

Rafael Motta Rapp

**Modelos de Estrutura Termo Taxas de Juros. Implementação dos
Modelos de Nelson-Siegel & Svensson e Vasicek.**

Trabalho de Pós-Graduação
apresentado ao Programa de
Educação Continuada da Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para a obtenção do MBA em
Engenharia Financeira.

Área de Concentração: Curva de Juros

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Barros
Nabholz

São Paulo

2013

FICHA CATALOGRÁFICA

8345072

Rapp, Rafael Motta

Modelos de estrutura termo taxas de juros: implementação
dos modelos Nelson-Siegel & Svensson e Vasicek / R.M. Rapp.
-- São Pau-lo, 2013.

134 p.

PECE

Monografia (Especialização em Engenharia Financeira) -
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Programa de
Educação Continuada em Engenharia.

1. Economia 2. Mercado financeiro 3. Juros 4. Modelos de
estrutura a termo taxa de juros I. Universidade de São Paulo.
Escola Politécnica. Programa de Educação Continuada em
Engenharia II. t.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, familiares e Deus por sempre terem me guiado e apoiado na jornada em busca do conhecimento.

Ao Prof. Dr. Rodrigo Barros Nabholz pela valiosa orientação e incentivo ao meu aprimoramento neste trabalho.

Aos professores da instituição MBA PECE-POLI, de alto gabarito e responsáveis pela sólida formação oferecida no curso. Agradecimento especial ao Prof. Dr. Oswaldo L.V. Costa pela contribuição na escolha do tema.

Agradeço ainda aos meus amigos do curso de Engenharia Financeira do MBA PECE-POLI, que me acompanharam nestes dois anos de curso. Em especial aos amigos Daniel M. Baumann, Glauber O. Motta e Vinicius S. Vizin.

A todos meus colegas de trabalho da BrasilPrev, em especial a Jovanni Geza Kiraly, Gerente de Crédito e Riscos, pelo vasto conhecimento compartilhado sendo de fundamental importância na concretização desta monografia e Marcelo Otávio Wagner, Superintendente de Riscos, pelo incentivo à realização deste trabalho.

Por fim, agradeço a Cristiane Sales Gonçalves, que sempre esta ao meu lado como fonte de carinho e apoio.

"Todo o futuro da nossa espécie, todo o governo das sociedades, toda a prosperidade moral e material das nações dependem da ciência, como a vida do homem depende do ar. Ora, a ciência é toda a observação, toda exatidão, toda verificação experimental. Perceber os fenômenos, discernir as relações, comparar as analogias e as dessemelhanças, classificar as realidades, e induzir as leis, eis a ciência; eis, portanto, o alvo que a educação deve ter em mira. Espertar na inteligência nascente as faculdades cujo concurso se requer nesses processos de descobrir e assimilar a verdade."

Rui Barbosa.

RESUMO

A modelagem da Estrutura Termo Taxa de Juros é necessidade fundamental na análise de investimentos e gestão de riscos. Diversos modelos buscam traduzir as expectativas dos agentes econômicos na tentativa de obter uma estrutura de taxas para diversos vencimentos. Outros modelos buscam apenas uma interpolação matemática (modelos baseados em spline e modelos funcionais) dado alguns valores médios de taxas de juros observados no mercado.

O objetivo neste trabalho foi detalhar a história da evolução dos modelos de estimativa da curva de juros e as premissas utilizadas por cada um. Foi escolhido o modelo de Nelson-Siegel-Svensson e o modelo de Vasicek para implementação dos dados de mercado e análise dos resultados.

A escolha dos modelos utilizados na parte experimental deve-se ao potencial de aplicação em análise de investimento, taxas de equilíbrio para exercícios de desconto de fluxo de caixa e cálculo de risco.

Os métodos para determinação e calibração dos parâmetros de ambos os modelos passa por problemas de otimização não-linear e/ou regressão estatísticas dos dados escolhidos, onde foram escolhidos o método do gradiente reduzido generalizado do Solver (Excel) para determinação dos parâmetros.

Palavras-chave: Estrutura a Termo, ETTJ, Curva de Juros, Modelo de Svensson, Modelo de Vasicek.

ABSTRACT

Modeling the Term Structure of Interest Rates is a fundamental need in investments and risk management. Several models aims to translate the economic agents expectations in order to obtain the term structure for all maturities. Other models seek only to obtain a mathematical interpolation (spline based and functional models) based on yield to maturity market data.

This work had the objective to unveil the evolution history of the Term Structure models and detail the assumptions used by each model. It was chosen Nelson-Siegel-Svensson and Vasicek Models for the data implementation and results discussion.

The models selected above and used in the experimental part of this work was due to their potential application in investment analysis, equilibrium yields for discounted cash flow and risk measurement.

The parameters calibration of both models uses non-linear optimization problems and/or statistical regression of the selected data, where the generalized reduced gradient from Solver (Excel) was chosen to be used.

Keywords: Term Structure of Interest Rates, Interest Rate Curve, Svensson Model, Vasicek Model.

Lista de Figuras

Figura 1 - Fluxo de pagamentos de cupons C e Valor Nominal (Principal) no vencimento	6
Figura 2 - Representação Gráfica da Duration.....	7
Figura 3 - Representação Gráfica da Convexidade	8
Figura 4 - LTN Fluxo de Pagamentos	10
Figura 5 - NTNF Fluxo de Pagamentos	10
Figura 6 - NTN Fluxo de Pagamentos	11
Figura 7 - Fatores de Risco Implícitos.....	13
Figura 8 - Representação esquemática das teorias de formação da estrutura a termo	14
Figura 9 - Spline Cúbica composta por 5 polinômios (com segunda derivadas positivas e negativas).	19
Figura 10 - Classificação dos Modelos.....	22
Figura 11 - Curva de Juros e a sua decomposição em ACP	23
Figura 12 - Movimento Browniano Generalizado.....	29
Figura 13 - Tendência de Reversão a média das taxas de juros.....	36
Figura 14 - Exemplo de simulação da taxa de curto prazo pelo processo de difusão.	37
Figura 15 - Representação do Conceito da Estimação da ETTJ pelo processo de difusão da Taxa de Curto Prazo por Vasicek.	44
Figura 16 - Exemplo de uma árvore binomial no cálculo do valor de um derivativo que possui payoff no final do segundo passo de máx[100(R – 0,11),0]	48
Figura 17 - A inclinação da curva a termo define a direção da taxa de curto prazo em um dado instante	49
Figura 18 - ilustração do processo da taxa de curto prazo para o modelo de Hull-White.....	50
Figura 19 - Componentes da curva de taxas a termo. “m” representa a carga do fator de decaimento.	56
Figura 20 - Representação de uma função com máximos e mínimos locais	65
Figura 21 - Caminhos percorridos durante a execução de um algoritmo de Otimização.....	65
Figura 22 – Comparação do Erro Quadrático dado pela diferença de Preços para a Curva Pré Svensson, obtidos para cada dia da série, usando as duas funções objetivos.	75
Figura 23 - Comparação do Erro Quadrático dado pela diferença das Taxas para a Curva Pré Svensson, obtidos para cada dia da série, usando as duas funções objetivos.	76
Figura 24 - Gráficos Taxa a.a x Tempo (anos). Resultados para a interpolação da curva spot pré por Svensson (futuro Dí de 1 dia)	76
Figura 25 - Superfície ETTJ Taxa Pré Svensson Tempo x Maturidade x Taxa.	77
Figura 26 - Superfície de Volatilidade (Pré - Svensson) Tempo x Maturidade x Volatilidade a.a.	78

Figura 27 - Evolução da TIR para algumas maturidades de LTN negociadas.....	78
Figura 28 – Erro Quadrático Médio Curva IPCA por Svensson obtidos para cada dia da série.	80
Figura 29 – Gráficos Taxa a.a x Tempo (anos). Resultados para a interpolação da curva zero cupom de IPCA por Svensson (NTNB)	80
Figura 30 - Superfície ETTJ Cupom IPCA Svensson Tempo x Maturidade x Taxa.....	81
Figura 31 - Superfície de Volatilidade (IPCA - Svensson) Tempo x Maturidade x Volatilidade a.a.	82
Figura 32 - Evolução da TIR para algumas maturidades de NTNB negociadas.	82
Figura 33 - Gráficos Taxa a.a x Tempo (anos). Resultados para a interpolação da curva spot pré por Vasicek e da função distribuição de probabilidade.	85
Figura 34 - Superfície ETTJ Taxa Pré Vasicek Tempo x Maturidade x Taxa.....	87
Figura 35 - Superfície de Volatilidade (Pré – Vasicek) Tempo x Maturidade x Volatilidade a.a.	87
Figura 36- Gráficos Taxa a.a x Tempo (anos). Resultados para a interpolação da curva zero cupom de IPCA por Vasicek (NTNB) e da função densidade de probabilidade.	89
Figura 37 - Superfície ETTJ Cupom IPCA Vasicek Tempo x Maturidade x Taxa.....	90
Figura 38 - Superfície de Volatilidade (IPCA) Vasicek Tempo x Maturidade x Volatilidade a.a.	91
Figura 39 - Gráficos Taxa (a.a) x Tempo (Dias). Resultados para a interpolação da curva Taxa Pré (Futuro DI) pelo modelo de Svensson e Vasicek.	92
Figura 40 - Comparativo da evolução das taxas de perpetuidade Pré	94
Figura 41 - Comparativo da evolução das taxas de curto prazo Pré.....	95
Figura 42 - Gráficos Taxa (a.a) x Tempo (Dias). Resultados para a interpolação da curva Cupom IPCA pelo modelo de Svensson e Vasicek.	96
Figura 43 - Comparativo do Erro Quadrático Médio entre os modelos – Curvas IPCA	97
Figura 44 - Comparativo da evolução das taxas de perpetuidades IPCA.....	97
Figura 45 - Comparativo da evolução das taxas de curto prazo IPCA.....	98
Figura 46 - Taxa de Retorno LTN de 3 meses	100
Figura 47 - ETTJ estimada para o dia pelos métodos MQ e MV.....	100
Figura 48 - ETTJ estimada para o dia pelos métodos MQ e MV, com arbitragem de parâmetro.	100

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Modelos de Curva de Juros	26
Tabela 2 - Restrições parâmetros Svensson Curva Pré	74
Tabela 3 - Comparando o valor da função objetivo Preço dadas às duas otimizações - Curva Pré Svensson.....	75
Tabela 4 - Comparando o valor da função objetivo Taxa dadas as duas otimizações - Curva IPCA Svensson.....	75
Tabela 5 - Estatísticas Descritivas para cada maturidade escolhida dada pelo modelo de Svensson..	77
Tabela 6 - Estatísticas Descritivas para cada maturidade escolhida dada pelo modelo de Svensson..	81
Tabela 7 - Restrições aplicadas as variáveis de Vasicek para a série de dados Curva Pré com objetivo de menor erro quadrático.....	84
Tabela 8 - Restrições aplicadas as variáveis de Vasicek para a série de dados Curva IPCA.....	88
Tabela 9 - Restrições aplicadas as variáveis de Vasicek para a série de dados Curva Pré para estudo da taxa de perpetuidade.....	93
Tabela 10 – Anexo A1. Dados de Mercado Futuro de DI. Respectivos preços e taxas coletados e resultantes do modelo de Svensson.....	107
Tabela 11 - Anexo A2. Parâmetros do Modelo de Svensson	107
Tabela 12 - Anexo A3. Dados de Mercado Futuro de DI. Respectivos preços e taxas coletados e resultantes do modelo de Vasicek	108
Tabela 13 - Anexo A4. Parâmetros do Modelo de Vasicek	108
Tabela 14 - Anexo B1. Dados de Mercado NTNBB. Respectivos preços e TIRs coletados e resultantes do modelo de Svensson.	109
Tabela 15 - Anexo B2. Parâmetros do Modelo de Svensson	109
Tabela 16 - Anexo B3. Dados de Mercado NTNBB. Respectivos preços e TIRs coletados e resultantes do modelo de Vasicek	110
Tabela 17 - Anexo B4. Parâmetros do Modelo de Vasicek.	110
Tabela 18 - Anexo C1. Dados de Mercado LTN 3meses	113
Tabela 19 - Anexo C2. Gráfico mostrando a autocorrelação entre a série de dados e a regressão obtida	114
Tabela 20 - Anexo C3. Resultados dos métodos de estimação por série temporal.....	114
Tabela 21 - Anexo C4. Resultados dos métodos de estimação por série temporal com parâmetro arbitrado no método MV.	115

Sumário

1	Introdução	1
2	Revisão da Literatura.....	2
2.1	Taxa de Juros e Taxa de Juros Foward	2
2.2	Valor de Mercado de um Título de Renda Fixa.....	4
2.3	Medidas de Risco em Renda Fixa.....	5
2.3.1	Duration	5
2.3.2	Convexidade.....	7
2.4	A Estrutura a Termo Taxa de Juros	9
2.5	As Teorias de Formação para a Estrutura a Termo Taxa de Juros	13
3	Modelos de Estimação da ETTJ	17
3.1	Os Derivativos de Renda Fixa e a Evolução dos Modelos	23
3.1.1	Movimento Browniano (W) ou Processo de Wiener (Z)	28
3.1.2	Lema de Itô.....	30
3.1.3	Martingales e o Ambiente Livre de Risco.....	31
3.2	Modelos Unifatórios de Equilíbrio.....	35
3.2.1	O Modelo de Merton (1973).....	37
3.2.2	O Modelo de Vasicek (1977) - Detalhado	38
3.2.3	O Modelo de Cox – Ingersoll – Ross, CIR (1985)	45
3.3	Modelos de Não-arbitragem	46
3.3.1	O Modelo de Ho-Lee (1986)	48
3.3.2	O Modelo de Hull-White (1990).....	50
3.3.3	O Modelo de Black-Derman-Toy (1990).....	52
3.3.4	O Modelo de Heath-Jarrow-Morton (1992).....	53
4	Modelando a Estrutura a Termo	55
4.1	O Modelo de Nelson e Siegel (1987).....	55
4.2	O Modelo de Svensson (1994)	57

5	Escolha dos Modelos e Desenvolvimento Experimental	59
5.1	Base de Dados e Metodologia.....	59
5.2	Estimação dos Parâmetros.....	63
5.3	Método Cross-Section: Otimização Não-Linear	64
5.4	Volatilidade das Taxas.....	66
5.5	Método Série Temporal: Método dos Mínimos Quadrados Ordinários	67
5.6	Método Série Temporal - Método da Máxima Verossimilhança	69
6	Resultados e Discussão	71
6.1	Interpolando a ETTJ pelo Modelo de Nelson/Siegel & Svensson.....	73
6.1.1	Curva Taxa Pré.....	74
6.1.2	Curva Cupom IPCA.....	79
6.2	Interpolando a ETTJ pelo Modelo de Vasicek	83
6.2.1	Curva Taxa Pré.....	84
6.2.2	Curva Cupom IPCA.....	88
6.3	Comparando os Resultados – Curvas e Parâmetros dos Modelos.....	91
6.4	Interpolando a ETTJ pelo Modelo de Vasicek utilizando a série temporal	99
7	Conclusão	102
8	Referências Bibliográficas	105
Anexo A - Dados de Mercado Curva Pré – Futuro DI para o dia 31/10/2012		107
Anexo B – Dados de Mercado Curva IPCA – NTNBS para o dia 31/10/2012.....		109
Anexo C – Método de Estimação por Série Temporal Curva Pré.....		111

1 Introdução

O principal objetivo deste trabalho será analisar duas metodologias de construção da ETTJ que sirva para melhor aderir às taxas de juros observadas no mercado nas diferentes maturidades, através dos títulos públicos federais e derivativos de renda fixa com maior relevância no mercado brasileiro. Espera-se que estas metodologias forneçam uma gama de parâmetros maior para avaliar políticas de investimento, expectativas econômicas, inflação implícita contida nos preços negociados, volatilidade das taxas e vértices específicos do mercado e como instrumento de suporte em análise de Risco de Mercado.

Para esta modelagem, primeiramente são introduzidos alguns conceitos básicos do mercado de renda fixa como taxa de juros, taxas de juros forward, taxa de juros livre de risco, duration e convexidade.

O segundo passo é apresentar alguns modelos de comportamento da taxa de juros já existentes no mercado como os Modelos de Vasicek e Nelson/Siegel & Svensson. Estes modelos tentam reproduzir o comportamento da taxa de juros por meio de equações diferenciais estocásticas ou funções exponenciais ponderadas que reproduzem a curva de mercado em um certo instante.

No passo seguinte é detalhado com mais profundidade os modelos de Vasicek e Nelson/Siegel & Svensson, usados aqui na parte experimental juntamente com o detalhamento da base de dados utilizada.

Por fim são apresentados os resultados e conclusões, trazendo a tona as possíveis aplicações desses modelos nas instituições financeiras.

2 Revisão da Literatura

Serão apresentados alguns conceitos básicos sobre taxas de juros e medidas de risco. As definições matemáticas apresentam-se de forma geral e contínua no tempo de modo que possam ser aplicadas no desenvolvimento dos modelos de construção da curva de juros.

2.1 Taxa de Juros e Taxa de Juros Foward

O investimento no mercado de renda fixa é caracterizado por uma aplicação do capital onde se espera um retorno financeiro que acompanhe uma taxa de juros. Esta taxa pode ser tanto fixada no início do investimento (pré-fixada) quanto seguir alguma taxa existente no mercado (pós-fixada), como por exemplo, a taxa de juros Selic.

Se uma instituição ou o governo deseja captar recursos no mercado, ela emite títulos, tornando-se devedora de quem os compra. A quem compra este título, o credor, a instituição deve pagar ao fim de certo período de tempo o valor principal depositado pelo credor mais uma certa remuneração, referente à desvalorização do capital neste período de tempo, além do risco de crédito da instituição. Esta remuneração sobre valor investido inicialmente denomina-se taxa de juros.

A taxa de juros à vista (spot) associada a uma dada maturidade τ pode ser interpretada como o retorno de um título de renda fixa de cupom zero com vencimento em τ . Por cupom de juros podemos entender remuneração (ou parte da remuneração) de um título que é paga periodicamente. O termo tem origem no tempo em que os títulos eram emitidos em papel, e havia efetivamente cupons, os quais eram destacados pelo investidor, que os apresentava ao agente que fazia o pagamento periódico dos juros.

Definimos como τ o vencimento (maturidade) de um título de renda fixa, e seja o horizonte de tempo definido em $[0, \tau]$, a data corrente analisada será denotada por

t , portanto, $0 < t < \tau$. Vamos definir como $P(t, \tau)$ o preço de um título no instante t cujo vencimento é no instante τ , uma unidade de moeda. O preço do título $P(t, \tau)$ é crescente, atingindo seu valor máximo no seu vencimento τ caso seja mantido até esse instante (conhecido como papéis HTM - Held to Maturity), pelo contrário o título pode ser comercializado no mercado, sendo assim seu valor sujeito a valorização daquele instante, mesmo que essa seja negativa (caso em que a taxa de juros é maior que a taxa na data da compra). No último caso, esse método é chamado de Marcação a Mercado e será discutido na seção posterior.

Desse modo, $P(\tau, \tau) = 1$ e $P(t, \tau) < 1$, para $t < \tau$. Chamaremos de taxa de juros $r(t, \tau)$ o rendimento dos juros sobre o título em questão.

O preço de um título no instante t , com vencimento em τ , capitalizado m vezes ao ano, sujeito a uma taxa de juros $r(t, \tau)$ é dado por:

$$P(t, \tau) = \left(1 + \frac{r(t, \tau)}{m}\right)^{-m(\tau-t)}$$

Quando o título é capitalizado de modo contínuo (em intervalos infinitesimais de tempo), o preço será dado por:

$$\begin{aligned} P(t, \tau) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r(t, \tau)}{m}\right)^{-m(\tau-t)} \\ P(t, \tau) &= e^{-r(t, \tau)(\tau-t)} \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$r(t, \tau) = \frac{-\ln P(t, \tau)}{(\tau-t)} \tag{2.2}$$

As taxas a termo (forward) são as taxas de juros implícitas pelas taxas à vista para períodos de tempo no futuro.

A relação entre as duas pode ser ilustrada pelas fórmulas abaixo, a primeira usada para taxas compostas anualmente, e a segunda usada para taxas compostas continuamente:

$$(1 + R_{t,t+\tau}^t)^{\tau} = \prod_{k=0}^{\tau-1} (1 + f_k^t(1))$$

$$e^{T \cdot r_t(T)} = e^{\sum_{k=0}^{T-1} f_{c_k}^t(1)}$$

Onde:

$R_{t,t+T}^t$ é a taxa à vista anual composta anualmente em t para o período entre t e $t+T$;

$r_t(T)$ é a taxa à vista anual composta continuamente (c.c.) em t para o prazo T;

$f_k^t(1)$ é a taxa a termo anual em t para o período entre $t+k$ e $t+k+1$;

$f_{c_k}^t(1)$ é a taxa a termo anual c.c. em t para o período entre os anos $t+k$ e $t+k+1$;

T ($\in N$) é o prazo de maturidade (medido em anos);

t é a data de avaliação da ETTJ (data de pregão);

2.2 Valor de Mercado de um Título de Renda Fixa

Um dos fundamentos básicos da gestão de risco de mercado é a necessidade de se avaliar os instrumentos financeiros pelo seu valor de mercado. Parte destes instrumentos são negociados diariamente tanto em bolsa quanto em balcão, tornando simples a tarefa de valorização de carteiras que os contenham. Entretanto, há instrumentos que não apresentam mercado secundário, de forma que a valorização deve ser feita a partir de modelos de precificação que possibilitem o cálculo do valor de mercado.

No caso de instrumentos de renda fixa, o modelo de precificação básico consiste na elaboração de uma estrutura temporal de taxas de juros que reflete as condições de mercado para os instrumentos em questão. O valor a mercado pode ser obtido pelo cálculo do valor presente dos fluxos de caixa trazidos por esta estrutura temporal de taxas de juros. O valor de mercado dos títulos são de fundamental importância no cálculo de valorização de carteiras, gestão de risco e

ALM (Asset and Liability Management), sendo assim a estimativa da estrutura temporal dos juros de fundamental importância.

Para este estudo, onde se considera carteiras que não apresentam risco de crédito, a estrutura temporal de taxas de juros é aquela considerada como sendo livre de risco e ela é geralmente obtida através das taxas de juros implícitas nos títulos públicos negociados no mercado secundário, como é o caso do mercado norte-americano. No caso do mercado brasileiro, onde os títulos públicos negociados no mercado secundário não apresentam prazos diversificados o suficiente para se elaborar uma estrutura temporal, utiliza-se cotações de instrumentos derivativos.

2.3 Medidas de Risco em Renda Fixa

Diferentes tipos de ativos de renda fixa como títulos do governo, debêntures, CDBs e etc; possuem como principal fator de risco (fator primitivo de risco) oscilações da taxa de juros do mercado, podendo ser a carteira prejudicada ou beneficiada com a oscilação.

As medidas de risco nos fornecem uma noção da exposição da carteira em relação à variação na taxa de juros corrente.

2.3.1 Duration

A duração (duration) de um título (ou carteira) é definida como sendo o prazo médio dos vencimentos futuros, ponderado pelo valor presente dos fluxos de pagamentos (ou recebimentos):

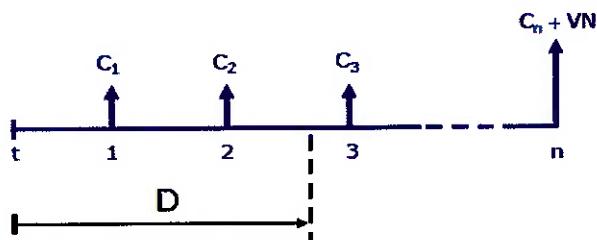


Figura 1 - Fluxo de pagamentos de cupons C e Valor Nominal (Principal) no vencimento

$$D = \frac{\sum_{t=1}^n t \times VP_t(i)}{VP(i)}$$

$$VP_t(i) = \frac{F_t}{(1+i)^t}$$

Onde,

i = taxa de juros periódica (TIR/Yield);

F_t = valor do fluxo no período;

$VP_t(i)$ = valor presente do t -ésimo fluxo;

$VP(i)$ = valor presente do fluxo total.

A duração modificada (modified duration) mede a variação no valor de um título dada uma variação na taxa de juros, com relação ao valor presente do título.

$$DM = -\frac{1}{VP(i)} \frac{dVP(i)}{di} = \frac{D}{(1+i)}$$

Além de nos dar uma noção de tempo, a duration pode ser interpretada como uma medida de sensibilidade da carteira em relação à taxa de juros.

Suponha que possamos representar a carteira inteira como sendo um único título, que denominaremos de “título sintético”.

Usando a seguinte notação:

PV: valor da carteira no presente;

FV: valor da carteira na data do vencimento;

I: taxa de juros paga pelo título sintético;

D: duration da carteira.

Então:

$$PV = \frac{FV}{(1+I)^D}$$

A variação no valor presente da carteira em relação à variação da taxa de juros do título sintético é dada pela derivação:

$$\frac{dPV}{dI} = -D \frac{FV}{(1+I)^{D+1}}$$

$$\text{Fazendo } \frac{dPV}{PVdI} = -D \frac{FV}{PV} \frac{1}{(1+I)^{D+1}} \rightarrow \frac{dPV}{PVdI} = -D(1+I)^D \frac{1}{(1+I)^{D+1}}$$

Portanto:

$$\frac{dPV}{PV} = -D \frac{dI}{(1+I)} = -DM \cdot dI$$

A equação acima nos permite interpretar a duration como uma medida de sensibilidade. Ela estima a variação relativa do valor presente da carteira em relação a uma variação relativa na taxa de juros.

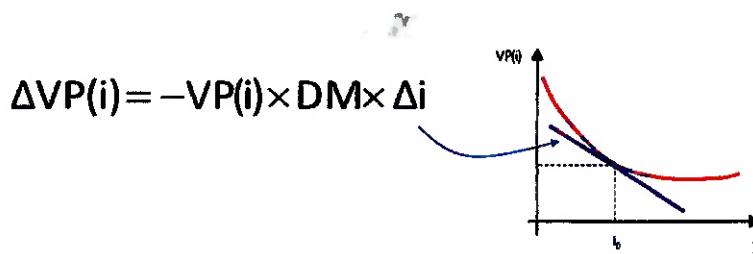


Figura 2 - Representação Gráfica da Duration

2.3.2 Convexidade

Juntamente com a duration, a convexidade é uma medida de sensibilidade que tenta captar o efeito da mudança na taxa de juros no valor presente da carteira.

A convexidade estuda a variação relativa dos preços em função da variação da taxa de juros ($dPV/PV \times di$), ou seja, ela estuda a curvatura (ou convexidade) da variação dos preços em relação à variação da taxa de juros. Quanto maior for essa curvatura (quanto mais convexa), maior será a sensibilidade da carteira ou do ativo em relação a mudanças na taxa de juros.

A curvatura é representada pela segunda derivada da função $VP_t(i) = \frac{F_t}{(1+i)^t}$.

Portanto, a medida da convexidade é dada da seguinte forma:

$$C = \frac{1}{VP(i)} \frac{d^2VP(i)}{di^2} = \frac{1}{VP(i)(1+i)^2} \sum_{t=1}^n \frac{t(1+t)F_t}{(1+i)^t}$$

Da mesma forma que a suposição acima, podemos analisar a convexidade da carteira de um único título desenvolvendo a derivação de segunda ordem através da expansão em série de Taylor:

$$dVP = \frac{dVP}{di} di + \frac{1}{2} \frac{d^2VP(i)}{di^2} (di)^2 + \text{erro}$$

$$\frac{dVP}{VP} = \frac{dVP}{di} \frac{1}{VP} di + \frac{1}{2} \frac{d^2VP(i)}{di^2} \frac{1}{VP} (di)^2 + \frac{\text{erro}}{VP}$$

$$\frac{dVP}{VP} = DM \cdot di + \frac{1}{2} C(di)^2$$

$$\Delta VP(i) = -VP(i) \times DM \times \Delta i + \frac{1}{2} VP(i) \times C \times \Delta i^2$$

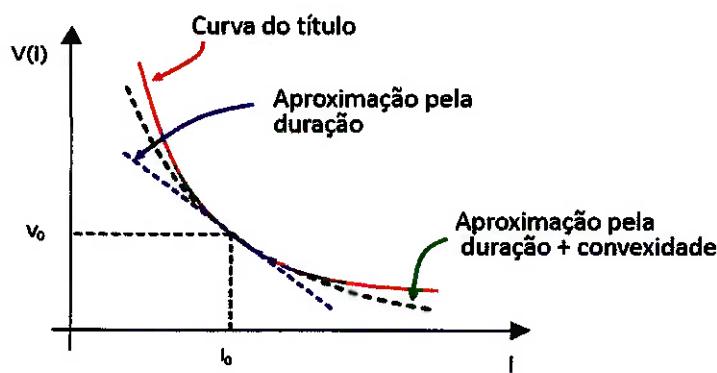


Figura 3 - Representação Gráfica da Convexidade

2.4 A Estrutura a Termo Taxa de Juros

O estudo da Estrutura a Termo Taxa de Juros é relevante para diversas áreas da economia, daqueles que realizam política monetária e gestores de carteiras de renda fixa. Dentre as principais razões para seu estudo podemos destacar: previsão e comportamento das taxas, política monetária, gerenciamento da dívida pública e gerenciamento de riscos e apreçamento de ativos. Uma das motivações deste trabalho (modelagem da taxa de juros) esta ligada a necessidade de previsão das taxas e a sua aplicação no apreçamento de ativos.

As expectativas das taxas de juros influenciam as decisões de investimento, consumo e política dos agentes econômicos. Discutiremos com mais detalhes abaixo as teorias que buscam explicar os comportamentos dos agentes e seu impacto no formato da curva de juros.

No que tange a política monetária, o controle da oferta da moeda e das taxas de juros de curto prazo é feito de forma a garantir a liquidez ideal de cada momento econômico. O executor dessa política é o Banco Central (BACEN) através de instrumentos como o depósito compulsório, empréstimo de liquidez, controle e seleção de crédito e, o que estamos mais interessados, no mercado aberto com a compra/venda de títulos públicos. O BACEN possui também sua política pautada em metas de inflação. Como não há instrumentos disponíveis para modificar diretamente a taxa de juros real (taxa de juros descontada a inflação), o BACEN se utiliza da taxa básica da economia, a SELIC (Sistema Especial de Liquidação e Custódia). No entanto, como o objetivo final do BACEN é o nível desejado da taxa real, os modelos de taxas de juros reais auxiliam-no a realizar a política monetária e a identificar seus impactos na economia, em particular, na inflação.

Para o gerenciamento da dívida pública, o Tesouro Nacional, como caixa do governo, capta recursos no mercado financeiro via emissão primária de títulos públicos, para execução e financiamento das dívidas internas do governo. Uma série de siglas identificam os títulos públicos com características diferentes de prazo e remuneração, mas que na sua essência, cumprem a missão básica de rolagem da dívida interna pelo tesouro nacional. Para este trabalho estaremos interessados nos

títulos indexados a inflação (NTN-B) e de títulos pré-fixados (LTN e NTN-F) para diversas maturidades, sendo a modelagem da ETTJ importante tanto para a colocação como recompras de títulos. Mesmo que na escolha da base de dados seja por instrumentos derivativos, a observação dos preços desses títulos reproduz as expectativas do mercado, pautada nos títulos públicos.

Abaixo descrevemos os principais títulos públicos soberanos no Brasil.

Títulos prefixados - títulos públicos cuja rentabilidade é definida no momento da compra.

- a) LTN (Letras do Tesouro Nacional) - possui fluxo de pagamento simples, ou seja, o investidor faz a aplicação e recebe o valor de face (valor investido somado à rentabilidade), na data de vencimento do título.

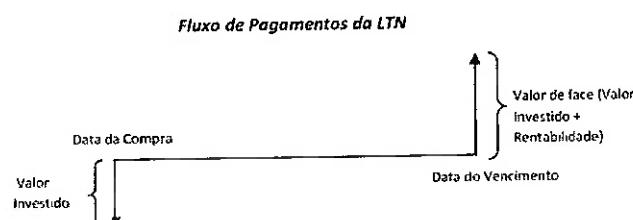


Figura 4 - LTN Fluxo de Pagamentos

- b) NTN-F (Notas do Tesouro Nacional – Série F) - o rendimento da aplicação é recebido pelo investidor ao longo do investimento, por meio de cupons semestrais de juros, e na data de vencimento do título, quando do resgate do valor de face (valor investido somado à rentabilidade) e pagamento do último cupom de juros.

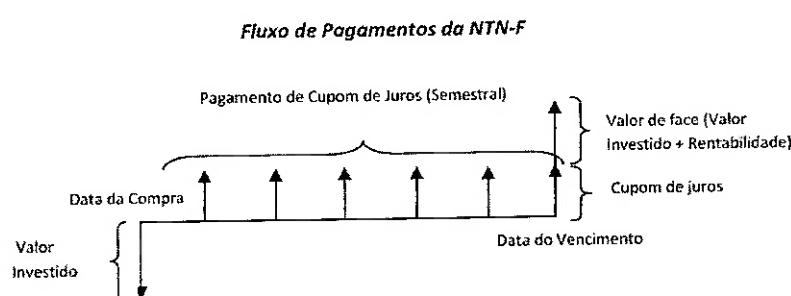


Figura 5 - NTN-F Fluxo de Pagamentos

Títulos indexados ao IPCA - títulos com rentabilidade vinculada à variação do IPCA, acrescida dos juros definidos no momento da compra. São as NTN-B Principais e as NTN-B:

- c) NTN-B (Notas do Tesouro Nacional – Série B) - o rendimento da aplicação é recebido pelo investidor ao longo do investimento, por meio de cupons semestrais de juros, e na data de vencimento do título, quando do resgate do valor de face (valor investido somado à rentabilidade) e pagamento do último cupom de juros.

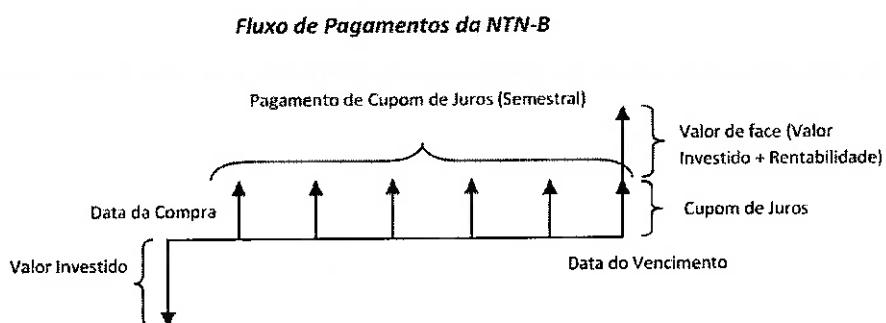


Figura 6 - NTN Fluxo de Pagamentos

- d) NTN-B Principal (Notas do Tesouro Nacional – Série B – Principal) - possui fluxo de pagamento simples, ou seja, o investidor faz a aplicação e resgata o valor de face na data de vencimento do título.

A característica hoje da dívida pública brasileira e toda sua dinâmica se concentra nas NTN-Bs.

O mercado divulga a rentabilidade desses títulos, na forma de taxa efetiva anual, base 252 dias úteis. Com base nessa taxa, o preço (observado) de cada título (em t) é calculado de acordo com as seguintes relações:

$$P_{LTN} = \frac{1000}{\left(1 + R_{t,t+\tau_j}^t\right)^{\frac{\tau_{j,i}}{252}}}$$

$$P_{NTNF,i} = \sum_{j=1}^{k_i} \frac{1}{(1 + R_{t,t+\tau_j}^t)^{\frac{\tau_{j,i}}{252}}} F_{j,i}$$

$$P_{NTNB,i} = \frac{IPCA_t}{IPCA_{db-1}} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{1}{(1 + R_{t,t+\tau_j}^t)^{\frac{\tau_{j,i}}{252}}} F_{j,i}$$

Onde:

$IPCA_t$ – número índice do IPCA na data de avaliação;

$IPCA_{db-1}$ – número índice do IPCA na data-base do título;

k_i é o número de pagamentos dessa NTN-B (inclui cupom e principal)

$F_{j,i}$ é o j-ésimo pagamento dessa NTN-B

$\tau_{j,i}$ é o prazo (em dias úteis) em que ocorre o j-ésimo pagamento dessa NTN-B

$R_{t,t+\tau_j}^t$ é a taxa efetiva anual, base 252 dias úteis, em t para o período entre t e $t + \tau_j$

Com relação ao gerenciamento de riscos e apreçamento de ativos financeiros, estes são realizados devido aos riscos oriundos de instrumentos associados a taxas de juros reais, tais como títulos públicos indexados a inflação (NTN-B e NTN-C), futuros ou swaps (instrumento de derivativo que serva para trocar um tipo de risco financeiro – será definido na seção Derivativos).

A estrutura a termo de taxa de juros (ETTJ) é uma curva ou função que associa uma taxa de juros única para cada maturidade desejada, sem necessariamente ser um vértice de mercado.

Fabozzi (2000: 96) define estrutura temporal de taxas de juros (ETTJ) ou curva de juros como sendo a representação gráfica do relacionamento entre as taxas de juros de títulos de mesma qualidade de crédito, mas diferentes prazos. Ela tem como principal utilidade servir de base para a precificação de instrumentos de renda fixa.

Além de precificação, as curvas de juros fornecem subsídios para apuração do valor de mercado dos fluxos futuros dos instrumentos (valor presente) com objetivo de agregá-los em uma única unidade monetária (conceito de valor temporal do dinheiro).

A estrutura de retornos de qualquer tipo de instrumento de renda fixa é composta basicamente de três fatores de risco financeiros, sendo representados pelo prêmio de crédito, pelo prêmio de liquidez e pela taxa básica de mercado. Nesse estudo serão consideradas apenas variações na estrutura temporal decorrentes de oscilações na taxa de mercado, desconsiderando-se os efeitos causados pelos demais fatores.

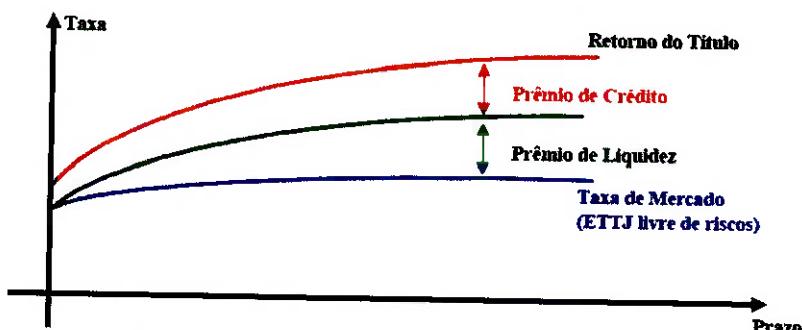


Figura 7 - Fatores de Risco Implícitos

A estrutura temporal é usualmente expressa na forma de taxas de juros a vista (spot), isto é, para períodos compreendidos entre a data atual e uma determinada data futura. Outro modo de se expressar a curva de juros é na forma de taxas a termo (forward), como definida.

2.5 As Teorias de Formação para a Estrutura a Termo Taxa de Juros

Existem duas grandes teorias que se solidificaram na busca da explicação dos formatos observados das ETTJs. A **Teoria das Expectativas** e a **Teoria de Segmentação de Mercado**. Quanto às teorias de expectativas podemos destacar a teoria das expectativas puras, a teoria da preferência pela liquidez e a teoria do habitat preferido.



Figura 8 - Representação esquemática das teorias de formação da estrutura a termo

A **Teoria das Expectativas Puras** afirma que a taxa de retorno esperada sobre um investimento para um intervalo de tempo é a mesma, independentemente de seu prazo de vencimento. Exemplificando, se o horizonte de investimento de um indivíduo é um ano, não há diferença se ele inicialmente investir em qualquer uma dessas alternativas: a) um título de seis meses e no vencimento deste comprar outro título de seis meses; b) um título de um ano; c) um título de dois anos e vendê-lo ao final de um ano.

Assim, pela teoria das expectativas puras, o retorno esperado para um determinado período é o mesmo para qualquer uma das alternativas acima. Deste modo, assumindo-se que não há custos de transação e que esta teoria seja válida, títulos com diferentes vencimentos seriam substitutos perfeitos entre si. Possíveis investidores a qualquer momento possuem três opções: investir em títulos de curto prazo, renovando a operação ao longo do horizonte de investimento (rollover); investir em um título com maturidade exatamente igual ao seu horizonte de investimento; ou investir em um título com prazo de vencimento superior ao horizonte de investimento, vendendo-o ao final do período definido.

Esta teoria assume também a presença de participantes no mercado que sejam neutros ao risco e capazes de explorar oportunidades de lucros. Caso as taxas a termo diferenciem-se das taxas futuras esperadas, haveria uma especulação suficiente no mercado para direcionar os dois conjuntos de taxas na mesma direção.

Com taxas diferentes, vários participantes de mercado, observando a oportunidade de ganho sem risco, explorariam a oportunidade até que ela fosse eliminada. Deste modo, pode-se interpretar as taxas a termo como estimativas não viesadas das taxas futuras esperadas.

Se este ajuste ocorrer rapidamente, eliminando a possibilidade de arbitragem, tem-se um mercado eficiente, onde todas as informações relevantes estão incorporadas nas expectativas sobre o curso futuro das taxas de juros.

A **Teoria da Preferência pela Liquidez** pode ser vista como um ajuste na teoria das expectativas, acrescentando os prêmios pelo prazo de vencimento dos contratos, ou seja, quanto maior o prazo de vencimento de um título, maior é o risco de flutuação do valor do principal para o investidor. Sem esta hipótese, caso houvesse plena certeza no mercado sobre a formação das taxas futuras, as taxas a termo seriam previsões exatas das futuras taxas a vista e a possibilidade de arbitragem tornaria todos os prazos de vencimento consistentes com as expectativas de tal forma que o investidor receberia o mesmo retorno independentemente do vencimento do título, ou seja, a taxa forward não conteria nenhuma recompensa pelo risco.

Entretanto, devido à existência de risco, os investidores preferem emprestar no curto prazo, enquanto os tomadores de recursos preferem prazos maiores de tal forma a reduzir o risco de não pagamento do principal. Portanto, um prêmio deve ser oferecido para induzir os investidores a comprar títulos de longo prazo.

A presença de prêmios pelos prazos dos títulos implica em um viés de curvas crescentes de taxas de juros. Na realidade, a estrutura a termo poderia decrescer somente quando as futuras taxas spot esperadas fossem menores do que a taxa spot atual em montantes que excedessem seus respectivos prêmios.

A **Teoria do Habitat Preferido** também adota a visão que a estrutura temporal de taxas de juros reflete a expectativa em relação às taxas futuras assim como o prêmio de risco. Ela supõe que investidores e tomadores podem trocar de mercados mediante alterações nas taxas de juros à medida que as mesmas se tornem mais atrativas em um mercado, em comparação com o segmento atual de

atuação (habitat). Assim, esta teoria propõe que o formato da curva de juros é determinado tanto pelas expectativas de taxas de juros futuras quanto pelo prêmio de risco (positivo ou negativo) que induz os participantes do mercado a se deslocarem de seu habitat preferido. Por esta teoria, então, as estruturas temporais podem assumir formas diversas, inclusive com corcovas.

A **Teoria da Segmentação de Mercado** sugere que o comportamento segmentado de financiadores e tomadores de recursos determine o formato da curva de juros. A idéia básica desta teoria é que, devido a restrições legais e comportamentais, financiadores institucionais preferem os intervalos de prazos nos quais eles operam.

Assim, bancos comerciais tipicamente preferem títulos de curto prazo a títulos de médio e longo prazo, devido à natureza do seu passivo e a uma tradicional ênfase em liquidez.

Já companhias de seguro e outros financiadores, com passivos de longo prazo, preferem prazos de vencimento maiores. Por outro lado, os tomadores de recursos procuram ajustar os vencimentos de seus passivos à sua necessidade de fundos. Assim, uma empresa, construindo uma nova planta, preferiria recursos de longo prazo, ao contrário de uma loja de eletrodomésticos, que estaria preocupada em financiar seu capital de giro.

No extremo, a teoria de segmentação de mercado implica que a taxa de juros para um determinado período seja determinada basicamente pelas condições de demanda e de oferta para aquele dado período, sem referência às condições para outros períodos. Em outras palavras, tanto financiadores como tomadores de recursos possuem preferências rígidas de prazo e não desviam de suas preferências, independentemente de quão atraentes sejam as taxas para outros prazos.

3 Modelos de Estimação da ETTJ

A ETTJ não é diretamente observável na prática e precisa ser estimada a partir de cotações de mercado para títulos de renda fixa ou instrumentos financeiros derivativos, disponíveis para um número finito de vencimentos (os “dados/pontos observados da curva”). A partir deste conjunto discreto de dados, pode-se construir uma curva/função “contínua” que aproximadamente se “acomode” ou “encaixe” nos dados observados, usando técnicas de interpolação, e estimar o valor da curva/função em pontos fora da zona conhecida, usando técnicas de extrapolação.

A partir das taxas de juros implícitas nos instrumentos negociados no mercado – títulos ou derivativos que tenham como ativo subjacente às taxas de juros – podemos observar a ETTJ para determinadas maturidades. No entanto, não há taxas disponíveis para todos os dias. Para os diversos agentes de mercado a ETTJ precisa estar completa e isso é feito através de através de interpolações e extrapolações. Existem alguns modos diretos de interpolar as curvas da ETTJ e serão discutidos abaixo.

O objetivo da interpolação é encontrar uma função matemática que interligue um conjunto de vértices de forma a estabelecer corretamente as taxas de juros correspondentes aos prazos entre esses vértices.

Um dos métodos de interpolação mais utilizados é o chamado “polinômios por partes”, ou seja, entre dois vértices consecutivos um polinômio é ajustado de modo a passar pelos vértices. A união de todos os polinômios define a ETTJ.

O método de interpolação deve aderir ao processo formador das taxas de juros definido pelo mercado para que este seja representativo. Os métodos de interpolação mais comuns são:

a) Linear - Representa o método mais simples de interpolação, consistindo na união de cada par de vértices consecutivos por uma reta. As taxas dos pontos intermediários aos vértices são obtidas segundo a regra abaixo:

$$Taxa_t = Taxa_{v\acute{e}rtice\ n} + \left(\frac{Taxa_{v\acute{e}rtice\ n} - Taxa_{v\acute{e}rtice\ n-1}}{Prazo_{v\acute{e}rtice\ n} - Prazo_{v\acute{e}rtice\ n-1}} \right) (Prazo_{v\acute{e}rtice_n} - Prazo_t)$$

b) Composta - Representa o método que fornece uma relação de crescimento composto entre as taxas de cada par de vértices. O fator de crescimento é obtido como função das taxas a termo entre os vértices e pode ser demonstrado pela regra abaixo:

$$Taxa_t = Taxa_{vértice\ n} + \left(\frac{Taxa_{vértice\ n}}{Taxa_{vértice\ n-1}} \right)^{\left(\frac{Prazo_{vértice\ n} - Prazo_t}{Prazo_{vértice\ n} - Prazo_{vértice\ n-1}} \right)}$$

c) Log-Linear - Representa uma forma alternativa de fornecer uma relação entre taxas a termo de cada par de vértices, apresentando o mesmo resultado da interpolação composta. Esse método utiliza a mesma função interpolante do linear, porém ele não aplica a fórmula diretamente nos vértices iniciais, mas sim nos seus logaritmos. A taxa é obtida através da exponencialização do logaritmo encontrado conforme a regra apresentada abaixo:

$$Taxa_t = e^{\ln(Taxa_{vértice\ n}) + \left(\frac{\ln(Taxa_{vértice\ n}) - \ln(Taxa_{vértice\ n-1})}{Prazo_{vértice\ n} - Prazo_{vértice\ n-1}} \right) (Prazo_{vértice\ n} - Prazo_t)}$$

d) Spline Cúbico - Mais apropriadamente denominado de “spline cúbico por partes”, este método utiliza um polinômio de terceiro grau para fazer a interpolação entre pares de vértices consecutivos e impõe a condição de derivadas iguais nos vértices, de forma que a função contínua resultante em todos os intervalos seja “suave”.

O método Spline Cúbico é uma função polinomial de ordem 3 definida por trechos. Em todo o domínio, cada ponto (nó) separa os “n” trechos que compõem uma curva. A composição de todas as funções de cada trecho gera a curva interpolada para esses pontos. Esse método possui um alto nível de alisamento onde os polinômios se conectam (nós).

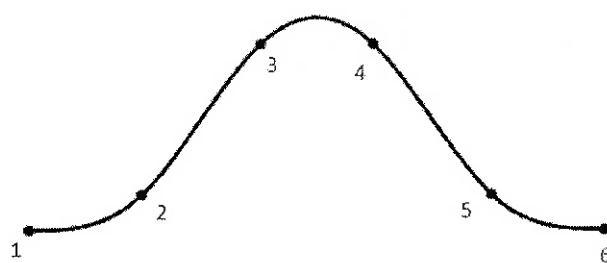


Figura 9 - Spline Cúbica composta por 5 polinômios (com segunda derivadas positivas e negativas).

Podemos entender essa classe de interpolações como modelos Não Paramétricos. O objetivo aqui é apenas “ligar” dois pontos adjacentes por uma função matemática linear de primeiro ou terceiro grau. A extração dos pontos é totalmente comprometida já que não conseguem capturar de uma forma coerente expectativas de longo prazo do mercado.

Métodos mais complexos utilizam um conjunto de parâmetros combinados linearmente e funções dependentes destes parâmetros para descrever a curva, de forma a propor uma extração condizente com as expectativas. São os modelos Paramétricos.

Os modelos Paramétricos englobam as classes dos modelos de fatores, componentes principais que formam uma curva de juros, além de interpolações. Dentro da classe de modelos de fatores encontra-se o modelo de Nelson e Siegel (1987) e Svensson (1994), nos quais se consegue explicar a maior parte da evolução da ETTJ a partir de três e quatro fatores respectivamente. Esses modelos não são oriundos de um modelo de taxa de juros e não possuem fundamentação teórica, supõe-se apenas que a curva da ETTJ tenha determinada forma funcional e ajustam-se os parâmetros desta função de forma a obter o menor erro possível da diferença entre os pontos reais da ETTJ e os pontos da curva interpolada.

A classe de modelos paramétricos que buscam modelar a ETTJ através de fundamentação teórica da formação de taxas de juros e preços, buscando traduzir esse “comportamento” em equações matemáticas são conhecidos como modelos estruturados (modelos de Equilíbrio ou Não-arbitragem).

Justamente através de hipóteses de Equilíbrio ou Não-arbitragem, esses modelos especificam uma equação diferencial estocástica para os fatores da economia gerando uma simulação que explica a dinâmica da ETTJ ao longo do tempo como função desses fatores.

Os modelos de equilíbrio supõem que a taxa de juros é resultado de um equilíbrio econômico, ou seja, dadas as variáveis que compõem o equilíbrio econômico, a variável “taxa de juros” é endógena, sendo um resultado do modelo. Por esta razão, a taxa determinada por um modelo de equilíbrio não precisa necessariamente corresponder às taxas efetivamente observadas e precificadas no mercado.

Por outro lado, outra categoria de modelos de taxa de juros é o de não-arbitragem. Estes modelos possuem termos dependentes no tempo, o que permite a entrada no modelo de dados efetivamente observados no mercado. Esta característica torna os modelos de não-arbitragem menos viesados e, portanto, mais aceitos no mercado.

Por arbitragem iremos entender se existir uma probabilidade não nula de um investimento zero em um determinado instante de tempo que resulte com certeza em um retorno positivo em um instante posterior. Os modelos de não-arbitragem supõem esta situação ser impossível.

Um modelo estruturado calibrado ou estimado não tem porque se ajustar perfeitamente à ETTJ observada da economia, afinal, o modelo impõe uma série de restrições tanto em relação à dinâmica dos fatores como em relação às correlações entre as várias taxas de mais longo prazo que formam a ETTJ a cada período do tempo.

Outra classificação atribuída entre os modelos é em relação ao número de variáveis de estado dentro do modelo. Uma variável é denominada de estado se ela é responsável pela composição da estrutura a termo da taxa de juros. As variáveis de estado mais comuns são: o preço do título $P(t, \tau)$, a taxa de juros instantânea r_t e a taxa de juros forward instantânea $f(t, \tau)$.

Se no modelo somente uma variável é de estado, então denominamos o modelo de unifatorial. Geralmente a taxa de juros livre de risco, r_t é uma estatística suficiente para toda a estrutura a termo da taxa de juros, ou seja, ela é perfeitamente correlacionada com todos os vencimentos da curva de juros.

Se um modelo tem mais que uma variável de estado, então ele é denominado de multifatorial. Quando se trata de derivativos de taxa de juros que dependem da correlação entre os vencimentos ou entre a taxa instantânea e a forward, os modelos multifatoriais são melhores opções para a modelagem da curva de juros.

O uso de modelos estruturados da ETTJ garante a consistência dos resultados com hipóteses de não-arbitragem, além disso, vários dos parâmetros desses modelos carregam o prêmio de risco do mercado e a taxa de juros de longo prazo da economia. Esses modelos, entretanto, dadas as restrições que eles impõem, nem sempre garantem que as taxas teóricas sejam idênticas às taxas de fato observadas. Tal fato tem impedido, muitas vezes, o uso mais amplo na indústria financeira desses modelos, pois os agentes de mercado demandam, antes de tudo, que seu modelo da ETTJ se ajuste perfeitamente às taxas observadas no mercado.

Outra variável que influencia considerar se uma previsão é boa ou ruim, é o vértice da ETTJ em que a previsão é realizada. Saber qual será a taxa de juros de curto prazo é uma informação que pode ser pouco relevante para a condução da política monetária em alguns mercados, mas é muito relevante para montar uma estratégia de investimento. Dessa forma, uma previsão que seja boa apenas para prever o comportamento dos vértices mais curtos da ETTJ tem uma utilidade muito maior para uma estratégia de investimento do que para auxiliar na execução da política monetária.

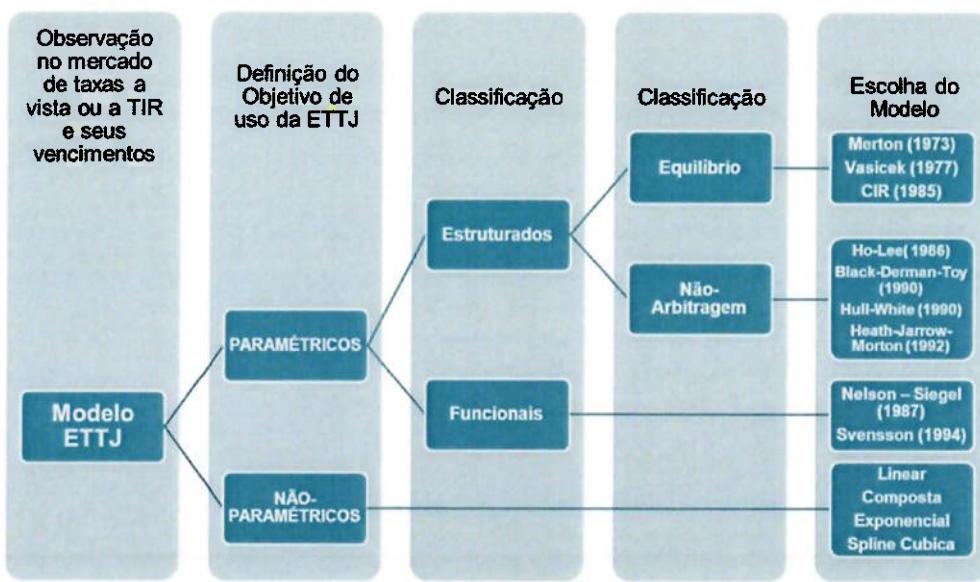


Figura 10 - Classificação dos Modelos

Existem resultados empíricos, utilizando a técnica de Análise de Componentes Principais (ACP), que mostram que 85% a 90% da variação da taxa de juros é explicada pela primeira componente, o nível da taxa de juros.

A discussão de componentes principais é extremamente relevante, pois com esses trabalhos, surgiram diversos modelos que englobaram os resultados obtidos por componentes principais para a especificação de modelos de estrutura a termo e a determinação do número de fatores a serem adotados para a descrição do processo de difusão da taxa de juros (modelos de equilíbrio e não-arbitragem), como será exposto nas próximas seções.

ACP é uma técnica estatística que tem o objetivo de explicar o comportamento de variáveis observáveis através de um conjunto menor de variáveis não observáveis ou artificiais. A técnica consiste em realizar uma transformação linear de um conjunto de variáveis originais para um conjunto de variáveis ortonormais, que reproduzem a soma das variâncias da série de dados originais. Essas variáveis ortonormais representam um novo sistema de coordenadas em que os eixos são organizados conforme o percentual de explicação da variância total presente na base de dados. A primeira variável (eixo) explica a maior parte da variância presente na base de dados original, a segunda variável explica a segunda maior parte da variância e assim sucessivamente. Ou seja, os dados originais

passam a ser descritos por um conjunto de variáveis não observáveis, não correlacionadas e organizadas de forma decrescente em relação ao poder de explicação das variâncias, chamadas de componentes principais. Isso torna possível uma redução na dimensão do problema, escolhendo-se as componentes principais que explicam, suficientemente, a variabilidade dos dados originais.

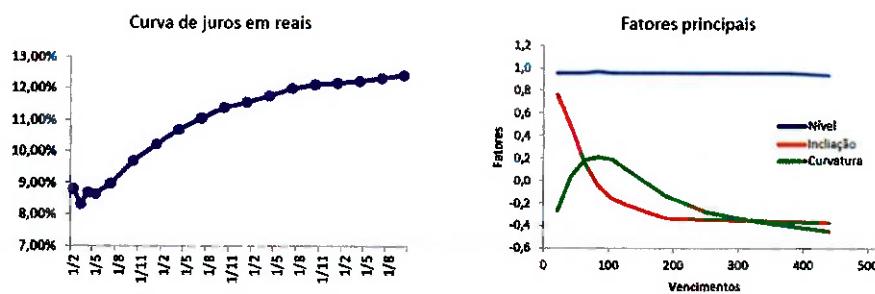


Figura 11 - Curva de Juros e a sua decomposição em ACP

3.1 Os Derivativos de Renda Fixa e a Evolução dos Modelos

A história da evolução dos modelos de taxa de juros originou-se nos Estados Unidos com a necessidade de apreçamento de derivativos de taxa de juros. Os derivativos de taxas de juros são instrumentos os quais o payoff depende diretamente do nível de taxa de juros. Com o aumento do volume de negócios desses derivativos aumentou-se o desafio da precificação e hedge desses produtos.

Derivativo é um contrato no qual se estabelecem pagamentos futuros em que o montante é calculado com base no valor assumido por uma variável. Essa variável pode ser o preço de outro ativo, a inflação acumulada no período, a taxa de câmbio, taxa de juros ou qualquer outra variável dotada de significado econômico. Portanto, derivativos recebem esta denominação porque seu preço de compra e venda deriva do preço de outro ativo, denominado ativo-objeto.

Os derivativos foram criados como forma de proteger os agentes econômicos (produtores ou comerciantes) contra os riscos decorrentes de flutuações de preços,

durante períodos de escassez ou superprodução do produto negociado, por exemplo.

Atualmente, no entanto, a ideia básica dos agentes econômicos, ao operar com derivativos, é obter um ganho financeiro nas operações de forma a compensar perdas em outras atividades econômicas. Desvalorização cambial e variações bruscas nas taxas de juros são exemplos de situações nas quais os prejuízos podem ser reduzidos ou até se transformaram em ganhos para os agentes econômicos que protegeram os seus investimentos realizando operações com derivativos.

Os principais tipos de contrato derivativo são:

- A termo - comprador e vendedor se comprometem a comprar ou vender, em data futura, certa quantidade de um bem (mercadoria ou ativo financeiro), a um preço fixado na própria data da celebração do contrato. Os contratos a termo somente são liquidados integralmente na data de vencimento, podendo ser negociados em bolsa e no mercado de balcão.
- Futuros – Assim como no contrato a termo, o comprador ou vendedor se compromete a comprar ou vender certa quantidade de um ativo por um preço estipulado, numa data futura. No mercado futuro, os compromissos são ajustados diariamente às expectativas do mercado referentes ao preço futuro do bem, por meio do ajuste diário (mecanismo que apura perdas e ganhos). Os contratos futuros são negociados somente em bolsas.
- De opção - contratos que dão a compradores ou vendedores o direito, mas não a obrigação, de comprar ou vender o ativo relacionado, em uma data futura (data do vencimento da opção), por um preço preestabelecido (o preço de exercício da opção). O comprador deve pagar um prêmio ao vendedor por esta opção. Diferentemente dos futuros, o detentor de uma opção de compra (call) ou de venda (put) não é obrigado a exercer o seu direito de compra ou venda. Opções do tipo americano podem ser exercidas a qualquer momento, até a data de vencimento; opções do tipo europeu só podem ser exercidas na data de vencimento do contrato. Caso não exerça seu direito, o comprador perde também o valor do prêmio pago ao vendedor.

- Swaps - contratos que determinam um fluxo de pagamentos entre as partes contratantes, em diversas datas futuras. Negocia-se a troca (swap) do índice de rentabilidade entre dois ativos. Agentes econômicos interessados em trocar seus respectivos riscos, podem firmar um contrato de swap (diretamente ou mediante a intermediação de uma instituição financeira). O swap, no entanto, implica em certo risco. Variações inesperadas nos indexadores das dívidas podem eventualmente prejudicar um dos signatários, prejudicando o outro. Tal como a operação a termo, a operação de swap é liquidada integralmente no vencimento.

Os derivativos de taxas de juros são mais difíceis de especificar do que os derivativos de ações ou moeda, principalmente porque:

1. O comportamento de um vértice particular de taxa de juros é mais complicado do que o preço de uma ação ou moeda.
2. Para a especificação de vários produtos, é necessário o desenvolvimento de um modelo de comportamento de toda a curva zero cupom.
3. As volatilidades dos diferentes vértices são diferentes.
4. As taxas de juros são utilizadas tanto para taxa de desconto como para a definição do payoff do derivativo.

Os principais derivativos de taxa de juros no Brasil são o mercado futuro de taxa de juros e opções de taxas de juros (Mercado do DI e IDI) e as operações de SWAP (negocia-se a troca de rentabilidade entre dois índices de renda fixa). As opções sobre taxas de juros necessitam do modelo de especificação que utiliza a curva de juros em diferentes vencimentos, sendo, portanto necessário um modelo estocástico de equilíbrio econômico e não-arbitragem.

No mercado de renda fixa brasileiro observamos não somente altas taxas de juros tanto nominais como reais, mas também suas extremas volatilidades em relação ao padrão internacional dos países desenvolvidos. Assim, a implantação doméstica de modelos largamente utilizados nesses países torna-se um enorme desafio em termos de engenharia financeira. Igualmente, não é uma tarefa trivial calibrar modelos de taxas de juros que venham a incorporar os fatos estilizados que observamos no mercado brasileiro.

Ao se traduzir as expectativas e comportamentos das taxas de juros em diferentes vencimentos, esses modelos produzem uma ETTJ estimada e, portanto, possuem aplicação não somente no apreçamento de derivativos, mas também nas áreas da economia em que sua aplicação é relevante (como abordado na seção sobre a Estrutura Termo Taxa de Juros). É importante notar, que a escolha de um modelo de ETTJ é feita de acordo com a necessidade de aplicação, seja ele paramétrico ou comportamental (no último caso de equilíbrio e/ou não-arbitragem).

A história da evolução de apreçamento de derivativos de taxa de juros pode ser dividida em três períodos. O primeiro período corresponde aos modelos que pressupõem a distribuição log-normal das taxas de juros, o período seguinte diz respeito aos modelos de equilíbrio e o terceiro período aos modelos de não-arbitragem.

Períodos	Características	Modelos
1º	Pressupõe que a Taxa de Juros tem distribuição Normal	Black & Scholes (1973) e Black (1976)
2º	Modelos de Equilíbrio	Merton (1973), Vasicek (1977) e Cox-Ingersoll-Ross (1985)
3º	Modelos de Não-Arbitragem	Ho-lee (1986), Black-Derman-Toy (1990), Hull-White (1990) e Heath-Jarrow-Morton (1992)

Tabela 1 - Modelos de Curva de Juros

O primeiro modelo utilizado foram as propostas de Black & Scholes (1973) (BS) e Black (1976). Estes modelos assumem que o ativo objeto tem uma distribuição normal. O modelo é usualmente referido a Fisher Black devido a seu paper publicado em 1976, quando Black estendeu o modelo BS para apreçamento de opções de ações para opções de moeda, índices e contratos futuros.

O modelo de Black, assim como na precificação de Black & Scholes assume uma distribuição lognormal para o retorno dos preços futuros (o logaritmo da variável aleatória – preço – é normalmente distribuído). Prontamente assumiu-se que os preços de títulos de renda fixa, taxa de juros a termo e swaps de taxa de juros também teriam distribuição log-normal.

Esse modelo apresenta algumas restrições por considerar tanto a taxa de juros como a volatilidade constante durante o período de vida da opção. Além disso, sua aplicação a opções sobre taxas de juros não reflete a estrutura a termo dessas taxas, tampouco a estrutura de volatilidade, implícita nos diferentes prazos de vencimento para esses instrumentos, como acontece nos modelos calibrados às informações de mercado.

A premissa da distribuição lognormal da taxa de juro ou do preço de um título na sua maturidade também possui limitações. Ela não contempla como a taxa de juros varia com o tempo (modelos estocásticos) o que impede a sua utilização com derivativos de taxas de juros do tipo americano (contratos que podem ser exercidos em qualquer momento) ou na criação de produtos estruturais (obrigações de débito combinada com derivativos de taxa de juros, por exemplo).

Dessa forma, o segundo período começou com o desenvolvimento dos modelos de equilíbrio. Geralmente esse tipo de modelo utiliza pressupostos a respeito de variáveis econômicas onde o processo seguido pela taxa de juros de curto prazo ocorre num ambiente neutro ao risco.

Na teoria, esses modelos de estrutura a termo assumem um processo de difusão para representar a dinâmica das taxas de juros e supõe como conhecidos os parâmetros que caracterizam estes processos. Porém, na prática, estes parâmetros são desconhecidos e precisam de métodos específicos para suas estimativas.

A Taxa spot (não paga cupom – zero cupom) de curto prazo (r) é a taxa aplicada em um período de tempo infinitesimalmente curto em um dado instante e definimos como sendo a taxa instantânea de empréstimo e pagamento:

$$r(t) = R(t, 0) = \lim_{T \rightarrow 0} R(t, T)$$

Em um ambiente neutro a risco, em um período de tempo infinitesimal t e $t+\delta t$, os investidores terão rendimentos de $r(t)\delta t$.

Antes de abordarmos a dinâmica estocástica das taxas de juros de curto prazo precisamos definir, Movimento Browniano (ou Processo de Wiener), o ambiente livre de risco e a propriedade de martingale.

3.1.1 Movimento Browniano (W) ou Processo de Wiener (Z)

Um processo estocástico $W = (W_t, t \in [0, \infty))$ é chamado de Movimento Browniano **Padrão**, ou de Processo de Wiener, se as seguintes condições forem satisfeitas:

1. O processo se inicia em $W_0 = 0$;
2. O processo tem incrementos independentes e estacionários;
3. Para cada t , o processo tem distribuição normal $N(\mu=0, \sigma^2=t)$;
4. O processo tem trajetórias contínuas, i.e., não há saltos nas trajetórias.

Definindo a característica nº 2, seja $S = (S_t, t \in T)$ um processo estocástico e T um intervalo contido no conjunto dos Reais.

Diz-se que o processo S tem incrementos estacionários se $S_t - S_s$ possuir a mesma distribuição que $S_{t+h} - S_{s+h}$, que são instantes posteriores.

Diz-se que o processo S tem incrementos independentes se, para qualquer escolha de $t_i \in T$, se $S_{t_2} - S_{t_1}, \dots, S_{t_n} - S_{t_{n-1}}$ são variáveis aleatórias (S pode assumir um possível estado dentro de um conjunto o qual S esta inserido).

As variáveis aleatórias W_{t-s} e $W_t - W_s$, $t > s$, tem distribuição normal $N(\mu = 0, \sigma^2 = t-s)$.

Este fato decorre da estacionariedade dos incrementos: $W_t - W_s$ tem a mesma distribuição que $W_{t-s} - W_{s-s} = W_{t-s} - W_0 = W_{t-s}$.

Note que quanto maior o intervalo de tempo, maiores as flutuações (i.e., a variância) do movimento Browniano nesse intervalo.

Além disso: como $\sigma^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, temos $E(X^2) = \sigma^2(X) + (E(X))^2$.

Aplicando esta expressão ao movimento Browniano:

$$E\{(W_t - W_s)^2\} = E(W_{t-s}^2) = \sigma^2(W_{t-s}) = t - s$$

Portanto, um incremento infinitesimal $dW_t = W_{t+dt} - W_t$ possui uma distribuição normal $N(\mu = 0, \sigma^2 = dt)$ e, de acordo com a equação acima, $E\{(dW_t)^2\} = dt$.

A componente dW_t pode ser representado por $dW_t = \varepsilon_t \cdot \sqrt{dt}$, onde ε_t são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $\varepsilon_t \sim N(0,1)$.

As trajetórias de um movimento Browniano são contínuas, porém não-diferenciáveis.

Um movimento Browniano **generalizado** $(S_t)_{t \geq 0}$ é definido pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

Onde μ e σ são constantes e $(W_t)_{t \geq 0}$ é um movimento Browniano padrão. μdt corresponde ao termo de tendência do movimento (Drift) e σdW_t corresponde à componente estocástica.

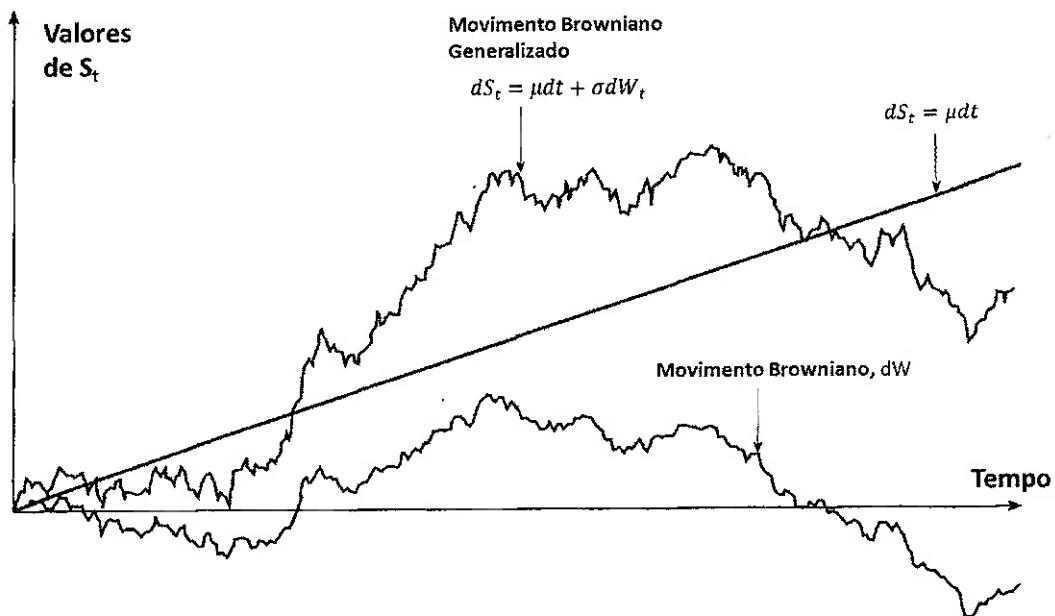


Figura 12 - Movimento Browniano Generalizado

Um movimento Browniano **geométrico** $(S_t)_{t \geq 0}$ é definido pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

ou

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Notemos que dS_t/S_t corresponde ao retorno do ativo de preço S_t durante o intervalo de tempo dt entre t e $t + dt$:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t}$$

Neste trabalho iremos nos referir a componente estocástica do movimento browniano como sendo dZ_t , muito como comum na literatura internacional.

O movimento browniano é também conhecido por processo de Wiener. Norbert Wiener descreveu matematicamente o processo do movimento aleatório de partículas, que foi observado pela primeira vez por Robert Brown através de partículas macroscópicas num fluido que se movimentavam aleatoriamente como consequência dos choques das moléculas do fluido nas partículas.

3.1.2 Lema de Itô

O preço de uma opção de um ativo é função do preço do ativo e do tempo. Genericamente, podemos afirmar que o preço de qualquer derivativo é função das variáveis estocásticas subjacentes ao derivativo e ao tempo.

Kiyosi Itô, em 1951 demonstrou um importante resultado conhecido como Lema de Itô. Suponha um processo de Itô descrito por:

$$dS = a(x, t)dt + b(x, t)dW$$

O lema de Itô demonstra que uma função qualquer G das variáveis x e t segue o processo abaixo:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} bdW$$

Onde dW segue o mesmo movimento Browniano da equação de dS acima, portanto a função G segue um processo de Itô. O termo de tendência e variância são respectivamente:

$$\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 b^2$$

A prova rigorosa do Lema de Itô foge do escopo deste trabalho.

Considerando a equação do movimento Browniano Geométrico como um modelo razoável para o movimento do preço de uma ação, pelo Lema de Itô, o processo seguido por uma função $G(S,t)$ é:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dW$$

Ambos processos, S e G , são afetados pela mesma fonte de incerteza, dW . Esse resultado é crucial na derivação a equação e precificação e Black-Scholes.

3.1.3 Martingales e o Ambiente Livre de Risco

Em teoria de probabilidades, um martingale é um processo estocástico com tendência nula. Podemos descrever uma variável θ que segue um processo de martingale como:

$$d\theta = \sigma dz$$

Onde dz é o processo de Wiener (Browniano). A variável σ pode ser estocástica também e depender de θ ou de outras variáveis.

Martingale possui a propriedade do seu valor esperado em qualquer instante futuro ser igual ao valor presente, mesmo que conhecidos todos os valores observados no passado até hoje:

Suponha dois ativos financeiros f e g dependentes de apenas uma fonte de incerteza e sem rendimento durante o período de tempo em análise. Definimos então:

$$E(\theta_T) = \theta_0$$

$$\phi = \frac{f}{g}$$

A variável ϕ é o preço relativo f com relação a g .

A medida equivalente de martingale demonstra que, quando não existem oportunidades de arbitragem, ϕ é um martingale para a escolha correta do valor de mercado do risco. Assim, dado uma escolha de g o mesmo ϕ se torna um martingale para quaisquer ativos f . A volatilidade de g , portanto é a escolha do valor de mercado do risco o qual torna a razão f/g martingale para todos os ativos f .

O valor de mercado do risco mede o quanto de retorno é obtido do ativo dado risco tomado. Podemos nos referenciar a um modelo de retorno ajustado ao risco como sendo:

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

Considerando θ , como sendo a variável a qual depende o preço de um derivativo, λ é o preço do risco de mercado de θ . A variável σ é a quantidade de risco de θ presente em f . A quantidade $(\mu - r)$ é o excesso de retorno da taxa de juros livre de risco necessária. Essa equação é análoga ao CAPM (Capital Asset Pricing Model).

Assumindo que a trajetória de preço que governa um derivativo é:

$$\frac{df}{f} = \mu dt + \sigma dz \rightarrow \frac{df}{f} = (r + \sigma\lambda)dt + \sigma dz$$

Supondo a volatilidade de f e g como sendo σ_f e σ_g , para provarmos o martingale a equação acima resulta em:

$$\frac{df}{f} = (r + \sigma_f \sigma_g) dt + \sigma dz$$

$$\frac{dg}{g} = (r + \sigma_g^2) dt + \sigma_g dz$$

onde $\lambda = \sigma_g$.

Utilizando o lema de Itô para diferenciar o logaritmo de $d[\ln(f)]$ e $d[\ln(g)]$ demonstramos que:

$$d(\ln f) = \left(r + \sigma_f \sigma_g - \frac{\sigma_f^2}{2} \right) dt + \sigma_f dz$$

$$d(\ln g) = \left(r + \frac{\sigma_g^2}{2} \right) dt + \sigma_g dz$$

$$d(\ln f - \ln g) = d\left(\ln \frac{f}{g}\right) = \frac{(\sigma_f - \sigma_g)^2}{2} dt + (\sigma_f - \sigma_g) dz$$

Utilizando novamente o lema de Itô para determinar o processo para f/g do processo para $\ln(f/g)$ obtemos:

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = (\sigma_f - \sigma_g) \frac{f}{g} dz$$

Demonstrando que f/g é um martingale. Nessa definição o valor de mercado do risco é σ_g é o ambiente neutro a risco com relação a g .

Dado que f/g é um martingale em um ambiente em que o valor futuro (valor a termo) é neutro a risco com relação à g temos:

$$\frac{f_0}{g_0} = E_g \left(\frac{f_T}{g_T} \right)$$

Onde E_g é o valor esperado, e f_t o valor futuro.

Considerando g um ativo cujo valor é unitário no instante $t=0$ e possui rentabilidade instantânea à taxa livre de risco r :

$$dg = r \cdot g \cdot dt$$

A tendência do ativo g é estocástica, porém a sua volatilidade é zero. O valor de mercado do risco é zero dado que o valor futuro é livre de risco com relação à g .

Nesse caso $g_0 = 1$ e $g_T = e^{\int_0^T r dT}$:

$$f_0 = \hat{E} \left(e^{-\int_0^T r dT} f_T \right) \rightarrow f_0 = \hat{E}(e^{-\bar{r}T} f_T)$$

Onde \bar{r} , é o valor médio do processo seguido pela taxa de curto prazo nno intervalo entre t e T e \hat{E} é o valor esperado em um ambiente neutro a risco.

Demonstramos assim que um jeito de avaliar derivativos de taxa de juros é simular a taxa de curto prazo r em um ambiente livre de risco.

Considerando que a dinâmica dos preços de instrumentos de dívida, opções e outros derivativos dependem apenas dessa taxa de curto prazo temos que o preço $P(t,T)$ de um título zero cupom que possui um valor unitário no instante T é:

$$P(t,T) = \hat{E}(e^{-\bar{r}T})$$

Se $R(t,T)$ é a taxa composta continuamente em um instante t até um termo $T-t$, então

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$$

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t,T)$$

O que resulta em:

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t} \ln \hat{E}(e^{-r(T-t)})$$

A equação acima traduz a estrutura a termo taxa de juros em qualquer instante de tempo dado um valor para r (taxa de curto prazo) e o processo neutro a risco de r . Isso demonstra que, uma vez que o processo seguido por r foi definido, todas as características sobre a curva zero inicial e a sua evolução através do tempo serão conhecidos.

3.2 Modelos Unifatórios de Equilíbrio

Modelos de equilíbrio de estrutura a termo de taxa de juros assumem uma forma funcional para o processo da taxa de juros de curto prazo.

Na abordagem estocástica para a descrição do comportamento da taxa de juros de curto prazo, os modelos de equilíbrio de 1 fator relacionam uma fonte de incerteza. Iremos assumir que:

- Da equação $r(t) = \lim_{T \rightarrow 0} R(t, T)$, $r(t)$ é um processo estocástico contínuo no tempo (não existem saltos durante sua trajetória).
- A taxa spot de curto prazo segue um processo de Markov. Isto implica que os valores esperados futuros da taxa spot, dado o seu valor presente, é independente do seu desenvolvimento passado. O seu valor presente é, portanto, variável de estado que caracteriza o processo da taxa de curto prazo.

Processos Markovianos e contínuos são chamados de processos de difusão. A evolução estocástica da taxa de juros pode ser identificada com a seguinte equação diferencial estocástica geral:

$$dr = m(t, r)dt + v(t, r)dz_t \quad (3.1)$$

Os termos tendência do processo $m(t,r)$ e desvio padrão instantâneo $v(t,r)$ são funções de r e podem ou não ser independentes do tempo. $Z(t)$ é o processo de Wiener com variância incremental dt .

- O preço $P(t,T)$ de um título em um instante t será determinado então pelo valor do segmento $\{r(\tau), t \leq \tau \leq T\}$ na ETTJ resultante do processo da taxa de curto prazo.

Realizando um paralelo com a teoria das expectativas puras e as teorias de segmentação, podemos notar que todas postulam a premissa acima acrescida de um prêmio de liquidez embutido na estrutura a termo.

- Os mercados são eficientes, ou seja, não existem custos de transição, assimetria informacional e todos os investidores agem de forma racional.

Essas premissas implicam que todo o processo seguido pela taxa de curto prazo no intervalo (t,s) $t \leq s$, dado os seus valores anterior a t , depende apenas do valor atual de $r(t)$ e que o preço do ativo é uma função de $P(t,s) = P(t,s, r(t)) = e^{-r(t,s)(s-t)}$, possuindo assim uma única variável de estado $r(t)$ que descreve toda a estrutura a termo, como demonstrado na seção 3.1.3.

A premissa que a taxa de curto prazo possua um comportamento aleatório semelhante ao preço de uma ação foi um ponto de partida natural na criação dos modelos de equilíbrio e estimação da ETTJ. Uma diferença importante entre taxas de juros e preço de uma ação é a tendência de reversão a um nível estável de longo prazo que as taxas de juros possuem (reversão à média). Quando a taxa de curto prazo é alta, a reversão à média causa um termo de tendência negativa, quanto a taxa é baixa a tendência é positiva. Isto é característica da atividade econômica, pois quando as taxas são altas, a atividade econômica diminui e possui uma baixa demanda por "dinheiro". Quando a taxa é baixa essa demanda aumenta.

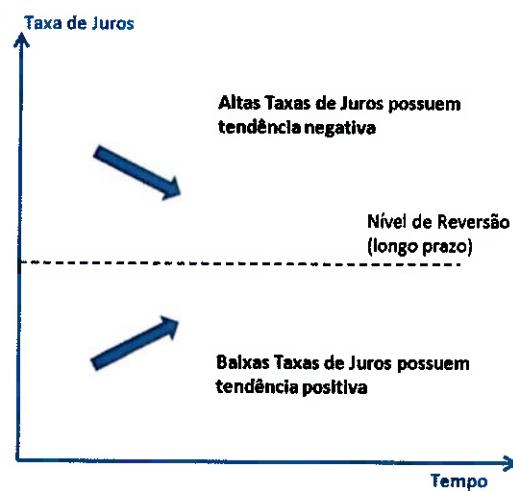


Figura 13 - Tendência de Reversão à média das taxas de juros

Os modelos unifatórios implicam que todas as taxas de juros se movam para uma mesma direção após um período de tempo, porém não na mesma magnitude. Isso significa que o formato da curva de zero cupom muda com o passar do tempo.

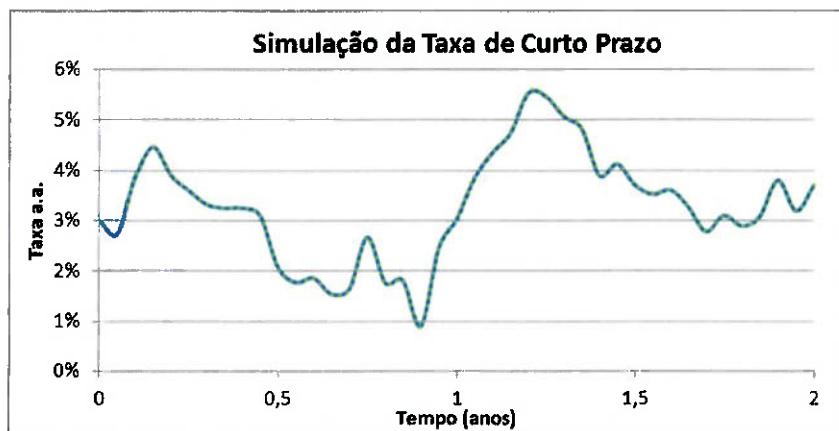


Figura 14 - Exemplo de simulação da taxa de curto prazo pelo processo de difusão.

3.2.1 O Modelo de Merton (1973)

O modelo de Merton foi um dos pioneiros na tentativa de modelagem do processo estocástico da taxa de juros. Segundo o modelo, o nível da taxa de juros é reproduzido pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$dr_t = \mu dt + \sigma dz_t$$

onde o tempo t é descrito de modo contínuo; μ e σ são constantes positivas representando média e desvio padrão, respectivamente, e z_t é o Movimento Browniano, responsável pela incerteza aleatória do comportamento da taxa de juros.

O modelo é unifatorial, pois só possui uma variável de estado, r_t , e é de equilíbrio pois a determinação da curva de juros é endógena, através da componente μ . O modelo diz que a variação da taxa de juros é explicada através de um fator determinístico, a taxa média do mercado no equilíbrio mais uma componente estocástica, a variação em torno desta média (descrita pelo Movimento Browniano W).

Podemos notar que em tempos de turbulência, com volatilidade alta e um cenário de stress de mercado, a diferença entre as taxas observadas no mercado e as estimadas pelo modelo aumenta.

Uma solução simples da equação é obtida:

$$r_t = r_s + \int_s^t \mu d\vartheta + \sigma \int_s^t dz_u$$

Onde: $\sigma(z_t - z_s) \sim N(0, \sigma^2(t-s))$.

O fato de a distribuição ser Gaussiana gera a possibilidade das taxas de juros assumirem valores negativos. Além disso, como discutido anteriormente, a determinação da taxa de juros é endógena e não reproduz as taxas efetivamente observadas no mercado.

Outro ponto importante é que a variância do modelo depende diretamente da diferença $(t-s)$, e à medida que essa diferença cresce indefinidamente, a variância tende a infinito.

Estes fatores são desvantagens do modelo e faz com que ele seja menos usual na prática do mercado.

3.2.2 O Modelo de Vasicek (1977) - Detalhado

Um dos primeiros modelos estocásticos da taxa de juros de curto prazo e precursor dos modelos de equilíbrio, Vasicek publicou seu desenvolvimento em 1977. Usando o princípio de reversão à média de Ornstein-Uhlenbeck para resolver a equação estocástica do preço de um título:

$$dr_t = \alpha(\gamma - r_t)dt + \rho dz_t \quad (3.2)$$

Onde α, γ e ρ são constantes positivas e dz é o movimento Browniano.

O processo de Ornstein-Uhlenbeck pode ser chamado de passeio aleatório elástico. É um processo de Markov com incrementos normalmente distribuídos. Diferentemente do processo instável de Wiener, o processo de Ornstein-Uhlenbeck possui uma distribuição estacionária. A tendência instantânea $\alpha(\gamma - r_t)$ representa a força que reverte a sua taxa de longo prazo γ com magnitude proporcional ao desvio

em relação à média do processo. O elemento estocástico, que possui uma variância constante ρ^2 , faz com que o processo varie ao redor do nível γ de uma forma irregular, porém continua.

Por r_t ter uma distribuição normal, as medidas de média e variância são fechadas e respectivamente:

$$E_{r,t}[r_t] = \gamma + (r_t - \gamma)e^{-\alpha(T-t)} \quad (3.3)$$

$$Var_{r,t}[r_t] = \frac{\rho^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha(T-t)}) \quad (3.4)$$

Estamos interessados em obter qual será taxa de equilíbrio no longo prazo. Nesse caso temos com $T \rightarrow \infty$:

$$E_{r,t}[r_t] = \gamma \quad (3.5)$$

$$Var_{r,t}[r_t] = \frac{\rho^2}{2\alpha} \quad (3.6)$$

Para obtermos a distribuição da função densidade de probabilidade (f.d.p.) da taxa de equilíbrio olhamos para a função f.d.p. da distribuição normal:

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (3.7)$$

Substituindo os valores (3.5) e (3.6) em (3.7) e fazendo $x=r$ ficamos com a função de probabilidade discreta para um dado valor de r no equilíbrio:

$$P_\infty(r) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi\rho}} e^{-\frac{\alpha(r-\gamma)^2}{\rho^2}} \quad (3.8)$$

A distribuição contínua de probabilidade é a área embaixo da curva entre dois pontos distintos a e b :

$$P[a \leq x \leq b] = \int_a^b f(x)dx$$

A probabilidade de a taxa de juros ser negativa em um instante T é dada por:

$$P_{r,t}(r_t < 0) = \int_{-\infty}^0 \frac{\alpha}{\pi \rho} e^{-\frac{\alpha(r-y)^2}{\rho^2}} dr \quad (3.9)$$

Podemos encontrar esse valor facilmente pela função cumulativa da normal padrão como sendo:

$$Z = \frac{r - E_{r,t}[r_t]}{\text{Var}_{r,t}[r_t]} \sim N(0,1)$$

$$P_{r,t}(r_t < 0) = N\left(-\frac{E_{r,t}[r_t]}{\text{Var}_{r,t}[r_t]}\right)$$

Vasicek demonstrou que podemos obter a seguinte expressão para o preço de um título em um instante t dado a definição em 3.1.3:

$$P(t, T) = \hat{E}(e^{-\bar{r}(T-t)}) \quad (3.10)$$

Já que a equação acima é solução da equação do preço de um título de renda fixa. Para demonstrar aplicamos o lema de Itô para na equação geral 3.1 da taxa de curto prazo, sujeito a um título $P(t,s,r(t))$ com $P(s,s,r)=1$:

$$dP = P\mu(t,s,r(t))dt - P\sigma(t,s,r(t))dz \quad (3.11)$$

$$\mu(t,s,r(t)) = \frac{1}{P(t,s,r)} \left[\frac{\partial}{\partial t} + m \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] P(t,s,r) \quad (3.12)$$

$$\sigma(t,s,r) = -\frac{1}{P(t,s,r)} v \frac{\partial}{\partial r} P(t,s,r) \quad (3.13)$$

Com μ e σ^2 sendo a média e a variância respectivamente da taxa de retorno instantânea no instante t de um título com maturidade s ($r(t) = r$).

Considerando uma carteira W sendo a variação entre a emissão de um título de renda fixa W_1 , com a maturidade em s_1 e a compra de um título de renda fixa W_2 com a maturidade em s_2 :

$$dW = (W_2\mu(t,s_2) - W_1\mu(t,s_1))dt - (W_2\sigma(t,s_2) - W_1\sigma(t,s_1))dz$$

Escolhendo W_1 e W_2 de forma a eliminar a componente estocástica dz:

$$W_1 = \frac{W\sigma(t,s_2)}{(\sigma(t,s_1) - \sigma(t,s_2))}$$

$$W_2 = \frac{W\sigma(t, s_1)}{(\sigma(t, s_1) - \sigma(t, s_2))}$$

Ficamos com:

$$dW = W \frac{(\mu(t, s_2)\sigma(t, s_1) - \mu(t, s_1)\sigma(t, s_2))}{\sigma(t, s_1) - \sigma(t, s_2)} dt$$

Compondo um portfólio livre de risco, $dW = Wr(t)dt$. Assim:

$$\frac{(\mu(t, s_2)\sigma(t, s_1) - \mu(t, s_1)\sigma(t, s_2))}{\sigma(t, s_1) - \sigma(t, s_2)} = r(t)$$

Ou de maneira equivalente:

$$\frac{\mu(t, s_1) - r(t)}{\sigma(t, s_1)} = \frac{\mu(t, s_2) - r(t)}{\sigma(t, s_2)}$$

A razão acima é chamada do valor de mercado do risco como definido na seção 3.1.3:

$$\lambda(t, r) = \frac{\mu(t, s, r) - r}{\sigma(t, s, r)}, s \geq t \quad (3.14)$$

Substituindo 3.12 e 3.13 em 3.14 chega-se na equação:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (m + \nu\lambda) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \nu^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \quad (3.15)$$

Essa é a equação geral para especificar um título cuja taxa de juros é da forma dada na equação 3.11.

Soluções da equação diferencial acima podem ser representadas na forma integral em termos do da variável estocástica adjacente. Uma representação possível é:

$$P(t, s) = E_t \exp \left(- \int_t^s r(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_t^s \lambda^2(\tau, r(\tau)) d\tau + \int_t^s \lambda(\tau, r(\tau)) dz(\tau) \right), t \leq s$$

Quando $\lambda=0$ encontramos:

$$P(t, s) = E_t \exp \left(- \int_t^s r(\tau) d\tau \right), t \leq s$$

Que corresponde à equação 3.10, como queremos demonstrar.

Para o processo de Ornstein-Uhlenbeck (equação 3.2), o valor de mercado do risco está presente na componente estocástica:

$$dW_t = d\tilde{W}_t - \lambda dt$$

$$dr = \alpha \left(\left[\gamma - \frac{\lambda\rho}{\alpha} \right] - r_t \right) dt + \rho dz$$

$$\gamma^* = \gamma - \frac{\lambda\rho}{\alpha}$$

De fato, o valor de mercado do risco λ pode ser incorporado no parâmetro γ^* , considerando a reversão à média no longo prazo ajustado ao risco. É possível demonstrar que diferentes parâmetros $(\alpha, \gamma, \rho, \lambda)$ e $(\alpha, \gamma - \lambda\sigma/\alpha, \rho, \lambda)$ produzem o mesmo preço para o título.

Adotaremos $\gamma^* = \gamma$. A solução da equação 3.15 para o processo de Ornstein-Uhlenbeck é:

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)}$$

$$B(t, T) = 1 - e^{-\alpha(T-t)}$$

$$A(t, T) = e^{(B(t, T)-T+t)} \left(\frac{\alpha^2 \gamma - \rho^2/2}{\alpha^2} \right) - \left(\frac{\rho^2 B(t, T)^2}{4\alpha} \right)$$

Usando a equação (2.2) temos:

$$R(t, T) = \left(\frac{1}{T-t} \right) \ln A(t, T) + \left(\frac{1}{T-t} \right) B(t, T)r(t) \quad (3.16)$$

Mostrando que toda a ETTJ pode ser determinada em função de $r(t)$ quando o valor dos parâmetros α, γ e ρ são escolhidos.

Tomando $T \rightarrow \infty$, temos a taxa de perpetuidade do modelo:

$$R(\infty) = \gamma - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\alpha^2} \quad (3.17)$$

A ETTJ dada pela equação (3.16) tem como ponto inicial $r(t)$, para $T=0$, e se aproxima assíntota $R(\infty)$ na medida que $T \rightarrow \infty$. Para valores de $r(t)$ menores que $R(\infty) - \frac{\rho^2}{4\alpha^2}$ a curva cresce monotonicamente. Para valores de $r(t)$ entre $R(\infty) - \frac{\rho^2}{4\alpha^2} \leq r(t) \leq R(\infty) + \frac{\rho^2}{2\alpha^2}$ a curva apresenta corcovas. Para valores de $r(t)$ iguais ou maiores que $R(\infty) + \frac{\rho^2}{2\alpha^2}$ a curva decresce monotonicamente.

A expressão (3.16) servirá de base para obter os parâmetros do Vasicek que melhor se adequam à ETTJ observada no mercado. Apesar de $r(t)$ ser uma variável nas equações anteriores, ela será tratada como um parâmetro quando for realizada a parametrização da curva de mercado visando minimizar o erro da otimização por mínimos quadrados.

A discretização da equação (3.2) em $r(t)$ para a variação da taxa de juros de curto prazo pode ser facilmente obtida:

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) e^{-\alpha \cdot \delta t} + \gamma(1 - e^{-\alpha \cdot \delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1-e^{-2\alpha \cdot \delta t}}{2\alpha}} z_{i+1} \quad (3.18)$$

Onde $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ são pontos no tempo, Z_i , $i = 1, \dots, n$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição normal $N(0,1)$ e $\delta t = t_{i+1} - t_i$ sendo o tamanho do passo.

Uma simplificação dessa equação pode ser obtida pela discretização de Euler:

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + \alpha(\gamma - r(t_i))\delta t + \sigma\sqrt{\delta t} z_{i+1} \quad (3.19)$$

somado a um erro de aproximação.

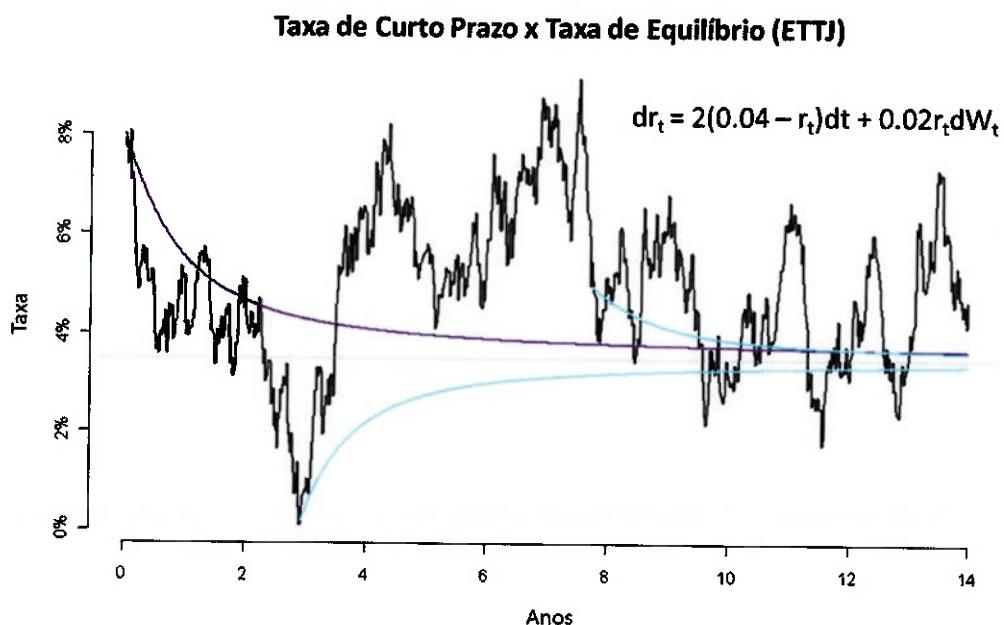


Figura 15 - Representação do Conceito da Estimação da ETTJ pelo processo de difusão da Taxa de Curto Prazo por Vasicek.

A abordagem pioneira proposta por Vasicek descreveu um modelo para a dinâmica da taxa de juros instantânea sobre uma medida de neutralidade a risco. O modelo de Vasicek considerou a condição de árbitragem entre os títulos de renda fixa de maneira análoga ao modelo de Black-Scholes (1973), permitindo a construção de um modelo teórico de fácil tratabilidade numérica.

A taxa de juros imposta pelo modelo segue uma distribuição gaussiana, implicando em haver probabilidade positiva de assumir valores negativos. Tal fato constitui-se num dos principais problemas na argumentação a favor do modelo em taxas de juros nominais. Utilizando-se o modelo para taxas reais o entanto torna este fato não tão impactante.

Contudo, a formulação de Vasicek demonstra que a obtenção de taxas nominais negativas é um problema apenas no curto prazo, dado que a esperança condicional do processo de Ornstein-Uhlenbeck quando $T \rightarrow \infty$ o termo exponencial em (3.3) vai à zero resultando a expectativa de longo prazo γ .

Além disso, o modelo não considera toda informação disponível no mercado, uma vez que não incorpora a estrutura a termo de juros presente.

A modelagem utilizada para se chegar à expressão do yield no modelo de Vasicek partem da suposição de capitalização contínua da taxa de juros. O padrão de capitalização no mercado brasileiro é de capitalização diária base 252, sendo então necessário fazer o ajuste para capitalização contínua das taxas negociadas no mercado antes de trabalhar com estas no contexto do Vasicek.

3.2.3 O Modelo de Cox – Ingersoll – Ross, CIR (1985)

Cox, Ingersoll e Ross, sobre uma abordagem de equilíbrio geral, segue como uma extensão do trabalho de Vasicek (1977). O modelo determina endogenamente o processo estocástico seguido pela taxa de juros e sua relação com variáveis econômicas reais. O modelo é totalmente consistente com as expectativas racionais e preferências dos agentes. No modelo, também de um único fator, é introduzido um termo de raiz quadrada no coeficiente de difusão para a dinâmica da taxa de juros instantânea, dessa forma, ao contrário do modelo de Vasicek, as taxas de juros não podem assumir valores negativos.

Dentro deste cenário, a equação que reproduz a dinâmica da taxa de juros é,

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dz_t$$

onde o tempo t é descrito de modo contínuo; k, θ e σ são constantes positivas; e W é o Movimento Browniano. O modelo CIR também é um modelo unifatorial e de equilíbrio. Apresenta reversão à média como o modelo de Vasicek.

O termo de tendência (drift) é o mesmo do modelo Vasicek, dessa forma, a taxa de juros de curto prazo tende a reverter à média de longo prazo com uma velocidade de reversão dado pelo coeficiente k . Como a volatilidade no modelo é multiplicada por $\sqrt{r_t}$, quando a taxa de juros se aproxima de zero, o termo da volatilidade $\sigma\sqrt{r_t}$ também se aproxima de zero, anulando o efeito do termo aleatório do processo, mantendo assim, a taxa de juros acima de zero. Outra propriedade desejada neste modelo é o fato de que quando a taxa de juros é alta, o termo que

produz a volatilidade também será elevado. Neste modelo r_t apresenta uma distribuição Qui-Quadrado.

Da mesma forma como demonstrado acima para o modelo de Vasicek, CIR fornece uma solução fechada para o preço dos títulos, assumindo uma formulação de equilíbrio para a estrutura a termo de taxa de juros, podendo a ETTJ ser estimada pelo método analítico.

3.3 Modelos de Não-arbitragem

Existem limitações no que se referem aos modelos de equilíbrio. Estes modelos são capazes de, com a aplicação de certos parâmetros, mostrar qual deveria ser o formato da estrutura a termo de taxa de juros. Embora estes modelos tenham certo poder explicativo e consigam identificar tendências da ETTJ que estão deslocadas do valor ideal, a necessidade de uma maior acurácia em estimar preços para derivativos que utilizam a taxas de juros como ativo subjacente motivou a busca por um modelo mais elaborado, apesar destes modelos terem encontrado a correlação entre os diferentes vértices. Ou seja, esses modelos são criticados pelo fato de as curvas de juros que eles produzem não replicarem a curva de juros observada no mercado. Essa inconsistência entre as curvas dos modelos de equilíbrio geral e as curvas de mercado fez com que se buscassem novos modelos.

Como consequência destas limitações, surgiram na literatura os modelos “evolucionários”, representados pelos trabalhos de Ho e Lee (1986) e Heath, Jarrow e Morton (1992), dentre outros. Apesar de também formulado com base na idéia de não-arbitragem, a diferença fundamental entre esses tipos de modelos é que, enquanto os modelos de equilíbrio procuram caracterizar a estrutura a termo em qualquer momento, assumindo a existência de equilíbrio, os modelos ditos evolucionários se concentram na evolução da estrutura a termo, dada a estrutura inicial observada. Nestes modelos, a dinâmica da estrutura a termo é determinada basicamente pela condição inicial de ajuste do modelo à estrutura a termo real, incorporando-a completamente (e possivelmente também a estrutura de volatilidade

ou seja da variação temporal das taxas) no processo de difusão da taxa de curto prazo. Essas diferenças trazem à tona as vantagens e desvantagens destes modelos; o modelo de equilíbrio prevê o formato da estrutura a termo, eventualmente, de uma maneira que não corresponde à curva observada em um dado instante de tempo. No entanto, pode-se esperar que produza um ajuste, até certo ponto adequado, para todos os momentos. Enquanto que, o poder de predição do modelo evolucionário será inicialmente perfeito, porém, terá sua acuracidade reduzida à medida que se afasta do tempo presente.

Alguns modelos de equilíbrio podem ser convertidos em modelos de não-arbitragem com a inclusão de uma função do tempo no parâmetro da tendência (3.1) da taxa de curto prazo. Por isso são também conhecidos por modelos evolucionários.

Os modelos de não-arbitragem costumam ser desenvolvidos através da construção de árvores binomiais/trinômias de taxa de juros devido a complexidade das equações diferenciais resultantes do processo de difusão, em que os parâmetros são variáveis do tempo também.

Uma árvore de taxa de juros é um procedimento numérico que representa discretamente o processo estocástico para a taxa de juros de curto prazo da mesma forma que uma árvore de preços de ações é construída. O intervalo de tempo δt definido entre dois passos em um modelo binomial será o período o qual as taxas deverão ser capitalizadas.

A premissa usual é que as taxas usadas na construção da árvore nos intervalos δt seguem o mesmo processo estocástico que a taxa instantânea r correspondente ao modelo contínuo. Cada nó, portanto terá uma taxa de desconto diferente para o preço do título.

É conveniente utilizar o modelo de árvore trinomial quando representando taxas de juros. Além de adicionar um grau de liberdade a mais na simulação, torna o processo mais fácil de representar a reversão à média.

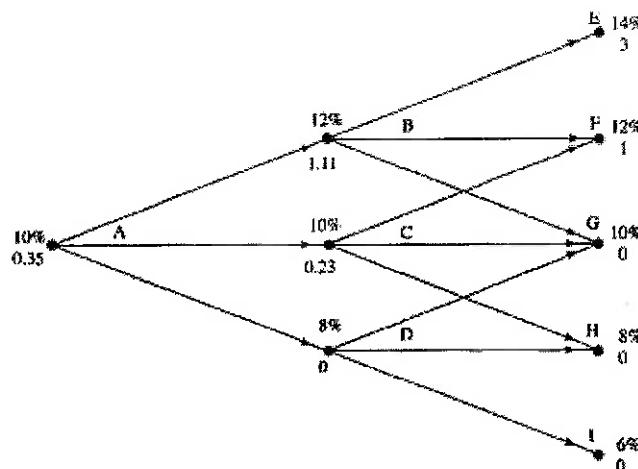


Figura 16 - Exemplo de uma árvore trinomial no cálculo do valor de um derivativo que possui payoff no final do segundo passo de máx[100(R - 0,11),0].

3.3.1 O Modelo de Ho-Lee (1986)

Ho e Lee propuseram o primeiro modelo de não-arbitragem da ETTJ. O modelo foi proposto na forma de árvore binomial, representando os preços dos títulos, através de dois parâmetros: o desvio padrão da taxa de curto prazo e o preço do risco de mercado da taxa de curto prazo:

$$dr_t = \theta(t)dt + \sigma dz_t$$

Onde, θ é a componente da equação que antes era uma taxa média de longo prazo esperada no equilíbrio econômico agora é uma função do tempo de modo que podemos ajustá-la para que se reproduza a taxa observada no mercado.

A função $\theta(t)$ pode ser calculada analiticamente:

$$\theta(t) = \frac{\partial F(0,t)}{\partial t} + \sigma^2 t$$

Onde $F(0,t)$ é a taxa a termo instantânea de uma maturidade t determinada no instante $t=0$.

O termo $\sigma^2 t$ é pequeno e aproximando $\theta(t) \sim \frac{\partial F(0,t)}{\partial t}$, significa mostrar que o valor médio que a taxa de curto prazo irá seguir é aproximadamente igual a inclinação da curva de taxas a termo observadas.

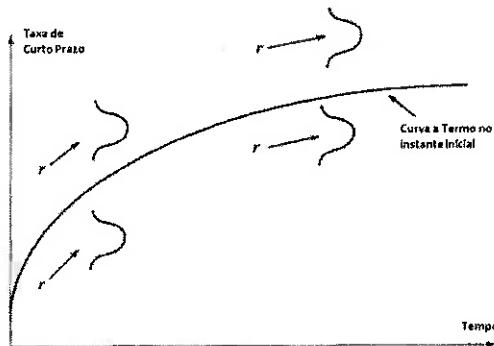


Figura 17 - A inclinação da curva a termo define a direção da taxa de curto prazo em um dado instante

O modelo é muito semelhante ao de Merton, tempo contínuo, σ é a volatilidade da taxa de juros no curto prazo e dz_t é responsável pela componente estocástica da taxa de juros.

A distribuição das taxas do modelo também é Normal, o que por um lado facilita o cálculo para preços e taxas dentro do modelo, mas por outro, permite que as taxas de juros assumam valores negativos. Além disso, analogamente ao modelo de Merton, o modelo de Ho-Lee não possui a reversão à média, o que permite que a variância possa ter um comportamento explosivo.

É possível demonstrar que a expressão para o preço de um título zero cupom no instante t é:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-r(t)(T-t)}$$

$$\ln A(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - (T-t) \frac{\partial \ln P(0, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 t(T-t)^2$$

Nestas equações o instante inicial zero hoje. Os instantes t e T são futuros com $T \geq t$. Para definir o preço de um título zero cupom em um instante futuro t em termos da taxa de curto prazo no instante t precisamos dos preços dos títulos de hoje.

3.3.2 O Modelo de Hull-White (1990)

Hull e White exploraram outras extensões do modelo de Vasicek de forma a obter um exato encaixe da ETTJ. A principal proposta foi:

$$dr_t = [\theta(t) - a \cdot r_t]dt + \sigma dz_t$$

Podemos notar que, analogamente ao modelo de Ho-Lee, a componente $\theta(t)$ é uma função do tempo, o que permite ajustar a taxa do modelo para as taxas observadas no mercado. Por outro lado, analogamente ao modelo de Vasicek, a componente determinística $\theta(t) - a \cdot r_t$ é responsável pela reversão à média, não permitindo o comportamento explosivo da variância, como no modelo de Ho-Lee.

De forma analítica a função $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \frac{\partial F(0,t)}{\partial t} + a F(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at})$$

Da mesma forma, considerando o último termo pequeno, a parte da tendência da taxa de curto prazo fica $[\theta(t) - a \cdot r_t] \sim \frac{\partial F(0,t)}{\partial t} + a[F(0,t) - r]$. Isso demonstra que, na média, r segue a inclinação da curva a termo. Quando r desvia dessa curva a termo observada, o processo é revertido de volta média pelo parâmetro a .

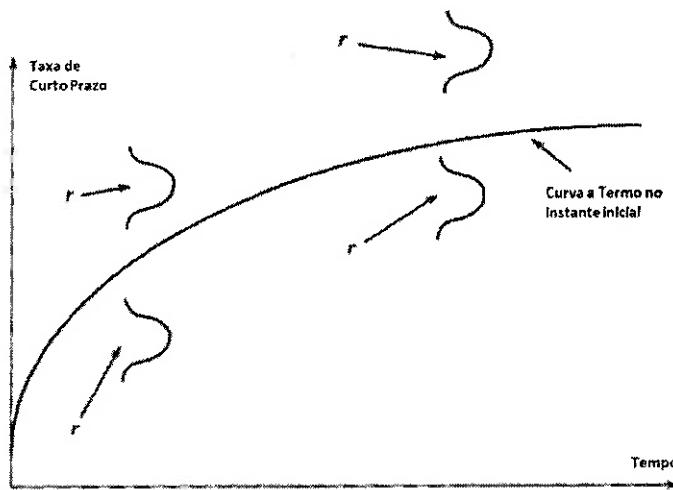


Figura 18 - ilustração do processo da taxa de curto prazo para o modelo de Hull-White

Como r_t tem distribuição normal, são possíveis valores negativos da taxa de juros.

A equação do preço de um título no instante t é:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$$

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

$$\ln A(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - B(t, T) \frac{\partial \ln P(0, t)}{\partial t} - \frac{1}{4a^3} \sigma^2 (e^{-at} - e^{-at})^2 (e^{2at} - 1)$$

Definem o preço de um título zero cupom em um instante futuro t em termos da taxa de curto prazo no instante t precisamos dos preços dos títulos de hoje.

A estrutura de volatilidade no modelo de Hull-White é determinado tanto pelos parâmetros σ e a . O modelo pode representar diferentes volatilidades, em contraste com o modelo de Ho-Lee. Analisando a volatilidade em um instante t do preço de um título zero cupom, da taxa de desconto (spot) zero cupom e da taxa a termo (futura) instantânea com maturidade em T temos respectivamente:

$$\frac{\sigma}{a} (1 - e^{-a(T-t)})$$

$$\frac{\sigma}{a(T-t)} (1 - e^{-a(T-t)})$$

$$\sigma e^{-a(T-t)}$$

O parâmetro σ determina a volatilidade da taxa de curto prazo. O parâmetro de reversão a determina a velocidade a qual a volatilidade do preço do título aumenta com a maturidade e a velocidade a qual a volatilidade da taxa de desconto diminui com o aumento da maturidade. Quando $a=0$ o modelo se reduz ao de Ho-Lee e a volatilidade do preço do título zero cupom é uma função linear da maturidade e sendo constante a volatilidade das taxas de desconto e a termo.

3.3.3 O Modelo de Black-Derman-Toy (1990)

O modelo de Black-Derman-Toy também é um modelo unifatorial (a variável de estado é o nível da taxa de juros) e de não arbitragem. Este modelo continua incorporando a reversão à média. A taxa média de longo prazo e a volatilidade são funções do tempo de modo que podemos ajustar o modelo de forma a captar as observações no mercado.

A forma diferencial do modelo é dada por:

$$d[\ln r_t] = [\theta_t - a_t \ln(r_t)]dt + \sigma_t dz_t$$

$$a_t = \frac{\frac{\partial \sigma_t}{\partial t}}{\sigma_t}$$

Na equação diferencial estocástica acima $\theta(t)$ é a taxa de juros de longo prazo e é uma função do tempo, de modo a se adaptar às taxas observadas no mercado. Analogamente, a componente estocástica σ_t é a variância em torno desta taxa média da componente estocástica e também é uma função do tempo.

Assim, pode se adaptar às volatilidades dos ativos efetivamente observados no mercado. O termo a_t é a função que determina a velocidade de reversão à média proporcional a taxa de variação relativa da variância em relação ao tempo.

No modelo $d\ln(r_t)$ tem distribuição normal, e portanto a variável que mensura o nível da taxa de juros r_t , tem distribuição log-normal.

Se por um lado a hipótese de log-normalidade dificulta soluções analíticas para a equação, de ponto de vista financeiro resolve o problema da ocorrência de taxas de juros negativas.

3.3.4 O Modelo de Heath-Jarrow-Morton (1992)

O modelo de Heath-Jarrow-Morton (HJM) representa uma grande evolução na modelagem da taxa de juros. Trata-se de um modelo de não arbitragem, o que mantém a possibilidade da entrada de dados observados no mercado dentro do modelo, mas a novidade é que permite o estudo concomitante de várias variáveis de estado. Portanto, ele é um modelo multifatorial.

O modelo é tido como o caso geral dos modelos de não-arbitragem visto que a partir dele é possível derivar os demais modelos (como Ho-Lee, Hull-White e BDT). Ao invés da modelagem pela taxa de juros de curto prazo, o HJM utiliza a evolução das taxas de juro a termo e volatilidades instantâneas.

Considerando agora duas componentes principais (o nível da taxa de juros e sua inclinação) para a explicação da variação da taxa de juros, implica que a estrutura a termo não depende somente do nível desta taxa e assim, não é perfeitamente correlacionada com a variável de estado. Neste caso, podemos ter alterações de movimentos na curva de juros ao longo do tempo o que permite maior precisão na modelagem. Por exemplo, se quiséssemos especificar um derivativo de renda fixa que fosse influenciado pela correlação entre os vencimentos dos títulos então o modelo unifatorial não atenderia aos requisitos e nesse caso modelo de HJM é uma solução.

A formulação original, em termos da taxa forward (a termo) $f(t, T)$, pode ser escrita como:

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t)$$

$$df(t, T) = \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i(t, T) \int_t^T \sigma_i(t, s)ds \right) dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, T)dz_i(t), \quad t < T$$

O termo de tendência entre parênteses está em função de uma estrutura a termo de volatilidade da taxa a termo.

A abordagem em termos de preços é representada por,

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, T) dz_i(t)$$

A equação diferencial estocástica acima é conhecida como Equação de HJM, e é a mais completa dentre os modelos apresentados até agora. Podemos tratar todos os demais modelos vistos até então como casos particulares deste último.

Por exemplo, se assumirmos $\sigma(t, T) = \sigma = \text{cte}$ na equação da taxa forward encontramos o modelo de Ho-Lee; assumindo $\sigma(t, T) = \sigma e^{-k(T-t)}$, encontramos o modelo de Hull-White.

4 Modelando a Estrutura a Termo

No modelos acima discutimos como a modelagem estocástica da taxa de curto prazo (zero cupom) consegue estruturar toda a estrutura a termo a luz de alguns parâmetros, dependentes ou não do tempo.

Considerando taxas de juros para os títulos zero cupom, a modelagem mais imediata e com boa encaixe da curva pode ser dado pelos modelos baseados em spline dado um conjunto de dados taxa e maturidade.

Uma terceira categoria abrange os modelos funcionais como os modelos de Nelson-Siegel e Svensson. O modelo de Svensson é uma extensão do modelo de Nelson-Siegel e é muito utilizado pelos participantes do mercado. Sua fórmula funcional permite um bom encaixe da curva além de produzir análise de extrapolações através de seus parâmetros. Alguns artigos científicos já evidenciaram que o modelo pode ser utilizado na previsão da estrutura a termo como em Diebold and Li (2006).

4.1 O Modelo de Nelson e Siegel (1987)

O modelo de Nelson e Siegel estabelece uma forma funcional de quatro parâmetros que procura aproximar a curva de taxas a termo por uma soma de funções exponenciais. É um modelo capaz de gerar estruturas a termo com formatos muito semelhantes aos observados no mercado financeiro (curvas linearmente crescentes, decrescentes e com corcovas).

A taxa a termo e a taxa spot dada pela curva de Nelson and Siegel é modelada a partir das seguintes equações:

$$f_t(\tau) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t}e^{-\lambda_t\tau} + \beta_{2,t}\lambda_t\tau e^{-\lambda_t\tau}$$

$$r_t(\tau) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} \right) + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} - e^{-\lambda_t\tau} \right)$$

O parâmetro λ_t mede a velocidade de decaimento da ETTJ: pequenos valores de λ_t produzem um decaimento suave e, por isso, um melhor ajuste da curva para prazos mais longos da estrutura a termo; grandes valores de λ_t produzem um decaimento mais rápido e um melhor ajuste para os prazos mais curtos. O parâmetro λ_t também determina o prazo quando $\beta_{2,t}$ atinge o valor máximo.

Os parâmetros $\beta_{0,t}$, $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$, podem ser interpretados como fatores dinâmicos latentes de longo, curto e médio prazo, respectivamente, da curva de taxas a termo, e os termos que multiplicam estes fatores são chamados de cargas de fatores:

(i) A carga que multiplica o parâmetro $\beta_{0,t}$ é igual a um, uma constante, e não decai a zero com o aumento do prazo de maturidade; $\beta_{0,t}$ pode ser visto como um fator de longo prazo.

(ii) A carga que multiplica o fator $\beta_{1,t}$ é uma função que começa em um e decai linearmente e rapidamente a zero com o aumento do prazo de maturidade; $\beta_{1,t}$ pode ser visto como um fator de curto prazo: se $\beta_{1,t} < 0$, a curva é crescente no curto prazo; se $\beta_{1,t} > 0$ a curva é decrescente.

(iii) A carga que multiplica o fator $\beta_{2,t}$ é uma função que começa em zero (e, portanto, não é de curto prazo), assume valores positivos no médio prazo, e decai a zero quando o prazo de maturidade tende ao infinito (e, portanto, não é de longo prazo); $\beta_{2,t}$ pode ser visto como um fator de médio prazo: se $\beta_{2,t} < 0$, a curva tem uma corcova para baixo (formato de "U"); se $\beta_{2,t} > 0$, a curva tem uma corcova para cima (formato de "U" invertido).

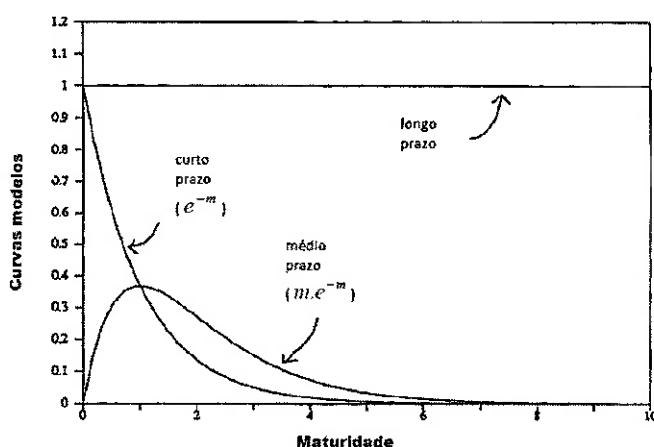


Figura 19 - Componentes da curva de taxas a termo. "m" representa a carga do fator de decaimento.

Uma escolha apropriada dos parâmetros do modelo, pode-se gerar uma variedade de curvas de taxas a termo com formas monotônicas e arqueadas. Os três parâmetros $\beta_{0,t}$, $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$, podem ser interpretados como fatores de nível, inclinação e curvatura, respectivamente (Diebold e Li, 2006).

As taxas à vista de curto e longo prazo podem ser obtidas tomando-se o limite da equação quando o prazo tende a zero ou infinito, respectivamente: $\lim_{\tau \rightarrow 0} y_t(\tau) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t}$ e $\lim_{\tau \rightarrow \infty} y_t(\tau) = \beta_{0,t}$. A forma com que ocorre a transição entre as taxas de curto e longo prazo é determinada pelos parâmetros $\beta_{2,t}$ e λ_t .

Para que a função $y_t(\tau)$ faça sentido econômico, o parâmetro λ_t deve ser maior que zero. Além disso, para as curvas de taxas “pré” e cupom de IPCA, os parâmetros do modelo de Nelson e Siegel devem ainda satisfazer as seguintes restrições: $\beta_{0,t} > 0$ e $\beta_{0,t} + \beta_{1,t} > 0$.

4.2 O Modelo de Svensson (1994)

O modelo de Svensson é uma extensão do modelo proposto por Nelson-Siegel com a adição de um novo termo exponencial à curva de taxas a termo, contendo dois parâmetros adicionais $\beta_{3,t}$ e $\lambda_{2,t} > 0$, adicionando assim uma segunda corcova na curva de juros.

$$f_t(\tau) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} e^{-\lambda_{1,t}\tau} + \beta_{2,t} \lambda_{1,t} \tau e^{-\lambda_{1,t}\tau} + \beta_{3,t} \lambda_{2,t} \tau e^{-\lambda_{2,t}\tau}$$

$$r_t(\tau) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_{1,t}\tau}}{\lambda_{1,t}\tau} \right) + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_{1,t}\tau}}{\lambda_{1,t}\tau} - e^{-\lambda_{1,t}\tau} \right) + \beta_{3,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_{2,t}\tau}}{\lambda_{2,t}\tau} - e^{-\lambda_{2,t}\tau} \right)$$

$\beta_{0,t}$: Nível ou Longo Prazo

$\beta_{1,t}$: Inclinação ou Curto Prazo

$\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$: Curvaturas ou Médio Prazo

$\lambda_{1,t}$ e $\lambda_{2,t}$: velocidades de decaimento dos componentes de médio prazo determinando onde as cargas que multiplicam os fatores $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$ atingem seus valores máximos.

Os limites da equação $\lim_{\tau \rightarrow 0} y_t(\tau) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t}$ e $\lim_{\tau \rightarrow \infty} y_t(\tau) = \beta_{0,t}$ representam o curto e longo prazo respectivamente e os parâmetros $\lambda_{1,t}$ e $\lambda_{2,t}$ associados com as funções exponenciais, capturam a velocidade de transição entre as taxas de curto e longo prazo e as curvaturas da curva.

Para que a função $r_t(\tau)$ faça sentido econômico, os parâmetros do modelo de Svensson devem satisfazer as seguintes restrições: $\beta_{0,t} > 0$; $\beta_{0,t} + \beta_{1,t} > 0$; $\lambda_{1,t} < 0$ e $\lambda_{2,t} > 0$.

Os modelos de Nelson/Siegel e Svensson são populares pois possuem um método de implementação direto. Uma das suas vantagens é que o modelo força a curva a termo de longo prazo para uma assíntota. O formato da equação permite uma estrutura suave e flexível que acomoda os diversos formatos de ETTJ observados na prática podendo ser usado também para a extração dessas curvas, dentro de determinada faixa de prazos, para além do último vértice disponível na base de dados. Em comparação com o método de spline cúbico, a desvantagem consiste em não acomodar precisamente os dados, contudo no modelo de Nelson/Siegel e Svensson não é necessário a determinação de “pontos de nó”.

5 Escolha dos Modelos e Desenvolvimento Experimental

Com o objetivo de encontrar um modelo de curva de juros que fosse capaz de reproduzir os pontos observados no mercado e também obtivesse uma boa previsão na parte extrapolada da curva, foram escolhidos os modelos de Vasicek e Svensson para implementação.

Para o modelo de Vasicek, como precursor dos modelos de curva de juros que conseguiram estabelecer a correlação entre as maturidades e uma taxa de equilíbrio, buscou-se o entendimento dos parâmetros que influenciam esses modelos de equilíbrio e também uma possível aplicação como taxa de desconto para carteiras de investimento de longo prazo, onde a correta convergência da taxa é necessária.

No modelo de Svensson, o desenvolvimento tem como um objetivo uma implementação funcional da curva, buscando o menor erro entre os pontos observáveis e, através da ETTJ calculada, determinar a volatilidade das taxas.

5.1 Base de Dados e Metodologia

A escolha das bases de dados para a construção da ETTJ livre de riscos passa necessariamente pela escolha dos instrumentos financeiros de mercado considerados isentos de riscos de crédito e liquidez. Para isso, a literatura internacional sugere o uso de cotações de mercado para os títulos de renda fixa emitidos pelo governo, teoricamente o emissor de menor risco de crédito da economia em razão de sua capacidade de tributar e/ou emitir moeda para pagar seus débitos. No mercado brasileiro, caracterizado pela escassez de instrumentos de renda fixa prefixada e pela baixa liquidez do mercado secundário, uma melhor representação da ETTJ livre de riscos em reais pode ser construída com base nas taxas implícitas de instrumentos financeiros derivativos. A ausência de mercado secundário de ativos de crédito limita também a análise aos títulos públicos.

Em momentos de instabilidade econômica, as curvas de juros estimadas com base em títulos públicos federais e as estimadas com base em instrumentos financeiros derivativos podem diferir. No entanto, em períodos de estabilidade econômica, observa-se que as duas curvas praticamente coincidem. Com o aumento no número de negócios (e liquidez) no mercado secundário de títulos públicos federais as duas curvas de juros devem se igualar.

O período de estudo deste trabalho vai 03/01/2011 até 31/10/2012. A escolha da base de dados apropriada para cada curva de juros considera o instrumento financeiro livre de riscos de maior liquidez no mercado, o número de vértices proporcionados por cada instrumento e o prazo do último ponto líquido de cada curva de juros.

A coleta dos dados para a estimação da ETTJ resulta em uma análise em três dimensões: Taxa de Retorno, Maturidade e o tempo. Diferentes métodos de estimação dos parâmetros de cada modelo podem ser então utilizados. Podemos dividir em dois tipos: o método Cross-Section (método empírico de estimação por calibração) e a estimação por série temporal (estimação por máxima verossimilhança).

O método cross-section estima os parâmetros do modelo enquanto considera as diferentes maturidades de um dado título em um dia específico. Seu objetivo principal é a minimização do erro quadrático encontrado na diferença entre os valores estimados pelo modelo e os observados, recaindo, portanto em um problema de Otimização em que a função objetivo é não-linear. Tal abordagem se justifica uma vez que podemos verificar que na prática esses parâmetros não são constantes e em certos períodos podem ter um comportamento bem instável.

Os modelos de equilíbrio têm a vantagem de possuir fórmulas fechadas para a solução das equações diferenciais. Assim, o método por série temporal consiste na identificação, de uma taxa de juros de determinada maturidade como sendo observada sem erro de medida. Para os demais yields (outras maturidades) empregados na estimação assumimos que estes são observados com erro.

Na prática esse método considera uma maturidade fixa de um título em que os parâmetros são estimados considerando a evolução da taxa no período escolhido. Isso pode ser feito através da análise de regressão da série pelo método dos mínimos quadrados e/ou por estimadores de máxima verossimilhança. Esse tipo de especificação nos permite a utilização de mais títulos para estimação do que número de fatores, sem que haja a ocorrência de problemas de identificação das outras maturidades.

Para o modelo de Vasicek, ambos os métodos possuem méritos e desvantagens. No caso do método da evolução temporal, a estimação do parâmetro de reversão à média requer uma base histórica de dados grande e confiável. Isso se torna um desafio quando trabalhando com o mercado brasileiro devido à limitação com relação à base de dados. As séries de dados não são extensas a ponto de promover boa calibragem dos parâmetros. Muitas vezes as séries mais antigas nem sempre são confiáveis, seja por alteração na fonte da informação ou método de coleta, seja devida a ineficiências estruturais do mercado brasileiro muitas vezes escasso de negociações e muito volátil.

No método cross-section apenas um dia de observação é necessário para estimação dos parâmetros, desde que obviamente diferentes maturidades são negociadas para um mesmo título. Contudo esse método pode produzir dados não lógicos para o parâmetro de taxa de longo prazo, principalmente no caso do modelo de Nelson/Siegel e Svensson em que se procura apenas o melhor encaixe da curva nos pontos, independente do valor esperado das taxas.

Nos resultados, para o Vasicek, é feita a discussão com relação a ambos os métodos de estimação dos parâmetros (Cross-Section e Série Temporal) enquanto que para o modelo de Nelson-Siegel- Svensson o método utilizado foi Cross-Section devido a forte dependência temporal de seus parâmetros, sendo o método por série temporal inviável neste caso.

Desta forma, para a curva de juros de cupom de IPCA foram usados dados de mercado para as Notas do Tesouro Nacional – Série B (NTN-B), e para as curvas de taxas Pré-Fixada foram usados dados/informações de mercado para instrumentos financeiros derivativos (Futuro de DI).

O contrato futuro de DI baseia-se nas taxas médias calculadas pela CETIP, que espelham o custo médio praticado nas operações de troca de disponibilidade de recursos entre instituições financeiras para curtíssimo prazo.

O objeto de negociação do DI Futuro é a taxa de juro efetiva até o vencimento do contrato, definida para esse efeito pela acumulação das taxas diárias de DI no período compreendido entre a data de negociação, inclusive, e o último dia de negociação, inclusive. Este contrato demonstra a expectativa do mercado para a taxa de juro efetiva acumulada entre a data de hoje e o último dia de negociação do contrato (último dia útil do mês). A cotação do DI Futuro negociado no Mercado BM&F é expressa sob a forma de uma taxa efetiva de juro anual, base 252 dias úteis, com até três casas decimais.

A principal função das operações que envolvem contratos futuros de DI é o hedging (proteção) contra grandes oscilações na taxa de juro de algum contrato financeiro.

A base de dados para a curva de cupom IPCA é formada pelos preços unitários das Notas do Tesouro Nacional – Série B (NTN-B), calculados pela Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (Anbima), segundo metodologia própria, levando em conta não apenas as negociações realizadas entre os participantes do mercado, mas também dados e informações enviados diariamente por uma amostra selecionada de informantes/participantes do mercado.

Para efeito ilustrativo, os anexos A e B respectivamente contemplam os dados de mercado do último dia da série utilizados na determinação da curva pelos modelos de Nelson/Siegel & Svensson e Vasicek, tanto para a curva Pré como para a curva de IPCA utilizando o método cross-section.

O Anexo C apresenta os dados de mercado escolhidos na determinação da curva Pré pelo modelo de Vasicek utilizando o método de série temporal. Neste caso a série contempla, para a curva Pré os dados de vencimento do título LTN desde 2005 até o dia 1/11/2012, sendo, portanto a curva estimada para a data.

5.2 Estimação dos Parâmetros

A primeira etapa para a estimação dos parâmetros do modelo é definir se o objeto de estimação é o preço do título, a taxa de juros à vista ou a taxa a termo. Os preços dos instrumentos financeiros de curta maturidade são menos sensíveis a variações nas taxas de juros do que os de longa maturidade: pequenas alterações nos preços dos títulos de curto prazo implicam em grandes alterações nas taxas de juros, o contrário acontecendo para títulos de longo prazo. Por um lado, o procedimento de minimização da soma do erro quadrático das taxas de juros resulta em um resultado heterocedástico para os erros dos preços (erros elevados para os preços dos títulos de longo prazo). Por outro lado, o procedimento de minimização da soma do erro quadrático dos preços dos títulos resulta em um resultado heterocedástico para os erros das taxas à vista (erros elevados para as taxas à vista de curto prazo); uma abordagem para corrigir o problema de heterocedasticidade nas taxas à vista é ponderar o erro quadrático do preço de cada título pelo inverso da duration de Macaulay, dando mais relevância para os erros dos títulos de curto prazo.

Dependendo do objeto de estimação, os resíduos/erros nos preços e nas taxas podem ser homocedásticos ou heterocedásticos: se o objeto de estimação for o preço do título, os resíduos serão homocedásticos nos preços e heterocedásticos nas taxas; se o objeto de estimação for a taxa de juros à vista, os resíduos/erros serão homocedásticos nas taxas e heterocedásticos nos preços.

Para a estimação dos parâmetros do modelo de Nelson/Siegel e Svensson foram consideradas duas formulações distintas para o problema de otimização não-linear:

- (i) Para a curva de juros de cupom de IPCA, a função objetivo que se quer minimizar é dada por:

$$\text{Min}\{\text{Preço}\} = \text{Min} \left\{ \sum_{i=1}^{N_t} \frac{1}{\text{duration}_i} \left(P_{NTNB,i} - \sum_{j=1}^{k_i} \frac{1}{(1+r_{d,t}(\tau_{j,i}))^{\tau_{j,i}}} F_{j,i} \right)^2 \right\} \quad (6.1)$$

Onde

- $P_{NTNB,i}$ é o preço “observado” da NTN-B de índice “i”
- k_i é o número de pagamentos da NTN-B “i” (inclui cupom e principal)
- $F_{j,i}$ é o j-ésimo pagamento da NTN-B “i”
- $\tau_{j,i}$ é o prazo (em dias úteis) em que ocorre o j-ésimo pagamento da NTN-B “i”
- N_t é o número de NTN-B negociadas/ observadas na data de pregão t
- $r_{d,t}(\tau_{j,i})$ é a taxa à vista discreta estimada na data t para o prazo entre t e $t + \tau_{j,i}$

- (ii) Para as curvas de taxas Pré a função objetivo a ser minimizada é dada por:

$$\text{Min}\{\text{Taxa}\} = \text{Min} \left\{ \sum_{i=1}^{M_t} \left(\frac{\text{TxSpot}_t(\tau_i) - r_{d,t}(\tau_i)}{0,01\%} \right)^2 \right\} \quad (6.2)$$

Onde

- $\text{TxSpot}_t(\tau_i)$ é a taxa à vista referencial na data t para o prazo entre t e $t + \tau_i$
- $r_{d,t}(\tau_{j,i})$ é a taxa à vista discreta estimada na data t para o prazo entre t e $t + \tau_i$
- M_t é o número de taxas referenciais usadas (base de dados) na data de pregão t
- O fator 0,01% transforma o resultado em ponto base (bps)

O ponto base é comumente usado para calcular as alterações nas taxas de juros, índices de ações e no rendimento de um título de renda fixa.

5.3 Método Cross-Section: Otimização Não-Linear

Um problema genérico de otimização não-linear consiste em encontrar um vetor $\bar{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]$ que maximize ou minimize um a função $f(\bar{\varphi})$, sujeito a uma série de restrições C_i expressas na forma:

$$c_i(\bar{\varphi}) = 0, i = 1, \dots, p$$

$$c_i(\bar{\varphi}) \geq 0, i = p + 1, \dots, n$$

O principal conceito envolvido em Programação Não-Linear é o de taxa de variação derivadas e gradientes da função objetivo. O grande problema que dificulta a obtenção da solução ótima nos problemas de programação Não-Linear são os mínimos e máximos (extremos) locais da função objetivo.

0

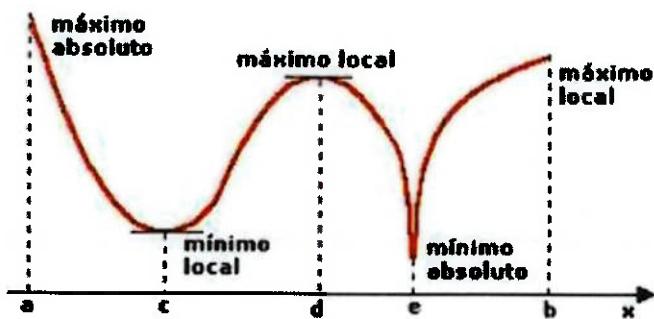


Figura 20 - Representação de uma função com máximos e mínimos locais

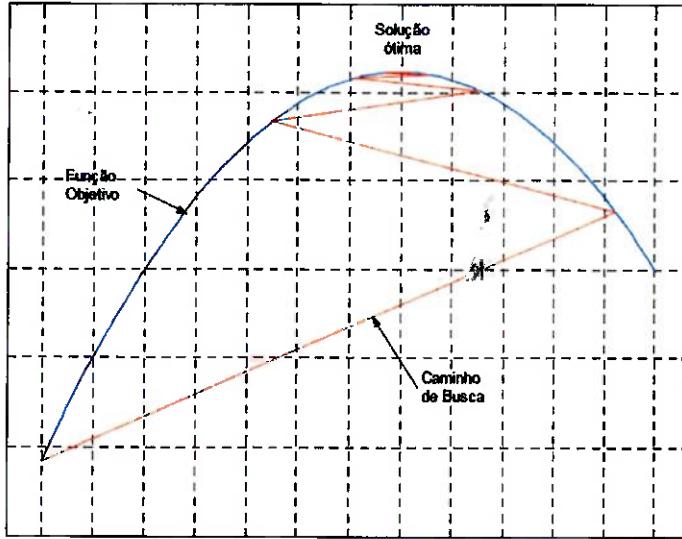


Figura 21 - Caminhos percorridos durante a execução de um algoritmo de Otimização

A minimização da função objetivo traz o risco da otimização não atingir um mínimo global, mas sim um mínimo local, isto é, o risco da falsa convergência. Outro fato deve-se aos parâmetros iniciais: os resultados obtidos para uma mesma data variam muito, dependendo dos valores iniciais arbitrados, sendo importante o “chute”

inicial com valores condizentes com o cenário das taxas. A própria evolução dos parâmetros ao longo da série de dados pode ficar comprometida caso o chute inicial não possua um sentido econômico mesmo que assim a otimização encontre um mínimo local.

Diversos são os métodos de solução de problemas não-lineares. O método utilizado na modelagem esta trabalho é ao GRG não linear (Método do Gradiente Reduzido Generalizado) da ferramenta solver do Excel.

5.4 Volatilidade das Taxas

A volatilidade é entendida como uma medida das expectativas futuras dos investidores. Por isso o surgimento de novas informações ao mercado faz com que os agentes ajustem as suas curvas, mudando o seu nível, inclinação ou curvatura, de acordo com a percepção do mercado frente a esta nova informação.

Além disso, a volatilidade também é impactada pela aversão a risco dos investidores. Quando ocorrem períodos de crise na economia, é possível identificar tal movimento, já que as volatilidades implícitas, devido às incertezas trazidas pela crise, tendem a aumentar, impactando as avaliações dos agentes de mercado.

A análise de volatilidade foi feita considerando uma janela de 72 dias dos retornos das taxas determinadas pelos modelos, para diversas maturidades. A volatilidade foi calculada pelo método EWMA (Exponential Weighted Moving Average). O modelo EWMA para cálculo de volatilidade pode ser visto como um aperfeiçoamento do modelo de média móvel simples (SMA – Simple Moving Average). O que diferencia os dois modelos é o fato do SMA adotar pesos iguais aos retornos, enquanto o EWMA adota pesos maiores para os retornos mais recentes. Assim, o modelo EWMA apresenta como principal vantagem uma reação mais rápida para os choques ocorridos no mercado. O modelo EWMA responde rapidamente às grandes oscilações dos retornos, enquanto o modelo SMA apresenta uma resposta mais lenta. Pode-se observar também que quando o mercado volta a uma situação mais tranquila o modelo EWMA retorna rapidamente a

um patamar mais baixo enquanto o modelo SMA tende a retornar de forma mais lenta.

$$\sigma^2_T = \lambda\sigma^2_{T-1} + (1 - \lambda)r^2_{T-1}$$

Onde:

σ : volatilidade

λ : Peso dado à ponderação (fator de decaimento). Utiliza-se comumente o valor de 0,94 calculado pelo modelo da RiskMetrics da JP Morgan

r: retorno da taxa entre dois instantes de tempo

5.5 Método Série Temporal: Método dos Mínimos Quadrados Ordinários

O método dos mínimos quadrados é um método padrão para a solução aproximada para sistemas com mais equações que incógnitas. "Quadrados mínimos" significa que a solução global minimiza a soma dos quadrados dos erros cometidos em todos os resultados de cada equação.

A aplicação mais importante é no ajuste ("encaixe") de curvas. O melhor ajuste no sentido dos mínimos quadrados minimiza a soma dos quadrados dos resíduos, em que um resíduo representa a diferença entre um valor observado e o valor ajustado fornecido por um modelo.

Podemos separar problemas de mínimos quadrados em duas categorias: lineares ou Mínimos Quadrados Ordinários e mínimos quadrados não-lineares, dependendo se os resíduos são lineares em todas as variáveis.

Queremos estimar valores de determinada variável Y. Para isso, consideramos os valores de outra variável X que acreditamos ter poder de explicação sobre Y conforme a fórmula:

$$Y_i = aX_i + b + e$$

onde i indica cada uma das observações (n) da base de dados e “ e ” passa a ser chamado de resíduo, representa a variação de y que não é explicada pelo modelo.

Considerando a relação entre observações S_i consecutivas como linear e os termos que compõe “ e ” como independentes e identicamente distribuídos e com distribuição aleatória normal:

$$S_{i+1} = aS_i + b + e_i$$

Olhando para a equação (3.18), a relação entre a regressão linear e os parâmetros do modelo facilmente deduzidos:

$$\alpha = -\ln\left(\frac{a}{\delta t}\right)$$

$$\gamma = \frac{b}{1 - a}$$

$$\rho = sd(e) \sqrt{\frac{-2\ln(a)}{\delta t(1 - a^2)}}$$

A minimização se dá ao igualar o gradiente a zero. No caso o gradiente é $e_i = F(a, b) = \sum_{i=1}^n (S_{i+1} - b - aS_i)$, derivando F com relação a a e b .

Por fim encontramos:

$$a = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x^2}$$

$$b = \frac{S_y - aS_x}{n}$$

$$sd(e) = \sqrt{\frac{nS_{yy} - S_y^2 - a(nS_{xy} - S_x S_y)}{n(n-2)}}$$

$$S_x = \sum_{i=1}^n S_{i-1}$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n S_i$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n S_{i-1}^2$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n S_{i-1} S_i$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^n S_i^2$$

5.6 Método Série Temporal - Método da Máxima Verossimilhança

O Método de Máxima Verossimilhança estima qual deve ser o valor dos parâmetros de forma que o valor real possua a probabilidade máxima.

A função densidade de probabilidade condicional é derivada pela combinação da equação (3.18) de simulação da taxa com a função densidade de probabilidade da distribuição normal:

$$P(N_{0,1} = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Isolando Z_{i+1} ($N_{0,1}$), a equação da densidade de probabilidade condicional da observação S_{i+1} dada à observação anterior S_i com intervalo de tempo δt igualmente espaçados é:

$$f(S_{i+1}|S_i; \alpha, \gamma, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\rho}^2}} e^{\left[\frac{(S_i - S_{i-1}e^{-\alpha\delta t} - \gamma(1 - e^{-\alpha\delta t}))^2}{2\hat{\rho}^2} \right]}$$

$$\hat{\rho}^2 = \rho^2 \frac{1 - e^{-2\alpha\delta t}}{2\alpha}$$

Primeiramente precisamos definir a função de verossimilhança. Depois encontraremos os parâmetros $\theta = \{\alpha, \gamma, \rho\}$ que maximizam o valor dessa função.

A função logarítmica de verossimilhança do conjunto de observações (S_0, S_1, \dots, S_n) é:

$$L(\alpha, \gamma, \hat{\rho}) = \sum_{i=1}^n \ln f(S_{i+1} | S_i; \alpha, \gamma, \sigma)$$

$$L(\alpha, \gamma, \rho) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - n \cdot \ln(\hat{\rho}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(S_i - S_{i-1} e^{-\alpha \delta t} - \gamma(1 - e^{-\alpha \delta t}))^2}{\hat{\rho}^2}$$

O ponto onde essa superfície possui o valor máximo é dado pelas derivadas parciais:

$$\frac{\partial L(\alpha, \gamma, \hat{\rho})}{\partial \alpha} = 0; \quad \frac{\partial L(\alpha, \gamma, \hat{\rho})}{\partial \gamma} = 0; \quad \frac{\partial L(\alpha, \gamma, \hat{\rho})}{\partial \hat{\rho}} = 0$$

Em que os parâmetros podem ser encontrados resolvendo as equações resultantes das derivadas parciais.

Utilizando a ferramenta solver do excel (GRG não linear), desejamos encontrar o parâmetro $\hat{\theta}$ de máxima verossimilhança através do argumento da função $\ln[L(\theta)]$:

Chamamos: $\nu(S_i, S_{i+1}, \delta t) = \frac{(S_i - S_{i-1} e^{-\alpha \delta t} - \gamma(1 - e^{-\alpha \delta t}))}{\hat{\rho}}$

$$L(\theta = \{\alpha, \gamma, \rho\}) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - n \cdot \ln(\hat{\rho}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nu^2(S_i, S_{i+1}, \delta t)$$

$$\hat{\theta} = \arg \max \ln[L(\theta)]$$

6 Resultados e Discussão

Nesta seção, apresenta-se a análise dos resultados da estimação do modelo de Nelson/Siegel & Svensson e Vasicek para as curvas de cupom de IPCA e taxa Pré. O objetivo principal será verificar a ETTJ e analisar temporalmente a série de parâmetros de cada modelo obtidos e seus respectivos erros quadráticos médios (função objetivo) com as taxas observadas do mercado.

Em uma análise preliminar sobre a utilização de ambos os modelos, já é consagrado no mercado brasileiro de renda fixa a utilização do modelo de Nelson/Siegel e Svensson como estimador da ETTJ. O modelo de Vasicek foi pouco explorado na literatura brasileira devido primeiramente a sua origem, mercados maduros com a presença de curvas mais estáveis e com necessidades de especificação de diferentes derivativos de renda fixa; segundo pela falha muita vezes no encaixe dos dados observados em mercados mais instáveis. Instituições como a ANBIMA e SUSEP (Superintendência de Seguros Privados) adotam como estimador oficial da ETTJ o modelo de Nelson/Siegel e Svensson.

Foi adotado, portanto o modelo de Svensson como referência de comparação aos dados observados no mercado e ao modelo de Vasicek.

Os modelos de ETTJ baseados nas taxas de curto prazo (Vasicek) podem se tornar não muito realísticos em determinados cenários. Por exemplo, em expectativas muito abruptas de queda ou pico da taxa de juros (comum no mercado brasileiro) o modelo de Vasicek falha ao tentar reproduzir tal comportamento, porém a consequente acomodação da curva é capturada de forma mais eficiente, produzindo ainda assim uma boa representação da ETTJ. É verdadeira, portanto a conclusão de que o modelo de Vasicek consegue reproduzir muito bem a expectativa do mercado traduzindo o comportamento de seus agentes, distribuindo os pontos da ETTJ de forma mais uniforme.

No que tange a taxa de juros básica e os títulos soberanos, o Brasil viveu no ano de 2012 uma cenário único, de rápida queda das taxas a níveis mínimos históricos na tentativa de combater a desaceleração econômica. Isso promoveu uma

alta volatilidade nos preços do mercado de renda fixa. Esse comportamento pode ser verificado nas curvas interpoladas pelo modelo de Svensson em uma análise de volatilidade dos diversos vértices.

Para o modelo de Vasicek teremos uma breve discussão a respeito da estimação por série temporal (em contrapartida da opção de cross section aqui utilizada para construção de toda a base de dados). A otimização cross section possui o revés de possibilitar maior volatilidade dos dados gerados, e desprezar informação da dinâmica da curva contida nos parâmetros previamente estimados. Necessário também frisar que a otimização cross section garante a não arbitragem apenas instantaneamente e não dinamicamente.

Um ponto crítico em ambos métodos de otimização trata-se da escolha dos pontos iniciais dos parâmetros, que após o exercício de mudá-los livremente percebe-se a grande influência sobre o resultado final.

Uma discussão pertinente com a estimação de ambas as curvas (Pré e IPCA), é a estimativa da inflação implícita nas curvas de juros através de uma relação conhecida como identidade de Fisher. Esta identidade considera que a taxa de juros nominal (r) é uma composição entre a taxa de juros real (σ) e a expectativa de inflação para o período (π):

$$(1 + r) = (1 + \sigma) \cdot (1 + \pi)$$

A comparação das curvas de taxa Pré e Cupom de IPCA a vista contemplam a expectativa de inflação implícita do mercado.

A aplicação da forma simples da identidade de Fisher não considera alguns aspectos importantes, que acabam causando erros na estimativa da taxa de inflação implícita. Dentre eles, destacam-se o prêmio de risco de inflação embutido nas taxas dos ativos prefixados, a diferença de liquidez dos ativos e a diferença na estrutura de pagamentos entre títulos prefixados e indexados.

O risco de inflação reflete a probabilidade atribuída pelos agentes à expectativa para inflação até o vencimento do título ser inferior à efetivamente registrada. Geralmente, as taxas de retorno dos ativos financeiros prefixados

embutem um valor adicional (spread) para compensar esse risco, cuja magnitude dependerá do grau de incerteza em relação à variação dos preços.

No que se refere à liquidez, destaca-se que os ativos prefixados registram um volume de negociação consideravelmente maior que aos atrelados ao IPCA. Para estes últimos, essa diferença se traduz em maior prêmio exigido pelos investidores, pela potencial dificuldade em se desfazerem de posições com a rapidez e preços desejados.

Por isso, a utilização das curvas zero cupom no cálculo da taxa de inflação implícita elimina os problemas gerados pela diferença na estrutura de pagamentos desses dois tipos de ativos. Além disso, permite analisar a série histórica dessa taxa de compensação pela inflação, para prazos fixos selecionados.

6.1 Interpolando a ETTJ pelo Modelo de Nelson/Siegel & Svensson

O início da otimização não-linear consiste em arbitrariamente adotar alguns valores condizentes aproximadamente com o "papel" de cada parâmetro. A calibragem arbitrária dos parâmetros é feita até que se obtenha uma curva com um bom "encaixe" dos pontos e mais condizentes com o atual cenário (capacidade analítica).

As restrições como já abordadas são:

$$\beta_{0,t} > 0 ; \beta_{0,t} + \beta_{1,t} > 0 ; \lambda_{1,t} \text{ e } \lambda_{2,t} > 0.$$

Um bom "chute" inicial consiste em:

$[\beta_0, \beta_1] = [Tx_{longo}, Tx_{curto} - Tx_{longo}]$, onde Tx_{longo} corresponde a taxa do título de maior maturidade e Tx_{curto} , ao de menor maturidade.

Para rodar a série de dados e capturar os resultados, criou-se uma programação no VBA (Visual Basic for Applications), o qual importa os preços dos derivativos de futuro de DI dos arquivos disponibilizados pela BMF no caso da curva Pré e os PUs médios das NTN-Bs disponibilizados pela ANBIMA no caso da curva

de IPCA, minimiza a função objetivo dia a dia para a data considerada através do Solver e assim obtém os parâmetros do Svensson para a curva.

6.1.1 Curva Taxa Pré

Os seguintes limites foram considerados para evitar resultados sem sentido econômico:

	Min	Max
β_0	0,01	0,15
β_1	-0,20	0,20
β_2	-0,40	0,40
β_3	-0,40	0,40
λ_1	0,0001	30,00
λ_2	0,0001	30,00

Tabela 2 - Restrições parâmetros Svensson Curva Pré

Com o objetivo de verificar o efeito da heterocedasticidade, para a curva Pré, foi feita uma análise sobre qual seria o erro do modelo utilizando ambas as equações de minimização dadas por 6.1 e 6.2.

A minimização do erro pelo preço do título de cada futuro de DI “i” para a equação (6.1) pode ser dado quando $j = 0$:

$$\text{Min}\{\text{Preço}\} = \text{Min} \left\{ \sum_{i=1}^{N_t} \frac{1}{duration_i} \left(P_{DI,i} - \sum_{i=1}^{k_i} \frac{1}{(1 + r_{d,t}(\tau_i))^{\tau_i}} F_i \right)^2 \right\}$$

Isso significa que, utilizando a função objetivo 6.1, minimizou-se o erro dos preços observando-se o seu valor resultante e anotando também o valor dado pela função minimização da taxa. Posteriormente, de forma análoga, utilizando a função objetivo 6.2, minimizou-se o erro das taxas observando-se o seu valor resultante e anotando também o valor dado pela função minimização do preço.

O objetivo final pode ser visto no gráfico abaixo, onde foi comparado qual seria o valor da função erro para o Preço e qual seria o valor da função erro para a Taxa utilizando as minimizações 6.1 e 6.2.

	Minimizando o Erro da função Taxa -> Equação 6.2
Valor Resultante da Função Erro Preço	$\sum_{i=1}^{N_t} \frac{1}{\text{duration}_i} \left(P_{D,i} - \sum_{j=1}^{k_i} \frac{1}{(1 + r_{d,i}(\tau_j))^{\tau_j}} F_j \right)^2$
	Minimizando o Erro da função Preço -> Equação 6.1
Valor Resultante da Função Erro Preço	$\sum_{i=1}^{N_t} \frac{1}{\text{duration}_i} \left(P_{D,i} - \sum_{j=1}^{k_i} \frac{1}{(1 + r_{d,i}(\tau_j))^{\tau_j}} F_j \right)^2$

Tabela 3 - Comparando o valor da função objetivo Preço dadas às duas otimizações - Curva Pré Svensson

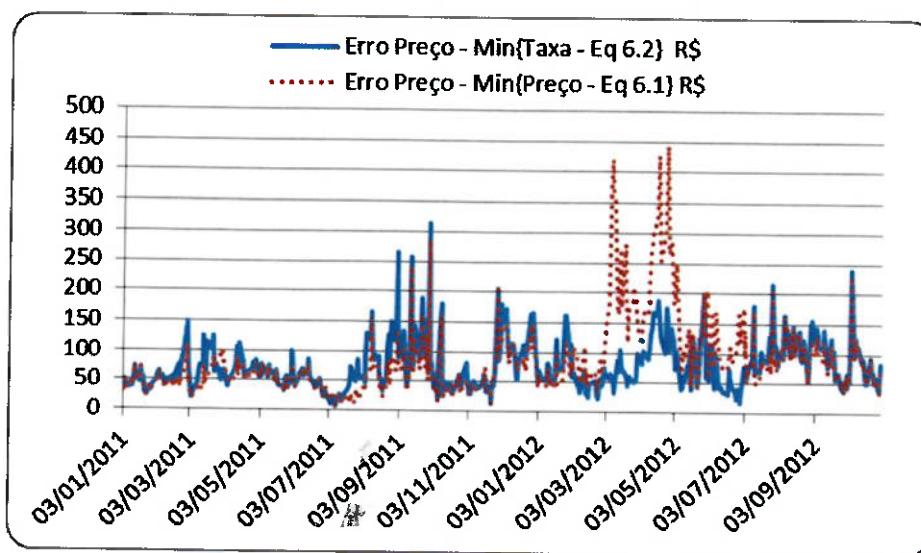


Figura 22 – Comparação do Erro Quadrático dado pela diferença de Preços para a Curva Pré Svensson, obtidos para cada dia da série, usando as duas funções objetivos.

	Minimizando o Erro da função Taxa -> Equação 6.2
Valor Resultante da Função Erro Taxa	$\sum_{i=1}^{M_t} \left(\frac{TxSpot_i(\tau_i) - r_{d,i}(\tau_i)}{0,01\%} \right)^2$
	Minimizando o Erro da função Preço -> Equação 6.1
Valor Resultante da Função Erro Taxa	$\sum_{i=1}^{M_t} \left(\frac{TxSpot_i(\tau_i) - r_{d,i}(\tau_i)}{0,01\%} \right)^2$

Tabela 4 - Comparando o valor da função objetivo Taxa dadas as duas otimizações - Curva IPCA Svensson

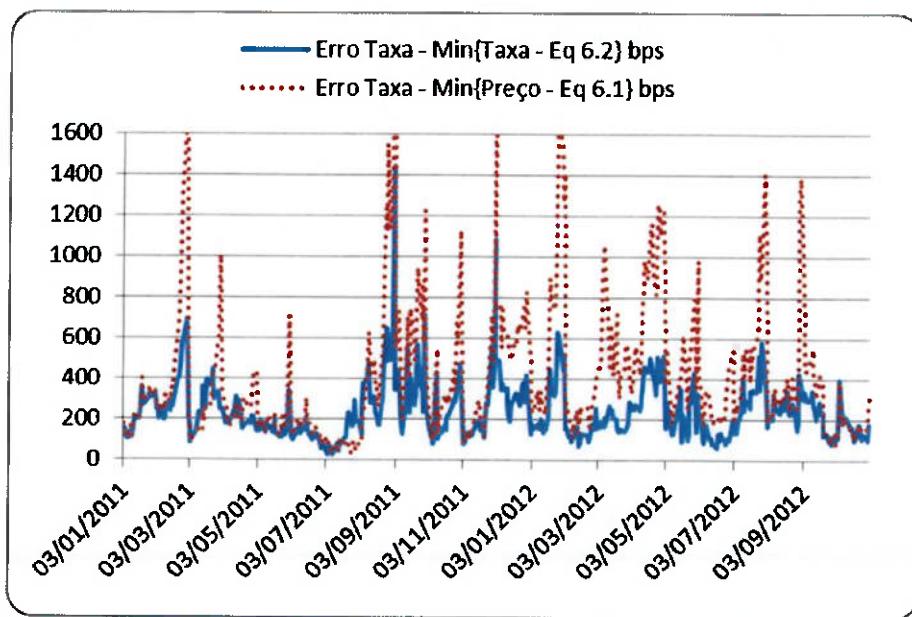


Figura 23 - Comparação do Erro Quadrático dado pela diferença das Taxas para a Curva Pré Svensson, obtidos para cada dia da série, usando as duas funções objetivos.

Os resultados mostram que a minimização do erro pela taxa é mais indicada no caso em que as taxas observadas são spot (à vista). A minimização pela taxa produziu erros menores comparando as duas otimizações.

Utilizando-se então a função objetivo da equação (6.2) obtemos a ETTJ da taxa spot Pré-Fixada praticado no mercado brasileiro para toda a série de dados. Os gráficos abaixo demonstram algumas curvas obtidas.

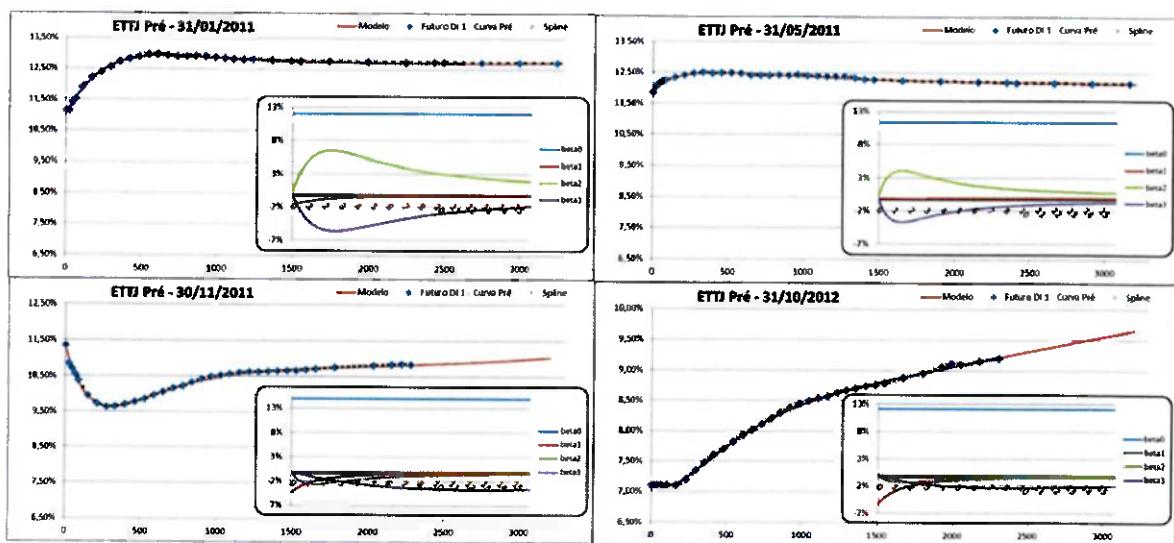


Figura 24 - Gráficos Taxa a.a x Tempo (anos). Resultados para a interpolação da curva spot pré por Svensson (futuro DI de 1 dia)

A análise tridimensional das variáveis Tempo x Maturidade x Taxa, retorna todo o comportamento da ETTJ Spot Pré encontrada pelo modelo de Svensson em toda a série.

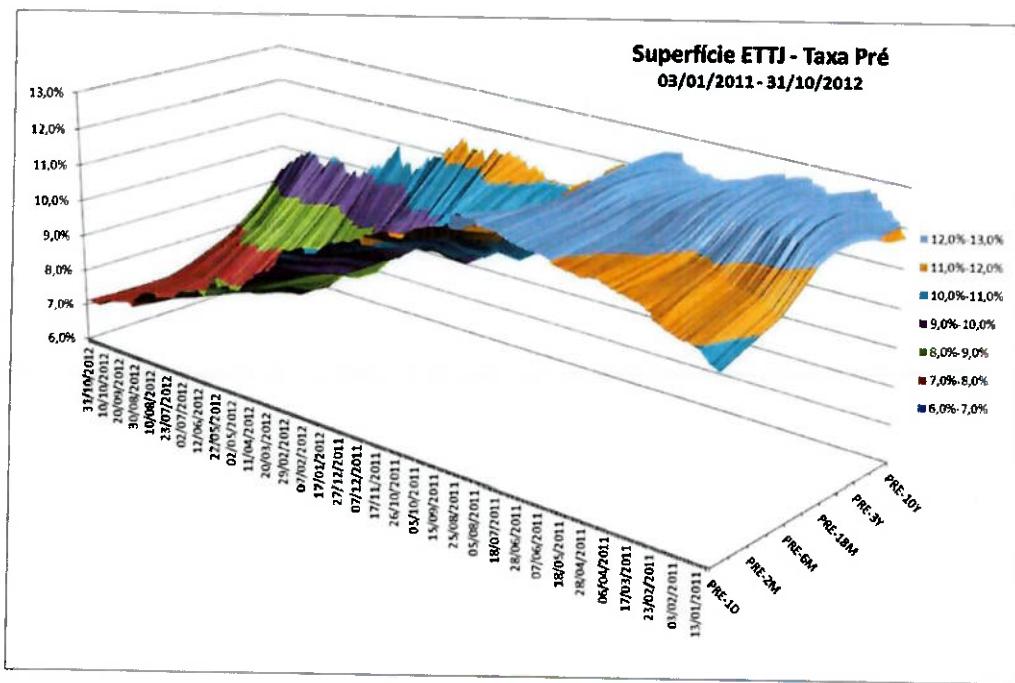


Figura 25 - Superfície ETTJ Taxa Pré Svensson Tempo x Maturidade x Taxa.

	PRE-1D	PRE-1M	PRE-2M	PRE-3M	PRE-6M	PRE-12M	PRE-18M	PRE-2Y	PRE-3Y	PRE-5Y	PRE-10Y
Média	10,361%	10,262%	10,184%	10,127%	10,051%	10,125%	10,306%	10,491%	10,772%	11,034%	11,267%
Erro padrão	0,080%	0,083%	0,085%	0,087%	0,092%	0,093%	0,089%	0,083%	0,073%	0,059%	0,044%
Mediana	10,998%	10,890%	10,734%	10,528%	10,156%	10,057%	10,218%	10,438%	10,746%	11,036%	11,290%
Desvio padrão	1,711%	1,765%	1,818%	1,863%	1,956%	1,988%	1,905%	1,784%	1,554%	1,259%	0,935%
Curtose	-1,154	-1,266	-1,347	-1,403	-1,492	-1,522	-1,497	-1,460	-1,375	-1,232	-1,085
Assimetria	-0,553	-0,495	-0,429	-0,366	-0,206	-0,039	0,008	0,000	-0,075	-0,197	-0,250
Mínimo	7,120%	7,093%	7,074%	7,065%	7,053%	7,227%	7,487%	7,726%	8,133%	8,638%	9,317%
Máximo	12,543%	12,421%	12,415%	12,447%	12,537%	12,765%	12,844%	12,918%	12,943%	12,881%	12,754%
Contagem	457	457	457	457	457	457	457	457	457	457	457

Tabela 5 - Estatísticas Descritivas para cada maturidade escolhida dada pelo modelo de Svensson.

Os resultados do cálculo da volatilidade das taxas podem ser visto no gráfico abaixo. Através do modelo EWMA verificou-se como a estrutura a termo se comportou no período. Para isso comparou-se o gráfico 25 de volatilidade com a evolução da TIR da LTN em diferentes vencimentos, destacando como o movimento das taxas no mercado causa a volatilidade nas taxas (e preços) determinado pela curva de juros.

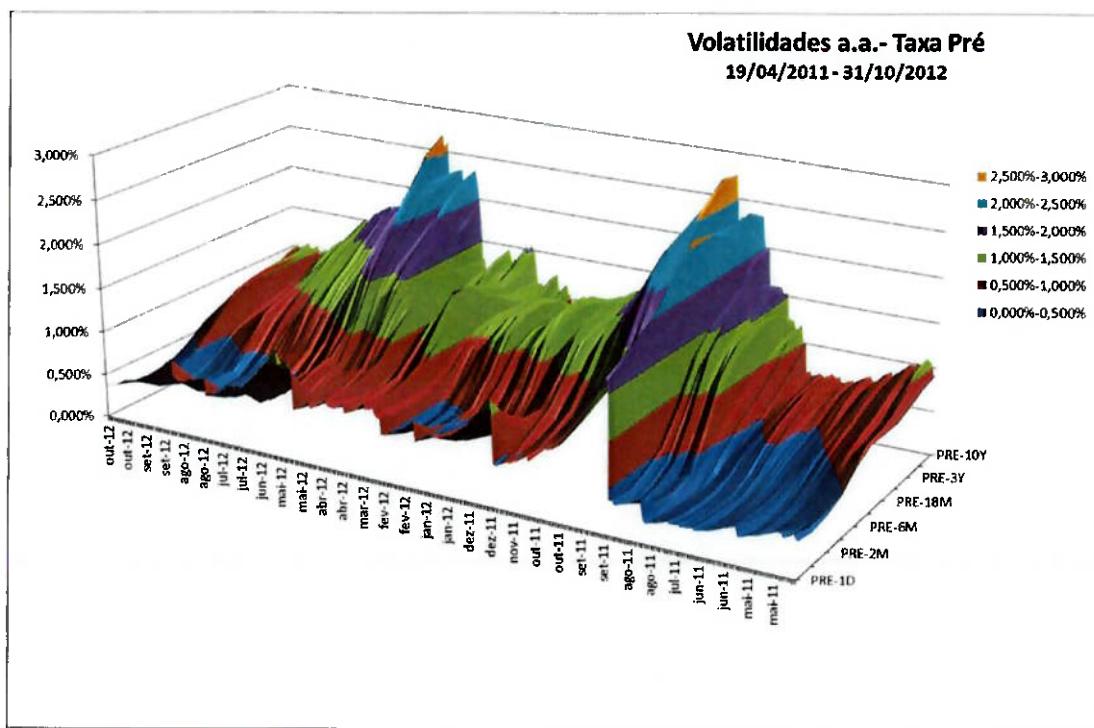


Figura 26 - Superfície de Volatilidade (Pré - Svensson) Tempo x Maturidade x Volatilidade a.a.

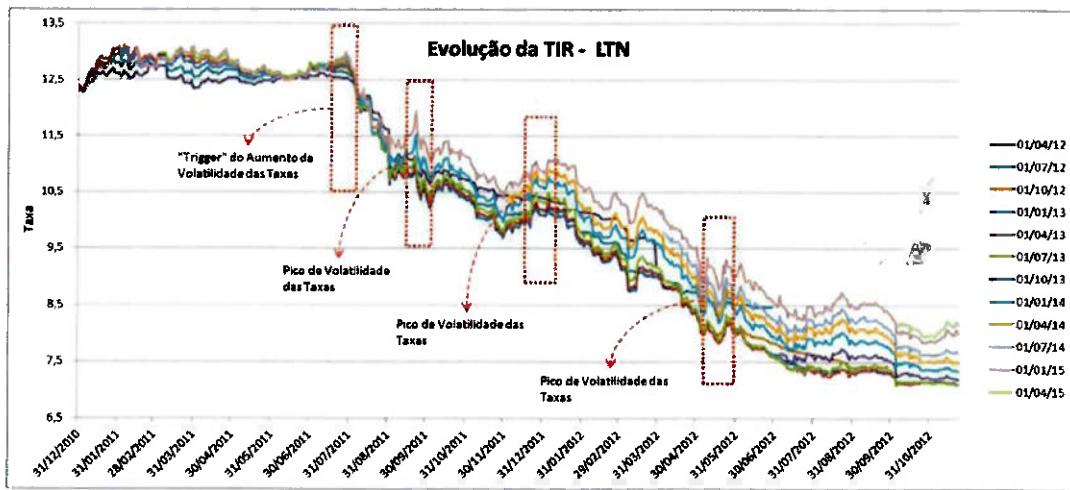


Figura 27 - Evolução da TIR para algumas maturidades de LTN negociadas.

O período de corte de taxas vivenciado no Brasil no início de agosto de 2011 refletiu em alta volatilidade da curva de juros gerando alta rentabilidade nos investimentos em renda fixa e impactando as métricas de risco de mercado, dado a alta variação dos preços.

6.1.2 Curva Cupom IPCA

Os seguintes limites foram considerados para evitar resultados sem sentido econômico:

	Min	Max
β_0	0,01	0,10
β_1	-0,20	0,20
β_2	-0,40	0,40
β_3	-0,40	0,40
λ_1	0,0001	30,00
λ_2	0,0001	30,00

Utilizando-se então a função objetivo da equação (6.1) obtemos a ETTJ da taxa spot Cupom de IPCA praticado no mercado brasileiro para toda a série de dados.

Para as curvas de IPCA, o modelo de Svensson foi utilizado mais de uma vez em determinados dias, de forma a produzir resultados mais aderentes com a realidade em alguns períodos. Isso porque, no caso da curva de IPCA ao encontrar a taxa spot de todo o fluxo, o modelo gera diversos mínimos locais. Esses mínimos muitas vezes produzem resultados não aceitáveis dependendo da aplicação (taxas de curto prazo muito elevadas ou muito baixas, por exemplo), mas que minimizam a função objetivo mesmo considerando as restrições.

Essa necessidade de uma nova rodada do modelo pode ser obtida através da análise da superfície de volatilidade, onde alguns picos extremos foram observados. Esta foi uma das vantagens também do uso do EWMA como método de cálculo da volatilidade, onde a resposta da volatilidade é imediata nas datas em que o modelo apresentou resultados economicamente inviáveis.

O tratamento destes casos foi através da imposição de novas restrições como determinando limite inferior para a taxa de curtíssimo prazo (taxa de 1 dia por exemplo da tabela 5) e limite superior para a taxa de curto prazo médio dado por $\beta_{0,t}$

$+ \beta_{1,t}$. O valor desse limite vai depender das expectativas de juros e do formato da curva observada na data.

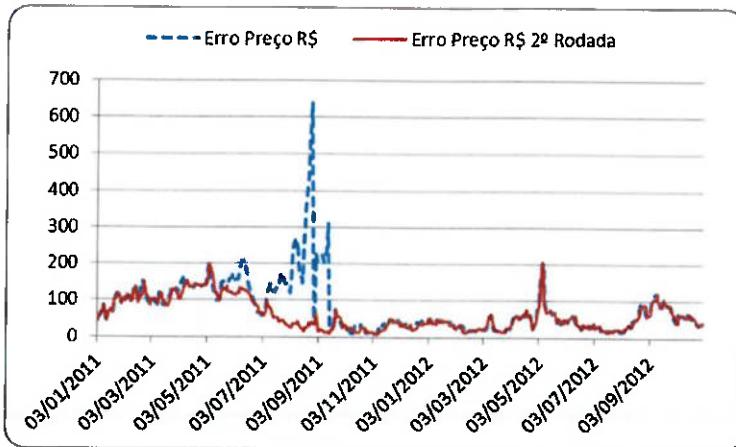


Figura 28 – Erro Quadrático Médio Curva IPCA por Svensson obtidos para cada dia da série.

Os gráficos abaixo demonstram algumas curvas obtidas.

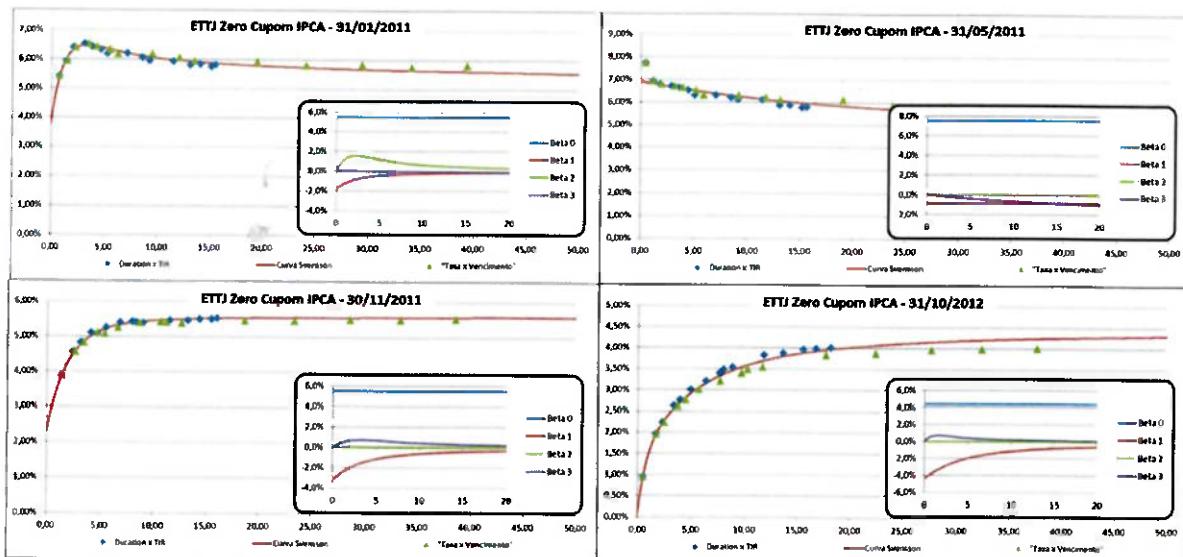


Figura 29 – Gráficos Taxa a.a x Tempo (anos). Resultados para a interpolação da curva zero cupom de IPCA por Svensson (NTNB)

A análise tridimensional das variáveis Tempo x Maturidade x Taxa, retorna todo o comportamento da ETTJ IPCA Zero cupom encontrado pelo modelo de Svensson em toda a série.

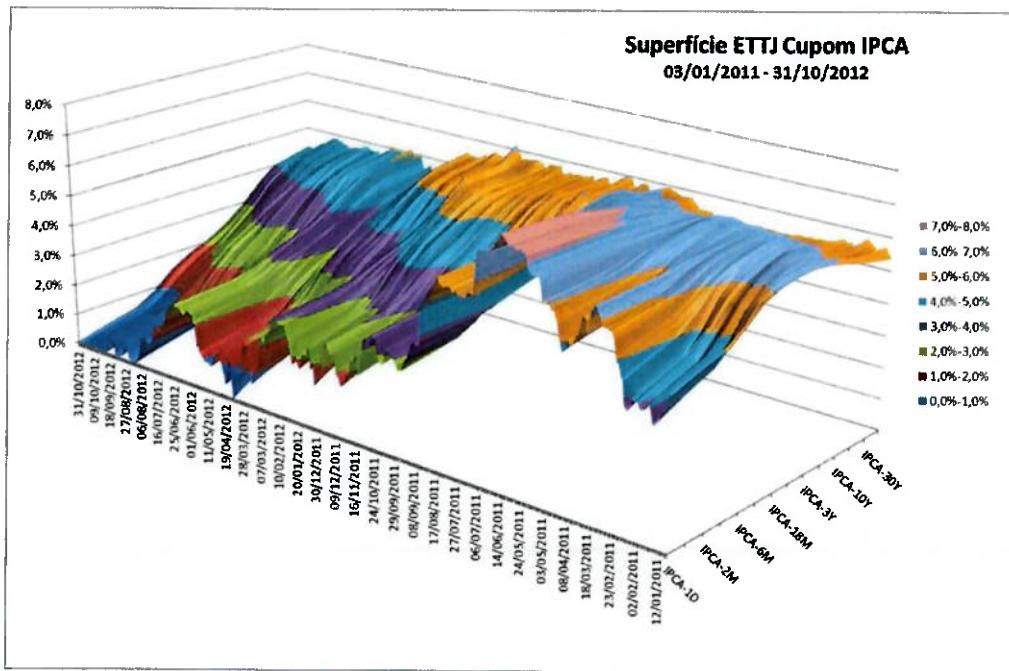


Figura 30 - Superfície ETTJ Cupom IPCA Svensson Tempo x Maturidade x Taxa.

	IPCA-1D	IPCA-1M	IPCA-2M	IPCA-3M	IPCA-6M	IPCA-12M	IPCA-18M	IPCA-2Y	IPCA-3Y	IPCA-5Y	IPCA-10Y	IPCA-20Y	IPCA-30Y	IPCA-50Y
Média	3,134%	3,244%	3,352%	3,454%	3,726%	4,144%	4,444%	4,661%	4,944%	5,207%	5,366%	5,369%	5,347%	5,320%
Erro padrão	0,104%	0,101%	0,099%	0,097%	0,092%	0,084%	0,077%	0,072%	0,064%	0,053%	0,041%	0,029%	0,024%	0,020%
Mediana	2,700%	2,804%	2,919%	3,015%	3,298%	3,790%	4,167%	4,458%	4,874%	5,305%	5,579%	5,579%	5,604%	5,415%
Desvio padrão	2,214%	2,165%	2,117%	2,074%	1,961%	1,789%	1,656%	1,546%	1,372%	1,143%	0,869%	0,627%	0,506%	0,430%
Curtose	-1,017	-1,046	-1,076	-1,105	-1,183	-1,288	-1,333	-1,340	-1,305	-1,194	-1,047	-0,943	-0,747	-0,684
Assimetria	0,358	0,344	0,328	0,310	0,257	0,164	0,091	0,029	-0,085	-0,282	-0,526	-0,694	-0,843	-0,575
Mínimo	0,006%	0,129%	0,252%	0,369%	0,692%	1,223%	1,637%	1,963%	2,407%	2,910%	3,538%	3,982%	4,140%	4,267%
Máximo	7,594%	7,561%	7,527%	7,494%	7,400%	7,233%	7,091%	6,970%	6,807%	6,721%	6,478%	6,199%	6,059%	6,140%
Contagem	457	457	457	457	457	457	457	457	457	457	457	457	457	457

Tabela 6 - Estatísticas Descritivas para cada maturidade escolhida dada pelo modelo de Svensson.

Da mesma forma que observado com as taxas pré-fixadas, os resultados do cálculo da volatilidade para as curvas de IPCA podem ser visto no gráfico 31. Para isso comparou-se a volatilidade com a evolução da TIR das NTNBS em diferentes vencimentos, destacando como o movimento das taxas causa a volatilidade nos preços determinado pela curva de juros.

A alta volatilidade da curva de juros está presente e, no caso dos títulos de NTN que possuem negociação de maturidades elevadas (até 40 anos), os seguintes cortes das taxas básicas de juros gerou extrema volatilidade para os preços de longo prazo, fazendo com os títulos “comprados” em NTN possuíssem as maiores rentabilidades do mercado em 2012 além, claro de impactar as métricas de risco de mercado, dado a alta variação dos preços.

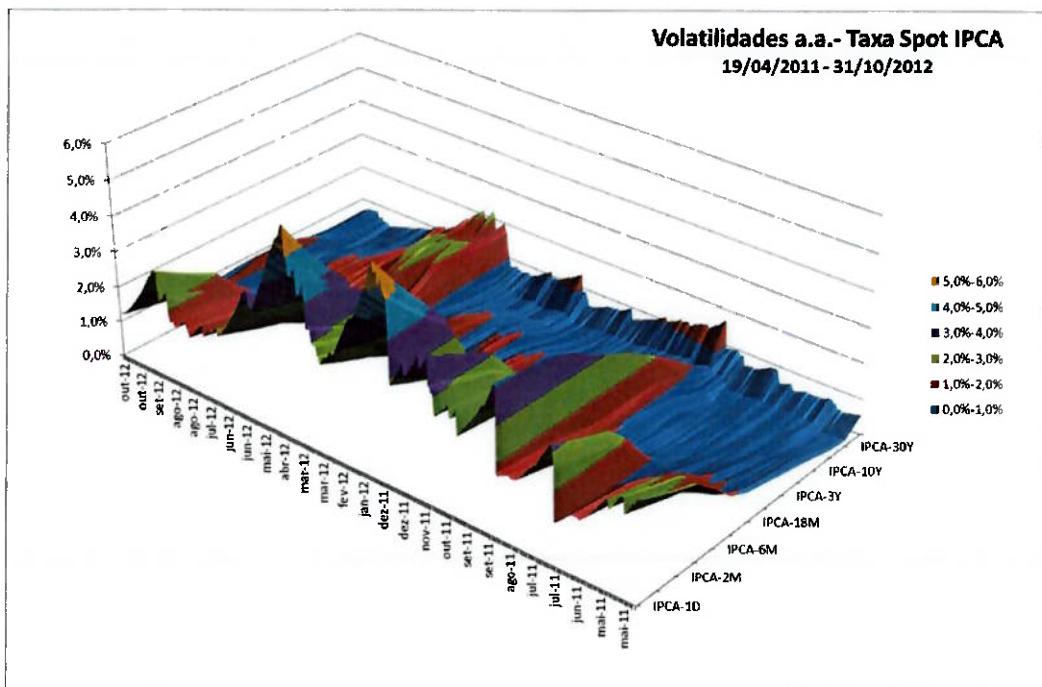


Figura 31 - Superfície de Volatilidade (IPCA - Svensson) Tempo x Maturidade x Volatilidade a.a.

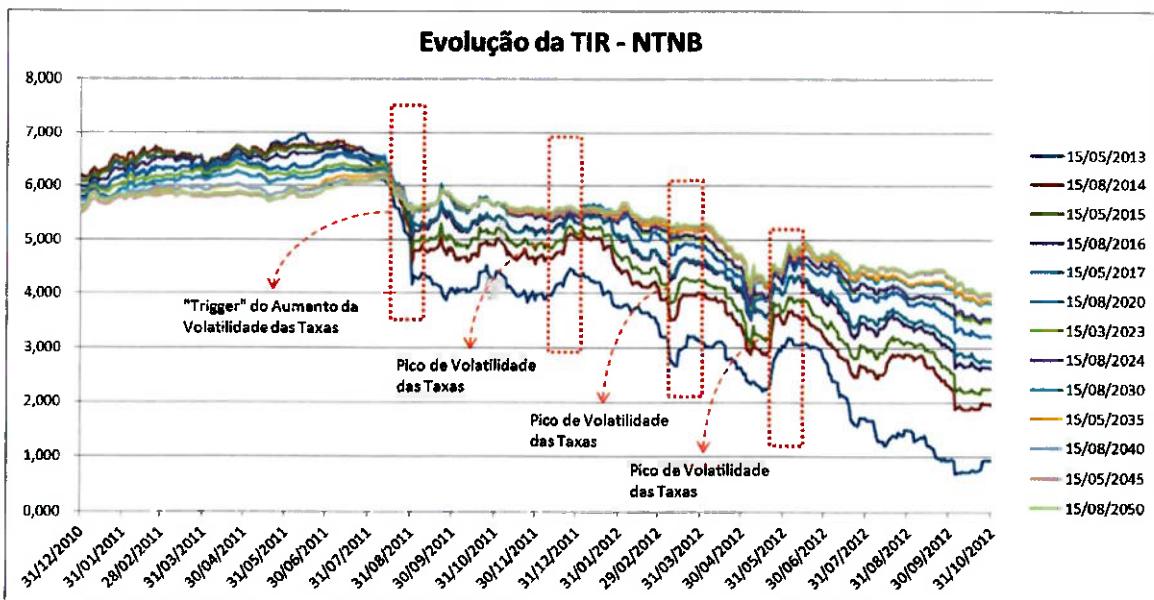


Figura 32 - Evolução da TIR para algumas maturidades de NTNBB negociadas.

Podemos perceber pelo gráfico da volatilidade picos bem definidos, e as taxas dos títulos de mais longo prazo sempre com volatilidades mais baixas. Isso é característico da curva de NTNBB devido ao longo prazo de seus títulos e comportamento mais estável com relação à taxa pré.

A análise do gráfico fica um pouco prejudicada devido às taxas de curto prazo apresentar volatilidade mais elevada em comparação com as taxas de mais longo prazo (50 anos). Devido a essa elevada “amplitude” e o cálculo da volatilidade por EWMA, a escala do gráfico prejudica a visualização da variação dos títulos de maior maturidade.

6.2 Interpolando a ETTJ pelo Modelo de Vasicek

Analizando o modelo de Vasicek, percebemos que os parâmetros do modelo não possuem tanta flexibilidade no ajuste da curva quanto no modelo de Nelson/Siegel & Svensson. Isso é devido à própria característica do modelo de equilíbrio, seus parâmetros buscam atribuir valores dado o comportamento do mercado perante as expectativas da taxa de curto prazo.

Portanto esse modelo irá resultar em erros maiores para função objetivo, no entanto a sua aplicação primordial não está na necessidade do melhor encaixe da curva, mas sim em determinar o comportamento do mercado atual e estimar, através de simulações, qual será ETTJ em uma data futura. As principais aplicações encontram-se nas áreas de precificação dos derivativos de renda fixa e estratégias de investimentos.

Toda a série de dados foi inserida no modelo para verificar as mesmas características que no modelo de Nelson/Siegel & Svensson, como o erro remanescente e os valores dos parâmetros. A função objetivo (6.2) foi utilizada para a curva Pré e a função objetivo (6.1) para a curva IPCA.

A calibração do modelo é mais trabalhosa que a do Svensson devido a menor flexibilidade de seus parâmetros e a existência de mínimos locais mais fortes. As diferentes combinações de ponderações exponenciais e fatores de decaimento do modelo de Svensson garante a presença de diversos mínimos, que mesmo não sendo o mínimo global, possuem mais chance de minimizarem de forma satisfatória o erro na otimização.

De posse dos parâmetros estimados, é possível através de simulações de Monte Carlo estimar a curva de amanhã através do uso da equação (3.18). Neste caso o uso do método por série temporal é interessante quando a predição da curva é feita em tempos mais espaçados.

A taxa de curto prazo dado pelo parâmetro “r” e a taxa de perpetuidade dada pela equação (3.17) também foram utilizados na análise.

6.2.1 Curva Taxa Pré

Com o objetivo de se conseguir o menor erro para os pontos do modelo, os seguintes limites foram considerados:

		Min	Max
Velocidade de reversão a média	α	0,01	15,00
Taxa de Equilíbrio	γ	0,01	0,20
Desvio Padrão instantâneo da taxa de curto prazo	ρ	0,10	0,50
Taxa r_0 em $t=0$	r	$T_x < 1\text{mês}$	

Tabela 7 - Restrições aplicadas as variáveis de Vasicek para a série de dados Curva Pré com objetivo de menor erro quadrático.

A variável r (taxa de curtíssimo prazo) foi considerada como sendo o contrato futuro de DI com o prazo mais curto. Outra opção seria considerar a taxa como varável do modelo a ser estimada, aplicando a devida restrição para seus limites.

Utilizando-se então a função objetivo da equação (6.2) obtemos a ETTJ da taxa spot Pré-Fixada praticado no mercado brasileiro para toda a série de dados. Os gráficos abaixo demonstram algumas curvas obtidas.

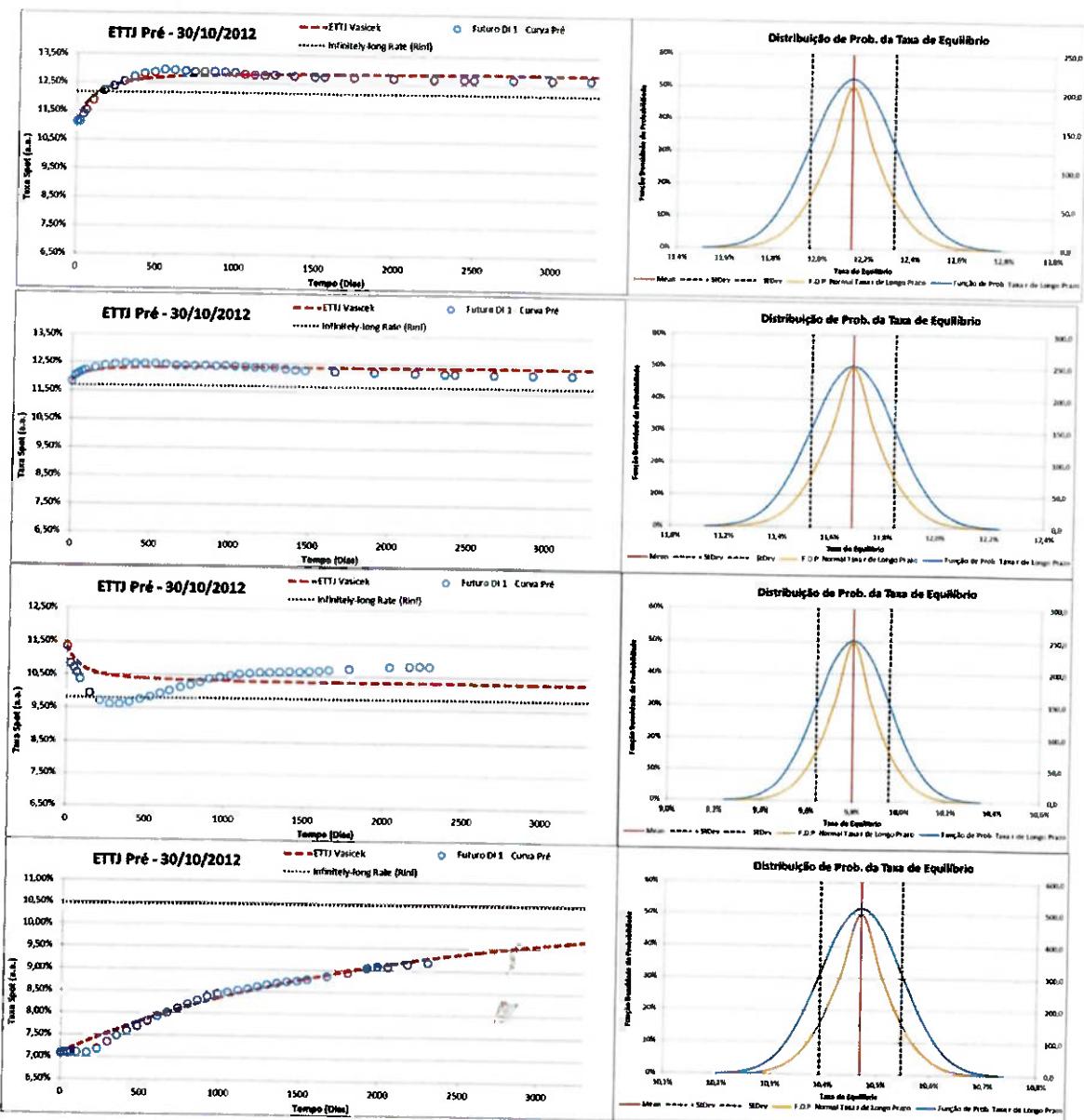


Figura 33 - Gráficos Taxa a.a x Tempo (anos). Resultados para a interpolação da curva spot pré por Vasicek e da função distribuição de probabilidade.

Os gráficos da distribuição de probabilidades à esquerda demonstram a distribuições dos possíveis valores que a taxa de equilíbrio pode assumir, através do uso da equação (3.8).

Importante observar que o significado desta probabilidade é referente à taxa de curto prazo r quando observada no equilíbrio, ou seja, $T \rightarrow \infty$. Como a taxa de curto prazo segue um passeio aleatório estocástico e a equação de precificação da

curva é derivada desse passeio, essa taxa evidentemente pode se tornar negativa dada os parâmetros da distribuição normal. Podemos entender esta análise como se fizermos a simulação pela equação de difusão da taxa de curto prazo utilizando os parâmetros encontrados. A equação (3.9) nos diz qual será a probabilidade de encontrarmos taxa negativa no final da simulação.

O modelo de Cox – Ingersoll – Ross fez uma mudança a qual o parâmetro de volatilidade se ajusta de forma a evitar taxas negativas.

Dependendo das restrições adotadas a variância do processo estocástico (ρ^2) pode se tornar elevada fazendo com que a distribuição normal da taxa de equilíbrio possua alta amplitude de valores. Isso torna inviável o processo de estimativa da curva de juros por simulação e de precificação de derivativos nos instantes de tempo à frente já que o elemento estocástico apresenta ata incerteza. Contudo, a escolha de um alto valor para esta variável pode produzir um melhor encaixe dos dados quando o objetivo é obter uma boa ETTJ.

Observando-se as taxas entre os extremos dos períodos (Jan/2011 e Out/2012), o formato da curva ETTJ a partir de setembro de 2011 em diante é um enorme desafio para o modelo de Vasicek, em que não foi possível obter um formato para curva satisfatório utilizando-se o método de mínimos quadrados não lineares do solver. As curvas resultantes neste período possuíram valores elevados para o erro dado pela função das taxas.

A análise tridimensional das variáveis Tempo x Maturidade x Taxa, retorna todo o comportamento da ETTJ Spot Pré encontrada pelo modelo de Vasicek em toda a série. As curvas apresentam uma suavização maior das curvas com erros da função objetivo elevados, porém representativo da dinâmica da taxa de juros ao longo da série de dados.

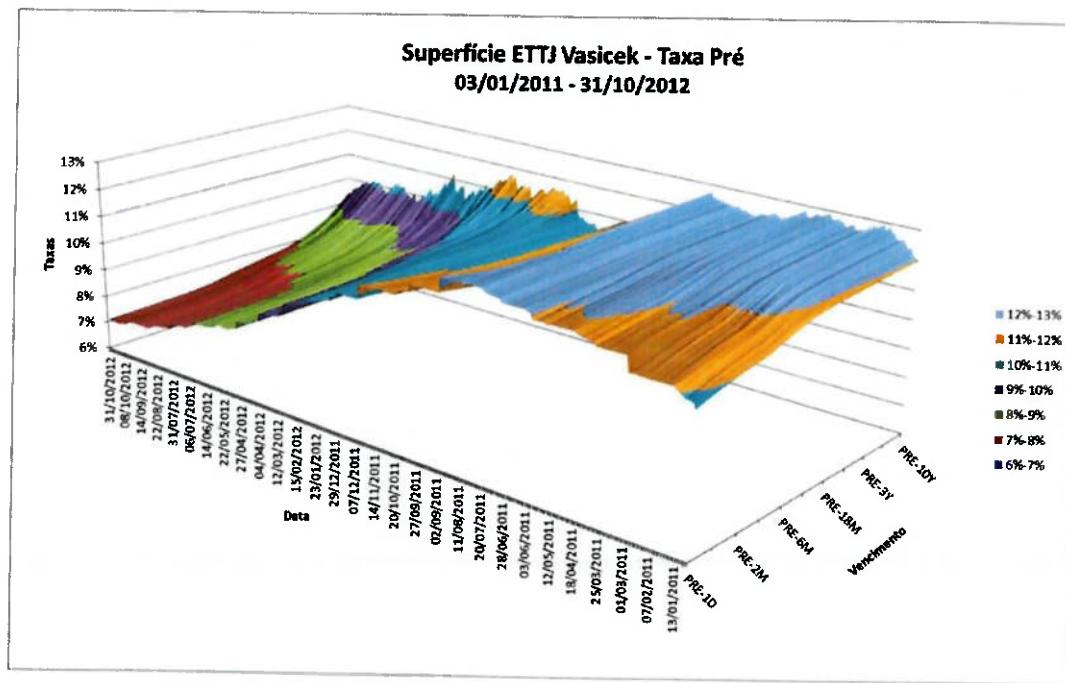


Figura 34 - Superfície ETTJ Taxa Pré Vasicek Tempo x Maturidade x Taxa.

Os resultados da superfície de volatilidade representa a suavidade encontrada nas curvas acima e com os picos semelhantes aos apresentados pelo modelo de Svesson (figura 26).

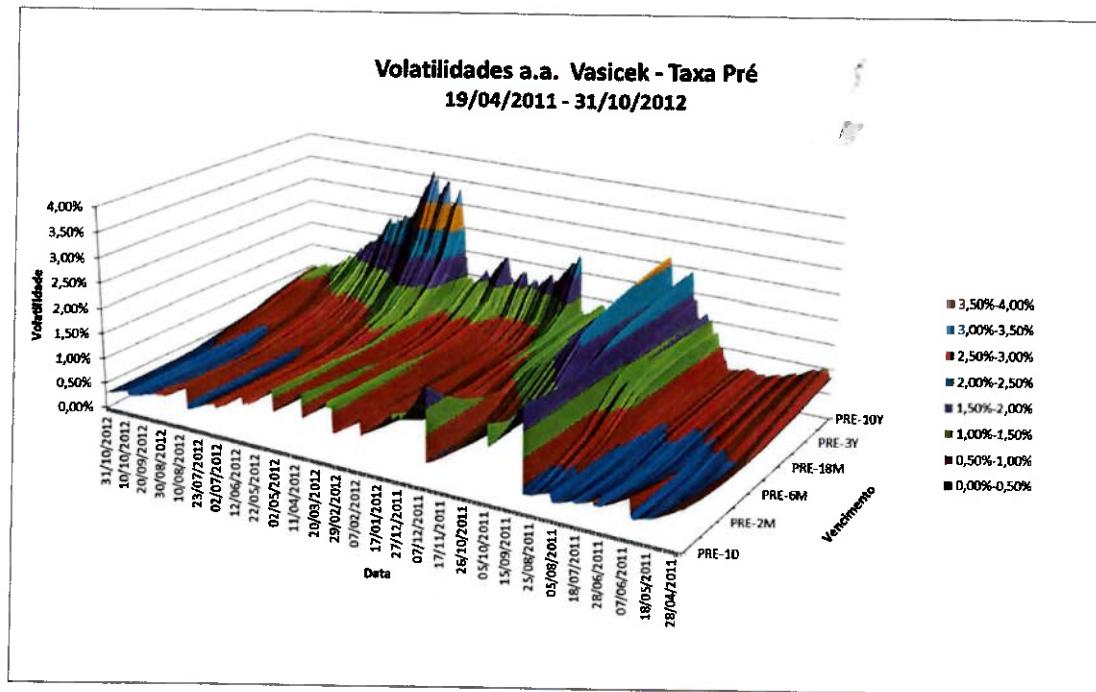


Figura 35 - Superfície de Volatilidade (Pré – Vasicek) Tempo x Maturidade x Volatilidade a.a.

6.2.2 Curva Cupom IPCA

Para que os resultados tivessem sentido econômico as seguintes restrições foram utilizadas:

		Min	Max
Velocidade de reversão a média	α	0,01	2,00
Taxa de Equilíbrio	γ	0,01	0,20
Desvio Padrão instantâneo da taxa de curto prazo	ρ	0,003	0,09
Taxa r_0 em $t=0$	r	0,0%	5,0%

Tabela 8 - Restrições aplicadas as variáveis de Vasicek para a série de dados Curva IPCA.

A variável r (taxa de curtíssimo prazo) neste caso foi considerada como variável do modelo a ser estimada, aplicando a devida restrição para seus limites.

Utilizando-se então a função objetivo da equação (6.1) obtemos a ETTJ da taxa spot Cupom de IPCA praticado no mercado brasileiro para toda a série de dados. Os gráficos abaixo demonstram algumas curvas obtidas.

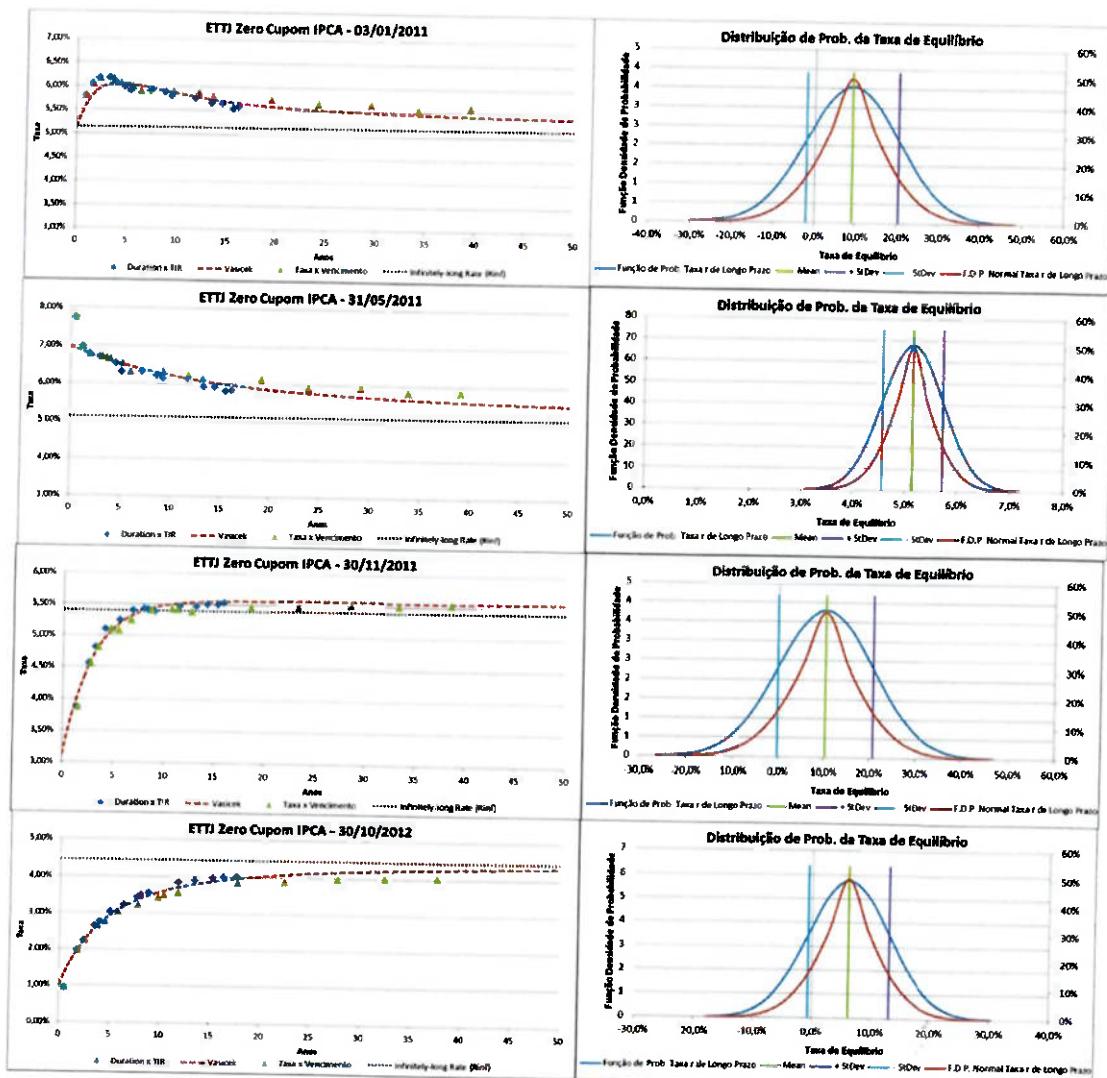


Figura 36- Gráficos Taxa a.a x Tempo (anos). Resultados para a interpolação da curva zero cupom de IPCA por Vasicek (NTNB) e da função densidade de probabilidade.

Os resultados encontrados foram muito satisfatórios para os dados sobre a curva de juros a vista (Spot) IPCA (NTNB) utilizando o modelo de Vasicek. Além do encaixe da curva ser muitas vezes igualmente bom como no modelo de Svensson, os demais parâmetros apresentaram sentido econômico mais condizente com a realidade e uma evolução mais coerente ao longo da série de dados (Jan/2011 e Out/2012) do que os resultados encontrados para as taxas a vista da curva Pré.

Um dos motivos deve-se ao fato dos prazos em que a curva de Cupom IPCA é precificada no mercado. Isso inclui os títulos de maiores vencimentos no mercado brasileiro e que hoje representam em grande parte a direção da política monetária e

comportamento macroeconômico do país, fatores em harmonia ao modelo de Vasicek.

A análise tridimensional das variáveis Tempo x Maturidade x Taxa, retorna todo o comportamento da ETTJ IPCA Zero cupom encontrado pelo modelo de Vasicek em toda a série.

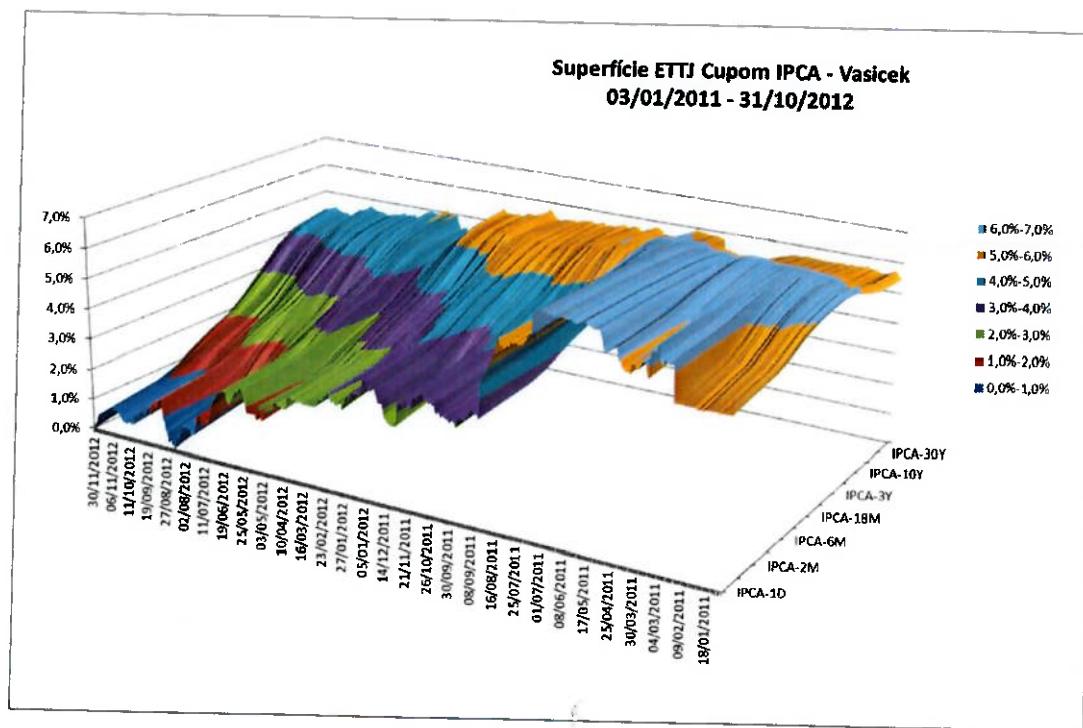


Figura 37 - Superfície ETTJ Cupom IPCA Vasicek Tempo x Maturidade x Taxa.

A análise comparativa dos erros segue na seção 6.3.

O gráfico de superfície das taxas pelas maturidades apresenta comportamento semelhante ao encontrado pelo modelo de Svensson (figura 31). Contudo é possível notar uma maior suavização das curvas condizentes com o modelo de Vacisek, refletindo muito bem a direção da queda das taxas de juros no período estudo.

Essa suavização também é refletida no gráfico de superfície da volatilidade, onde a presença de elevados picos nas taxas de curto prazo possui uma menor escala, contudo ainda é possível notar os períodos de queda das taxas.

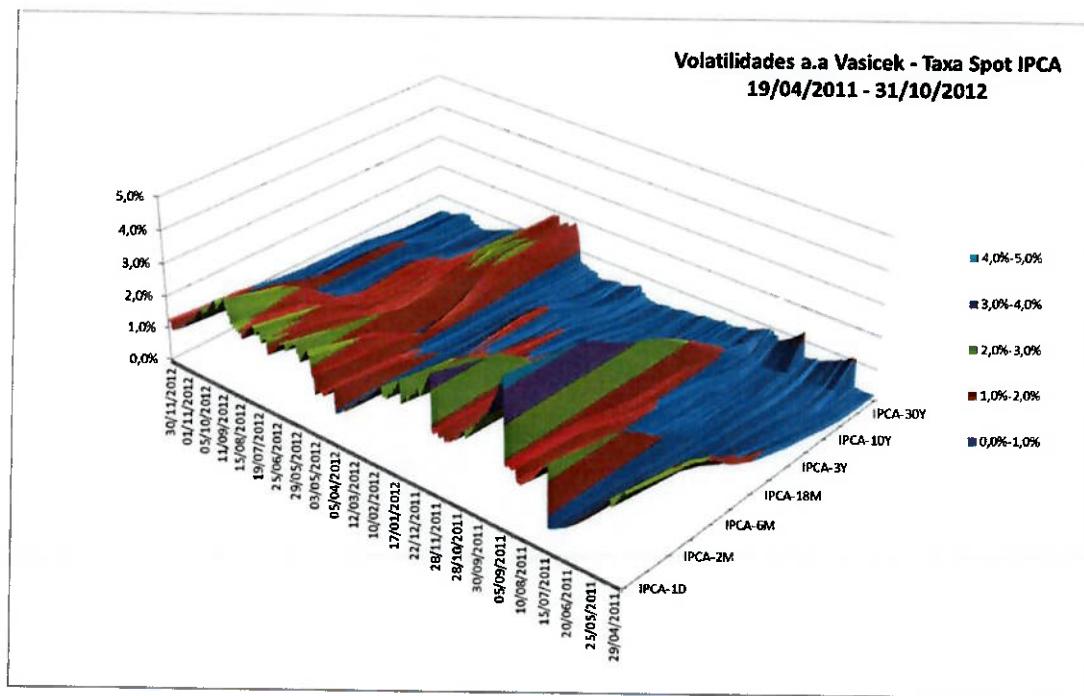


Figura 38 - Superfície de Volatilidade (IPCA) Vasicek Tempo x Maturidade x Volatilidade a.a.

6.3 Comparando os Resultados – Curvas e Parâmetros dos Modelos

Na comparação dos resultados entre os modelos, primeiramente, apresenta-se graficamente os dados do mercado frente às duas curvas interpoladas buscando evidenciar o encaixe dos dados. Para isso foi utilizado os mesmo dias apresentados nos resultados de Svensson e Vacisek

Posteriormente é feita a análise dos parâmetros de cada modelo com o objetivo de verificar significa econômico capturado por cada um deles.

Para as curvas Pré a comparação pode ser vista abaixo.

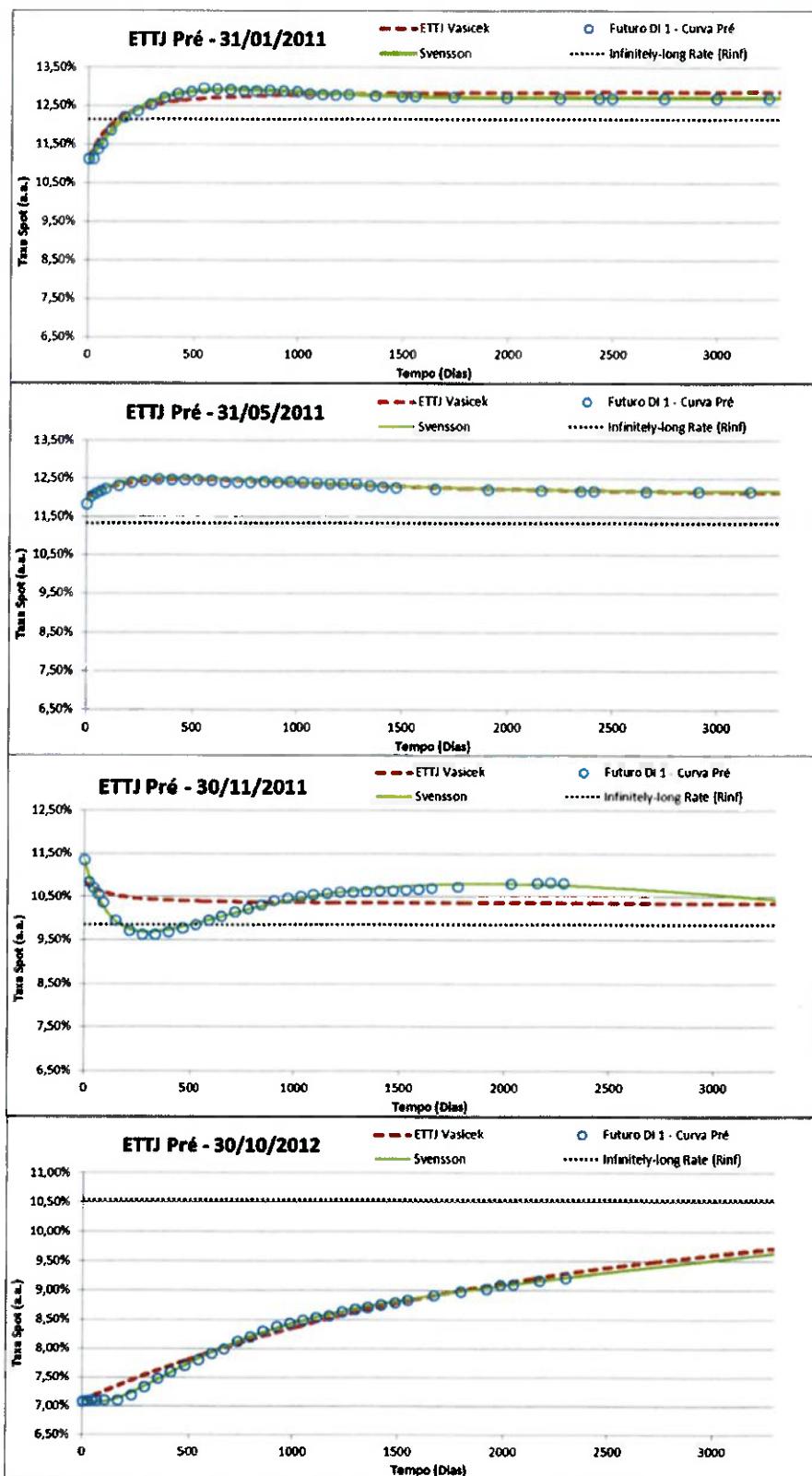


Figura 39 - Gráficos Taxa (a.a) x Tempo (Dias). Resultados para a interpolação da curva Taxa Pré (Futuro DI) pelo modelo de Svensson e Vasicek.

O quadro com a curva do dia 30/11/2011 possui uma conclusão crucial com relação ao modelo de Vasicek e a sua comparação com o modelo de Svensson. A modelagem da curva de juros no Brasil passa por alguns desafios devido à alta volatilidade das taxas.

Apesar de uma convergência para uma política monetária de redução das taxas de juros de forma obter um crescimento econômico mais consistente e duradouro nos últimos anos, o mercado apresenta, neste período, uma expectativa de aumento da taxa no longo prazo, com forte queda no curto prazo. Quando o objetivo é obter uma reprodução fiel dos pontos observados, o modelo apresenta maior falha devido à inexistência de parâmetros mais flexíveis para variações maiores no curto prazo, assim como no modelo de Svensson. Contudo é inegável que ainda assim os valores dos parâmetros encontrados reproduzem com bastante coerência as realidades de médio e longo prazo do mercado. Isso pode ser visto pelas taxas longas obtidas pela extração das equações de precificação que são valores próximos em ambos os modelos.

Com as curvas possuindo erros elevados com os dados de mercado, para a série de dados em comparação com o modelo de Svensson, buscou-se uma alternativa para as restrições impostas na tabela 7. O Objetivo então foi de buscar modelar evolução do mercado com relação à política de queda das taxas de juros. Aplicações para este tipo de resultado incluem taxa de juros de perpetuidade para exercícios de desconto de fluxo de caixa, estratégias de investimentos e ALM (Asset & Liability Management).

		Min	Max
Velocidade de reversão a média	α	0,01	5,00
Taxa de Equilíbrio	γ	0,05	0,20
Desvio Padrão instantâneo da taxa de curto prazo	ρ	0,05	0,20
Taxa r_0 em $t=0$	r	$T_x < 1 \text{ mês}$	

Tabela 9 - Restrições aplicadas as variáveis de Vasicek para a série de dados Curva Pré para estudo da taxa de perpetuidade.

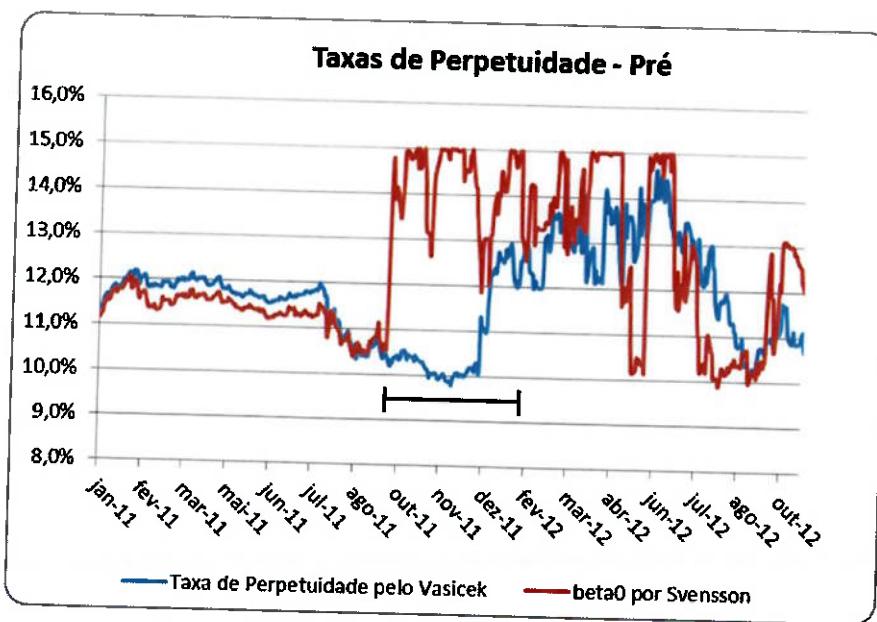


Figura 40 - Comparativo da evolução das taxas de perpetuidade Pré

É possível observar na figura 39, no período em destaque correspondente ao intervalo em que foram encontrados no modelo de Vasicek os maiores erros quadráticos (equação 6.2) ao encaixar os dados do mercado.

Os parâmetros do modelo de Svensson conseguem um encaixe fino em um período em que a expectativa de curto prazo de queda da taxa é seguida uma expectativa de aumento da taxa de longo prazo (ponta longa da curva). Como a ponta longa apresentava muitas vezes uma inclinação elevada com relação aos vencimentos mais curtos (ponta curta), a minimização da função objetivo foi possível com um custo de um alto valor para β_0 e consequente variação elevada de seu valor no período. Observa-se uma tendência de uma variação menor desse parâmetro a partir de Junho/12 e na medida em que a confirmação de que a política de taxas de juros a níveis sustentáveis para um crescimento econômico mais “orgânico” se materialize cada vez mais.

Observando a evolução da taxa de perpetuidade dada pelo modelo de Vasicek, o mesmo comportamento para a taxa é observado no período. Contudo o período destacado na figura 39 demonstra a diferença entre os modelos. O modelo de Vasicek possui uma resposta mais lenta às mudanças abruptas ocorridas a custo

de um erro considerável no encaixe dos dados, contudo seu comportamento geral assegura uma taxa de perpetuidade mais estável.

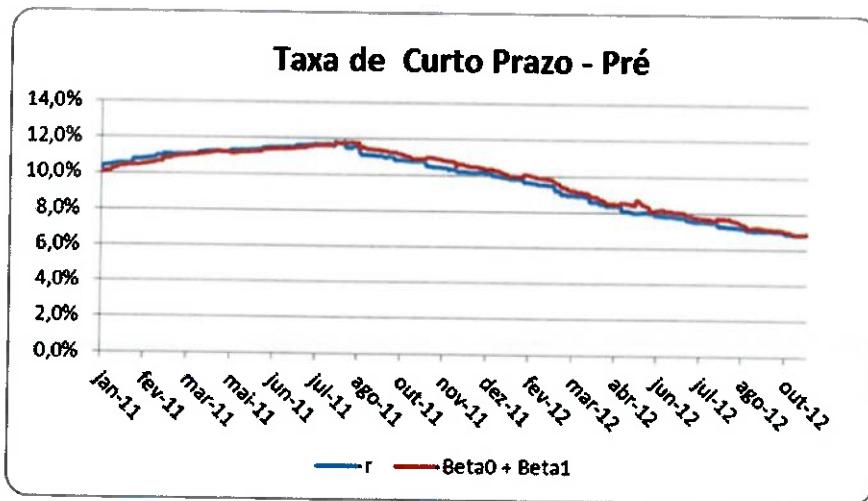


Figura 41 - Comparativo da evolução das taxas de curto prazo Pré

Quando olhamos para a taxa de curto prazo estimado pelos parâmetros de Svensson percebe-se um perfeito alinhamento com os dados observados, já que para o Vasicek essa taxa foi considerada como sendo do contrato mais curto do Futuro de DI.

Em outra simulação, a taxa de curto prazo r foi considerada como parâmetro a ser encontrado pelo problema de otimização (no caso foi adotada a restrição de $5\% < r < 15\%$). Os resultados mostram valores muito semelhantes à restrição adotada na tabela 7, porém com pequena variação na taxa de perpetuidade, demonstrando que um ajuste fino pode ser feito com a estimação dessa variável r pela função objetivo, dado a necessidade.

Para as curvas de cupom IPCA a comparação das curvas pode ser vista abaixo.

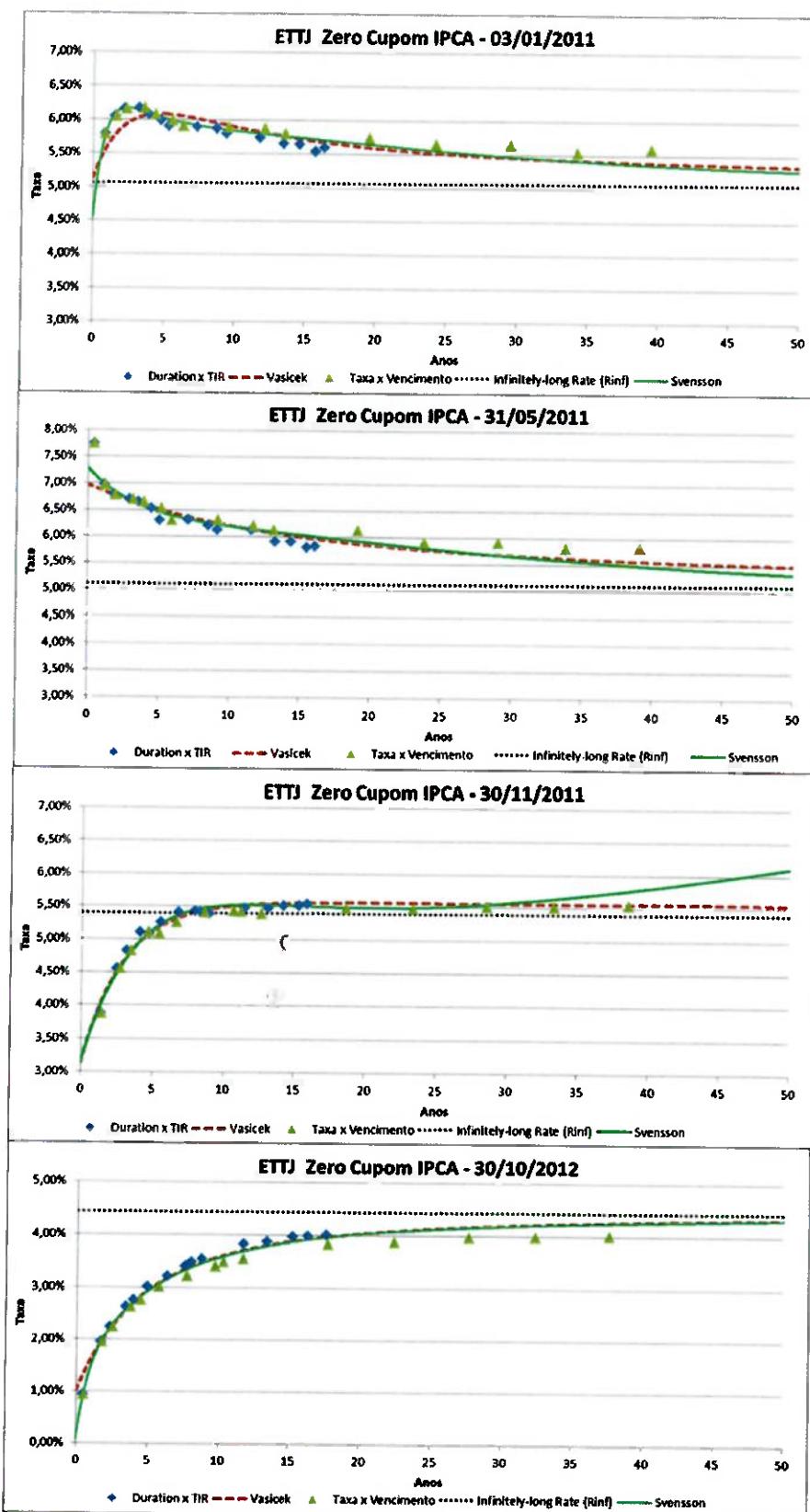


Figura 42 - Gráficos Taxa (a.a) x Tempo (Dias). Resultados para a interpolação da curva Cupom IPCA pelo modelo de Svensson e Vasicek.

Com um bom encaixe do modelo de Vasicek para a curva de IPCA, análise do erro quadrático dos preços dado pela equação 6.1 para em todos os dias da série segue no gráfico abaixo.

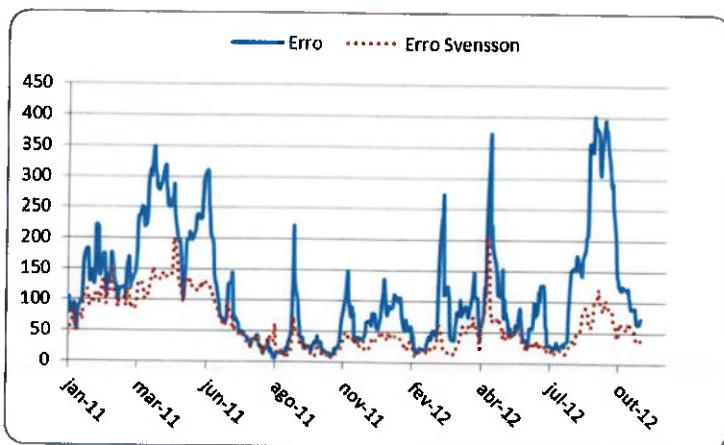


Figura 43 - Comparativo do Erro Quadrático Médio entre os modelos – Curvas IPCA

Como era esperado o modelo de Svensson apresenta erros menores. Contudo, para o modelo de Vasicek os erros são toleráveis dadas as demais aplicações que os parâmetros de Vasicek proporciona, como pode ser visto na análise abaixo.

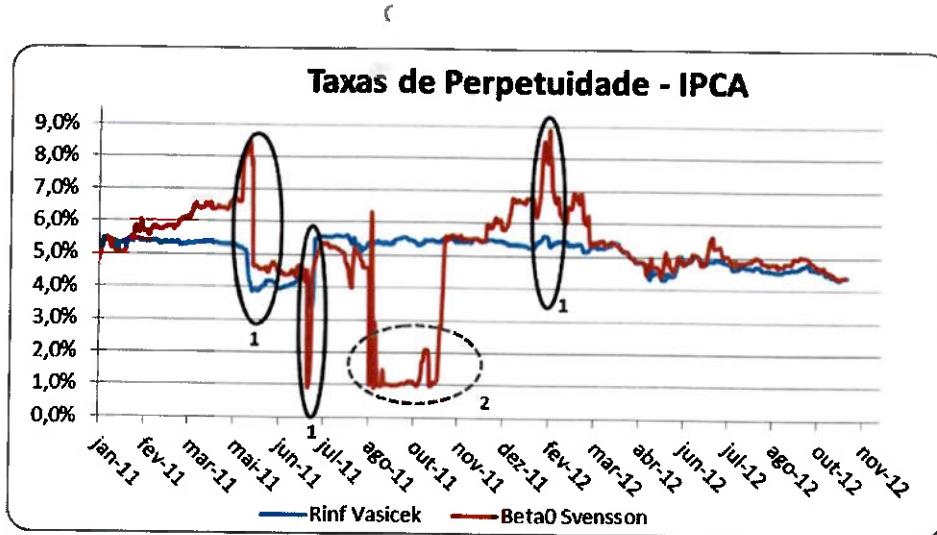


Figura 44 - Comparativo da evolução das taxas de perpetuidades IPCA

A análise do comportamento econômico resultante do modelo além dos resultados dos erros quadráticos é importante dado à conclusão que se deseja

obter. As taxas de perpetuidades apresentadas por cada modelo são dadas respectivamente pelos parâmetros β_0 e $R_{..}$. Na figura 44 o índice “1” demonstra que ambos os modelos capturaram mudanças na expectativas das taxas. Contudo, no modelo de Svensson essas mudanças causaram uma perturbação maior na evolução dos parâmetros do modelo que levaram a soluções de mínimos locais da função objetivo, que mesmo garantindo um baixo erro quadrático, inviabiliza a utilização de tais taxas em exercícios de desconto de fluxo de caixa.

O índice “2” representa valores para β_0 que, após perturbações do mercado, mantiveram a permanência em um mínimo local com valores que não representam a expectativa de longo prazo das taxas.

Sendo assim o modelo de Vasicek proporcionando melhor significado econômico.

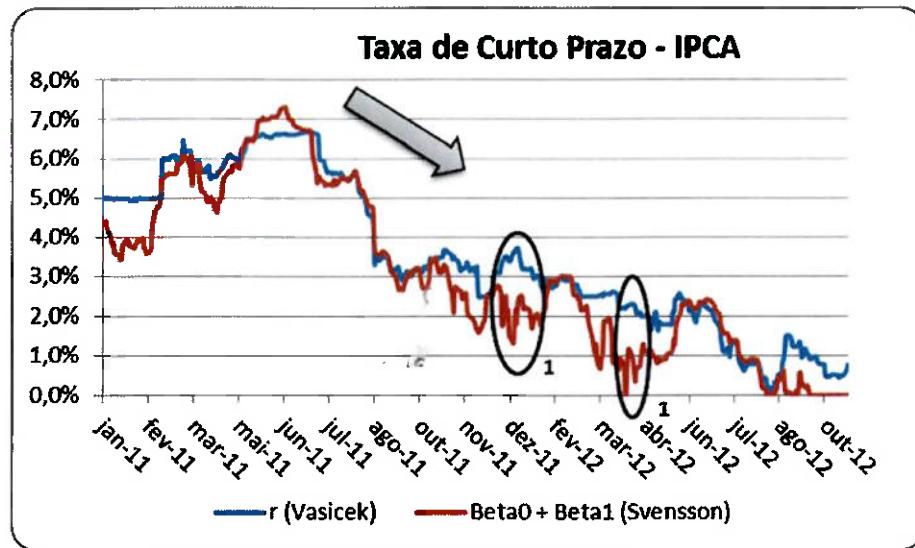


Figura 45 - Comparativo da evolução das taxas de curto prazo IPCA

Para as taxas de curto prazo podemos observar semelhante resultado com relação à proposta dos modelos. Novamente aqui o índice “1” representa diferenças no modelo devido a falsas convergências, principalmente vindas do modelo de Svensson. As expectativas do mercado, no entanto são bem capturadas por ambos os modelos, sendo o modelo de Vasicek com uma evolução mais suave.

6.4 Interpolando a ETTJ pelo Modelo de Vasicek utilizando a série temporal

Diante do exposto na seção sobre a metodologia, foi feito o exercício de se obter a ETTJ por Vasicek através da análise temporal da série de dados, utilizando para isso o método dos mínimos quadrados (MQ) e o método da máxima verossimilhança (MV).

Para isso escolheu-se para a taxa pré-fixada os preços do título público LTN divulgados no mercado desde 03/01/2005, escolhendo sempre a maturidade de 3 meses como a taxa de curto prazo para a série de dados.

Utilizaram-se ambos os métodos de Série temporal para determinar os parâmetros. Os resultados foram iguais nos dois casos, o que demonstra a consistência entre os dois métodos.

Contudo o formato da curva encontrado não foi adequado optando-se por uma mudança no parâmetro da taxa de equilíbrio no método MV e determinando quais seria então o valor dos outros dois parâmetros.

Uma vez determinados os parâmetros, adotamos como valor para a taxa “ r ” como sendo o valor de mercado do vencimento mais curto observado no mercado de futuro de DI do dia. Utilizando a equação de precificação da ETTJ por Vasicek (3.16) encontramos a curva estimada.

Observa-se o vertiginoso declínio das taxas ao longo da série utilizada (figura 46), o método produziu um resultado de ETTJ não condizente com o mercado. A escolha da maturidade do título e dos prazos altera significativamente a estimativa dos parâmetros, como exposta na seção de Dados e Metodologia.

Os resultados da curva, os parâmetros encontrados e a respectiva taxa de perpetuidade para ambos os métodos é dado abaixo.

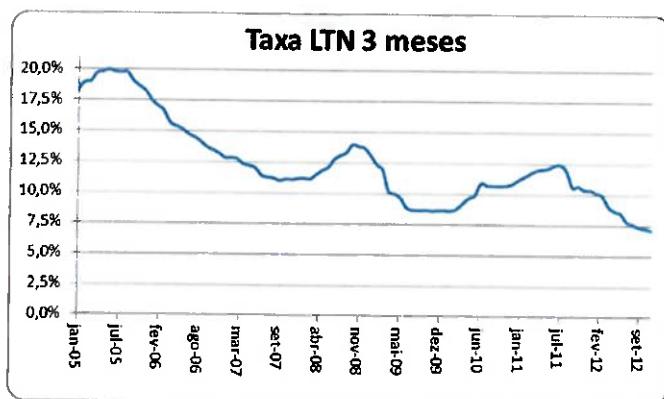


Figura 46 - Taxa de Retorno LTN de 3 meses

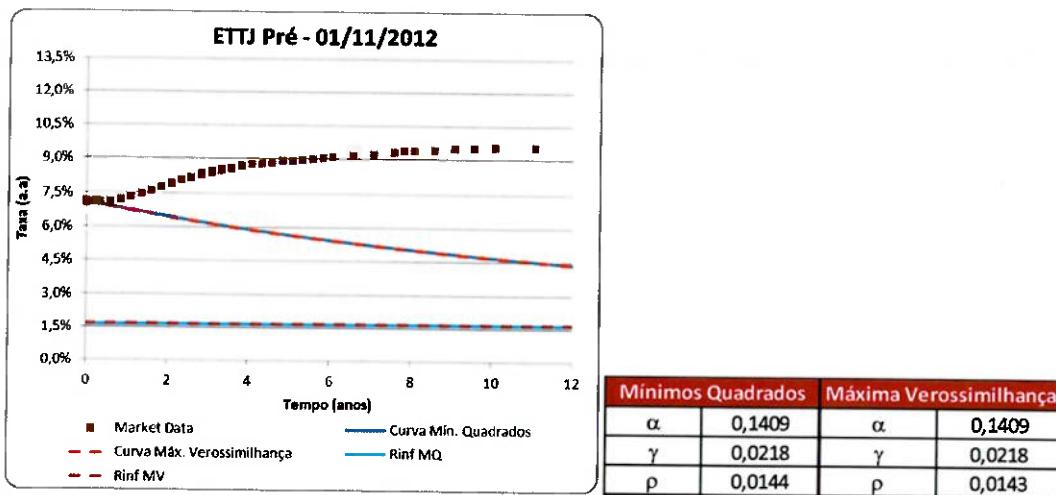


Figura 47 - ETTJ estimada para o dia pelos métodos MQ e MV

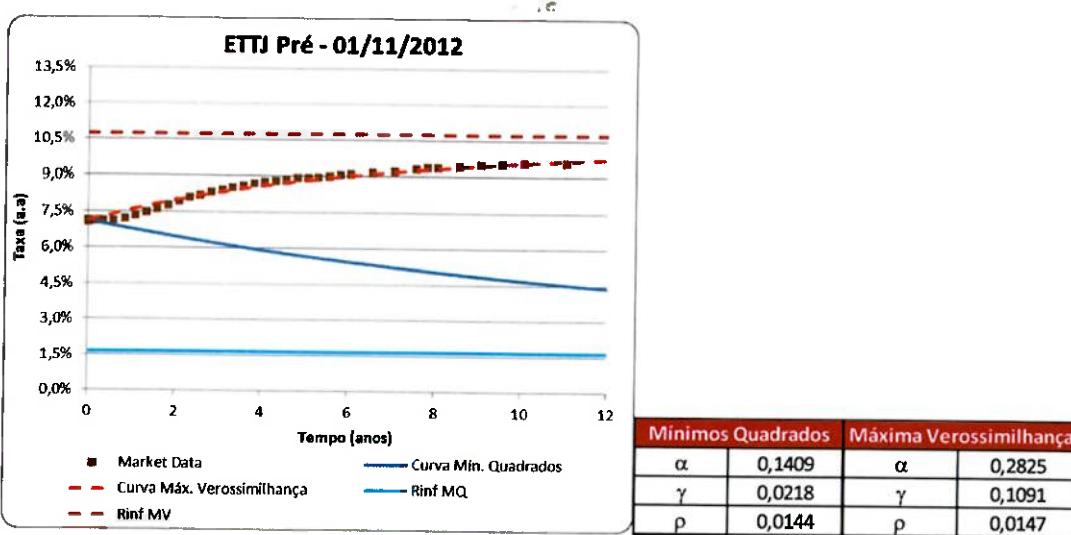


Figura 48 - ETTJ estimada para o dia pelos métodos MQ e MV, com arbitragem de parâmetro.

Uma alternativa para adequação da curva foi feita arbitrando o parâmetro de taxa de equilíbrio γ no método MV, utilizando a taxa de equilíbrio encontrada quando minimizamos os erros pelo método Cross-Section no dia 31/10/2012. Objetive-se assim uma ETTJ que reflete as expectativas do mercado.

Uma das vantagens do método de série temporal é a sua robustez na estimativa dos parâmetros, principalmente com relação ao parâmetro de volatilidade ρ . Ao encontrar valores de ρ mais condizentes com o comportamento ao longo do tempo da taxa, permite uma melhor simulação da previsão da taxa de curto prazo a períodos à frente.

Essa simulação possui objetivos de especificação de derivativos de renda fixa.

A estimativa da curva de cupom IPCA por esse método envolve obter taxas a vista (spot) do mercado. A determinação da curva pelo modelo de Svensson, trazendo o valor presente todos os fluxos de pagamento, pode fornecer a série de taxas a vista para um determinado vencimento que seja representativo da curva. Para isso é necessário, portanto, uma base de dados suficientemente grande para uma correta estimativa, o que foge da base de dados utilizada no método de Cross-Section neste trabalho.

7 Conclusão

Neste trabalho apresentamos alguns dos mais fundamentais modelos de curva de juros (ETTJ) de um fator e quais as suas principais características.

A literatura teórica e empírica divide os modelos de curva de juros em duas amplas classes: Os modelos de equilíbrio e os modelos de não arbitragem.

A primeira classe de modelos é baseada na derivação da estrutura a termo partir das premissas econômicas. Estes modelos contam com as premissas iniciais sobre as variáveis econômicas e, em seguida, derivam um processo estocástico para a dinâmica da taxa de curto prazo para construir toda a curva a partir dessa dinâmica. Desta forma a saída dos modelos equilíbrios é a observação inicial da curva a termo taxa de juros em um formato aproximado. Com isto, a maior desvantagem dessa categoria de modelos é o não encaixe automático da estrutura a termo corrente no mercado (pontos observados).

Os modelos de não arbitragem superam essa deficiência utilizando a atual estrutura a termo como entrada do modelo e seleciona os parâmetros para capturar o comportamento das taxas de juros futuras, sendo assim mais atraentes com ponto de vista de consistência da curva modelada.

Outra importante classificação de modelos de curva de juros é com relação a quantidade de fatores para descrever um modelo. Podemos denominá-los em modelos unifatoriais ou multifatoriais, caso o dobro de parâmetros de um respectivo modelo seja utilizado.

A estimativa da estrutura a termo tem extrema relevância para os participantes de mercado, dada sua importância na previsão das taxas de juros, política monetária, gerenciamento da dívida pública, gerenciamento de risco e apreçamento.

No entanto, no Brasil a maioria dos métodos implementados para este fim utiliza-se de interpolações, que não possuem fundamentação teórica, apenas

focando na capacidade da curva estimada em replicar os preços dos títulos de mercado.

Verificamos que o modelo de Nelson/Siegel & Svensson, modelo paramétrico, apresentou melhor aderência aos dados de mercado que o modelo de Vasicek, modelo de equilíbrio, dado que o modelo de Nelson/Siegel & Svensson possui uma enorme flexibilidade no formato das curvas geradas dado pelas ponderações e decaimento de seus parâmetros. No caso do modelo de Vasicek, os dados mostraram perfeito alinhamento com a proposta teórica, sendo também um modelo que apresenta aplicações em estratégias de investimento de longo prazo.

Percebeu-se ainda que diferentes técnicas de otimização não linear, com variação na escolha inicial dos parâmetros pode influenciar muito o resultado final, pois a introdução de um método de otimização mais complexo (por exemplo Algoritmos Genéticos) pode melhorar resultados de aderência aos dados de mercado em ambos os modelos, principalmente no modelo de Vasicek. Este apresenta mínimos locais mais fortes devido a menor quantidade de parâmetros e o princípio de reversão a média (taxa de equilíbrio).

Verificamos ainda que vários formatos de curva são permitidos tanto no modelo de Vasicek quanto no modelo de Svensson. Finalmente, pelo arcabouço teórico e o resultado de apreçamento dos títulos, o modelo de Vasicek pode ser visto como alternativa viável para a construção da ETTJ real brasileira (Curva de cupom IPCA) utilizando os dados de títulos de NTNBB.

No que tange a aplicação dos modelos no cenário brasileiro, o modelo de Svensson, devido ao menor erro no encaixe da curva é utilizado no apreçamento de títulos e medição do risco de mercado, como no caso da duration e na estimação da volatilidade para o cálculo de VaR (Value at Risk). O modelo de Vasicek, devido ao seu comportamento voltado ao equilíbrio econômico, pode ser utilizado em uma análise de investimentos, exercícios de ALM e logicamente, no apreçamento de derivativos de renda fixa, onde a simulação estocástica da taxa de curto prazo em diferentes maturidades da curva de juros é necessária.

Seja qual for o modelo escolhido, a curva de juros calculada deve atender os requisitos ao qual se propõem. A escolha entre as metodologias de modelagem é usualmente um “trade-off” entre simplicidade, facilidade de implementação e precisão. Essencialmente a curva de juros escolhida deve atender as seguintes qualidades:

- Precisão: A curva possui um bom encaixe com a curva de mercado? Existe flexibilidade suficiente em acomodar diferentes formatos da curva?
- Consistência do modelo: A curva estimada possui consistência com um modelo teórico?
- Simplicidade: Qual a complexidade na implementação do modelo? O resultado do modelo oferece fácil aplicação?
- Propósito: A curva estimada será utilizada para especificar títulos e derivativos de taxas de juros ou será utilizada para identificar arbitragem e oportunidades de ganho de valor?

Todas as diferentes metodologias possuem em mais ou menos extensão esses requerimentos. Grande parte das aplicações pode ser feitas através do método simples de spline cúbico. Formadores de mercado que necessitam identificar superfícies de volatilidades entre as taxas e a correlação entre os diferentes vértices da ETTJ precisam aplicar os modelos como descritos aqui, considerando até mesmo os tipos multifatoriais.

8 Referências Bibliográficas

HULL, John C. Options, Futures and Other Derivatives. Prentice Hall, p. 483 – 593, Fifth Edition

FABOZZI, Fabozzi J. The Handbook of Fixed Income Securities. McGraw-Hill, p. 939 – 966, 2005

FABOZZI, Fabozzi J. Bond Markets, Analysis and Strategies. Prentice Hall, p. 12-121, 2000

FERREIRA, Luiz F. R. Manual de Gestão de Renda Fixa. Bookman, 2005

DIEBOLD, Francis X., LI Canlin, Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields, Journal of Econometrics (2006) 337-364

VASICEK, Oldrich, An Equilibrium Characterization Of The Term Structure, Journal of Financial Economics 5 (1977) 177-188

Van Elen, Emile A.L.J., Term Structure Forecasting - Does a Good Fit Imply Reasonable Simulation Results?, Tilburg School of Economics and Management, 2010

Herrala, Niko, Vasicek Interest Rate Model: Parameter Estimation, Evolution of The Short-Term Interest Rate and Term Structure, Lappeenranta University of Technology

BAYAZIT, Dervis, Yield Curve Estimation and Prediction with Vasicek Model, The Middle East Technical University, 2004

FRANKLIN Jr., Sergio Luis; DUARTE, Thiago Barata; NEVES, César da Rocha; DE MELO, Eduardo Fraga, Interpolação e Extrapolação da Estrutura a Termo Taxa de Juros para Utilização pelo Mercado Segurador Brasileiro, SUSEP.

Nelson, C. R. and Siegel, A. F. (1987). Parsimonious Modeling Of Yield Curves. Journal of Business, 60 : pp 473 - 489.

Svensson, L. E. O. (1994), "Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994 ", International Monetary Fund Working Paper, No. 114, Washington DC.

Anexo A - Dados de Mercado Curva Pré – Futuro DI para o dia 31/10/2012

Abaixo seguem os dados observados no mercado para o derivativo futuro de DI de 1 dia para o dia 31/10/2012. Toda a série de dados apresenta o semelhante formato abaixo, quando da estimativa dos modelos pelo método Cross Section.

Série	N	Taxa	PU	Taxa Modelo	PU Modelo	Erro Quadrático Preço		Erro Quadrático Taxa
CDI ->	1	7,0900%	99.972,82	7,130%	99.972,67	83,390	dia1 Model CDI data	182,797
X12	1	7,0904%	99.972,82	7,130%	99.972,67	0,02	7,130% 7,090%	16,045
Z12	21	7,0980%	99.430,18	7,101%	99.429,97	0,00		0,075
F13	41	7,1050%	98.889,46	7,082%	98.892,94	0,30		5,369
G13	63	7,1100%	98.297,51	7,072%	98.306,25	1,21		14,510
J13	101	7,1100%	97.284,65	7,077%	97.296,67	1,43		10,892
N13	164	7,1000%	95.634,19	7,132%	95.615,74	2,08		10,084
V13	230	7,1900%	93.859,50	7,229%	93.828,33	4,22		15,224
F14	294	7,9400%	92.068,59	7,345%	92.064,04	0,07		0,207
J14	355	7,4800%	90.337,44	7,463%	90.357,31	1,11		2,814
N14	416	7,6000%	88.610,36	7,583%	88.632,86	1,22		2,737
V14	482	7,7000%	86.772,29	7,710%	86.756,34	0,53		1,072
F15	547	7,8200%	84.922,29	7,829%	84.906,87	0,43		0,823
J15	608	7,9300%	83.183,64	7,933%	83.177,69	0,06		0,102
N15	669	8,0100%	81.500,66	8,030%	81.460,94	2,36		3,934
V15	734	8,1100%	79.681,76	8,124%	79.650,73	1,31		2,090
F16	797	8,2100%	77.915,27	8,208%	77.919,22	0,02		0,030
J16	858	8,3000%	76.225,16	8,282%	76.267,13	2,05		3,064
N16	921	8,3900%	74.494,25	8,353%	74.588,15	9,57		13,952
V16	986	8,4500%	72.804,36	8,419%	72.886,33	6,81		9,724
F17	1048	8,4900%	71.256,38	8,477%	71.292,59	1,25		1,757
J17	1111	8,5400%	69.677,75	8,531%	69.702,97	0,57		0,794
N17	1172	8,5700%	68.221,44	8,580%	68.192,39	0,72		0,989
V17	1236	8,6300%	66.630,78	8,628%	66.637,42	0,04		0,049
F18	1297	8,6700%	65.185,33	8,671%	65.183,38	0,00		0,004
J18	1358	8,7030%	63.782,04	8,711%	63.756,17	0,49		0,669
N18	1421	8,7350%	62.361,60	8,751%	62.309,72	1,89		2,576
V18	1485	8,7640%	60.953,42	8,790%	60.868,29	4,88		6,656
F19	1547	8,7900%	59.618,95	8,826%	59.498,13	9,44		12,928
N19	1670	8,8740%	56.925,13	8,895%	56.853,88	3,04		4,234
F20	1800	8,9500%	54.211,47	8,964%	54.161,98	1,36		1,941
N20	1923	9,0580%	51.598,51	9,028%	51.708,26	6,26		9,218
V20	1988	9,1100%	50.267,90	9,061%	50.447,02	16,14		24,191
F21	2051	9,1000%	49.220,79	9,093%	49.247,45	0,35		0,527
N21	2174	9,1520%	46.978,72	9,155%	46.969,01	0,04		0,068
F22	2302	9,2000%	44.754,76	9,219%	44.685,21	2,10		3,457

Tabela 10 – Anexo A1. Dados de Mercado Futuro de DI. Respectivos preços e taxas coletados e resultantes do modelo de Svensson.

Parametros Svensson			Min	Max		
Long-run levels of interest rates	β_0	0,12109	0,01	0,15	Função Objetivo	Erro Taxa 182,8
Short-run component	β_1	-0,05219	0,20	0,20	Erro % total na curva	-0,0011%
Medium-term component 1	β_2	-0,04529	0,40	0,40		
Medium-term component 2	β_3	-0,07850	0,40	0,40		
Decay parameter 1	λ_1	1,12224	0,00	30,00		
Decay parameter 2	λ_2	0,20728	0,00	30,00		
b0+b1	6,8894%					

Tabela 11 - Anexo A2. Parâmetros do Modelo de Svensson

Série	0	Taxa	PU	Taxa Modelo	PU Modelo	Erro Quadrático	Erro Quadrático Taxa		
CDI ->	1	7,0900%	99.972,82	6,904%	99.973,51	496,34	dia1 Model	CDI data	1.518,63
X12	1	7,09%	99.972,82	6,904%	99.973,51	0,48	6,904%	7,090%	345,68
Z12	21	7,10%	99.430,18	6,947%	99.441,88	6,52			228,35
F13	41	7,10%	98.889,46	6,989%	98.906,95	7,46			135,45
G13	63	7,11%	98.297,51	7,034%	98.315,01	4,86			58,10
J13	101	7,11%	97.284,65	7,110%	97.284,70	0,00			0,00
N13	164	7,10%	95.634,19	7,231%	95.558,13	35,28			171,66
V13	230	7,19%	93.859,50	7,352%	93.730,56	72,29			261,07
F14	294	7,34%	92.068,59	7,463%	91.946,07	51,06			150,28
J14	355	7,48%	90.337,44	7,563%	90.238,91	27,35			69,37
N14	416	7,60%	88.610,36	7,659%	88.529,83	15,59			35,14
V14	482	7,70%	86.772,29	7,758%	86.682,79	16,62			33,78
F15	547	7,82%	84.922,29	7,851%	84.869,92	5,01			9,39
J15	608	7,93%	83.183,64	7,933%	83.177,38	0,06			0,11
N15	669	8,01%	81.500,66	8,012%	81.496,03	0,03			0,05
V15	734	8,11%	79.681,76	8,093%	79.719,33	1,92			3,06
F16	797	8,21%	77.915,27	8,167%	78.014,24	12,29			18,86
J16	858	8,30%	76.225,16	8,235%	76.381,04	28,32			42,20
N16	921	8,39%	74.494,25	8,303%	74.714,29	52,57			76,45
V16	986	8,45%	72.804,36	8,369%	73.017,46	46,06			65,58
F17	1048	8,49%	71.256,38	8,430%	71.421,78	26,11			36,56
J17	1111	8,54%	69.677,75	8,488%	69.824,27	19,32			26,73
N17	1172	8,57%	68.221,44	8,543%	68.301,26	5,44			7,45
V17	1236	8,63%	66.630,78	8,597%	66.729,23	7,84			10,69
F18	1297	8,67%	65.185,33	8,647%	65.256,12	3,86			5,25
J18	1358	8,70%	63.782,04	8,695%	63.808,04	0,50			0,68
N18	1421	8,73%	62.361,60	8,742%	62.339,10	0,36			0,48
V18	1485	8,76%	60.953,42	8,788%	60.874,80	4,16			5,68
F19	1547	8,79%	59.618,95	8,830%	59.483,27	11,90			16,31
N19	1670	8,87%	56.925,13	8,910%	56.801,56	9,14			12,75
F20	1800	8,95%	54.211,47	8,987%	54.080,97	9,46			13,52
N20	1923	9,06%	51.598,51	9,054%	51.613,39	0,12			0,17
V20	1988	9,11%	50.267,90	9,087%	50.350,63	3,44			5,17
F21	2051	9,10%	49.220,79	9,118%	49.153,58	2,20			3,36
N21	2174	9,15%	46.978,72	9,176%	46.891,45	3,50			5,54
F22	2302	9,20%	44.754,76	9,231%	44.640,28	5,69			9,38

Tabela 12 - Anexo A3. Dados de Mercado Futuro de DI. Respectivos preços e taxas coletados e resultantes do modelo de Vasicek.

			Min	Max	
"Pullback" a / α	α	0,31	0,10	5,00	Função Objetivo 1518,6
Equilibrium b / γ	γ	0,09883	0,01	0,25	Erro % total na curva -0,0036%
Instantaneous StDev. of short rate (s)	ρ	0,00050	0,05%	30%	$P_{t,T}(r_t < 0) = 0,000\%$
Rate r0 at t=0	r	0,06675	0,01	0,20	
Infinitely-long Rate (Rinf)		9,8827%	-	0,20	

Tabela 13 - Anexo A4. Parâmetros do Modelo de Vasicek

Anexo B – Dados de Mercado Curva IPCA – NTNBS para o dia 31/10/2012

Abaixo seguem os dados observados no mercado para os títulos de NTN-B para o dia 31/10/2012. Toda a série de dados apresenta o semelhante formato abaixo, quando da estimação dos modelos pelo método Cross Section.

NTN-B (IPCA)	Liquidation	31/10/2012 Cupom	6%	29,56301		
Vencimento	Duration	Yield	PU fech	Pu model	Erro quadrático	Erro %
15/05/2013	0,51	0,94%	2.313,14	2.313,18	0,003006	-0,002%
15/08/2014	1,70	1,96%	2.374,22	2.374,49	0,044430	-0,012%
15/05/2015	2,33	2,24%	2.453,36	2.452,20	0,574689	0,047%
15/08/2016	3,42	2,63%	2.481,95	2.483,75	0,939403	-0,072%
15/05/2017	3,96	2,76%	2.550,83	2.550,06	0,147957	0,030%
15/08/2018	4,97	3,01%	2.562,05	2.565,30	2,128161	-0,127%
15/08/2020	6,38	3,21%	2.634,43	2.628,36	5,788136	0,231%
15/08/2022	7,65	3,40%	2.686,00	2.681,21	3,006986	0,179%
15/03/2023	8,03	3,49%	2.680,68	2.684,56	1,874569	-0,145%
15/08/2024	8,81	3,54%	2.730,58	2.726,89	1,541080	0,135%
15/08/2030	11,73	3,83%	2.823,90	2.837,98	16,880516	-0,498%
15/05/2035	13,42	3,88%	2.940,77	2.939,04	0,220937	0,059%
15/08/2040	15,24	3,97%	2.959,16	2.966,40	3,440081	-0,245%
15/05/2045	16,29	3,99%	3.048,32	3.043,41	1,476696	0,161%
15/08/2050	17,60	4,02%	3.056,62	3.049,54	2,853206	0,232%

Tabela 14 - Anexo B1. Dados de Mercado NTNBS. Respectivos preços e TIRs coletados e resultantes do modelo de Svensson.

Parametros Svensson		Min		Max		Parametros Inflação corrente	
Long-run levels of Interest rates	β_0	0,04416	0,01	0,10	Função Objetivo	40,9198529	Data
Short-run component	β_1	-0,04370	-0,20	0,20	Erro % total na curva	-0,054%	Liquidation
Medium-term component 1	β_2	0,00005	0,40	0,40	1-tir O-modelo	0	31/10/2012
Medium-term component 2	β_3	0,02410	0,40	0,40			31/10/2012
Decay parameter 1	λ_1	0,37895	0,00	30,00			15/10/12
Decay parameter 2	λ_2	1,11626	0,00	30,00			16/11/12
b0+b1	0,0455%						Projeção IPCA 0,58%

Tabela 15 - Anexo B2. Parâmetros do Modelo de Svensson

NTN-B (IPCA)	Liquidation	31/10/2012	Cupon	6%	29,56301
--------------	-------------	------------	-------	----	----------

Vencimento	Duration	Yield	PU fech	Pu model	Erro quadrático	Erro %
15/05/2013	0,51	0,94%	2.313,14	2.310,09	18,277031	0,132%
15/08/2014	1,70	1,96%	2.374,22	2.376,79	3,904214	-0,109%
15/05/2015	2,33	2,24%	2.453,36	2.455,69	2,331050	-0,095%
15/08/2016	3,42	2,63%	2.481,95	2.485,88	4,507963	-0,158%
15/05/2017	3,96	2,76%	2.550,83	2.550,86	0,000249	-0,001%
15/08/2018	4,97	3,01%	2.562,05	2.564,20	0,928104	-0,084%
15/08/2020	6,38	3,21%	2.634,43	2.625,93	11,333154	0,323%
15/08/2022	7,65	3,40%	2.686,00	2.678,77	6,833569	0,269%
15/03/2023	8,03	3,49%	2.680,68	2.682,25	0,304345	-0,058%
15/08/2024	8,81	3,54%	2.730,58	2.724,92	3,636565	0,207%
15/08/2030	11,73	3,83%	2.823,90	2.837,46	15,669291	-0,480%
15/05/2035	13,42	3,88%	2.940,77	2.939,35	0,148282	0,048%
15/08/2040	15,24	3,97%	2.959,16	2.967,39	4,441993	-0,278%
15/05/2045	16,30	3,99%	3.048,32	3.044,93	0,702330	0,111%
15/08/2050	17,62	4,02%	3.056,62	3.051,53	1,475412	0,167%

Tabela 16 - Anexo B3. Dados de Mercado NTNBNB. Respectivos preços e TIRs coletados e resultantes do modelo de Vasicek

Parâmetros de Svensson		Min	Max	Parâmetros Inflação corrente	
"Pullback" a / α	α	0,304	0,01	Função Objetivo	74,49
Equilibrium b / γ	γ	6,02%	0,01	0,20 Erro % total na curva	-0,062%
Instantaneous StDev. of short rate (s) / ρ	ρ	5,46%	0,003	1-tir 0-modelo	0
Rate r0 at t=0	r	0,81%	0,0%	$P_{t+1}(r_t < 0) =$	19,525%
Infinitely-long Rate (R_{inf})		4,402%		Data	31/10/2012
				Liquidation	31/10/2012
				Início	15/10/12
				Fim	16/11/12
				Projeção IPCA	0,58%
				VNA	2.187,548773
				PU par	2.194,460284
				Dias IPCA mês	22,00
				Dias percorridos	12,00
				Prorata	1,003159

Tabela 17 - Anexo B4. Parâmetros do Modelo de Vasicek.

Anexo C – Método de Estimação por Série Temporal Curva Pré

Os dados abaixo representam a TIR do título LTN com vencimento em 2 meses para as seguintes datas observadas:

Data	Taxa LTN 3 meses
03/01/2005	18,414%
01/02/2005	18,952%
01/03/2005	19,039%
01/04/2005	19,705%
02/05/2005	19,808%
01/06/2005	19,990%
01/07/2005	19,830%
01/08/2005	19,758%
01/09/2005	19,791%
03/10/2005	19,091%
01/11/2005	18,666%
01/12/2005	18,288%
02/01/2006	17,521%
01/02/2006	17,070%
01/03/2006	16,749%
03/04/2006	15,713%
02/05/2006	15,424%
01/06/2006	15,207%
03/07/2006	14,777%
01/08/2006	14,545%
01/09/2006	14,205%
02/10/2006	13,751%
01/11/2006	13,502%
01/12/2006	13,233%
02/01/2007	12,869%
01/02/2007	12,879%
01/03/2007	12,785%
02/04/2007	12,366%
02/05/2007	12,252%
01/06/2007	12,058%
02/07/2007	11,453%
01/08/2007	11,310%

03/09/2007	11,232%
01/10/2007	11,041%
01/11/2007	11,161%
03/12/2007	11,131%
02/01/2008	11,203%
01/02/2008	11,230%
03/03/2008	11,186%
01/04/2008	11,520%
02/05/2008	11,891%
02/06/2008	12,140%
01/07/2008	12,772%
01/08/2008	13,107%
01/09/2008	13,346%
01/10/2008	13,985%
03/11/2008	13,857%
01/12/2008	13,718%
02/01/2009	13,100%
02/02/2009	12,356%
02/03/2009	11,970%
01/04/2009	10,248%
04/05/2009	10,007%
01/06/2009	9,687%
01/07/2009	8,885%
03/08/2009	8,702%
01/09/2009	8,668%
01/10/2009	8,687%
03/11/2009	8,644%
01/12/2009	8,655%
04/01/2010	8,673%
01/02/2010	8,636%
01/03/2010	8,770%
01/04/2010	9,187%
03/05/2010	9,694%
01/06/2010	9,901%
01/07/2010	10,881%
02/08/2010	10,732%
01/09/2010	10,685%
01/10/2010	10,680%
01/11/2010	10,708%
01/12/2010	10,814%

03/01/2011	11,160%
01/02/2011	11,421%
01/03/2011	11,670%
01/04/2011	11,953%
02/05/2011	12,050%
01/06/2011	12,137%
01/07/2011	12,374%
01/08/2011	12,442%
01/09/2011	11,964%
03/10/2011	10,636%
01/11/2011	10,710%
01/12/2011	10,426%
02/01/2012	10,387%
01/02/2012	10,150%
01/03/2012	9,970%
02/04/2012	9,043%
02/05/2012	8,693%
01/06/2012	8,515%
02/07/2012	7,826%
01/08/2012	7,630%
03/09/2012	7,391%
01/10/2012	7,295%
01/11/2012	7,145%

Tabela 18 - Anexo C1. Dados de Mercado LTN 3meses

Os seguintes resultados foram obtidos para os parâmetros de Vasicek pelo método dos mínimos quadrados e Máxima Verossimilhança:

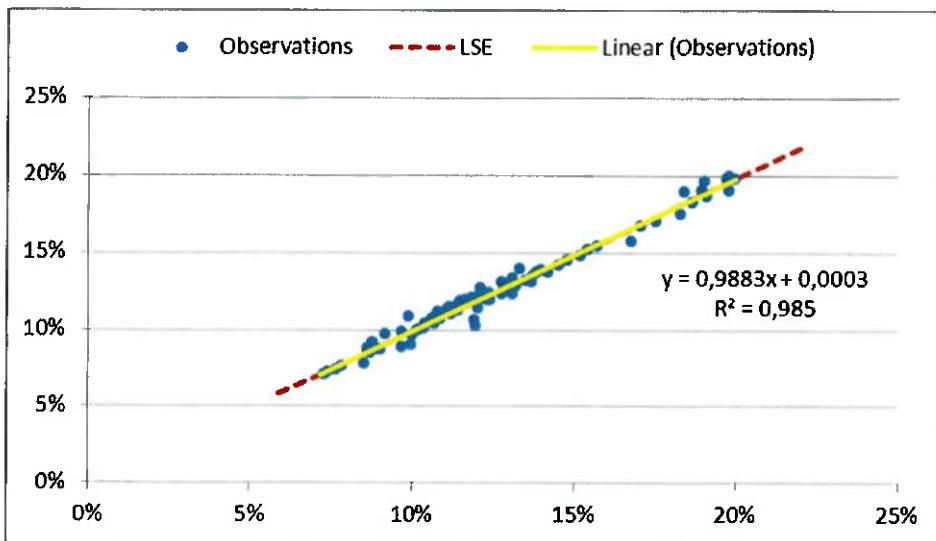


Tabela 19 - Anexo C2. Gráfico mostrando a autocorrelação entre a série de dados e a regressão obtida

Mínimos Quadrados		Máxima Verossimilhança	
n	94	n	93
δt	0,08333	δt	0,08333
T (anos)	7,83	T (anos)	7,83
Average	12,39%	Average	12,39%
Variance	0,11%	Variance	0,11%
AutoCorrelação	99,25%	AutoCorrelação	99,25%
Sx	11,7033	$\sum_{i=1}^n s_i^2 (s_i, s_{i+1}, \delta t)$	93,000
Sy	11,5906	$\hat{\theta}$	379,1924
Sxx	1,5622		
Sxy	1,5470		
Syy	1,5334		
a	0,9883		
b	0,0003		
sd(E)	0,0041		
α	0,1409	α	0,1409
γ	0,0218	γ	0,0218
ρ	0,0144	ρ	0,0143

Tabela 20 - Anexo C3. Resultados dos métodos de estimação por série temporal.

Arbitrando o parâmetro γ no método de máxima verossimilhança, como sendo o valor encontrado pelo método cross section no dia 31/10/2012, os resultados foram:

Mínimos Quadrados		Máxima Verossimilhança	
n	94	n	93
δt	0,08333	δt	0,08333
T (anos)	7,83	T (anos)	7,83
Average	12,39%	Average	12,39%
Variance	0,11%	Variance	0,11%
AutoCorrelação	99,25%	AutoCorrelação	99,25%
Sx	11,7033	$\sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})^2 / (S_i \cdot \delta t)$	93,000
Sy	11,5906	$\hat{\theta}$	376,8624
Sxx	1,5622		
Sxy	1,5470		
Syy	1,5334		
a	0,9883		
b	0,0003		
sd(E)	0,0041		
α	0,1409	α	0,2825
γ	0,0218	γ	0,1091
ρ	0,0144	ρ	0,0147

Tabela 21 - Anexo C4. Resultados dos métodos de estimação por série temporal com parâmetro arbitrado no método MV.