da ação num determinado tempo (futuro) T, portanto a mudança de G durante um intervalo de tempo $(T - t)$ será ln S_T – ln S.

$$\ln S_T - \ln S \sim \Phi\left[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T - t), \sigma\sqrt{T - t}\right] \qquad (14)$$

3.2.3. PROPRIEDADE LOGNORMAL DO PREÇO DAS AÇÕES.

Supôs-se que o comportamento de preço de uma ação segue uma distribuição lognormal pelos argumentos acima descritos.

Uma variável possui distribuição lognormal se o logaritmo natural da variável é normalmente distribuído. Esta variável pode possuir qualquer valor entre zero e infinito. É de fácil observação que esta distribuição possui uma forma diferente da distribuição normal. Demonstra-se que o valor esperado de S_T, $E[S_T]$, é dado por[3]

$$E(S_T)=S.\exp[\mu(T-t)] \tag{15}$$

E variância de S_T, var(S_T), é dada por

$$Var(S_T) = S^2\exp[2\mu(T-t)](\exp[\sigma^2\ (T-t)]-1) \tag{16}$$

3.2.4. ESTIMANDO VOLATILIDADE DE DADOS HISTÓRICOS.

Uma maneira intuitiva de se definir a volatilidade é dizer queesta é uma grandeza relacionada com as variações relativas que os preços podem sofrer num período de tempo Δt.

Uma maneira empírica de se medir a volatilidade do preço da ação, em intervalos fixos de tempo (isto é, diariamente, semanalmente, mensalmente, etc), é se medir o desvio padrão amostral dos preços.

Escolher um tamanho adequado para a amostra não é tarefa fácil, uma vez que uma quantidade maior de dados leva a uma maior acurácia, contudo a volatilidade muda com o tempo e dados de preços muito antigos não são relevantes para predizer o futuro. Este assunto voltará a ser abordado mais adiante

Na figura 3 pode-se observar a região a, caracterizada por uma alta volatilidade, e a região b que apresenta uma baixa volatilidade, apesar da tendência de alta..

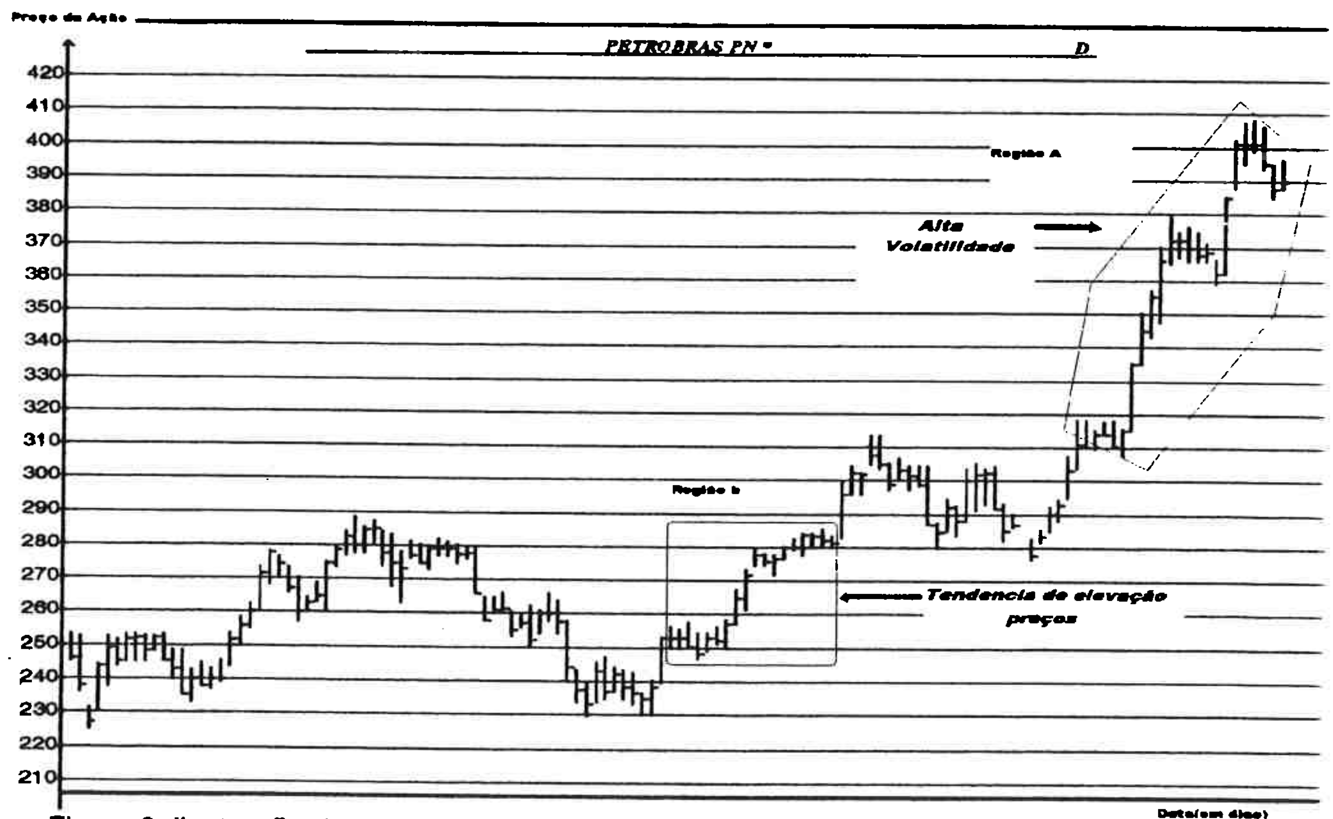

Figura 3: ilustração da volatilidade.

3.2.5. CONCEITOS SUBJACENTES A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE BLACK - SCHOLES.

A equação diferencial de Black – Scholes deve ser satisfeita pelo preço, *C*, de qualquer opção de um ativo que não paga dividendos. Para isto considere uma carteira consistindo em posições de opções e ações[iv], e o retorno esperado desta carteira é então igual a taxa de juros livre de risco. Na análise de Black – Scholes a carteira é montada para permanecer fora de risco por apenas um curto período de tempo. Contudo pode ser argumentado que o retorno durante este curto período de tempo é a taxa de juros sem risco se a hipótese de oportunidades de arbitragem são evitadas.

A razão porque uma carteira livre de risco pode ser montada é que o preço de uma ação e o preço da opção são afetados por um única fonte subjacente de incerteza. Isto significa que num curto período de tempo os dois(ação e opção) estão perfeitamente correlacionado. Quando uma carteira é montada de forma apropriada, o ganho (perda) na posição de ações sempre é compensado por perda (ganho) da posição nas opções, permitindo, deste modo, que o valor por inteiro da carteira seja conhecido num curto período de tempo com total certeza. As hipóteses para se montar esta carteira estão listadas a seguir.

Hipóteses:

1. O comportamento do preço da ação corresponde ao modelo lognormal desenvolvido anteriormente, com média e desvio padrão (volatilidade) sendo constantes;
2. Não há custos operacionais nem impostos. Todos os títulos são perfeitamente divisíveis;
3. A ação não receberá dividendos durante a vida da opção;
4. Não há oportunidades de arbitragem sem risco;
5. A negociação com títulos é contínua;
6. Os investidores podem tomar emprestado ou emprestar à mesma taxa de juro livre de risco.
7. A taxa de juro livre de risco de curto prazo, r, é constante.

[iv] apesar de não se mostrar como se compõe esta carteira de ações e opções, pode-se encontrar em qualquer texto que trate do assunto.

3.2.6. DERIVAÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE BLACK - SCHOLES.

Sabemos que o preço de uma ação é dado por:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \qquad (17)$$

Suponha que C é o preço de uma opção é dependente de S. A variável C deve ser alguma função de S e t. Portanto da equação (12)

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial S}\mu S + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial C}{\partial S}\sigma S dz \qquad (18)$$

Uma versão discreta da equação (17) e (18) são:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \qquad (19)$$

e

$$\Delta C = \left(\frac{\partial C}{\partial S}\mu S + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial C}{\partial S}\sigma S \Delta z \qquad (20)$$

Onde ΔS e ΔC são as alterações em c e S num curto intervalo de tempo Δt. Convém lembrar que da discussão sobre o lema de Ito que o processo de Wiener subjacente a c e S é o mesmo. Na análise de Black – Scholes, um dos fatos mais relevantes é conseguir eliminar o processo de aleatoriedade (processo de Wiener), i.é., escolhendo-se uma carteira composta por ações e opções, podemos montar um portifólio que conduzirá a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC \qquad (21)$$

A equação (21) é conhecida como equação diferencial de Black Scholes. perceba o parâmetro μ não mais aparece na equação, mas sim o parâmetro r, que é a taxa de juros livre de risco. A solução desta equação depende das condições de contorno a ela associada. No caso de uma opção de compra européia, a condição de contorno chave para este problema é:

$C=Max(S_T-E,0)$ quando T=t (21.1)

3.2.7. A AVALIAÇÃO LIVRE DE RISCO.

Este ponto é sem dúvida um dos mais importantes para avaliação da teoria de Black Scholes, sendo devido a esta hipótese a construção da carteira que conduz a equação diferencial acima. Esta propriedade leva à conclusão que nenhuma variável da equação acima é afetada pela preferencia de risco do investidor, conforme é explicado abaixo[3]:

- Um resultado geral da precificação de títulos derivativos é conhecido como avaliação livre de risco, que pode ser assim definida: qualquer título derivativo dependente de outros títulos negociados pode ser avaliado segundo a suposição de que os investidores estejam livre de risco.
- A avaliação livre de risco não determina que os investidores estejam livre de risco, mas que títulos derivativos, como opções, podem ser avaliados com base na suposição de que investidores estejam livre de risco. Isso significa que as preferencias de risco dos investidores não influenciam o valor de uma opção de ação quando expresso como função do preço da ação. Ela explica por que as equações não envolvem μ.
- A avaliação livre de risco é um resultado poderoso, uma vez que numa situação livre de risco, dois resultados particularmente simples são consistentes :

1. o retorno esperado de todos os títulos é a taxa de juros livre de risco;
2. a taxa de juro livre de risco é a taxa de desconto apropriada para qualquer fluxo de caixa esperado no futuro.

É importante notar que a suposição de neutralidade ao risco é meramente um artifício para obter uma solução para a equação diferencial de Black – Scholes. A solução que é obtida é valida em todos os mundos, seja ele o de Black – Scholes (aquele em que os investidores são avessos a riscos) ou não, duas coisas acontecem. A taxa esperada de crescimento no preço da ação muda e a taxa de desconto que deve ser usada para o vencimento do derivativo muda. Resultando no fato que estes dois efeitos sempre são contra balanceados exatamente.

3.2.8. A VOLATILIDADE IMPLÍCITA.

A volatilidade do preço da ação é o parâmetro das fórmula de precificação de opções de Black - Scholes que não pode ser observado diretamente. No início deste trabalho, discutimos como ela pode ser estimada a partir dos dados históricos de preço da ação. Neste ponto, é apropriado mencionar uma abordagem altemativa, que utiliza a chamada *volatilidade implícita* no preço de uma opção verificado no mercado.

Para ilustrar sua idéia, basta admitirmos a idéia que o mercado sabe o preço da opção, e da fórmula de Black – Scholes podemos obter o valor da volatilidade através de métodos interativos (uma vez que não é possível isolar a volatilidade). A este valor chamamos de volatilidade implícita.

A volatilidade implícita pode ser utilizada para monitorar a opinião do mercado sobre a volatilidade de determinada ação em relação a possibilidade da opção ser exercida ou não, e que muda com o tempo. Ela pode se utilizada para calcular o preço de uma opção a partir do preço de outra opção. É comum obter simultaneamente muitas volatilidade implícitas para diferentes opções da mesma ação, para depois calcular, através de uma média ponderada adequada, uma volatilidade implícita composta para a ação.

3.2.9. CAUSAS DA VOLATILIDADE

Os proponentes da hipótese de mercados eficientes sempre afirmaram que a volatilidade do preço de uma ação é causada unicamente pela sucessão aleatória de novas informações sobre o retomos futuros da ação. Outros sustentam que a volatilidade é amplamente causada pela negociação. Nesse caso, uma questão interessante a levantar é se a volatilidade quando a bolsa está aberta é igual a quando a bolsa está fechada.

Fama[v] e French[vi] testaram essa questão empiricamente. Eles coletaram dados de preço da ação no encerramento de cada dia de negociação, por um longo período de tempo e então calcularam[3]:

a) a variância dos retomos do preço da ação no encerramento dos negócios entre um dia e o dia seguinte;

[v] Veja E.E. Fama, " The Behavior of Stock Market Prices,"*Journal of Business*, 38(January 1965).
[vi] Veja K. French and R. Roll, "Stock Return Variances: The Arrival of Information and the Reaction of Traders," *Journal of Financial Economics*, 17(September 1986), 5-26

b) a variância dos retornos do preço da ação no encerramento das negociações entre Sexta –feira e Segunda feira.

Se os dias úteis e corridos (feriados e fins de semana), se eqüivalem a variância da situação b deve ser três vezes maior que da situação a. Fama achou que ela foi de apenas 22% maior. Os resultados de French foram semelhantes, já que ele considerou que ela foi de 19% maior. Isso sugere que a volatilidade é maior quando a bolsa está aberta do que quando está fechada.

As implicações disso tudo no cálculo da volatilidade e no modelo de Black – Scholes são: Se os dados diários são usados para medir a volatilidade, e os resultados sugerem que os dias em que a bolsa está fechada podem ser ignorados . A volatilidade ao ano deve ser calculada a partir da volatilidade diária por dia de negociação através da fórmula:

$$Volatilidade(ano) = Volatilidade(dia.útil) * \sqrt{n^{\circ}\, dias.úteis\_no\_ano} \qquad (22)$$

No caso brasileiro uma boa aproximação é supor que o mês possui 21 dias úteis, portanto o ano possuirá 252 dias úteis.

3.2.10. FÓRMULA DE BLACK SCHOLES PARA OPÇÕES EUROPÉIAS.

Uma solução exata para a equação diferencial (21) é apresentada abaixo, para o caso de uma opção de compra . Esta solução é válida apenas para o caso onde a taxa de juros, *r*, e a volatilidade, σ, são constantes:

$$C(S,t) = SN(d1) - E\exp[-r(T-t)]N(d2) \qquad (23)$$

Onde C denota o valor da opção de compra.

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{1}{2}y^2)dy \qquad (24)$$

N(.) é a função de distribuição cumulativa ou função erro de Gauss.

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t))}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad (25)$$

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{T-t} \qquad (26)$$

e as equações (25) e (26) fornecem o valor de d1 e d2.

Foi somente apresentado a solução de uma opção de compra européia, já que este é o foco do trabalho. Contudo todas as hipóteses lançadas até aqui estendem-se para opções de venda européias.

A figura 4 mostra o preço de uma opção de compra obtido pela solução da equação de Black –Scholes, para diferentes horizontes de tempo, em função do adimensional S/E. Este adimensional é resultante da razão do preço da ação no mercado a vista pelo preço de exercício.

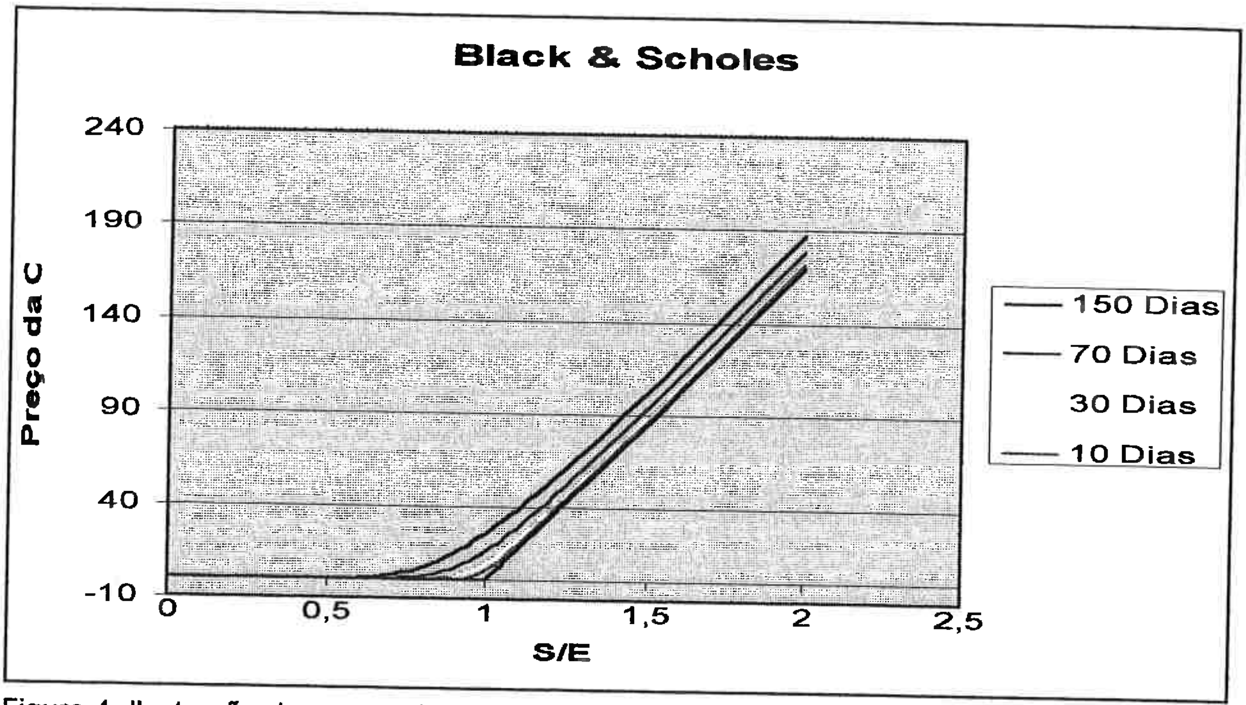

Figura 4: Ilustração dos preço dados pela equação de Black –scholes para diferentes datas de vencimento. Com $\sigma = 0.3$, $r = 19.723\%$, E=170,00

3.3. SIMULAÇÃO de MONTE CARLO

A idéia básica que dá suporte à simulação de Monte Carlo (SMC) é a geração de um número muito grande de possíveis realizações/ soluções para o problema de interesse. Sob certas hipóteses probabilisticas[7,8], o valor médio de um número muito grande dessas realizações/ soluções fornece o correto valor para a quantidade de interesse.

Na data de vencimento de uma opção européia (no caso uma opção de compra) ela vale $Max(0, S_T - E)$, onde T denota a data de vencimento da opção e E o seu preço de exercício, dessa forma numa data t<T, o valor da opção de compra é dado por:

$$C=\exp[-r(T-t)].E[\,Max(0, ST - E)] \qquad (28)$$

onde E[.] = operador esperança.

Como se sabe o operador esperança E[.] denota uma operação de integração. Na verdade (28) pode ser escrita como:

$$C = Exp[-r(T-t)]\int_{-\infty}^{\infty}[Max(0,S_T - E)]f(S_T)dS_T \qquad (29)$$

Onde $f(S_T)$ denota a função densidade de probabilidade de S_T.

A equação (29) mostra, finalmente, que o problema da precificação pode ser resolvido na forma de uma integral. Para resolver (29) por Monte Carlo, no entanto, é necessário Ter uma boa intuição sobre o significado da equação: o termo Max(0, S_T – E) é o valor da opção de compra , no vencimento, dado um determinado valor de S_T. Por outro lado, o termo Max(0, S_T – E). f(S_T) é o valor da opção de compra, dado S_T multiplicado pela probabilidade de ocorrência de S_T, isto é, f(S_T). Já a expressão:

$$\int_{-\infty}^{\infty}[Max(0,S_T - E)]f(S_T)dS_T \qquad (29.1)$$

descreve a média de todos os valores que a opção de compra pode assumir no vencimento. O valor de tal média depende tanto de E como de f(S_T), sendo f(S_T) inteiramente determinado pela equação (27). Por fim, pode-se entender a equação (29) como sendo o valor presente do preço médio da opção de compra em sua data de vencimento.

Por meio de Simulação de Monte Carlo (SMC) , podemos utilizar a equação (27) para realizar várias simulações de S_T . Em cada uma delas calculamos o valor da opção de compra e por fim, tomamos a média de todos os valores e trazendo a valor presente. Para um número suficientemente grande de simulações, o resultado final será o valor dado pela equação (29).

A simulação de S_T é feita por meio de discretização da equação (27).

$$S_i = S_{i-1}\cdot \exp\left[\left(r-\frac{1}{2}V_{i-1}\right)\Delta t + u_i\sqrt{V_{i-1}\Delta t}\right] \qquad (30)$$

O funcionamento da equação (30) pode ser explicado do seguinte modo: dado um valor inicial de S_0 (Preço da ação atual, no mercado a vista) é sorteado um valor de u_i para encontrarmos o valor de S_1. Dado S_1 sortea-se outro valor para u_i e encontra-se o valor de S_2 e assim por diante até chegar-se em S_T. De posse do valor de S_T, calcula-se o valor da opção de compra no vencimento. Repet-se toda a simulação *n* vezes e por último calcula-se o valor médio da opção de compra. trazendo a valor presente. O resultado será um estimador da equação (29) com variância dada por:

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left[\exp(-r(T-t))Max[0, S_{T,i} - E] - \hat{C}_t\right]^2}{n} \qquad (30.1)$$

4. Materiais e Métodos

4.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

A principal proposta foi a modelagem para precificação de uma opção européia com a volatilidade não mais constante, diferente do modelo de Black – Scholes. Para isto utilizou-se a volatilidade como seguindo um processo estocástico com uma abordagem proposta por Hull[5]. Posteriormente realizar-se-ão simulações para se verificar o efeito dos parâmetros propostos pelo novo método a ser apresentado, os resultados serão comparados com aqueles dados pela equação proposta por Black – Scholes (23).

4.2. A VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA

Considere uma opção C que dependa do preço de uma ativo objeto, neste caso uma opção, e de sua variância instantânea $V=\sigma^2$. Por hipótese-se, assumem-se os seguintes processos estocástico [5]:

$$dS = \phi S\, dt + \sigma S\, dw \qquad (31)$$

$$dV = \mu V\, dt + \xi V\, dz \qquad (32)$$

A variável ϕ é um parâmetro que dependerá de S, σ e t, já as variáveis ξ e μ dependem de σ e t. Os processos de Wiener dz e dw possuem correlação instantânea ρ. Como V é sempre positivo o tratamento feito para equação (32) é idêntico aquele realizado para se chegar a equação (13). Será assumido que a taxa livre de risco, denominada por r, é constante ou pelo menos determinística. Com relação a equação (31), será mantida a hipótese de que o preço da opção é independente da preferencia de risco assumida pelo investidor, ou seja, será mantida a hipótese de Black – Scholes, devendo-se, deste modo, substituir ϕ por r o que resulta.

$$dS = r S\, dt + \sigma S\, dw \qquad (33)$$

Com relação a equação (32) vemos que a função densidade de retomo da variância d (Ln(V)) possui uma distribuição normal com média (μ - ξ^2 / 2) e variância ξ^2.

Visto isto nosso interesse é obter um par de equações para que se possa realizar as simulações. Levando-se em conta o coeficiente de correlação ρ, Hull e White[5] propuseram[vii] :

$$S_i = S_{i-1} \cdot \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}V_{i-1}\right)\Delta t + u_i\sqrt{V_{i-1}\Delta t}\right] \qquad (34)$$

$$V_i = V_{i-1}\exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\xi^2\right)\Delta t + \rho u_i \xi\sqrt{\Delta t} + \sqrt{1-\rho^2}v_i\xi\sqrt{\Delta t}\right] \qquad (35)$$

Onde μ e ξ dependem de S como também de σ e t. neste caso é necessário simular ambos S e V. O intervalo de tempo é dividido previamente e dois números com distribuição normal u_i e v_i ($1 \leq i \leq n$),são sorteados e depois inseridos nas equações (34) e (35). Deste modo gerar-se o preço da ação S_i e a variância V_i no intervalo de tempo i.e calcula-se o valor de

$$C=\exp[-r(T-t)].\ \mathrm{Max}[(S-E,\ 0). \qquad (35.1)$$

Este valor é então usado para gerar " uma amostra" P_1 do preço da opção. Um Segundo preço, P_2, é calculado pela troca de u_i com $-u_i$ ($1 \leq i \leq n$) e repetem-se os cálculos . P_3 é calculado pela troca de v_i com $-v_i$ ($1 \leq i \leq n$) e novamente repetem-se os cálculos. P_4 é calculado pela troca de v_i com $-v_i$ e pela troca de u_i com $-u_i$ ($1 \leq i \leq n$) repetindo-se novamente os cálculos. Obtidos os valores de P_1, P_2, P_3 e P_4 o preço final da opção será a média aritmética destes valores. Esta técnica é chamada de técnica de redução da variância pelo uso de Variáveis Antitéticas[5,8].

4.3. ESTIMAÇÃO DE μ E ξ.

Um dos maiores problemas de tudo apresentado até aqui é exatamente o valor que deve ser atribuído aos parâmetros μ e ξ, aqui supostos constantes, uma vez que ao se fazer uma estimação errada além de provocar como resposta valores sem

[vii] Veja fluxograma no apêndice C.

significado algum, poderá ainda gerar enorme prejuízo financeiros caso alguém esteja operando auxiliado por este modelo. Para isso façamos a análise de cada um dos parâmetros separadamente.

Suponha que ao comprar / vender uma opção a uma determinada preço, que é a mesma coisa que dizer a uma determinada volatilidade (pois de posse do preço podemos obter a volatilidade implícita). Consideremos ainda que não façamos nenhuma operação de Hedge ou de reversão de posição, ou seja, que levemos a posição de comprado / vendido até o vencimento da opção. Ao se fazer este tipo de operação o investidor não quer que a volatilidade tenha uma tendência de aumento / diminuição com o tempo, mas sim que esta apenas possua flutuações em torno do valor da volatilidade em que a operação foi realizada devido somente a fatos de mercado, ou seja randômicos. Isto faz com que o primeiro termo do lado direito da equação (32) seja igual a zero, portanto:

$$\mu V dt = 0 \Rightarrow \mu = 0$$

Já os valores de ξ estão relacionados com o desvio padrão em torno da volatilidade implícita média observada, ou seja, os valor do qual estão as possíveis amplitudes (incrementos) associados a flutuações randômicas. Possíveis maneiras de se estimar este valor vão desde análise de séries históricas até a sensibilidade do operador e sua respectiva visão do mercado no momento. Contudo algum método matemático de alta confiabilidade deve ser implementado para que este tipo de interferência humana e subjetiva seja evitado ao máximo.

4.4. ESTIMAÇÃO DA CORRELAÇÃO.

Outras vez depara-se com mesmo problema, o de estimação do melhor valor entre a correlação entre a taxa de retomo do ativo objeto ($Ln\ (S_t / S_{t-1})$) e a taxa de retorno da volatilidade ($Ln(V_t/V_{t-1})$). Contudo, para o caso de opção e sua ação objeto, esta correlação deve ser negativa, isto devido a um argumento qualitativo muito simples.

Quando se pensa em uma empresa, em termos contábeis, esta é composta de um Ativo, um Passivo e um Patrimônio Líquido. Sendo o Ativo igual a soma do Passivo e do Patrimônio líquido. Quando há um aumento no preço da ação, portanto uma taxa de retomo positiva para a ação, para que a igualdade A=P + PL mantenha-se , supondo o passivo constante em termos absolutos, há um aumento no Patrimônio Líquido. Devido a este fato, há um decréscimo percentual do Passivo em relação ao Ativo, ou seja, a medida de risco da empresa diminui. Fato este que conduz há uma redução na taxa de retorno da volatilidade, uma vez que a volatilidade é encarada como uma medida de risco, isto é, quanto maior a volatilidade associada, maior é o risco.

A análise da correlação por série histórica também traduz este fato. Contudo, a dificuldade deste método está na escolha do tamanho da amostra e do processo de estimação a ser usado, uma vez que esta correlação não é uma grandeza estática, mas sim dinâmica. Acredita-se que a melhor maneira de se fazer isto é pela análise de séries temporais, contudo este assunto não será discutido, uma vez que está fora da proposta deste trabalho atual. Para todas as análises feitas neste trabalho, Assume-se que a correlação é conhecida, possui um valor menor que zero e constante.

4.5. PROCEDIMENTO PRÁTICO.

Para verificação da viabilidade do modelo adotou-se os seguintes critérios:

1. Todos os valores obtidos serão comparados com os valores obtidos pela equação de Black – Scholes, para os mesmos dados de entrada, uma vez que Black – Scholes ainda é o referencial mais utilizado mundialmente.
2. Veremos o efeito do tempo através de Simulação de Monte Carlo(SMC), para o método com volatilidade estocástica. Para isso serão considerados diferentes prazos de vencimento. No caso 150, 70, 30 e 10 dias restantes para vencimento da opção.
3. Para uma data de vencimento dada, será verificado o efeito de se variar ξ,sempre comparado com Black – Scholes
4. Para todas as simulações a correlação considerada(por hipótese) será ρ=-0.8.

4.6. SIMULAÇÃO

Dados de entrada:

Preço de Exercício : $1,00 — Juros:19,72% ano

Volatilidade: 30 %ano. — Simulações: 1000

Volatilidade da volatilidade (ξ): 0.1233 — Correlação: -0.8

Preço da ação: Variável, de modo que gere a razão S/E

Δt = (1/252)

As tabelas com os números gerados dos gráficos abaixo encontram-se no apêndice A.

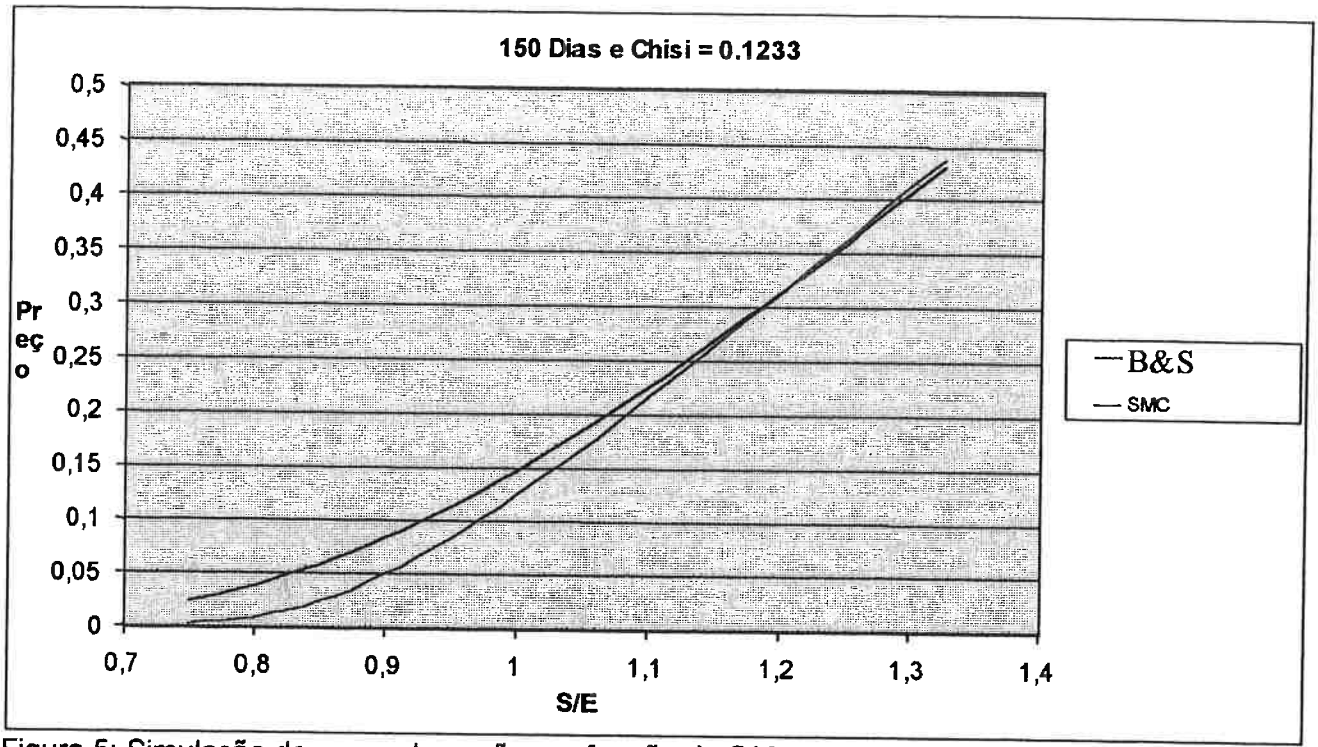

Figura 5: Simulação do preço da opção em função de S/ E, com prazo de vencimento de 150 dias e ξ=0.1233

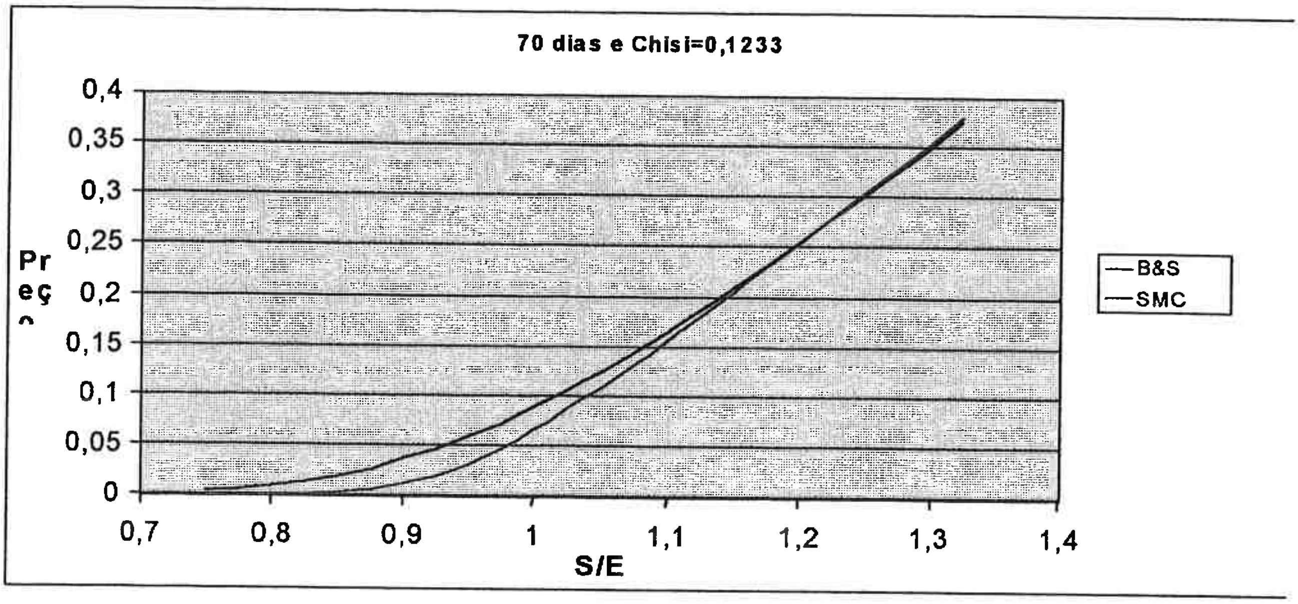

Figura 6: Simulação do preço da opção em função de S/ E, com prazo de vencimento de 70 dias e ξ=0.1233

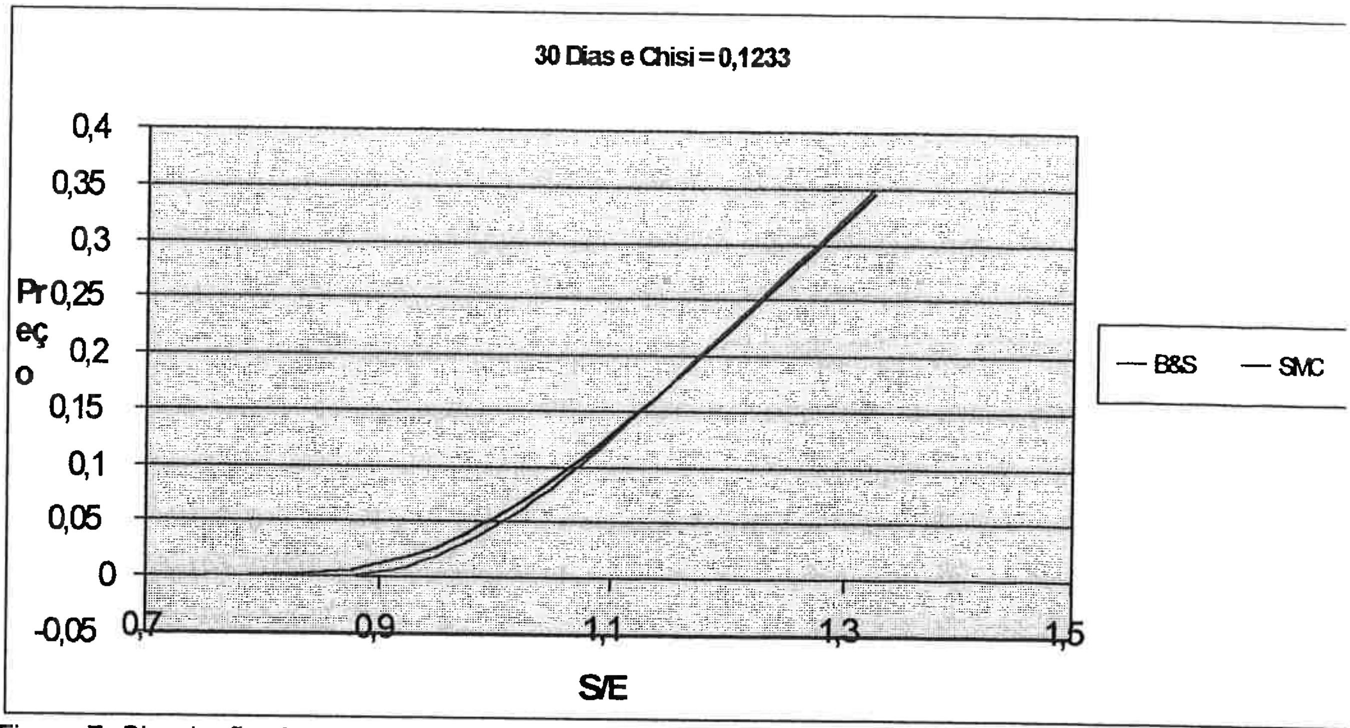

Figura 7: Simulação do preço da opção em função de S/ E, com prazo de vencimento de 30 dias e ξ=0.1233

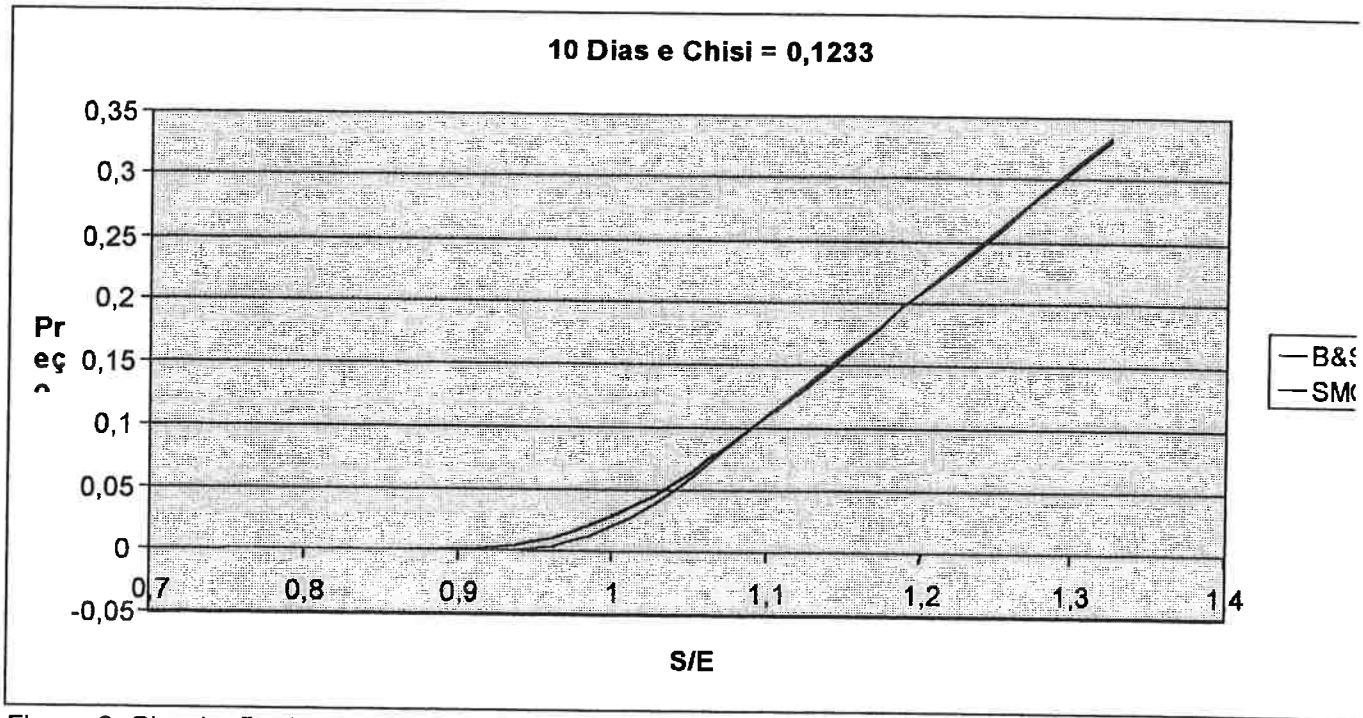

Figura 8: Simulação do preço da opção em função de S/ E, com prazo de vencimento de 10 dias e ξ=0.1233

4.7. O EFEITO DE ξ NA PRECIFICAÇÃO.

Conforme discutido anteriormente, ξ deve ser considerado como o desvio padrão da volatilidade média esperada para a opção, ou seja a volatilidade da volatilidade. Como até agora foi apresentado, o modelo apresenta-se de uma maneira muito geral, sendo que para uma estimação precisa é necessário saber primeiramente qual o ativo objeto, isto é, se é uma ação da Petrobás, Embraer, Vale do Rio Doce e etc. Para todo os exemplos aqui ilustrados considerou-se, por hipóte-se, de ξ=0.1233. Além deste valor realizou-se simulações para valores de ξ=0.35 e ξ=1, com diferentes prazos (tempos) para vencimento da opção. Para se gerar os gráficos utilizou-se o seguinte método: Dados os valores de preços já simulado, calcula-se a diferença entre o preço dado por Black – Scholes e o preço dado pela SMC. O valor dessas diferenças fornece os gráficos 9, 10,11,12.

Para simulação dos modelos utilizou-se os seguintes parâmetros de entrada:

Dados de entrada:

Preço de Exercício : $1,00

Preço da ação: Variável, de modo que gere a razão S/E

Volatilidade: 30 %ano.

Juros:19,72% ano

Simulações: 1000

Volatilidade da volatilidade: assume os valores de 0.1233; 0.35; 1.00.

Correlação: -0.8

Δt = (1/252)

As tabelas com os números gerados dos gráficos abaixo encontram-se no apêndice A.

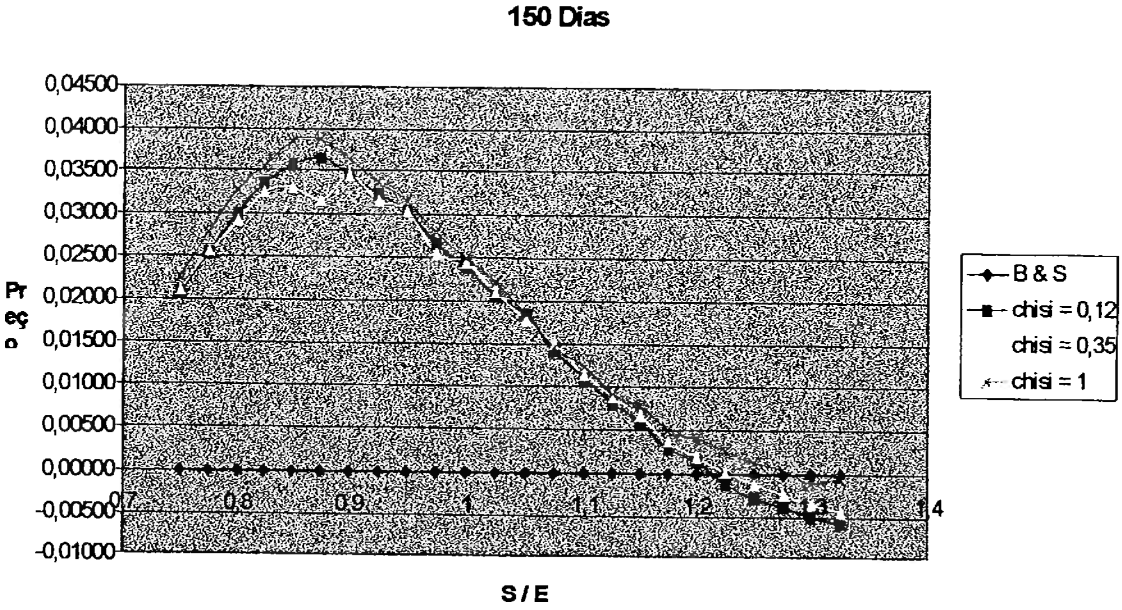

Figura 9: O efeito de ξ no preços da opção em função do tempo. T=150 dias para o vencimento.

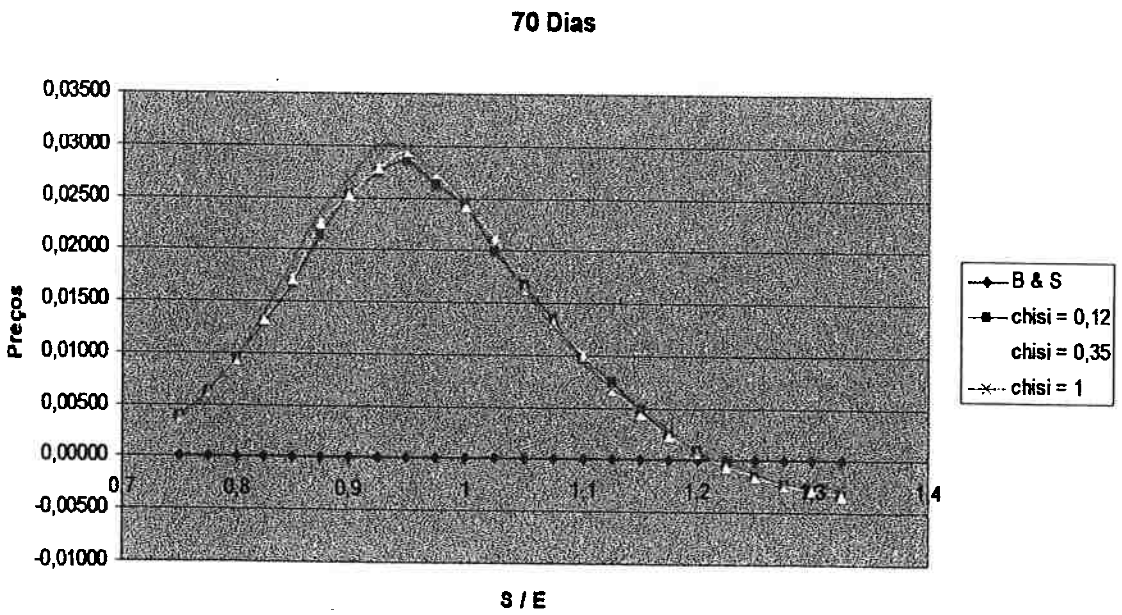

Figura 10: O efeito de ξ no preços da opção em função do tempo. T=70 dias para o vencimento.

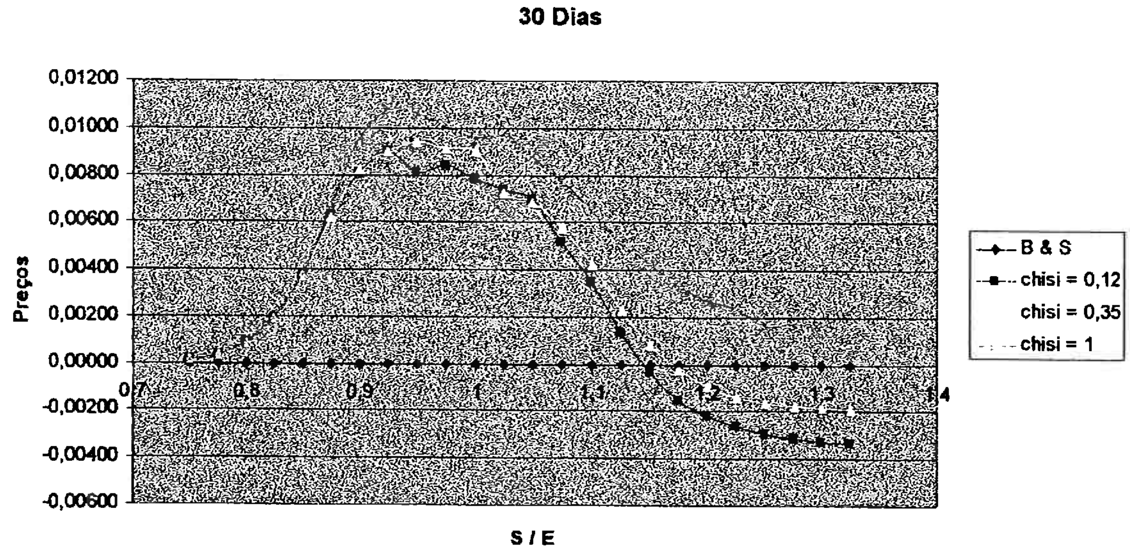

Figura 11: O efeito de ξ no preços da opção em função do tempo. T=30 dias para o vencimento.

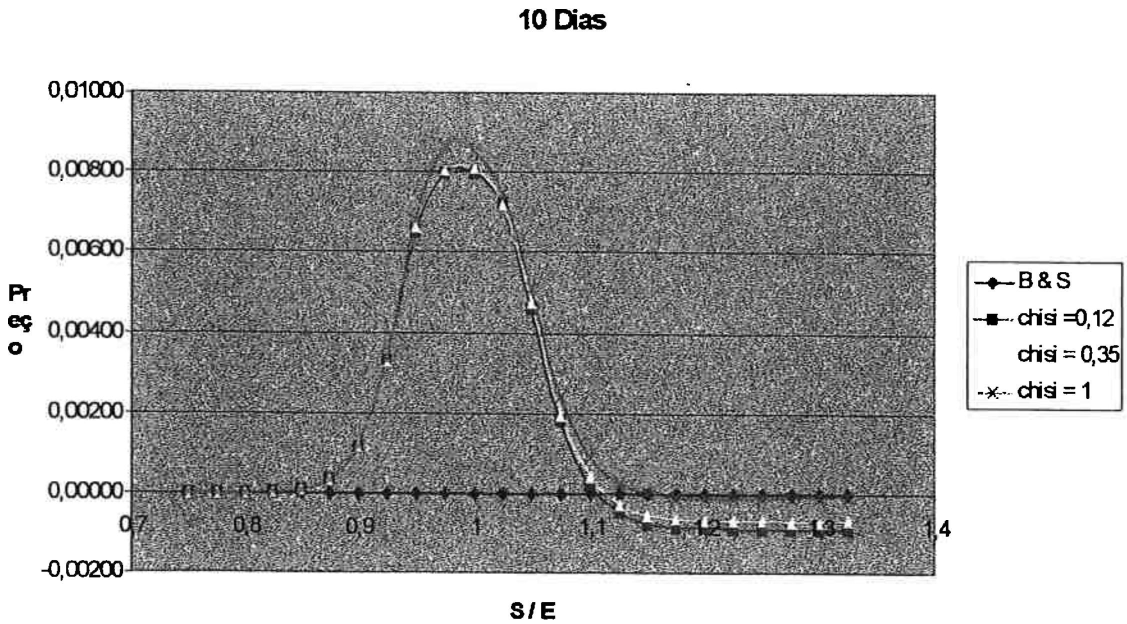

Figura 12: O efeito de ξ no preços da opção em função do tempo. T=10 dias para o vencimento.

5. Discussão

Passa-se agora a comentar e discutir os resultados obtidos pela simulação de Monte Carlo (SMC) e mostrados pelas figuras 5, 6, 7 e 8.

Nesta primeira etapa de simulação o intuito foi de observar-se o comportamento do preço da opção, gerado por SMC, com relação ao tempo para vencimento. Todos os demais parâmetros de entrada foram mantidos constantes. Comparou-se os valores obtidos com aqueles fornecidos por Black – Scholes.

É de visualização direta que conforme a opção vai entrando no dinheiro (aumento da razão S/E) diminui-se a diferença entre o valor gerado por Black - Scholes e o valor fornecido pela SMC. A partir de um determinado valor da razão S/E, o valor do preço da opção fornecido pela SMC torna-se maior do que o preço fornecido por Black – Scholes. O valor exato de S/E em que esta mudança ocorre varia conforme muda o prazo para o vencimento da opção.

O valor observado das diferenças aumenta conforme aumenta o prazo para o vencimento da opção, fato de significativa relevância para mercados onde são negociadas opções com longo prazo de vencimento.

Passa-se agora a comentar e discutir os resultados obtidos pela simulação de Monte Carlo (SMC) e mostrados pelas figuras 9, 10, 11 e 12.

Observa-se que os valores do preços gerados pelos diferentes de ξ aumentam conforme aumenta o prazo para o vencimento da opção. Deve-se salientar que para uma data fixada (ver fig.11 e 12), conforme diminui-se o valor de S/E as curvas tendem a se sobrepor, mostrando que para diferentes valores de ξ o resultado é pouco afetado. Contudo não é possivel determinar o valor exato da razão S/E em função do tempo para que isto ocorra.

O motivo das curvas se sobreporem é devido ao fato que para baixos valores de S/E a probabilidade da opção ser exercida é praticamente nulo. Esta probabilidade aumenta conforme diminui o tempo de vencimento.

Para valores crescentes de S/E o preço gerado da opção por SMC, para diferentes valores de ξ, tende a se aproximar. Esta aproximação será tanto maior quanto menor for o prazo para vencimento. Contudo para o prazo de 30 dias (fig. 11) tal aproximação não foi tão acentuada como nos demais casos.

Outro fato a se ressaltar é que para o caso de opções de ações a ordem de grandeza provável de ξ é 0.35 ou menor, uma vez que ξ é uma grandeza relacionada com as possíveis flutuações da volatilidade em torno de sua média. Logo o valor de $\xi=1$ seria um valor muito grande de salto o que não condiz com a realidade. Portanto um valor o mais preciso possível de ξ é necessário para a utilização deste modelo na prática, pois pequenas diferenças por volta da terceira casa decimal podem significar quantias de dinheiro expressivas, ou seja, há possibilidade de subestimar / superestimar ganhos ou prejuízos.

6. CONCLUSÕES

1) Uma estimação correta e mais precisa da correlação entre o retorno do ativo objeto e o retorno da volatilidade implícita é fundamental, para que o modelo possa ser usado com eficiência.
2) O aumento no tempo para o vencimento da opção aumenta a diferença dos valores de preço gerados pela simulação de Monte Carlo.
3) Os preços gerados pela simulação de Monte Carlo são menores que os preços dados por Black – Scholes, quando a opção está no dinheiro (razão S/E aproximadamente igual a 1)
4) Os preços gerados pela simulação de Monte Carlo são maiores que os preços dados por Black – Scholes, para um dado valor de S/E, com S/E necessariamente maior que 1. Contudo, não é possivel dizer para qual valor exato isto ocorrerá antes da simulação ser realizada.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

[1] MELLAGI, A . F; Mercado Financeiro e de Capitais; . São Paulo; Atlas, 1995.

[2] COSTA NETO, P. L; Estatística;. São Paulo, Edgard Blucher, 1977.

[3] HULL, J.C; Options, Fututres and other Derivatives; New Jersey; Prentice Hall; 2º ed, 1993.

[4] DUPIRE, B; Monte Carlo – Methodologies and Applications for Pricing and Risk Management; London, Risk Books; 1998, p15-50.

[5] HULL, J.C., and A. WHITE. The pricing of options on assets with sthochastic volatilities. Journal of Finance, 42, (Junr 1987b)

[6] JÚNIOR, A M. D., Simulação de Monte Carlo para Análise de Opções. Resenha da BM&F, nº 115.

[7] SOBOL,I. M; The Monte Carlo Method; Mir, Moscow;1975, p23-24

[8] PAIVA,C, e PAIVA, S; Simulações de Monte Carlo em Finanças. Resenha da BM&F, nº 119.

APENDICE A

Tabela 2: Valores obtidos por SMC para prazo para vencimento: 150 dias

S/E	B&S	ξ= 0,1233	ξ = 0,35	ξ = 1
0,75	0,023564	0,002806631	0,002679468	0,000940039
0,775	0,030483	0,005185291	0,004974749	0,002700046
0,8	0,038613	0,008660573	0,009517057	0,006010597
0,825	0,047991	0,014579384	0,015412196	0,012578196
0,85	0,058632	0,022937661	0,025560733	0,020020768
0,875	0,070529	0,034136211	0,039085925	0,031742073
0,9	0,083656	0,049266963	0,049273082	0,047178368
0,925	0,09797	0,065683778	0,066528769	0,064297195
0,95	0,113413	0,083058098	0,083164033	0,081926627
0,975	0,129921	0,103460334	0,10461624	0,102049411
1	0,147417	0,12350287	0,123078247	0,122470789
1,025	0,165825	0,145250577	0,144756024	0,143719473
1,05	0,185063	0,166755629	0,167262881	0,166699868
1,075	0,205053	0,190762676	0,189939341	0,190474259
1,1	0,225717	0,214737157	0,214359624	0,213275946
1,125	0,246981	0,238876928	0,238062323	0,237738848
1,15	0,268775	0,262817235	0,262126115	0,260962182
1,175	0,291036	0,288068988	0,287298184	0,28587129
1,2	0,313703	0,312318902	0,311824894	0,309700674
1,225	0,336724	0,33800404	0,336559885	0,33395553
1,25	0,36005	0,362816711	0,361338707	0,358785387
1,275	0,383639	0,387551063	0,386072203	0,383195192
1,3	0,407452	0,412536959	0,411126887	0,408556137
1,325	0,431457	0,437553091	0,435955403	0,431995451

APENDICE A

Tabela 3: Valores obtidos por SMC para prazo para vencimento: 70 dias

S/E	B&S	ξ = 0,1233	ξ = 0,35	ξ = 1
0,75	0,003877	0	0	0
0,775	0,006223	2,52416E-05	1,05857E-05	0
0,8	0,009539	0,000169858	0,000215367	1,6354E-05
0,825	0,01403	0,001129457	0,00073309	0,000247175
0,85	0,019883	0,003203453	0,002819595	0,001356682
0,875	0,027251	0,005955993	0,004684526	0,003831651
0,9	0,036244	0,010960548	0,011050259	0,009459864
0,925	0,046922	0,019529326	0,019057442	0,016921826
0,95	0,059292	0,030811418	0,029824109	0,029676401
0,975	0,073314	0,047070676	0,045997377	0,045778075
1	0,088908	0,064612794	0,064660497	0,064377688
1,025	0,105957	0,086056323	0,084921037	0,085515046
1,05	0,124328	0,107623761	0,108038567	0,10796271
1,075	0,14387	0,130538657	0,130748143	0,131188468
1,1	0,164432	0,15485154	0,154518638	0,155074672
1,125	0,185866	0,17851781	0,17912194	0,17890084
1,15	0,208033	0,2032992	0,203626063	0,203304204
1,175	0,230806	0,228400864	0,22848555	0,228018829
1,2	0,254074	0,253165784	0,253358104	0,253405647
1,225	0,277739	0,278343056	0,278318184	0,277853771
1,25	0,301719	0,303274289	0,303331559	0,302964097
1,275	0,325948	0,328294232	0,328329181	0,328178249
1,3	0,350368	0,35322814	0,353280869	0,352543574
1,325	0,374937	0,378325328	0,378317721	0,37766223

APENDICE A

Tabela 4: Valores obtidos por SMC para prazo para vencimento: 30 dias

S/E	B&S	$\xi = 0,1233$	$\xi = 0,35$	$\xi = 1$
0,75	0,000142	0	0	0
0,775	0,000375	0	0	0
0,8	0,00089	0	0	0
0,825	0,001911	0	0	0
0,85	0,00375	3,29499E-05	6,74967E-06	0
0,875	0,006792	0,000516764	0,000582957	0,000160384
0,9	0,011448	0,003362747	0,003219993	0,001922289
0,925	0,018104	0,009075055	0,00907766	0,007318061
0,95	0,027052	0,018951801	0,017654302	0,016423624
0,975	0,038453	0,030014188	0,029327054	0,028352201
1	0,052312	0,044446288	0,043282706	0,042685386
1,025	0,068491	0,06107978	0,06123207	0,058755397
1,05	0,086742	0,079727521	0,079863776	0,077894556
1,075	0,106747	0,101564169	0,100992145	0,098966909
1,1	0,128171	0,124700568	0,123998684	0,121661576
1,125	0,150691	0,149330016	0,148435657	0,145522131
1,15	0,174022	0,174387728	0,173190402	0,169742174
1,175	0,197932	0,199441236	0,198174541	0,194615589
1,2	0,222239	0,224378928	0,223184141	0,219549566
1,225	0,246811	0,249461069	0,248180546	0,2444335
1,25	0,271552	0,274467234	0,273181934	0,269902875
1,275	0,2964	0,299552872	0,298177148	0,294641296
1,3	0,321312	0,324600346	0,323176402	0,319620349
1,325	0,346263	0,349622251	0,348181283	0,343872399

APENDICE A

Tabela 5: Valores obtidos por SMC para prazo para vencimento: 10 dias

S/E	B&S	ξ= 0,1233	ξ = 0,35	ξ = 1
0,75	1,35E-08	0	0	0
0,775	1,94E-07	0	0	0
0,8	1,96E-06	0	0	0
0,825	1,45E-05	0	0	0
0,85	8,03E-05	0	0	0
0,875	0,000346	0	0	0
0,9	0,001184	0	0	0
0,925	0,003312	1,62536E-05	1,17541E-05	4,69725E-06
0,95	0,00776	0,001285905	0,001123857	0,000949047
0,975	0,01559	0,007609615	0,007529308	0,006905449
1	0,027482	0,019536937	0,019405631	0,018906236
1,025	0,043443	0,036249822	0,036254517	0,035947829
1,05	0,062852	0,058267532	0,058089818	0,057767715
1,075	0,084756	0,082959063	0,082794911	0,082339337
1,1	0,108221	0,107991224	0,107788818	0,107301609
1,125	0,132538	0,132977739	0,132801531	0,132249989
1,15	0,157264	0,157989533	0,157793025	0,157235682
1,175	0,182165	0,182976083	0,182799155	0,18227052
1,2	0,207132	0,20797904	0,207797825	0,20722252
1,225	0,232122	0,232984687	0,232795243	0,232208078
1,25	0,25712	0,257990089	0,257798	0,257216937
1,275	0,282119	0,282996452	0,282799885	0,28221579
1,3	0,307119	0,307985794	0,307800298	0,307170632
1,325	0,332119	0,333005747	0,332793783	0,332166619

APENDICE B.

Principais Fórmulas Estatísticas.

Média Amostral:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Variância Amostral:

$$\sigma^2{}_A = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left(r_{A,t} - \bar{r}_A \right)^2}{n-1}$$

Desvio Padrão Amostral.

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n}}$$

Covariância :

$$\sigma_{A,B} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(r_{A,t} - \bar{r}_A \right)\left(r_{B,t} - \bar{r}_B \right)}{n-1}$$

Correlação:

$$\rho_{A,B} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B}$$

APENDICE C

Figura 13. Fluxograma simplificado para precificação de opções européias ,pela Simulação de Monte Carlo, com volatilidade estocástica.

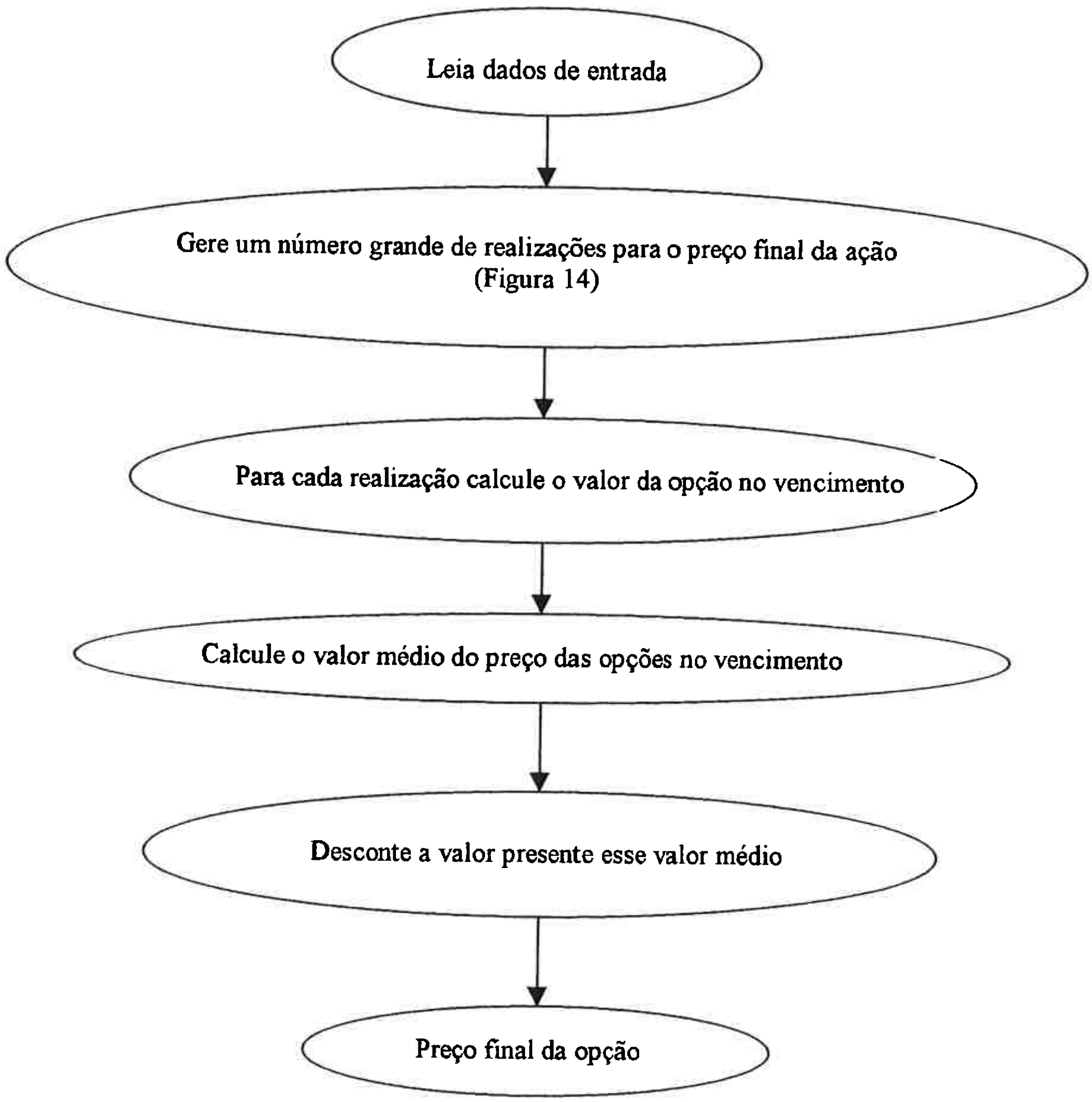

Figura 14. Fluxograma Simplificado para geração de preços de ação com volatilidade através do método das variáveis Antitéticas.