

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

ANTONIO RODRIGUES NETO

DESENVOLVIMENTO DE MODELO NUMÉRICO PARA OTIMIZAÇÃO  
TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS PLANAS UTILIZANDO O MÉTODO  
DOS ELEMENTOS FINITOS E ANÁLISE POR METODOLOGIA DE  
CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

São Carlos

2016



ANTONIO RODRIGUES NETO

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO NUMÉRICO PARA  
OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS PLANAS UTILIZANDO  
O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E ANÁLISE POR  
METODOLOGIA DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada à  
Escola de Engenharia de São Carlos da  
Universidade de São Paulo, como requisito  
para a conclusão de graduação em Engenharia  
Mecânica e obtenção do título de Engenheiro  
Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Edson Denner Leonel

São Carlos

2016

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

R696d      Rodrigues Neto, Antonio  
Desenvolvimento de modelo numérico para otimização topológica de estruturas planas utilizando o Método dos Elementos Finitos e análise por metodologia de confiabilidade estrutural / Antonio Rodrigues Neto; orientador Edson Denner Leonel. São Carlos, 2016.

Monografia (Graduação em Engenharia Mecânica) --  
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2016.

1. Método dos Elementos Finitos. 2. Otimização Topológica. 3. Confiabilidade Estrutural. I. Título.

## FOLHA DE AVALIAÇÃO

**Candidato:** Antonio Rodrigues Neto

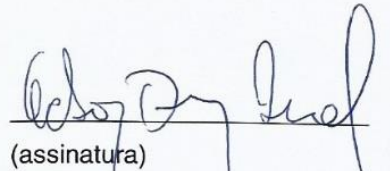
**Título:** Desenvolvimento de modelo numérico para otimização topológica de estruturas planas utilizando o método dos elementos finitos e análise por metodologia de confiabilidade estrutural

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Escola de Engenharia de São Carlos da  
Universidade de São Paulo  
Curso de Engenharia Mecânica.

### BANCA EXAMINADORA

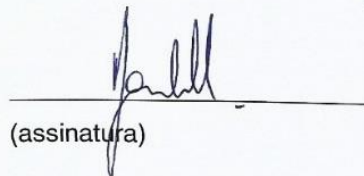
Professor Doutor Edson Denner Leonel (Orientador)

Nota atribuída: 10 ( DEZ )

  
(assinatura)

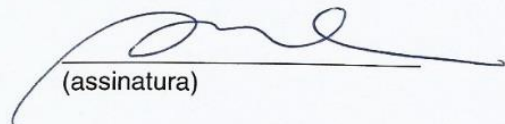
Professor Associado Jonas de Carvalho

Nota atribuída: 10,0 ( Dez )

  
(assinatura)

Professor Doutor Rodrigo Ribeiro Paccola

Nota atribuída: 10,0 ( DEZ )

  
(assinatura)

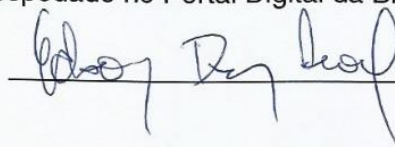
Média: DEZ 10,0 ( DEZ )

Resultado: APROVADO

**Data:** 10/11/2016

Este trabalho tem condições de ser hospedado no Portal Digital da Biblioteca da EESC

SIM ☒ NÃO ☐ Visto do orientador





## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, agradeço a Deus, por ter me guiado por todos esses anos até aqui, me acompanhado por todos os momentos, concedendo-me diversas glórias e me dando força para seguir em frente nos momentos mais difíceis.

Em segundo lugar, agradeço aos meus amados pais, Luzia e José Aparecido, que sempre foram meu alicerce e minha razão de crescimento. Sempre me apoiaram em todas as minhas escolhas e possibilitaram que eu pudesse realizar meus sonhos me oferecendo todo o suporte necessário. À minha namorada, Rafaela, pelo carinho, companheirismo, incentivo, compreensão, paciência e ajuda em todos os momentos que necessitei.

Agradeço também ao meu orientador, Professor Edson, pela parceria de tanto tempo, apoio e confiança em meu potencial. Por todas as explicações, informações e dados fornecidos possibilitando que eu executasse meu trabalho da melhor forma possível, todas as correções e orientações que me ensinaram a ser cuidadoso e atento a todos os detalhes da pesquisa.

Aos professores, amigos e funcionários da Escola de Engenharia de São Carlos, em especial à ambos os departamentos: Mecânica e Estruturas, pelo suporte fornecido ao longo de toda a graduação.

Enfim, sinceros agradecimentos a todos que, de alguma maneira, contribuíram para que este trabalho e minha formação fossem possíveis.





## RESUMO

RODRIGUES NETO, A. **Desenvolvimento de um modelo numérico para otimização topológica de estruturas planas utilizando o Método dos Elementos Finitos e análise por metodologia de confiabilidade estrutural.** 2016. 91 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2016.

O presente trabalho consiste no desenvolvimento de modelos numéricos para otimização de estruturas planas e análise das geometrias obtidas baseado na confiabilidade estrutural. Para tal, foi utilizado o método denominado Otimização Estrutural Evolucionária (ESO – Evolutionary Structural Optimization), visando a obtenção da geometria ótima de estruturas 2D. Este algoritmo foi acoplado ao modelo estrutural, o qual utiliza o Método dos Elementos Finitos (MEF), implementado com a utilização de elementos isoparamétricos planos com aproximação linear. Por fim, as geometrias obtidas são analisadas quanto à confiabilidade estrutural. Neste tópico, as fontes de incertezas atuantes na estrutura são incorporadas ao problema e seu comportamento estrutural diante desse cenário é avaliado, por meio da verificação de estados-limite para segurança e falha. Para o cálculo da probabilidade de falha é utilizado o método da Simulação de Monte Carlo Direta. O objetivo final da análise é avaliar a robustez das geometrias otimizadas e seu comportamento quando variações no cenário inicial do problema são incorporados. Todos os métodos estudados foram implementados numericamente e exemplos foram apresentados, validando e mostrando a eficiência das formulações estudadas.

Palavras-chave: Método dos elementos finitos. Otimização topológica. Confiabilidade estrutural.



## ABSTRACT

RODRIGUES NETO, A. **Numerical model development for topology optimization of plane structures using the Finite Element Method and analysis by structural reliability methodology.** 2016. 91 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2016.

This work deals with the development of numerical algorithms for plane structures optimization and analysis of obtained geometries, based on structural reliability. For this, it is used a method called Evolutionary Structural Optimization (ESO), in order to obtain the optimal geometry of two-dimensional structures. The optimization algorithm is coupled with the structural algorithm, which uses the Finite Element Method (FEM), implemented with flat isoparametric elements and linear approach. Finally, the obtained geometries are analyzed by structural reliability. In this topic, uncertainty sources of the structure are incorporated into the problem and its structural behavior within this scenario is evaluated, by verifying states-limit for safety and failure. To calculate the failure probability is used the method Direct Monte Carlo Simulation. The final objective of this analysis is to evaluate the robustness of the optimized geometries and their behavior when variations in initial scenario are incorporated to the problem. All methods studied are implemented numerically and examples are presented, in order to show the efficiency and accuracy of the proposed formulations in dealing with structural analysis, optimization problems and reliability analysis.

Keywords: Finite Element Method. Topology optimization. Structural reliability.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representação elemento de dois nós.....	19
Figura 2: Elemento com quatro nós.....	24
Figura 3: Fluxograma de cálculos da rotina Rigidez local .....	33
Figura 4: Representação do problema de otimização topológica .....	36
Figura 5: Representação qualitativa da irregularidade de tabuleiro de xadrez.....	37
Figura 6: Algoritmo ESO em nível de tensão. ....	40
Figura 7: Representação dos domínios de $g(x)$ em um espaço de três variáveis.....	45
Figura 8: Pontos de amostragem Simulação de Monte Carlo .....	50
Figura 9: Fluxograma do código de análise de confiabilidade.....	51
Figura 10: Estrutura inicial do Exemplo 1(dimensões em cm) .....	54
Figura 11: Malhas de elementos finitos para chapa do Exemplo 1 .....	55
Figura 12: Evolução da geometria até o ótimo obtido para a malha 1 do Item 5.1 .....	56
Figura 13: Evolução dos parâmetros de otimização para malha 1 do Item 5.1 .....	56
Figura 14: Evolução da geometria até o ótimo obtido para a malha 2 do Item 5.1 .....	57
Figura 15: Evolução dos parâmetros de otimização para malha 2 do Item 5.1 .....	57
Figura 16: Evolução da geometria até o ótimo obtido para a malha 3 do Item 5.1 .....	58
Figura 17: Evolução dos parâmetros para malha 3 com critério de Von Mises do Item 5.1....	59
Figura 18: Evolução dos parâmetros para malha 3 com critério de Rankine do Item 5.1 .....	59
Figura 19: Geometria ótima encontrada com as três malhas utilizadas no Exemplo 1 .....	60
Figura 20: Geometria ótima para o Exemplo 1 encontrada na literatura.....	61
Figura 21: Ângulo considerado como incerteza associada.....	62
Figura 22: Diferentes geometrias analisadas quanto à confiabilidade para item 5.2 .....	64
Figura 23: Resultados de confiabilidade para item 5.2 .....	65
Figura 24: Estrutura inicial do Exemplo 2.....	66
Figura 25: Malhas de elementos finitos para chapa do Exemplo 2 .....	67
Figura 26: Evolução da geometria até o ótimo obtido para a malha 1 do Item 5.3 .....	67
Figura 27: Evolução dos parâmetros de otimização para a malha 1 do Item 5.3 .....	68
Figura 28: Evolução da geometria até o ótimo obtido para a malha 2 do Item 5.3 .....	68
Figura 29: Evolução dos parâmetros de otimização para a malha 2 do Item 5.3 .....	69
Figura 30: Geometria ótima para o Exemplo 2 encontrada na literatura.....	69
Figura 31: Geometrias encontradas no Exemplo 2 com diferentes parâmetros para malha 3..	70
Figura 32: Diferentes geometrias analisadas quanto à confiabilidade no Item 5.4 .....	74
Figura 33: Resultados da confiabilidade para o item 5.4 .....	74
Figura 34: Estrutura inicial do Exemplo 3.....	77
Figura 35: Geometrias ótimas encontradas para o Item 5.5 .....	77
Figura 36: Evolução da geometria para malha 2 do item 5.5 .....	78
Figura 37: Evolução dos parâmetros da otimização para malha 2 no item 5.5 .....	79
Figura 38: Topologia ótima para o Exemplo 3 encontrada na literatura .....	79
Figura 39: Diferentes geometrias analisadas quanto à confiabilidade no Item 5.6 .....	82
Figura 40: Resultados da confiabilidade para o item 5.6 .....	83



## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1: Parâmetros de integração para até 4 pontos de integração .....	28
Tabela 2: Valores tabelados para distribuição normal padrão .....	48
Tabela 3: Resultados da análise de confiabilidade para o item 5.2 .....	63
Tabela 4: Resultados da análise de confiabilidade para o Item 5.4 .....	72
Tabela 5: Resultados da análise de confiabilidade para o Item 5.6 .....	81





## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	Área
$a_i$	Peso dos pontos de integração
$B$	Matriz de aproximação do campo de deslocamentos
$b$	Vetor de forças de corpo para um elemento
$B_{elem}$	Matriz de aproximação do campo de deslocamentos local
$C_N$	Matriz de coordenadas nodais do elemento finito
$d_{ix}$	Deslocamento do nó 'i' na coordenada 'x'
$D_L$	Matriz das derivadas das funções de forma em relação às coordenadas adimensionais
$D_G$	Matriz das derivadas das funções de forma em relação às coordenadas globais
$E$	Matriz que representa Lei de Hooke generalizada
$E_{EPD}$	Matriz constitutiva para estado plano de deformação
$E_{EPT}$	Matriz constitutiva para estado plano de tensão
$ER$	Razão de evolução
$F$	Vetor de forças nodais da estrutura
$f$	Vetor de forças nodais para um elemento
$F_X(a)$	Função de distribuição cumulativa de probabilidade no ponto a
$f_{XY}(x, y)$	Função conjunta de densidade de probabilidade
$f_{ix}, f_{iy}$	Forças nodais aplicada no nó 'i'
$g(x)$	Equação de estado limite
$I_y$	Momento de inércia de área em torno do eixo 'y'
$I_z$	Momento de inércia de área em torno do eixo 'z'
$J$	Matriz jacobiana
$J_2$	Segundo invariante de tensor
$K$	Matriz de rigidez global
$K_e$	Matriz de rigidez do elemento 'e'
$k_{ij}$	Parcela da matriz de rigidez devido aos graus de liberdade 'i' e 'j'
$L$	Comprimento
$L_i$	Comprimento inicial

$l_i$	Polinômios ortogonais de Gauss-Legendre
$M_{f_y}$	Momento fletor na direção 'y'
$M_{f_z}$	Momento fletor na direção 'z'
$N$	Força normal
$N(\mu, s)$	Distribuição de probabilidade normal com média $\mu$ e desvio padrão $s$
$n_{AMOSTRA}$	Número total de repetições da amostra
$n_{FALHAS}$	Quantidade de falhas contabilizadas
$p$	Vetor de forças internas para um elemento
$\hat{P}_F$	Estimador de probabilidade de falha amostral
$P_F$	Probabilidade de falha
$P(x)$	Função densidade de probabilidade
$q$	Vetor de deslocamentos nodais de um elemento
$q_{xi}, q_{yi}$	Deslocamentos nodais do nó 'i'
$R$	Variável de Resistência
$RR$	Razão de rejeição
$RR_i$	Razão de rejeição inicial
$S$	Variável de Solicitação
$s$	Desvio padrão da distribuição de probabilidade
$s_{UNIF}$	Desvio padrão de distribuição uniforme
$U$	Vetor de deslocamentos Nodais da estrutura
$U_e$	Energia de deformação virtual no elemento 'e'
$u_{ix}, u_{iy}$	Deslocamentos nodais do nó 'i'
$u_x, v_y$	Deslocamentos genéricos nas coordenadas 'x' e 'y'
$W_e$	Trabalho virtual de forças externas no elemento 'e'
$Y$	Módulo de elasticidade longitudinal (módulo de Young)
$Z(0,1)$	Distribuição de probabilidade normal padrão
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Deformações transversais específicas nas direções 'x', 'y' e 'z'
$\Delta L$	Variação no comprimento
$\epsilon$	Vetor de deformações generalizadas do elemento finito
$\epsilon(x)$	Deformação específica na direção 'x'
$\epsilon_L$	Vetor de deformações locais do elemento finito
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Deformações longitudinais específicas nas direções 'x', 'y' e 'z'

$\mu$	Média da distribuição de probabilidade
$\mu_{\text{UNIF}}$	Média de distribuição uniforme
$\nu$	Coeficiente de Poisson
$\xi, \eta, \zeta$	Coordenadas adimensionais do elemento finito
$\rho_{m,i}$	Densidade da i-ésima malha de elementos finitos
$\sigma$	Tensão aplicada
$\sigma_{\text{adm}}$	Tensão admissível
$\sigma_{\text{elemento}}$	Tensão média no centro do elemento finito
$\sigma_{\text{esc}}$	Tensão de escoamento na tensão uniaxial
$\sigma_{\text{eq}}$	Tensão equivalente no elemento finito
$\sigma_{\text{eqMAX}}$	Tensão equivalente máxima na estrutura
$\sigma_L$	Tensor de tensões locais do elemento finito
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensões totais principais
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Tensões normais do tensor de tensões
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Tensões cortantes do tensor de tensões
$\Phi_i$	Função de forma 'i'
$\chi_i$	Número de amostra de variável aleatória
$\psi_i$	Número aleatório com distribuição uniforme entre 0 e 1



# SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	13
1.1. Motivação .....	13
1.2. Objetivos.....	14
1.3. Metodologia.....	15
2. FORMULAÇÃO TEÓRICA 1: ELEMENTOS FINITOS .....	17
2.1. Obtenção da matriz de rigidez de um elemento .....	18
2.1.1. Treliças planas .....	18
2.1.2. Elemento bidimensional .....	21
2.2. Obtenção da matriz de rigidez global (“espalhamento”).....	29
2.3. Redução do sistema linear .....	29
2.4. Obtenção de tensões e deformações .....	30
2.5. Implementação computacional I.....	32
3. FORMULAÇÃO TEÓRICA 2: OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA.....	36
3.1. Otimização estrutural evolucionária (ESO) .....	38
3.2. Formulação ESO em nível de tensão .....	39
3.3. Tensão equivalente de von Mises.....	41
3.4. Tensão equivalente de Rankine.....	42
3.5. Implementação computacional II.....	42
4. FORMULAÇÃO TEÓRICA 3: CONFIABILIDADE ESTRUTURAL.....	45
4.1. Simulação de Monte Carlo Direta.....	47
4.2. Implementação computacional III.....	51
5. RESULTADOS E DISCUSSÃO .....	53
5.1. Exemplo 1: Chapa tracionada .....	53
5.2. Análise de Confiabilidade: Exemplo 1 – Chapa tracionada.....	61
5.3. Exemplo 2: Chapa em balanço.....	66
5.4. Análise de Confiabilidade: Exemplo 2 – Chapa em balanço .....	72
5.5. Exemplo 3: Chapa em balanço – Força central.....	76
5.6. Análise de Confiabilidade: Exemplo 3 – Chapa em balanço – Força Central ....	80
6. CONCLUSÃO.....	85
7. REFERÊNCIAS .....	89



# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. Motivação

Este trabalho se insere em um domínio científico que vem recebendo destacada atenção por parte de diversos centros de pesquisa de excelência. A proposição de modelos mais realistas para a análise de problemas de engenharia e o desenvolvimento de metodologias adequadas para o aprimoramento de projetos mecânicos têm se tornado prioritários no cenário científico internacional, sendo linhas de pesquisa em grande evidência na atualidade.

A concepção de estruturas que executem suas funções com nível de segurança desejado utilizando quantidade mínima de material é um dos objetivos a serem alcançados em todo projeto estrutural. Para se estudar e garantir um nível de segurança adequado pode-se utilizar de técnicas e dos conceitos da confiabilidade estrutural. No contexto da engenharia, a confiabilidade é muito bem definida. Na engenharia de estruturas, pode ser entendida como a probabilidade de sobrevivência de um componente, ou de um sistema, desde que utilizado de acordo com as especificações de projeto. Portanto, a confiabilidade é dada pelo complemento da probabilidade de falha (ANG; TANG, 1984).

Nesse contexto, a confiabilidade tem um papel central nas decisões de engenharia, sendo diretamente ligada à qualidade de produtos, segurança da população, estudo de viabilidade econômica e otimização de custos. Para avaliar o desempenho e a qualidade de um sistema com relação a sua utilização e segurança, o conceito embutido na variável confiabilidade é mais realista, inclusive sob o ponto de vista matemático, para a determinação de custos. Em estruturas complexas, os cenários de falha são identificados por meio de modelos mecânicos numéricos (modelos que simulam comportamento mecânico da estrutura), sendo os algoritmos de confiabilidade responsáveis por determinar a probabilidade do cenário de falha identificado ser atingido. Dessa forma, as análises de confiabilidade somente conduzem a resultados precisos se os cenários de falha forem corretamente identificados e mensurados pelos modelos mecânicos (NOGUEIRA; LEONEL; CODA, 2012).

Já a minimização do uso de material na estrutura pode ser atingida empregando-se as técnicas e os conceitos apresentados na teoria da otimização. Nesse trabalho são estudados problemas relacionados à otimização topológica de estruturas planas. Neste tipo de otimização, busca-se a determinação da geometria ótima da estrutura, aquela que emprega a mínima quantidade de material, respeitando-se restrições relacionadas ao estado de tensão dos

pontos constituintes da estrutura e à sua segurança. A técnica de otimização a ser utilizada nesse trabalho é denominada *Evolutionary Structural Optimization* (ESO). Segundo Lanes (2013), esta técnica permite a remoção gradativa de material estrutural não eficiente até a obtenção da estrutura ótima. A remoção de material é baseada em critérios de tensão, sendo regiões menos solicitadas removidas gradativamente segundo um critério de velocidade. O ESO é acoplado a um modelo baseado nas equações algébricas do Método dos Elementos Finitos (MEF). São empregados elementos isoparamétricos planos de ordem linear para a resolução do problema mecânico.

Pretende-se, com este trabalho, evoluir no estudo de soluções inovadoras no domínio da engenharia, envolvendo métodos numéricos e análises de otimização. Pretende-se ainda avaliar os resultados dos métodos de otimização com base na confiabilidade estrutural, associando incertezas físicas aplicadas à estrutura, buscando conclusões sobre a robustez e segurança das geometrias encontradas.

## **1.2. Objetivos**

Com esse trabalho objetiva-se dar continuidade ao estudo e desenvolvimento de temas relevantes e atuais nos campos da mecânica computacional e mecânica dos materiais. Os objetivos tratam do desenvolvimento de um modelo numérico baseado no MEF para a análise da otimização topológica de estruturas planas e análise de confiabilidade associada à tais estrutura. A implementação será realizada utilizando a linguagem FORTRAN, que inicialmente no trabalho foi estudada e compreendida com auxílio do trabalho de Chapman (2008).

Inicialmente objetiva-se o desenvolvimento de um código base considerando o MEF com elementos isoparamétricos planos. Foi considerada aproximação linear para os deslocamentos no corpo. Nesse código base, objetiva-se a determinação dos deslocamentos em todos os nós da estrutura e também do estado de tensão nos pontos de integração do elemento. Em seguida, objetiva-se o acoplamento da técnica ESO a esse código base. Tal técnica envolve a remoção gradativa de material segundo um critério de velocidade estabelecido. Os parâmetros que influenciam a velocidade de remoção dos elementos foram estudados e intervalos de amplitude desses parâmetros foram recomendados.

Em seguida, os resultados obtidos por esses métodos foram avaliados com base na confiabilidade estrutural, por meio da utilização de um programa implementado para executar



a Simulação de Monte Carlo Direta. Esse tipo de simulação calcula a probabilidade de falha de uma dada estrutura, considerando as incertezas associadas à esta. Dessa forma, objetiva-se a obtenção de conclusões sobre robustez e segurança das geometrias ótimas determinadas, comparando-as às geometrias iniciais e intermediárias no processo de otimização topológica.

Deve-se destacar ainda que a análise acoplada da otimização topológica e confiabilidade representa uma importante contribuição científica desse trabalho.

### 1.3. Metodologia

A partir dos objetivos gerais definidos anteriormente, podem ser listados alguns itens específicos que foram tratados ao longo do desenvolvimento do trabalho:

- 1) Revisão bibliográfica 1: Estudo dos conceitos e fundamentos do MEF. Elementos planos isoparamétricos, elementos de treliça e integração numérica.
- 2) Implementação computacional 1: Desenvolvimento de um código base na linguagem FORTRAN para a análise plana considerando elementos isoparamétricos.
- 3) Revisão bibliográfica 2: Estudo de conceitos relacionados a otimização topológica. Técnica ESO.
- 4) Implementação computacional 2: Implementação da técnica ESO e acoplamento ao modelo desenvolvido no item 2.
- 5) Revisão bibliográfica 3: Estudo de conceitos e metodologia de análise de confiabilidade estrutural. Simulação de Monte Carlo.
- 6) Implementação computacional 3: Implementação da técnica Simulação de Monte Carlo direta e acoplamento ao modelo desenvolvido no item 4.
- 7) Execução de exemplos com diferentes geometrias de estruturas utilizando as três implementações computacional realizadas.
- 8) Redação de relatório final.

Para as implementações computacionais que utilizam a linguagem FORTRAN, foi utilizado o compilador *Intel(R) Visual Fortran 11.1.048*, instalado para execução no software *Visual Studio® 2008*. Para todos os exemplos numéricos analisados, os códigos foram executados utilizando um computador do tipo notebook com as seguintes configurações:

- Processador *Intel®* Core i5 5200U 5ª geração; 2.7 GHz e 3 MB de cache;
- Memória RAM: 8 GB DDR3 1600 MHz;
- Disco rígido: 1 TB;

- Placa de vídeo: *Geforce®* GT 920M 2GB;

Em certos momentos deste trabalho é citado o tempo de execução dos códigos para alguns métodos. Para isso, pode-se considerar que o equipamento utilizado foi uma máquina com as especificações citadas acima. Destaca-se ainda que, a utilização de uma máquina com maior poder de processamento certamente levaria à uma diminuição nos tempos de execução, minimizando este problema para alguns métodos mais custosos computacionalmente. Porém, neste trabalho, dificuldades relacionadas com este problema foram facilmente superadas e não foi necessária a utilização de outros equipamentos.

## 2. FORMULAÇÃO TEÓRICA 1: ELEMENTOS FINITOS

Para as análises mecânicas de estruturas nesse trabalho é utilizado o MEF, o qual possibilita a obtenção de deslocamentos, deformações e tensões ao longo do domínio de uma estrutura submetida a carregamentos externos conhecidos. Em corpos contínuos, tensões e deformações variam de forma contínua ao longo do domínio, sendo regidos por equações diferenciais de complexa resolução. A ideia principal do método é que, ao dividir a estrutura em partes menores, os denominados elementos finitos, a estrutura permaneça contínua e seu campo de deslocamentos seja aproximado por funções polinomiais de ordem desejada. Assim, com base nessa aproximação, obtém-se equações algébricas aproximadas sobre o domínio do corpo em análise.

Portanto, no método, o domínio do modelo é dividido em um número discreto de subdomínios de dimensões finitas, denominados “elementos finitos”, que são interconectados por meio de interfaces (nós para o caso unidimensional, linhas para o caso bidimensional e superfícies para o caso tridimensional). Esses elementos deformam-se segundo uma função de aproximação associada a ele (a chamada função de forma). Então o equilíbrio contínuo da estrutura que se considera no modelo matemático é substituído pelo equilíbrio de cada elemento discreto. A partir disso se trocam equações diferenciais por equações algébricas para representar o mesmo, obtendo-se um sistema de equações de equilíbrio da malha, o qual permite a determinação dos deslocamentos nodais. Utilizando teorias baseadas no princípio dos trabalhos virtuais, relações deformação-deslocamentos e deformação-tensões, pode-se escrever o sistema que governa o equilíbrio dos elementos finitos e da estrutura como um todo da seguinte forma (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000):

$$K * U = F \quad (2.1)$$

Onde  $F$  é o vetor contendo as forças aplicadas na estrutura ou no elemento e  $U$  é o vetor que armazena os deslocamentos nodais dos nós constituintes da estrutura ou dos elementos.  $K$  é a chamada matriz de rigidez, a qual armazena parcelas de energia relacionadas a cada grau de liberdade de cada um dos nós da estrutura.

Tendo em mãos esse sistema, percebe-se que ao analisar o sistema global, não há solução. Isso ocorre pois a matriz de rigidez é uma matriz singular, ou seja,  $\det(K) = 0$ . Fisicamente, essa singularidade representa a possibilidade da estrutura realizar movimento de

corpo rígido, quando verifica-se a ausência de deformações e tensões na estrutura. Para retirar esta singularidade do sistema é necessário reduzi-lo com a imposição das condições de contorno. Matematicamente, isso significa impor deslocamento nulo nos pontos de apoio: nas duas coordenadas no caso de apoio duplo e somente em uma coordenada no caso de apoio simples. Assim, há duas maneiras de se resolver o sistema: zerar as linhas e colunas da matriz de rigidez que representam o deslocamento restrito e colocar valor 1 na diagonal, isto é, os elementos da matriz que multiplicam esse deslocamento, ou então criar uma nova matriz de rigidez retirando tais linhas ou colunas, chamada então de matriz de rigidez reduzida.

O ponto crucial da resolução pelo método é o cálculo da matriz de rigidez de cada elemento finito, pois nesse ponto os diferentes tipos de elementos utilizados causam uma enorme diferença. As outras etapas (montagem da matriz de rigidez global, imposição das restrições, resolução do sistema e cálculo de tensões e deformações) são sempre as mesmas. As seções seguintes descrevem cada passo do método para executar a análise via MEF.

## **2.1. Obtenção da matriz de rigidez de um elemento**

### **2.1.1. Treliças planas**

Apesar de não ter sido utilizado de fato no trabalho, a formulação para treliças planas foi estudada e inserida nesse texto à título de revisão bibliográfica e estudo do método. Nesse caso, o mais simples de todos, a matriz de rigidez tem uma fórmula bem simples. Conforme será demonstrado a seguir, segundo Pitangueira (2003). Destacando que o elemento de treliça está sujeito às hipóteses usuais:

- (i) Somente esforços normais;
- (ii) Qualquer deslocamento transversal é desprezado (associado ao deslocamento de corpo rígido);
- (iii) O comportamento do material segue a Lei de Hooke para o caso unidimensional;

Considerando o elemento de treliça apresentado na Figura 1, segundo a definição de deformação específica ‘ $\varepsilon(x)$ ’ para um elemento diferencial da barra, sendo ‘ $x$ ’ o eixo longitudinal desta (ilustrado na Figura 1 como eixo ‘ $u$ ’), tem-se:

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta L}{L_i} = \frac{u(x) + du(x) - u(x)}{dx} = \frac{d}{dx} u(x) \quad (2.2)$$

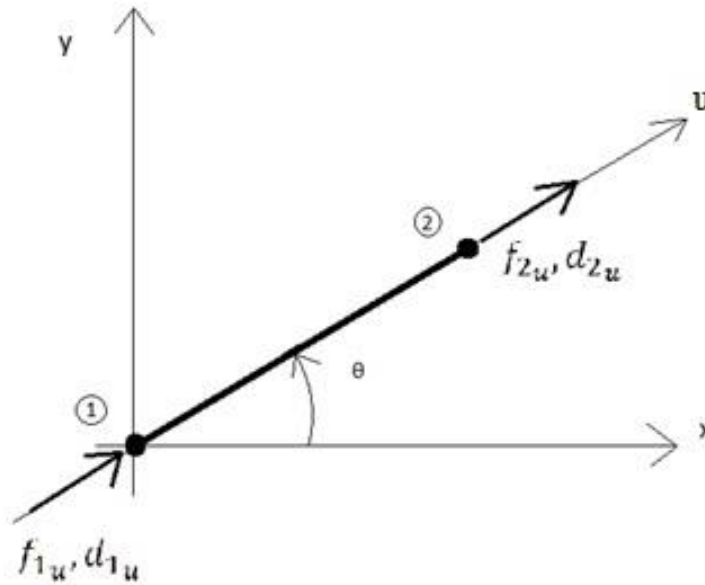


Figura 1: Representação elemento de dois nós

Considerando o elemento como ideal (discreto), pode-se escrever:

$$\varepsilon(x) = \frac{d}{dx} u(x) = \frac{d_{2x} - d_{1x}}{L} \quad (2.3)$$

Onde  $d_{1x}$  e  $d_{2x}$  são os deslocamentos do primeiro e segundo nós do elemento na coordenada longitudinal, respectivamente e 'L' o comprimento do elemento. A lei de Hooke para o caso unidimensional é definida como:

$$\sigma(x) = Y\varepsilon(x) \quad (2.4)$$

Sendo Y o módulo de elasticidade longitudinal (módulo de Young). Considerando o equilíbrio de forças ao longo da direção 'x', no primeiro nó do elemento. Sendo  $f_{1x}$  e  $f_{2x}$  as forças nodais na direção 'x' e 'A' a área transversal do elemento, tem-se:

$$f_{1x} + \sigma(x) * A = 0$$

$$f_{1x} = -\sigma(x) * A \quad (2.5)$$

Analogamente no segundo nó, obtém-se:

$$f_{2x} - \sigma(x) * A = 0$$

$$f_{2x} = \sigma(x) * A \quad (2.6)$$

Substituindo as relações (2.3) e (2.4) nas equações (2.5) e (2.6), tem-se:

$$f_{1x} = \frac{YA}{L}(d_{1x} - d_{2x}); f_{2x} = \frac{YA}{L}(d_{2x} - d_{1x})$$

Na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{pmatrix} = \frac{YA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Claramente percebe-se que foi encontrado um sistema linear do tipo da Eq. (2.1), justamente como é formulado o MEF. Portanto:

$$K_e = \frac{YA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Onde aparecem as constantes: ‘A’ = área da seção transversal da treliça; ‘Y’ = Módulo de elasticidade longitudinal e ‘L’ = comprimento do elemento. Enfatizando que, ao utilizar essa fórmula, deve-se referenciar deslocamentos e forças no sistema de coordenadas local do elemento, nesse caso o eixo ‘x’ (longitudinal) seria o eixo ‘u’ da Figura 1.

Para determinar a matriz de rigidez da estrutura, precisa-se colocar todos os parâmetros em relação a um sistema global de coordenadas cartesianas, ‘xy’ no presente caso. Para encontrar a matriz de rigidez em relação às coordenadas globais, deve-se utilizar rotação de vetores em sistemas de coordenadas, encontrando então Eq. (2.9).

$$K_e = \frac{YA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Onde tem-se as variáveis:  $c = \cos(\theta)$ ,  $s = \sin(\theta)$ , sendo  $\theta$  o ângulo do elemento com o eixo ‘x’, como mostrado na Figura 1.

Então, essa matriz de rigidez é válida baseada em deslocamentos e forças definidos em relação ao sistema de coordenadas global (sistema ‘xy’), valendo então o sistema apresentado na Eq. (2.10):

$$\frac{YA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Portanto, a Eq. (2.9) traduz a matriz de rigidez de cada elemento finito utilizada para construir a matriz de rigidez global da estrutura, quando aplica-se o método para elementos do tipo treliça plana.

### 2.1.2. Elemento bidimensional

Nesse caso, não há uma fórmula fechada a ser aplicada para a determinação da matriz de rigidez do elemento finito, tornando-se necessário uma integração numérica para cada elemento. Primeiramente, é dada uma breve demonstração da formulação da integração numérica utilizando a Quadratura de Gauss-Legendre, segundo Bortoli (2001). A teoria de tal integração se baseia em aproximar a integral de uma determinada função, sempre no intervalo  $[-1,1]$  por um somatório do tipo:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^n a_i * f(x_i) \quad (2.11)$$

Em Gauss-Legendre, precisa-se encontrar os chamados polinômios ortogonais, que determinam os parâmetros do somatório, pois os pontos  $x_i$ 's, utilizados no somatório são as raízes dos polinômios ortogonais e os pesos ' $a_i$ ' são tais que:

$$a_i = \int_{-1}^1 l_i(x)dx \quad (2.12)$$

Onde ' $l_i(x)$ ' são os polinômios de interpolação de Lagrange, tendo como pontos de interpolação também as raízes dos polinômios ortogonais. Existem métodos para o cálculo desses polinômios ortogonais, como o método de ortogonalização de Gram-Schmidt. Porém, na prática, as raízes desses polinômios já foram calculadas, e tanto pontos de integração como pesos dos pontos são encontrados em tabelas.

Para utilizar esse método na obtenção das matrizes de rigidez dos elementos finitos, é utilizada uma forma de normalizar o elemento, deixando-o com coordenadas adimensionais, chamadas ' $\xi$ ' e ' $\eta$ '. Além disso, são criadas as funções de forma ( $\Phi_i$ ), que são demonstradas abaixo. Para essas funções de forma pode-se simplificar dizendo que tais funções têm valor um no respectivo nó ' $i$ ', e valor zero nos demais nós constituintes do elemento finito. Essas funções são determinadas conforme a Eq. (2.13). Sendo ' $l_i$ ' e ' $l_k$ ' os polinômios interpoladores de Lagrange, para as coordenadas ' $\xi$ ' e ' $\eta$ ', respectivamente, e ' $\Phi_i$ ' as funções de forma para cada nó do elemento finito:

$$\Phi_i = l_j(\xi) * l_k(\eta) \quad (2.13)$$

A demonstração da formulação utilizada no elemento bidimensional é referenciada em Zienkiewicz e Taylor (2000). O trabalho de Weaver e Johnston (1984) também foi utilizado como referência bibliográfica neste tema, para auxiliar no entendimento do método. A demonstração parte inicialmente do princípio dos deslocamentos virtuais aplicado ao elemento finito, onde  $\delta U_e$  é a energia de deformação virtual de tensões internas e  $\delta W_e$  é o trabalho virtual das forças externas:

$$\delta U_e = \delta W_e \quad (2.14)$$

Primeiramente, denota-se ‘u’ sendo o vetor de deslocamentos genéricos em qualquer ponto dentro do elemento, onde as variáveis ‘ $u_x$ ’ e ‘ $v_y$ ’ são as translações nas direções ‘x’ e ‘y’, respectivamente:

$$u = [u_x \quad v_y]^T \quad (2.15)$$

Baseado no elemento quadrilateral (quatro nós), é definido ‘q’ como o vetor dos deslocamentos nodais do elemento, onde ‘i’ é o número do nó dentro do elemento ( $i=1, \dots, 4$ ), tem-se:

$$q = \{q_i\}; q_i = \{q_{x1}; q_{x2}\} = \{u_{x,1}, v_{y,1}\} \quad (2.16)$$

Define-se uma relação entre os deslocamentos ‘u’ e os deslocamentos nodais ‘q’, traduzida por uma matriz retangular ‘f’, que faz com que ‘u’ seja completamente independente de ‘q’:

$$u = f * q \quad (2.17)$$

A matriz que armazena as deformações ( $\epsilon$ ) do elemento é obtida pela diferenciação dos deslocamentos genéricos (u), formando uma matriz ‘d’, denominada operador diferencial linear:

$$\epsilon = d * u \quad (2.18)$$

Substituindo Eq.(2.17) em (2.18), tem-se:

$$\epsilon = d * f * q = B * q \quad ; \quad B = d * f \quad (2.19)$$



Utilizando essa relação de deformação ( $\epsilon$ ) na lei de Hooke generalizada, obtém-se:

$$\sigma = E * \epsilon = E * B * q \quad (2.20)$$

Sendo ‘E’ a matriz que indica a relação entre tensões ( $\sigma$ ) e deformações ( $\epsilon$ ) no caso generalizado. Assim, pode-se escrever a energia de deformação virtual como:

$$\delta U_e = \int_A \delta \epsilon^T \sigma * dA \quad (2.21)$$

E o trabalho virtual de forças externas se torna:

$$\delta W = \delta q^T p + \int_A \delta u^T b * dA \quad (2.22)$$

Onde ‘p’ é o vetor que armazena as forças internas nas coordenadas ‘x’ e ‘y’ em cada nó do elemento. Já ‘b’ é o vetor que armazena as forças de corpo no elemento. Dessa forma, substituindo Eq. (2.21) e (2.22) em (2.14), obtém-se:

$$\int_A \delta \epsilon^T \sigma * dA = \delta q^T p + \int_A \delta u^T b * dA \quad (2.23)$$

Então, substitui-se a Eq. (2.20) para ‘ $\sigma$ ’ e as Eq. (2.17) e (2.19) diferenciadas na relação (2.23) para obter:

$$\delta q^T \int_A B^T E \epsilon dA = \delta q^T p + \delta q^T \int_A f^T b dA \quad (2.24)$$

Eliminando o termo ‘ $\delta q^T$ ’ de ambos membros da Eq.(2.24) e substituindo a Eq.(2.19) tem-se:

$$\left( \int_A B^T E B dA \right) q = p + \delta q^T \int_A f^T b dA \quad (2.25)$$

Que pode ser escrita da seguinte forma:

$$K \cdot q = p + p_b = F \quad (2.26)$$

Onde claramente se encontra o formato do sistema linear do MEF, como na Eq. (2.1), sendo K a matriz de rigidez:

$$K_e = \int_A B^T E B dA \quad (2.27)$$

Essa é então a integral utilizada para a determinação da matriz de rigidez de um elemento geral bidimensional. Vale observar que para o caso 3D a formulação seria análoga,

porém as dimensões das matrizes seriam maiores e as integrais seriam no volume. Então parte-se para a explicação de como são obtidas as matrizes necessárias para encontrar  $K_e$ , baseado no elemento de quatro nós utilizado, o qual é ilustrado na Figura 2.

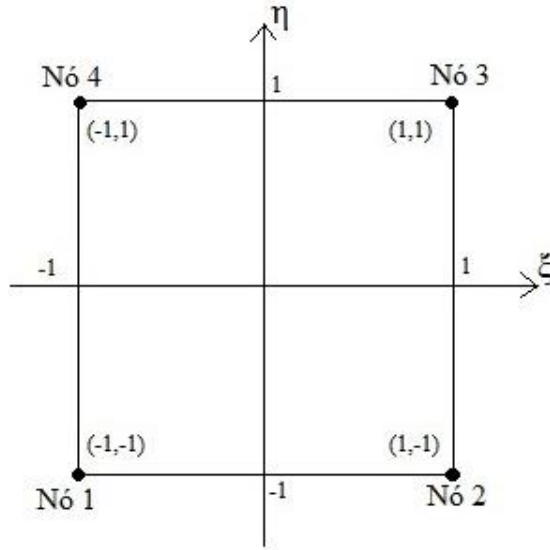


Figura 2: Elemento com quatro nós

Primeiramente, a matriz 'E' traduz a relação entre tensão e deformação na lei de Hooke, como mostrado na Eq. (2.4). Para o caso bidimensional, essa relação fica expressa de duas diferentes formas:

Para estado plano de tensões (quando  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yx} = 0$ ) utiliza-se  $E_{EPT}$ :

$$E_{EPT} = \frac{Y}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Para o estado plano de deformações (quando  $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ) utiliza-se  $E_{EPD}$ :

$$E_{EPD} = \frac{Y(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Sendo a variável 'Y' o módulo de elasticidade longitudinal e 'ν' o coeficiente de Poisson. Os dois estados são utilizados nesse trabalho, sendo que a escolha de um deles fica como opção do usuário do código, pois consta como variável de entrada. Em seguida, deve-se definir a matriz 'B', que, como pode-se ver na equação (2.19), depende das matrizes 'd' e 'f'.

De início, a matriz ‘d’ é definida como a relação entre a deformação e os deslocamentos genéricos de qualquer ponto do elemento ( $u_x, v_y$ ). Analogamente à Eq. (2.2), pode-se definir as relações para deformações ( $\epsilon_x, \epsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ ), segundo a elasticidade plana:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.30)$$

E então a matriz ‘d’ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\epsilon = d * u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \therefore \quad d = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

A matriz ‘f’ representa a relação entre os deslocamentos genéricos, em qualquer ponto do elemento ( $u_x, v_y$ ) com os deslocamentos nodais ( $q_1, q_2, q_3, q_4$ ), como na Eq. (2.16). Essa matriz armazena as chamadas funções de forma: tais funções aproximam o campo de deslocamentos genéricos em função dos deslocamentos nodais. Para tal, são utilizadas as coordenadas adimensionais ( $\xi, \eta$ ). Conforme apresentado na Figura 2, nota-se que as faces do elemento são definidas por  $\xi = 1$  ou  $-1$  e  $\eta = 1$  ou  $-1$ . Com interpolação linear nas direções ‘ $\xi$ ’ e ‘ $\eta$ ’, a localização de um ponto genérico pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}[(\xi - 1)(\eta - 1)x_1 + (\xi + 1)(1 - \eta)x_2 + (\xi + 1)(\eta + 1)x_3 + (1 - \xi)(\eta + 1)x_4] \\ y &= \frac{1}{4}[(\xi - 1)(\eta - 1)y_1 + (\xi + 1)(1 - \eta)y_2 + (\xi + 1)(\eta + 1)y_3 + (1 - \xi)(\eta + 1)y_4] \end{aligned} \quad (2.32)$$

Portanto, a relação entre os deslocamentos genéricos e os deslocamentos nodais se dá com a mesma relação mostrada na Eq. (2.31). Porém com ‘ $u_x, v_y$ ’ no lugar de ‘ $x, y$ ’ e os deslocamentos nodais no lugar das coordenadas nodais. Portanto definem-se essas funções de ‘ $\xi, \eta$ ’ como sendo as funções de forma:

$$u = f * q \rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \\ u_4 & v_4 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Sendo:

$$\Phi_1 = \frac{(\xi-1)(\eta-1)}{4} ; \quad \Phi_2 = \frac{(\xi+1)(1-\eta)}{4} ; \quad \Phi_3 = \frac{(\xi+1)(\eta+1)}{4} ; \quad \Phi_4 = \frac{(1-\xi)(\eta+1)}{4} \quad (2.34)$$

Em seguida, deve-se fazer a multiplicação de ‘d’ por ‘f’ para determinar a matriz ‘B’, conforme a Eq. (2.19). Isso significa derivar as funções ‘Φ’ em relação à ‘x’ e ‘y’. Porém tais funções são definidas em relação à ‘ξ’ e ‘η’. Então aplica-se a regra da cadeia:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.35)$$

Analogamente para a derivada na direção de ‘y’. Porém, como mostrado, não é possível encontrar ‘ξ, η’ em função de ‘x, y’. Portanto, não é possível encontrar as derivadas das coordenadas adimensionais em relação às globais (x, y). Por isso é efetuada a regra da cadeia da maneira oposta:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (2.36)$$

E analogamente para ‘η’. Juntando essas derivadas obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

A matriz encontrada na Eq. (2.38), que envolve as derivadas das coordenadas globais em relação às coordenadas adimensionais é então denominada de *matriz Jacobiana* (J). Essa matriz realiza o mapeamento dos pontos entre os espaços real e adimensional. Derivando as Equações (2.34), nota-se que essa matriz pode ser encontrada pelas seguintes operações matriciais:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \xi} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \eta} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$J = D_L * C_N$$

Resolvendo as derivadas a matriz ‘D<sub>L</sub>’ fica:

$$D_L = \begin{bmatrix} \frac{(\eta-1)}{4} & \frac{(1-\eta)}{4} & \frac{(\eta+1)}{4} & \frac{-(\eta+1)}{4} \\ \frac{(\xi-1)}{4} & \frac{-(\xi+1)}{4} & \frac{(\xi+1)}{4} & \frac{(1-\xi)}{4} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Voltando então para a Eq. (2.32), encontra-se a matriz das derivadas parciais das funções de forma em relação às coordenadas globais, ‘D<sub>G</sub>’:

$$D_G = J^{-1} * D_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Portanto, os termos que compõe a matriz ‘B’ encontram-se dentro de ‘D<sub>G</sub>’. Utilizando a Eq. (2.19) para encontrar a matriz ‘B’, verifica-se que:

$$B_i = d * f_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} * \Phi_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Percebe-se que tais derivadas são encontradas nas células de ‘D<sub>G</sub>’ da seguinte forma:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = D_{G1i} ; \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} = D_{G2i} \quad (2.43)$$

Portanto a matriz B pode ser escrita como:

$$B = \begin{bmatrix} D_{G11} & 0 & D_{G12} & 0 & D_{G13} & 0 & D_{G14} & 0 \\ 0 & D_{G21} & 0 & D_{G22} & 0 & D_{G23} & 0 & D_{G24} \\ D_{G21} & D_{G11} & D_{G22} & D_{G12} & D_{G23} & D_{G13} & D_{G24} & D_{G14} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Por fim, na integração, na Eq. (2.27) o infinitesimal ‘dA’ deve ser substituído por uma expressão em função dos adimensionais ‘ξ’ e ‘η’. Neste passo não será demonstrada a obtenção da solução, pois trata-se de uma passagem simplesmente de cálculo integral e tal demonstração não teria grande contribuição para o trabalho em questão. Então, por substituição de variável na integral, encontra-se:

$$dA = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \partial \xi \partial \eta \quad (2.45)$$

$$dA = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \cdot \partial \xi \partial \eta \quad (2.46)$$

$$dA = ||| * \partial \xi \partial \eta \quad (2.47)$$

Tendo então tudo em mãos, pode-se voltar à Eq. (2.27) e então resolvê-la como uma integração numérica, Eq. (2.11). Os pesos dos pontos de integração ( $a_i$ ) são denominados ‘peso<sub>i</sub>’ e o resultado da integração deve ser multiplicado pela espessura do elemento:

$$K_e = t \sum_i \sum_j \text{peso}_i * \text{peso}_j * B^T * E_{EPT} * B * ||| \quad (2.48)$$

Os parâmetros que variam (‘i’ e ‘j’) seguem os pontos de integração de Gauss, como mostrado na Tabela 1. Exemplificando, se for escolhido realizar a integral com 2 pontos, tem-se:  $i_1 = -0,57735$  com  $\text{peso}_1 = 1$  e  $i_2 = 0,57735$  com  $a_i = 1$ . Tais valores se encontram já calculados dentro de uma biblioteca do próprio FORTRAN, sendo apresentados para 4 pontos de integração na Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros de integração para até 4 pontos de integração

N	$t_i$	$a_i$
1	$t_0 = 0$	
2	$t_0 = -0,57735$ $t_1 = 0,57735$	$A_0 = 1$ $A_1 = 1$
3	$t_0 = 0,77459667$ $t_1 = -0,77459667$ $t_2 = 0$	$A_0 = \frac{5}{9}$ $A_1 = \frac{5}{9}$ $A_2 = \frac{8}{9}$
4	$t_0 = 0,86113631$ $t_1 = -0,86113631$ $t_2 = 0,33998104$ $t_3 = -0,33998104$	$A_0 = 0,34785484$ $A_1 = 0,34785484$ $A_2 = 0,65214516$ $A_3 = 0,65214516$

No código desenvolvido, o que se faz é calcular as matrizes ‘D<sub>L</sub>’, ‘J’, ‘D<sub>G</sub>’, segundo as equações (2.39), (2.40) e (2.41) e finalmente calcular B, segundo a Eq. (2.44). Este processo é realizado para cada um dos pontos de integração (‘i’ e ‘j’). Então as operações matriciais são efetuadas, multiplicando-se pelos respectivos pesos do ponto de integração. Por fim, a somatória de todos os pontos de integração é feita e multiplica-se o final pela espessura (t). Dessa forma, a matriz de rigidez do elemento (K<sub>e</sub>) é obtida.

## 2.2. Obtenção da matriz de rigidez global (“espalhamento”)

Uma vez calculada a matriz de rigidez de cada elemento, o seguinte procedimento é a composição da matriz de rigidez global da estrutura, que é denominado “espalhamento”. Tal processo consiste em somar as matrizes de rigidez de cada elemento em uma matriz global. Somando cada termo em sua respectiva parcela de energia, como exemplificado abaixo:

Assumindo um elemento constituído por dois nós 1 e 2, a matriz de rigidez deste elemento ( $K_e$ ) tem a seguinte forma:

$$K_e = \begin{array}{ccccccc} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & \leftarrow & q_{x1} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & \leftarrow & q_{y1} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & \leftarrow & q_{x2} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & \leftarrow & q_{y2} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\ q_{x1} & q_{y1} & q_{x2} & q_{y2} & & \end{array}$$

Como indicado pelas setas, cada parcela da matriz de rigidez corresponde a um par de graus de liberdade dos nós do elemento finito. Então cada uma dessas parcelas deve ser somada à posição correta na matriz de rigidez global, que por sua vez também tem cada parcela relacionada graus de liberdade, porém nesta, consideramos todos os nós da estrutura. Assim:

$$K_G = \begin{array}{ccccccc} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} & \leftarrow & q_{x1} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} & \leftarrow & q_{y1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ k_{n1} & k_{n2} & \vdots & k_{nn} & \leftarrow & q_{yn} \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \\ q_{x1} & q_{y1} & & q_{yn} & & \end{array}$$

Portanto, basta inicializar a matriz global com zeros e somar as parcelas de todas as matrizes dos elementos finitos aos seus respectivos lugares, levando em conta o par de graus de liberdade de cada parcela.

## 2.3. Redução do sistema linear

Depois de efetuado o espalhamento, basta fazer a redução da matriz de rigidez global, como já explicado anteriormente. Essa redução deve ser acompanhada por uma redução

também nos vetores de deslocamentos e de cargas nodais. Esta é realizada da mesma forma: retirando do vetor as parcelas correspondentes a graus de liberdade de nós fixos (os apoios). Então se deve resolver o sistema do tipo  $K_R * U_R = F_R$  (reduzido) para então encontrar todos os deslocamentos possíveis. Monta-se então o vetor de deslocamentos total, simplesmente colocando zero nos deslocamentos que foram retirados, os apoios. Se necessário, para encontrar as forças nos apoios, deve-se multiplicar a matriz de rigidez global (não reduzida) pelos deslocamentos totais, então se calcula todas as forças nos nós, onde as forças atuantes nos nós de deslocamentos restringidos são as forças de apoio.

## 2.4. Obtenção de tensões e deformações

Encontrado todos os deslocamentos ( $U$ ), facilmente podem-se encontrar as tensões e as deformações, seguindo sucinta explicação:

Definem-se vetores de deformação e tensão locais para cada elemento:  $\varepsilon_L =$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \sigma_L = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}.$$

Então, para determinar o vetor de deformações deve-se utilizar a matriz 'B', definida conforme Eq. (2.44), procedendo da seguinte forma:

$$\varepsilon_L = B_{elem} * U_{elem} \quad (2.49)$$

A dedução desta expressão é trivial, pois segundo mostram as Eq. (2.19) e (2.44), a matriz 'B' nada mais é do que o agrupamento dos diferenciais em 'x' e 'y' que, aplicados aos deslocamentos nodais, resultam nas deformações ( $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ ).

Na Eq. (2.49), os subscritos das matrizes 'B' e 'U' indicam que são matrizes do elemento, ou seja, 'B' é a mesma que foi utilizada na integração de tal elemento. Porém não aplicada nos pontos de integração e sim em cada nó do elemento, ou seja, as coordenadas adimensionais são as coordenadas de cada nó. O vetor 'U' contém os deslocamentos nas direções vertical e horizontal dos nós pertencentes ao mesmo elemento finito. Portanto, resulta em um deslocamento para cada nó dentro do elemento. Para encontrar as tensões basta aplicar a lei de Hooke generalizada, porém aplicada ao ponto analisado, conforme Eq. (2.50):



$$\sigma_L = E_{EPT} * \varepsilon_L \quad (2.50)$$

Na Eq. (2.50), foi escolhido o estado plano de tensões para a representação da Lei de Hooke bidimensional. Caso a escolha for pela utilização do estado plano de deformações, deve-se utilizando a matriz  $E_{EPD}$  no lugar de  $E_{EPT}$ , segundo as Eq. (2.28) e (2.29). Vale citar aqui que o resultado das tensões claramente depende dessa escolha.

Dessa forma, já são conhecidas deformações e tensões de cada elemento, armazenadas nos vetores ' $\varepsilon_L$ ' e ' $\sigma_L$ '. Então, basta criar matrizes de deformações e tensões globais que armazenamos dados de todos os elementos, tendo em cada coluna as informações de determinado elemento. Essas matrizes devem ter três dimensões, como por exemplo, no caso linear, a dimensão deve ser  $[N\_Elementos;4;3]$ : a primeira dimensão (de tamanho igual ao número de elementos) armazena um conjunto de informações para cada elemento; a segunda dimensão (de tamanho igual a 4) armazena informações para cada um dos quatro nós de um elemento. Por fim, a terceira dimensão (de tamanho igual a 3) armazena as três tensões ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ) para um nó.

Nesse método resultam-se, então, as tensões contribuintes de cada nó dentro do elemento finito. Porém, é mais consistente analisar uma tensão média para cada elemento finito da estrutura. Dessa forma, tem-se somente um valor de tensão para cada elemento finito, tornando mais fácil julgar analiticamente como é a variação da tensão na estrutura.

Para tal, o procedimento consiste em fazer uma somatória da multiplicação da função de forma de cada nó, aplicada no ponto central do elemento (onde as coordenadas adimensionais são todas iguais a zero) pela tensão do correspondente nó, como demonstrado na Eq. (2.51). Como se pode observar, nada mais é do que calcular um valor de tensão exatamente no centro do elemento.

$$\sigma_{elemento} = \sum_{i=1}^a \Phi_i(0,0) * \sigma_i \quad (2.51)$$

Na Eq. (2.51), ' $i$ ' é o número do nó do elemento finito, ' $\sigma_i$ ' é a tensão correspondente a esse nó para esse elemento, calculada conforme Eq. (2.50). Finalmente, ' $\Phi_i(0,0)$ ' é a função de forma do nó ' $i$ ' aplicada nas coordenadas adimensionais todas iguais a zero e a variável ' $a$ ' é número de nós do elemento finito (quatro para o caso linear). Note que, com essa equação pode-se encontrar o valor da tensão em qualquer ponto do elemento, bastando mudar os valores das coordenadas adimensionais nas quais as funções de forma dos nós são

aplicadas, sendo que ao colocar as coordenadas de um nó, o resultado da tensão é o próprio ' $\sigma_i$ ' desse nó, pois faz parte da definição da função de forma que ela deve ter valor igual a 1 quando aplicada no correspondente nó e igual a zero quando aplicada nos demais nós.

A aplicação de tal fórmula para elementos de aproximação linear do campo de deslocamentos, como é o utilizado nesse trabalho, resulta em uma simples média aritmética das tensões de cada nó do elemento. Pois, ao aplicar as funções de forma no centro do elemento elas resultam em valores todos iguais a ' $1/a$ ', o que equivale a somar todas as tensões e dividir pelo número de nós do elemento.

## 2.5. Implementação computacional I

A construção do código computacional que execute o MEF foi realizada com base em sub-rotinas no FORTRAN. O programa principal (*main*) chama as sub-rotinas na ordem correta, enviando para cada uma as variáveis necessárias. Matrizes e variáveis importantes para todo o método são salvas de forma global, de forma que todas as rotinas e sub-rotinas possam acessá-las, sem que estas precisem ser enviadas como argumentos. O código é composto pelas seguintes sub-rotinas:

- Entrada de dados;
- Rigidez local;
- Espalhamento;
- Condições de contorno;
- Tensões e deformações;
- Saída de dados.

O início do código se dá pela sub-rotina de entrada de dados, que realiza a leitura de um arquivo de texto, obtendo as informações necessárias para realizar a análise via MEF. Esta rotina deve ler todas as informações e armazenar os dados nas respectivas variáveis. Este arquivo de texto contém as seguintes informações:

- Quantidade de nós e de elementos da malha;
- Coordenadas ' $xy$ ' de cada nó;
- Número dos 4 nós que definem cada elemento;

- Espessura, módulo de elasticidade longitudinal e coeficiente de Poisson de cada elemento;
- Análise por estado plano de tensões ou de deformações;
- Nós vinculados nas direções 'x' e 'y';
- Nós com forças externas aplicadas nas direções 'x' e 'y'.

Em seguida, o código segue para a próxima sub-rotina, denominada rigidez local. Esta tem a função de calcular as matrizes de rigidez para cada um dos elementos finitos. Portanto, os cálculos presentes nesta rotina devem ser repetidos até a quantidade total de elementos finitos. Nesta etapa, segue-se o cálculo das matrizes necessárias para realizar a integração numérica, segundo descrito nesse capítulo. A Figura 3 abaixo ilustra, resumidamente, a seguinte sequência de cálculos que o código realiza e especifica quais equações são utilizadas em cada passo.

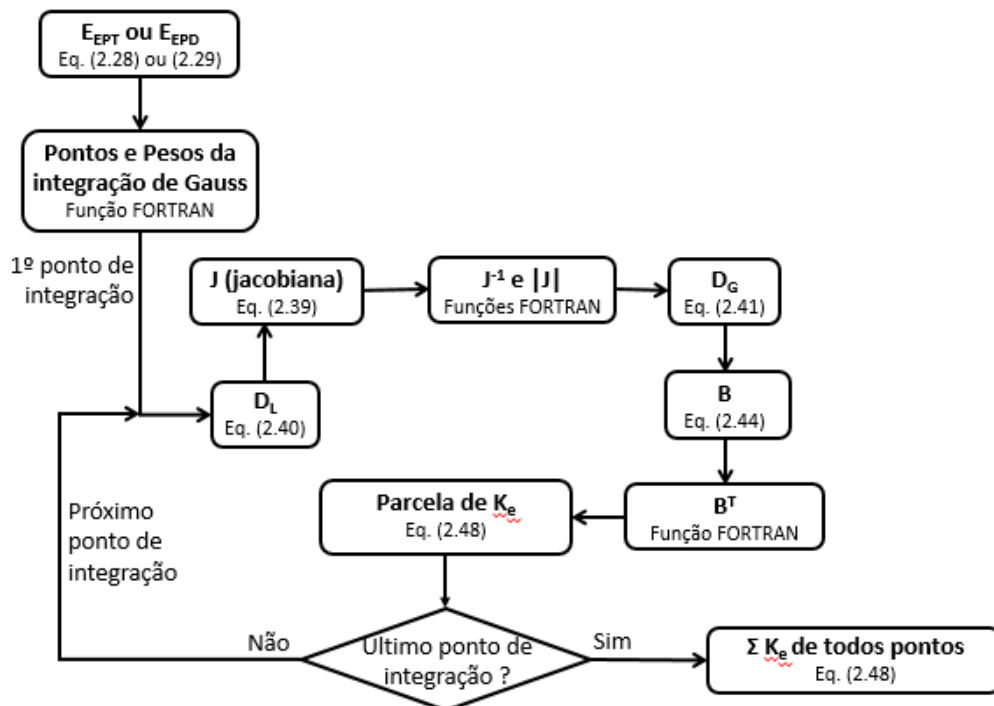


Figura 3: Fluxograma de cálculos da rotina Rigidez local

Dessa forma, quando finaliza-se a rotina de cálculo acima, a somatório das parcelas de  $K_e$  é igual à matriz de rigidez do elemento finito em questão. Evidencia-se que, o número de pontos de integração de Gauss influencia diretamente na quantidade de iterações que esta rotina realiza para calcular  $K_e$ . O código construído deixa esse número como uma variável que pode ser alterada durante sua construção. Pela literatura consultada e experiência em outros trabalhos nessa área, foi fixado para os exemplos numéricos 4 pontos de iteração por

coordenada (' $\xi$ ' e ' $\eta$ '). O passo seguinte é repetir a rotina para todos os elementos da estrutura e então, finaliza-se esta sub-rotina.

A seguinte sub-rotina implementada é denominada espalhamento. Esta sub-rotina é responsável pela obtenção da matriz de rigidez global da estrutura, a partir das matrizes de rigidez de cada elemento finito, conforme teoria apresentada no Item 2.2.

O processo tem início com a inicialização de uma matriz ( $K_{GLOBAL}$ ) com todos os elementos iguais a zero. Dado um elemento com matriz de rigidez  $K_e$  conhecida, o ponto crucial desta rotina é definir em quais células de  $K_{GLOBAL}$  as parcelas de  $K_e$  devem ser somadas. Supondo que os nós que compõem o elemento finito em questão tenham as seguintes coordenadas:  $(x_1; y_1), \dots, (x_i; y_i), \dots, (x_4; y_4)$ . A Equação (2.52) mostra uma representação da matriz ' $K_e$ ' (reduzida, mostrando somente as parcelas relacionadas à um dado nó), onde em cada célula de ' $K_e$ ' está identificada a posição da célula na qual esta parcela deve ser somada em  $K_{GLOBAL}$ :

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{GLOBAL} [2x_i - 1; 2y_i - 1] & K_{GLOBAL} [2x_i; 2y_i - 1] \\ K_{GLOBAL} [2x_i - 1; 2y_i] & K_{GLOBAL} [2x_i; 2y_i] \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Portanto, deve-se ser construída uma estrutura de repetição para somar os termos nas parcelas apresentadas na Eq. (2.52), repetindo esse processo para cada um dos 4 pontos pertencentes ao elemento finito em questão. Em seguida, repetir o processo para cada um dos elementos constituintes da estrutura. Dessa forma, finaliza-se a construção da matriz de rigidez global da estrutura.

Seguindo a execução do MEF, a próxima sub-rotina é denominada condições de contorno. Esta sub-rotina é responsável pela redução de  $K_{GLOBAL}$ , zerando linhas e colunas que multiplicam um deslocamento nulo (onde existe um apoio restringindo o movimento) e colocando o valor 1 na intersecção entre a linha e a coluna. Nesta sub-rotina também é construído o vetor de forças ( $F$ ) reduzido, ou seja, excluem-se as células relacionadas aos nós com deslocamento nulo. Dessa forma, a resolução do sistema da Eq. (2.1) torna-se possível, e esta é realizada utilizando uma função interna do FORTRAN. Portanto, neste passo são obtidos os deslocamentos nodais.

A sub-rotina final do MEF deve calcular tensões e deformações, informações que serão utilizadas no algoritmo de otimização. Segundo explicado no Item 2.4, primeiramente calcula-se a matriz ' $B$ ', com processo análogo ao apresentado na Figura 3, porém não são

utilizados os pontos de integração, mas cada um dos nós que compõem o elemento em questão. Com a aplicação da Eq. (2.49) e Eq. (2.50) obtém-se deformações e tensões para cada um dos nós. E, finalmente, com a Eq. (2.51) obtém-se o valor da tensão central do elemento finito. Este processo é repetido para cada um dos elementos da estrutura e as informações são armazenadas em vetores globais.

É ainda implementada uma função de saída de dados, a qual cria um arquivo de texto, mostrando todas as informações obtidas pelo MEF: deslocamentos nodais, tensões e deformações dos elementos. O código não produz diretamente resultados em forma de gráficos ou figuras. Estes devem ser construídos manualmente no software *Microsoft Excel*®, importando o arquivo texto da saída de dados para que se obtenham as informações.

### 3. FORMULAÇÃO TEÓRICA 2: OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Segundo Lanes (2013), um problema de otimização topológica consiste essencialmente na identificação da melhor distribuição de material em uma determinada região preestabelecida, quando a estrutura está sujeita a alguma restrição de projeto, que podem ser: volume, taxas de deformações, frequências naturais, etc. Para o caso plano, a otimização topológica parte de uma chapa retangular com o maior tamanho possível dentro do domínio e termina com uma geometria final diferente, que respeite as restrições de projeto, como esquematizado na Figura 4.

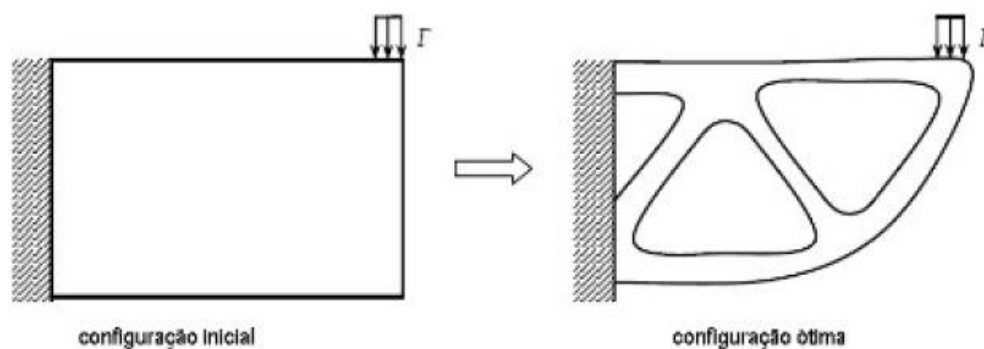


Figura 4: Representação do problema de otimização topológica  
FONTE: FERNANDES, 2013, p. 03.

Sanches (2011) define o problema de otimização estrutural segundo uma primeira abordagem relacionada à própria análise: a avaliação das possíveis configurações da estrutura. Diante dos resultados avalia-se e define-se a configuração ótima para o domínio estudado. A necessidade de se alcançar uma configuração ótima para um determinado critério de otimização agrega ao estudo um nível de análise estrutural dependente de um domínio discreto, o que possibilita o emprego do MEF. Então essa discretização permite a implementação de uma rotina computacional eficiente no processo de análise. Porém existe a possibilidade de problemas de instabilidade numérica como desvantagem. As referências apresentadas definem tais problemas em três categorias: irregularidades do tabuleiro de xadrez, dependência da malha e problemas de ótimos locais.

A irregularidade do tabuleiro de xadrez caracteriza-se pela configuração estrutural alternada em vazios de materiais, como pode ser observado na Figura 5. A origem desse problema está associada a erros numéricos do processo de aproximação do elemento finito (DIAZ; SIGMUND, 1995 e JOG; HABER, 1996). Como técnica para eliminação desse

problema, Bendsøe Sigmund (2003) sugerem a utilização de elementos com função interpoladora de ordem superior, como quadrática ou cúbica, pois tais elementos apresentam uma melhor aproximação do campo de deslocamentos.

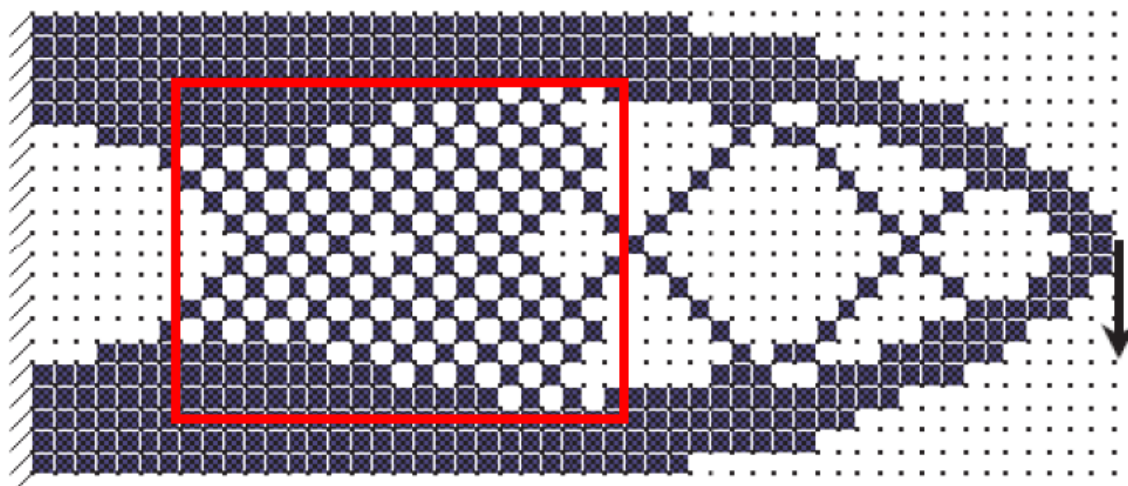


Figura 5: Representação qualitativa da irregularidade de tabuleiro de xadrez  
 FONTE: LANES, 2013, p. 12.

A dependência de malha é um problema inerente à discretização do domínio. Intuitivamente espera-se que, quanto mais refinada a malha, maior a fidelidade das condições de contorno descrita pela topologia ótima. Porém, não é isso que ocorre. Muitas vezes as malhas mais refinadas resultam em topologia mais detalhadas, porém qualitativamente diferentes de outras malhas ou modelos. Basicamente, com o aumento do refinamento da malha, há um aumento de espaços vazios. Várias referências citam trabalhos com métodos atenuantes, filtros, para reduzir essa dependência da malha, como descritos em Jog e Haber (1996), Sigmund (1997) ou Sigmund e Petersson (1998).

O problema de ótimos locais está relacionado à natureza não convexa do problema matemático envolvido, sujeito a inúmeros resultados com soluções localizadas (COUTINHO, 2006 e SANT'ANNA, 2002). Ou seja, para um mesmo problema muitos ótimos podem ser encontrados, dependendo dos parâmetros escolhidos. De todos os problemas, talvez a determinação de soluções globais seja um dos maiores desafios na otimização topológica, o que permite entender que a identificação de ótimos locais já seja suficiente o bastante para a maioria dos projetos de engenharia.

### 3.1. Otimização estrutural evolucionária (ESO)

O método de otimização topológica utilizado nesse trabalho se baseia no algoritmo ESO (*Evolutionary Structural Optimization*), ou otimização estrutural evolucionária, em português. Tal método foi primeiramente proposto por Xie e Steven (1993), como um método com conceitos simples para a determinação topológica de projetos. A ideia básica do método consiste na execução de um algoritmo de aproximação heurística com remoção gradual de regiões menos solicitadas do domínio, com base em um critério de penalidade. O primeiro critério apresentado pelos autores foi baseado em tensões equivalentes de von Mises: elementos com tensões abaixo de um dado valor limite são removidos a cada iteração do processo, permitindo então encontrar uma estrutura com rigidez ótima para um determinado volume remanescente. Essa metodologia ficou conhecida como ESO sob nível de tensão.

Num primeiro momento, os critérios de remoção (como von Mises ou tensões médias) propostos levaram a contestações a respeito de sua validação e questionamentos sobre à escassez de embasamento matemático (ZHOU; ROZVANY, 2001). Essa motivação levou à criação de outra vertente: o método ESO em nível de deslocamentos. Tal se baseava na igualdade das energias total e de deformação para problemas com restrição de rigidez associado a um número de sensibilidade, o qual era dependente das matrizes de rigidez de deslocamento (CHU *et al.*, 1996). Posteriormente, Zhao *et al.* (1998) constataram a coerência dos resultados encontrados para as duas metodologias do ESO, tanto sob nível de tensão como de deformação. Em seguida, Tanskanen (2002) concluiu que tal método é capaz de proporcionar uma base teórica equivalente ao método de otimização Programação Linear Sequencial.

Com a consolidação do método ESO, foram propostas variações do algoritmo, visando suprir limitações, como o problema de ótimos locais. Dentre estas, vale citar: GESO (Otimização estrutural evolucionária genética), que integra operações da Genética (seleção, cruzamento e mutação) ao ESO original; ESO Aditivo, que se baseia na adição de elementos ao sistema em regiões de alta concentração de tensão; e BESO (Otimização estrutural evolucionária bidirecional), que adiciona e remove elementos do sistema simultaneamente. Também foram formuladas aplicações do algoritmo para análises dinâmicas. O que se utiliza nesse trabalho é apenas o método ESO original em nível de tensão, por se tratar de um método de aplicação mais simples e de fácil implementação.



### 3.2. Formulação ESO em nível de tensão

Nesta formulação do método, elementos com baixo nível de tensão são sistematicamente removidos da estrutura, para obtenção de um projeto eficiente. Tal remoção ocorre durante um processo evolutivo e, a cada análise, novos elementos ineficientes são eliminados, até que o critério objetivo seja alcançado.

Para determinar quais elementos serão removidos da estrutura é utilizado um critério de penalidade, o qual utiliza uma formulação de tensões equivalentes de cada elemento para ranqueá-los, ou seja, encontrar aquele com maior tensão e os de menores tensão para serem retirados da estrutura. É arbitrada uma taxa de remoção, ou seja, qual o nível de tensão máxima, no qual os elementos que não atingirem este valor serão removidos, como mostra a Eq. (3.1):

$$\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_{eqMAX}} < RR \quad (3.1)$$

Isso quer dizer que, em uma determinada iteração, todos os elementos que apresentarem uma tensão equivalente menor do que ' $RR \cdot \sigma_{eMAX}$ ' serão removidos da estrutura. O parâmetro ' $RR$ ' é denominado taxa ou razão de rejeição na iteração. No início do processo é estipulado um valor inicial chamado ' $RR_i$ ', então para a primeira iteração é utilizado esse valor. Quando, numa dada iteração, existem elementos com nível de tensão menor do que este, estes são eliminados e então o processo segue para a iteração seguinte. Quando não há nenhum elemento a ser removido, ou seja, todos apresentam tensões equivalentes maiores do que ' $RR_i \cdot \sigma_{eMAX}$ ', então a taxa é acrescida de um valor  $ER$ , denominado razão de evolução ou passo do aumento de ' $RR_i$ ', até que exista pelo menos um elemento à ser removido na iteração atual.

$$RR = RR_i + ER \quad (3.2)$$

Vale citar que ' $RR_i$ ' é constante para todo o processo. Portanto, todas as iterações iniciam-se com uma taxa de remoção igual. Essa forma é utilizada para atenuar a remoção de elementos: sempre tenta-se eliminar os elementos com menor nível de tensão, mesmo que essa taxa ' $RR$ ' seja menor do que a praticada na iteração anterior.

Querin (1997) sugere que para taxa de remoção e seu passo sejam adotados valores pequenos, próximos de 1%, para que seja garantida melhor convergência. Porém na prática

desse trabalho, a cada exemplo devem ser testados diferentes parâmetros de otimização com objetivo de verificação de convergência. Portanto, em alguns casos uma taxa maior do que essa já garante uma convergência adequada, porém para outros é necessária a utilização de valores abaixo de 1%.

O processo evolucionário como um todo pode ser resumido nos seguintes passos (LANES, 2013):

- Passo 1: discretização do domínio inicial da estrutura, utilizando-se uma malha fina de elementos finitos e aplicação de condições de contorno e ações prescritas;
- Passo 2: análise estrutural via MEF;
- Passo 3: remover elementos que satisfaçam (3.1);
- Passo 4: repetir os passos 2 à 4, até que o projeto ótimo seja alcançado.

A Figura 6 ilustra o processo na forma de um digrama:

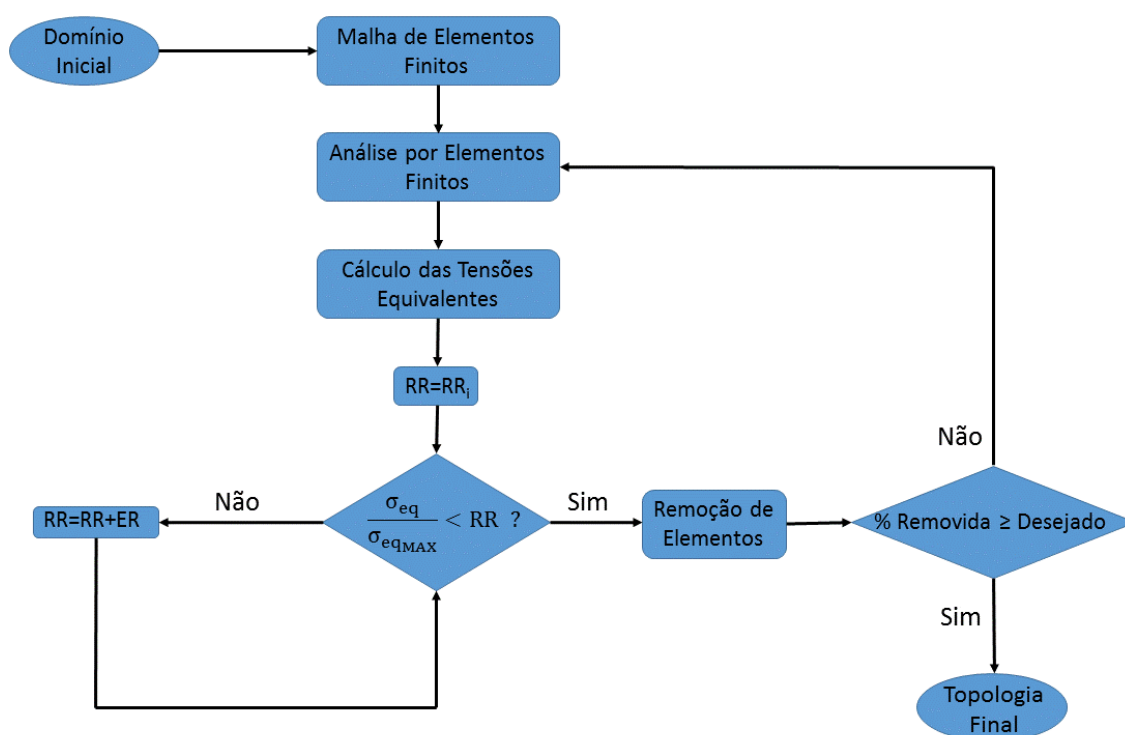


Figura 6: Algoritmo ESO em nível de tensão.

Em análises desse tipo, fixa-se o volume de material alvo a ser encontrado, o qual define a geometria ótima. Como o problema estudado é bidimensional, este valor é medido como uma relação de área da estrutura.

Para o cálculo da tensão equivalente de cada elemento a ser utilizada no critério de penalidade são utilizadas duas diferentes formulações nesse trabalho: tensão equivalente de von Mises e tensão equivalente de Rankine, demonstrados nos próximos títulos.

### 3.3. Tensão equivalente de von Mises

Em 1913, R. von Mises desenvolveu um critério de escoamento com base na teoria da energia de distorção, o qual diz que o escoamento do material ocorre quando a energia de distorção por unidade de volume do material é igual ou maior do que a energia de distorção por unidade de volume do mesmo material quando submetido a escoamento em um ensaio de tração simples (HIBBELER, 2010). Pela formulação de von Mises, isso equivale matematicamente ao segundo invariante do tensor ( $J_2$ ) atingir seu valor crítico. Esse invariante pode ser escrito como:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (3.3)$$

Assumindo caso uniaxial, ou seja,  $\sigma_1 = \sigma_{esc}$  e  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  pode-se encontrar o valor do invariante  $J_2$ :

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{esc} - 0)^2 + (0 - \sigma_{esc})^2] = \frac{\sigma_{esc}^2}{3} \quad (3.4)$$

Substituindo a Eq. (3.4) em (3.3) obtém-se

$$\sigma_{esc} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (3.5)$$

Supondo-se que esse escoamento ocorra para uma dada tensão de von Mises no elemento, tem-se que  $\sigma_{esc} = \sigma_{eq}$ . Aplicando a equação (3.5) ao caso estudado, tensões no plano, para um elemento finito a equação se reduz à:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (3.6)$$

Essa tensão equivalente ficou bastante conhecida como tensão de von Mises, mas também pode apresentar o nome de energia de distorção máxima, ou von Mises-Hencky.

### 3.4. Tensão equivalente de Rankine

Em meados do século XIX, W. Rankine propôs a chamada teoria da tensão normal máxima. Tal teoria descreve que, como materiais frágeis tendem a falhar repentinamente por ruptura, sem escoamento, quando aplica-se tração a ruptura ocorre quando a tensão normal atinge o limite de resistência ' $\sigma_r$ ' e quando aplica-se torção a ruptura ocorre devido à tensão de tração máxima novamente. Portanto, o critério de Rankine afirma que o material frágil falha quando a tensão principal máxima ' $\sigma_1$ ' no material atingir um valor limite igual ao limite de resistência à tensão normal que o material pode suportar quando submetido à tração simples.

Ou seja, a tensão equivalente de Rankine a ser utilizada como critério de falha é simplesmente o módulo da máxima tensão principal. No caso plano, tem-se:

$$\sigma_{eq} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|) \quad (3.7)$$

É interessante observar que esse critério difere de von Mises, pois quando se trata de materiais frágeis a falha acontece basicamente por ruptura repentina, com baixos níveis de deformação. Para os materiais mais dúcteis ocorre a deformação do material até o escoamento (falha) e essa energia perdida para deformar deve ser incorporada na tensão equivalente do critério de falha, portanto para esses materiais se utiliza o critério da energia máxima de distorção (von Mises).

### 3.5. Implementação computacional II

Novamente, o método foi implementado computacionalmente utilizando a linguagem FORTRAN. Tendo o MEF implementado, conforme descrito no Capítulo 2, bastou o desenvolvimento de um código que executasse o algoritmo de otimização, seguindo o fluxograma da Figura 6.

Primeiramente, a criação da malha de elementos finitos foi realizada com o auxílio do software comercial ANSYS®. Um arquivo de texto com dados da malha (coordenadas dos nós e conectividade dos elementos finitos) é gerado no software e então este arquivo é utilizado na entrada de dados do código que executa o MEF. A partir da Eq. (2.51) obtém-se um valor de

$\sigma$  para cada elemento finito, que é utilizado para calcular a tensão equivalente pelo critério escolhido (Von Mises ou Rankine), segundo as Equações (3.7) e (3.5).

Para isto, é necessário o cálculo das tensões principais ( $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ ). Estas são obtidas pelas Eq. (3.8), segundo Hibbeler (2010):

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.8)$$

Em seguida, o processo de avaliação dos elementos que devem ser eliminados é trivial: é comparada a relação de tensões de cada elementos com a variável ‘RR’ (taxa de rejeição), a qual deve ser incrementada quando não for possível eliminar nenhum elemento em determinada iteração. O processo de “eliminar” os elementos da análise é realizado através da criação de um vetor denominado ‘KILL’. Este vetor tem a dimensão igual ao número total de elementos da malha e é inicializado com valores iguais a 1 em todas as células. A cada elemento retirado da estrutura, deve-se zerar a linha correspondente à numeração deste elemento na matriz ‘KILL’.

Portanto, todas as matrizes de rigidez dos elementos ( $K_e$ ) são multiplicadas por cada linha correspondente ao elemento do vetor ‘KILL’. Dessa forma, os elementos que foram eliminados não contribuem mais para a rigidez da estrutura. Ao final do processo, os valores armazenados no vetor ‘KILL’ indicam quais elementos foram eliminados e quais ainda fazem parte da estrutura.

Ao final do processo de otimização, a sub-rotina de saída de dados gera um arquivo de texto indicando somente os nós pertencentes à elementos que não foram eliminados no processo. Isto é implementado através de uma estrutura seletiva (“IF / ELSE”), responsável por analisar os valores do vetor ‘KILL’ e escrever no arquivo de saída de dados os nós dos elementos que apresentarem um valor igual a 1 na célula respectiva neste vetor.

A representação gráfica da topologia final da otimização é construída a partir da exportação do arquivo de saída de dados para o software *Microsoft Excel*®. Recebendo os nós e as coordenadas destes, constrói-se um gráfico de dispersão baseado nas coordenadas dos nós. Ajustando a escala dos eixos do gráfico, para que fique compatível com as dimensões da estrutura, o resultado deste é uma representação fiel da malha final gerada pela otimização topológica.



#### 4. FORMULAÇÃO TEÓRICA 3: CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Segundo Leonel (2009), em uma análise de confiabilidade estrutural existem critérios a serem avaliados, como eventos estatísticos que levam a cenários de falha. A verificação de cada critério significa verificar cada modo potencial de falha da estrutura. Para isso, deve-se descrever e formular o problema considerando suas variáveis e devidas incertezas. Com essa formulação, pode-se determinar uma probabilidade de que se observe uma situação de falha, considerando o conhecimento estatístico de cada variável e sua influência sobre o comportamento da estrutura.

Quando uma estrutura se encontra em uma situação onde a mesma não é mais capaz de cumprir requisitos de serviço e de segurança, ela se encontra em uma situação indesejável, ou seja, a situação que é denominada falha. Para chegar ao ponto de falha existem várias maneiras distintas, cada uma delas é chamada de modo de falha.

Para cada modo de falha existe um *estado limite* associado, os quais são avaliados pelas equações de estado limite. Sendo  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  as variáveis que descrevem o comportamento da estrutura e seus carregamentos, a representação da equação de estado limite para um dado modo de falha pode ser definida como:

$$g(\mathbf{x}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (4.1)$$

Esta equação deve ser definida para que, quando a função da Eq. (4.1) for maior do que zero, a estrutura se encontre em uma situação de segurança e quando  $g(\mathbf{x}) < 0$ , numa situação de falha. No ponto onde  $g(\mathbf{x}) = 0$ , a equação se encontra na fronteira entre os dois domínios, denominada superfície de falha. A Figura 7 ilustra graficamente essas análises:

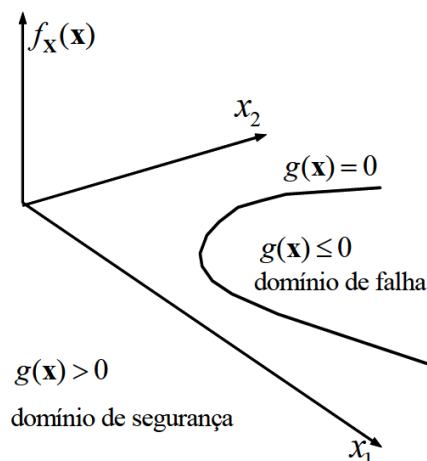


Figura 7: Representação dos domínios de  $g(\mathbf{x})$  em um espaço de três variáveis

Nesse trabalho não são analisados casos de confiabilidade dependentes do tempo. Portanto as variações que estejam ligadas ao histórico de uso da estrutura de forma periódica devem estar expressas dentro das informações estatísticas das variáveis a serem utilizadas, caso precisem ser levadas em conta. Tendo essa consideração, é possível fazer uma ilustração em que as variáveis do problema são classificadas como sendo de solicitação (S) e resistência (R), então a equação de estado limite pode ser escrita como:

$$g(R, S) = R - S = 0 \quad (4.2)$$

Como utilizado em vários exemplos, a equação de estado limite pode ser simplesmente dependente da tensão à qual a estrutura é submetida, sendo então igual à:

$$g(\sigma, \sigma_{adm}) = \sigma_{adm} - \sigma \quad (4.3)$$

Assim, quando  $g > 0$  significa que a tensão admissível é maior do que a tensão aplicada ( $\sigma$ ), portanto uma situação de segurança. Se  $g < 0$  significa que a tensão aplicada é maior do que a tensão admissível, portanto uma situação de falha.

Na confiabilidade estrutural, o cálculo da *probabilidade de falha* para um problema genérico de duas variáveis X e Y é dado por:

$$P_F = P(X \leq Y) \text{ ou } P_F = P(X - Y \leq 0) \quad (4.4)$$

Sendo ' $f_{XY}(x, y)$ ' a função conjunta de densidade de probabilidade das variáveis 'X' e 'Y', a probabilidade de falha pode ser representada novamente como sendo:

$$P_F = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy \quad (4.5)$$

Admitindo que 'X' e 'Y' sejam estatisticamente independentes, a função ' $f_{XY}(x, y)$ ' e a probabilidade de falha podem ser reescritas como:

$$P_F = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) dy \right] dx \quad (4.6)$$

Assim, para um exemplo onde 'X' e 'Y' sejam variáveis de distribuição normal padrão, utilizando cálculos estatísticos pode-se obter a probabilidade de falha. Em alguns exemplos simplificados, a resistência pode ser dada por uma tensão admissível constante, ou seja, essa variável é constante. Portanto, o problema se resume a avaliar as distribuições das variáveis de solicitação: as tensões admissíveis, que por sua vez podem também depender de



outras variáveis, como carregamentos externos e geometria da estrutura. Essa última, geralmente, pode ser adotada como seguindo uma distribuição normal, pois, segundo estudos sobre processos de fabricação mecânica, quando o processo é afetado somente por causas naturais (não há perturbações especiais) a dimensão final segue uma distribuição normal ou Gaussiana centrada, ou seja, com média ( $\mu$ ) igual à dimensão nominal.

Nessa distribuição, a função densidade de probabilidade é matematicamente expressa por:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2s^2} (x - \mu)^2 \right\} \quad (4.7)$$

Porém, por facilidade, uma distribuição normal qualquer pode ser expressa como uma distribuição normal padrão ou reduzida, que apresenta média zero e desvio padrão ( $s$ ) igual a um, sendo representada por  $Z \cong N(0,1)$ . O processo de transformação para uma distribuição normal qualquer de 'x' em padrão 'z' é feito pela seguinte equação:

$$Z(0,1) = \frac{x - \mu}{s} \quad (4.8)$$

Para a distribuição normal padrão, a densidade de probabilidade é tabelada, conforme Tabela 2. Dessa forma, pode ser facilmente consultada para se obter uma solução relacionada à ela, processo que foi utilizado nesse trabalho para verificar e validar respostas obtidas pelos códigos desenvolvidos para avaliar a confiabilidade.

#### **4.1. Simulação de Monte Carlo Direta**

Segundo Leonel (2009), essa técnica se caracteriza por envolver grande número de repetições de um processo de amostragem ou de realizações das variáveis aleatórias do problema. Essas realizações são obtidas de acordo com números aleatórios gerados conforme conveniente distribuição de probabilidades. As repetições fornecem um conjunto de soluções (uma para cada realização) que representam a resposta simulada do modelo mecânico. Esses resultados podem receber um tratamento estatísticos, se assemelhando à análise de uma amostra aleatória de uma população. Sendo uma técnica de amostragem, o método está sujeito aos problemas relativos a erros de amostragem. Portanto, para se obter um resultado estatisticamente preciso, é necessário um número consideravelmente grande de simulações (ANG; TANG, 1984).

Tabela 2: Valores tabelados para distribuição normal padrão

Tabela III — Distribuição Normal Padrão

$Z \sim N(0, 1)$

Corpo da tabela dá a probabilidade  $p$ , tal que  $p = P(0 < Z < Z_c)$

parte inteira e primeira decimal de $Z_c$	Segunda decimal de $Z_c$										parte inteira e primeira decimal de $Z_c$
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	$p = 0$										
0,0	00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586	0,0
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535	0,1
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409	0,2
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173	0,3
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793	0,4
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240	0,5
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490	0,6
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524	0,7
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327	0,8
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891	0,9
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214	1,0
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298	1,1
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147	1,2
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774	1,3
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189	1,4
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408	1,5
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449	1,6
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327	1,7
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062	1,8
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670	1,9
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169	2,0
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574	2,1
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899	2,2
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158	2,3
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361	2,4
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520	2,5
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643	2,6
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736	2,7
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807	2,8
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861	2,9
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900	3,0
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929	3,1
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950	3,2
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965	3,3
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976	3,4
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983	3,5
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989	3,6
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992	3,7
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995	3,8
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997	3,9
4,0	49997	49997	49997	49997	49997	49997	49998	49998	49998	49998	4,0
4,5	49999	50000	50000	50000	50000	50000	50000	50000	50000	50000	4,5

Percebe-se então que, para aplicar este método é requerido conhecimento prévio sobre distribuições de probabilidades de ocorrência das variáveis aleatórias envolvidas no problema. No contexto de confiabilidade estrutural, a técnica de Monte Carlo crua ou direta é baseada na geração de valores pseudorrandômicos para as variáveis aleatórias do problema (podendo ser tensão de escoamento, área ou carregamentos) mediante suas distribuições de probabilidades. Este conjunto de valores deve ser gerado de acordo com regras especiais, de modo a resultar em valores confiáveis (NOGUEIRA, 2010). Esse processo pode ser realizado, por exemplo,

utilizando-se algoritmos recursivos com gerador linear congruencial (GLC), segundo formalizado em Nowak e Collins (2000).

Segundo Pellizzer (2015), a obtenção desta amostra de variável aleatória, com função de distribuição cumulativa de probabilidade ' $F_X(x)$ ' conhecida, pode ser dividida em duas etapas: primeiramente, gera-se um número aleatório ' $\psi_i$ ', com distribuição uniforme entre 0 e 1; e então determina-se a inversa da função de distribuição cumulativa de probabilidades no ponto ' $\psi_i$ ' para obter-se ' $\chi_i$ ' (amostra da variável aleatória), segundo a equação (4.9):

$$\chi_i = F_X^{-1}(\psi_i) \quad (4.9)$$

Vale ressaltar que a distribuição cumulativa de probabilidade ' $F_X(a)$ ' é igual a integral da função densidade de probabilidade, como demonstra a equação (4.10):

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2s^2} (a - \mu)^2 \right\} \quad (4.10)$$

Para os casos de incertezas associadas modeladas como variáveis de distribuição normal, as equações (4.9) e (4.10) foram resolvidas numericamente, utilizando métodos de integração numérica, como demonstrado no item 2.1.2. Outras incertezas foram modeladas como variáveis de distribuição uniforme, com intervalos de (a, b). Neste caso, foi utilizada a equação (4.11) para o cálculo do desvio padrão desta distribuição e (4.12) para a média. Essas expressões são facilmente deduzidas por meio da expressão da distribuição uniforme contínua, estatisticamente. Porém essa dedução não faz parte do escopo do trabalho, então as Eq. (4.11) e (4.12) foram obtidas de Ross (2010).

$$s_{UNIF} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} \quad (4.11)$$

$$\mu_{UNIF} = \frac{b-a}{2} \quad (4.12)$$

Desta forma, obtendo os valores de todas as incertezas associadas ao problema para cada repetição, a equação de estado limite deve ser avaliada para cada simulação, verificando se há falha ou não. Em cada caso de falha, é somada uma unidade na variável de número de falhas ( $n_{FALHAS}$ ). Este procedimento é repetido por várias vezes até atingir um tamanho de amostras pré-determinado ( $n_{AMOSTRA}$ ). A probabilidade de falha é dada pela equação (4.5). Porém, com a simulação de Monte Carlo pode-se calcular essa probabilidade pelo seu estimador, simplesmente com a Eq.(4.13):

$$\hat{p}_F = \frac{n_{\text{FALHAS}}}{n_{\text{AMOSTRA}}} \quad (4.13)$$

O tratamento estatístico para demonstrar que essa probabilidade obtida utilizando a amostra em questão é realmente um bom estimador para a probabilidade real (populacional) não faz parte do escopo desse trabalho. Baseado nas formulações teóricas encontradas na literatura, assume-se que o resultado da Eq. (4.13) pode ser utilizado para este fim, e as demonstrações estatísticas não serão aqui apresentadas.

Graficamente, a utilização dessa metodologia obtém resultados como exposto na Figura 8, que apresenta as amostras obtidas para um problema com duas variáveis aleatórias, em um domínio que apresenta um estado limite  $g(x)$ .

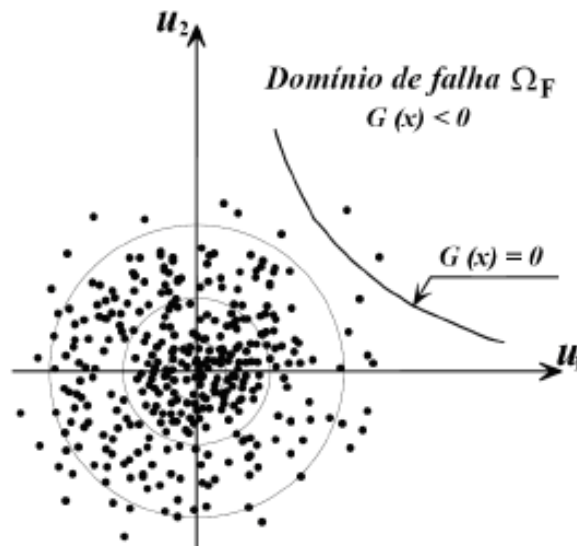


Figura 8: Pontos de amostragem Simulação de Monte Carlo  
FONTE: NEVES, 2004.

Este tipo de simulação é bastante robusto a respeito da quantidade de variáveis aleatórias que podem ser introduzidas e também é de fácil implementação computacional. No entanto, o número de simulações para obter um valor aceitável de ' $p_F$ ' é bastante elevado, pois o resultado da Eq. (4.13) está sujeito aos erros estatísticos de se utilizar um estimador baseado em amostragem. Portanto, a simulação de Monte Carlo Direta se torna bastante custosa computacionalmente. Segundo a literatura, para estimar uma probabilidade de falha da ordem de  $10^{-n}$ , o número de simulações não deve ser inferior à  $10^{n+2}$  ou  $10^{n+3}$ .

Este método foi escolhido para ser utilizado no cálculo de probabilidade de falha, devido à sua fácil implementação. Apesar das dificuldades computacionais admitidas pelo método, atualmente até mesmo computadores pessoais já contam com processadores

potentes que são capazes de executá-lo com um tempo que não ultrapasse aproximadamente 48 horas.

## 4.2. Implementação computacional III

A implementação computacional da Simulação de Monte Carlo para avaliação da confiabilidade é realizada com base em sub-rotinas do FORTRAN. O programa principal (*main*) realiza a chamada dessas sub-rotinas, seguindo o fluxograma apresentado na Figura 9:

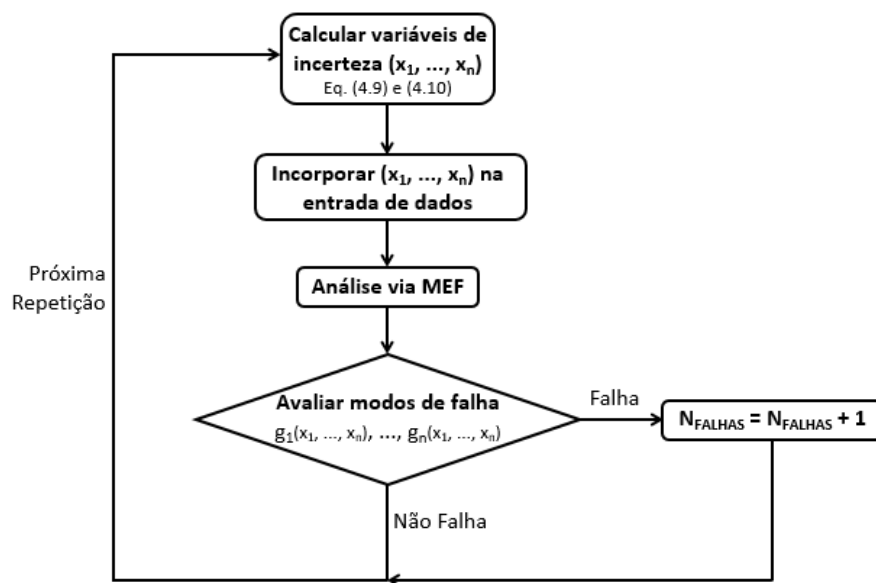


Figura 9: Fluxograma do código de análise de confiabilidade

Inicialmente, deve-se obter os valores das variáveis de incertezas ' $x_1, \dots, x_n$ ', modeladas como pseudoaleatórias. A primeira sub-rotina então é denominada cálculo das incertezas. Nesta sub-rotina, um arquivo de texto de entrada de dados contendo a quantidade de variáveis, suas médias e desvios padrões é lido pelo código. As Equações (4.9) e (4.10) são resolvidas numericamente, utilizando a metodologia de integração de Gauss, analogamente como foi utilizado no MEF. A variável ' $\psi_i$ ' é gerado através de uma função interna do FORTRAN, que retorna um número aleatório baseado em uma distribuição uniforme [0;1].

Em seguida, os valores gerados são incorporados na entrada de dados da análise via MEF. Neste ponto, é chamada a sub-rotina que executa o MEF. Esta sub-rotina engloba o programa *main* da implementação computacional citada no Capítulo 2. Dessa forma, é método é executado considerando os dados de entrada obtidos, resultando nos valores de tensões e deformações estruturais.

A sub-rotina seguinte utiliza a resposta do MEF para avaliar os modos de falha ' $g_i(x_1, \dots, x_n)$ ', conforme as Equações (4.2) e (4.3). Dessa forma, quando for identificada uma falha, esta é contabilizada na variável ' $N_{FALHAS}$ '. Finalmente, o código segue para a próxima repetição, até que seja concluído um número pré-determinado de repetições (' $N_{AMOSTRA}$ '). A probabilidade de falha é então encontrada pela Eq. (4.13).

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesse trabalho, os códigos implementados com as formulações descritas nos Capítulos 2, 3 e 4 serão utilizados para a análise de exemplos de aplicação, onde estruturas de diferentes geometrias serão analisadas. Todas as geometrias serão avaliadas utilizando o MEF implementado, visando obter resultados de tensões e deformações. Para todos os exemplos executados é considerando o estado plano de tensões (EPT). Então, a otimização topológica será executada para os exemplo, segundo algoritmo apresentado no Capítulo 3. Finalmente, os resultados obtidos serão comparados com resultados da literatura, verificando e discutindo a convergência da otimização.

Após esse processo, as geometrias ótimas obtidas pelo algoritmo de otimização devem ser avaliadas quanto à confiabilidade estrutural. Utilizando o método da Simulação de Monte Carlo Direta, conforme descrito no Capítulo 4. Nesta análise, são buscadas conclusões coerentes com os resultados estruturais da análise e comportamento esperado. As geometrias ótimas são comparadas com as geometrias iniciais e intermediárias do processo de otimização, buscando, dessa forma, concluir sobre a robustez das estruturas otimizadas. Serão avaliadas também as influências da consideração de incertezas em parâmetros de carregamentos e materiais do problema.

### 5.1. Exemplo 1: Chapa tracionada

No primeiro exemplo busca-se analisar o problema de otimização mais simples, segundo a literatura consultada. Esse problema seria uma chapa tracionada por uma única força  $P = 100\text{N}$  horizontal no centro de sua extremidade direita. A extremidade esquerda está fixa na parte superior e inferior por apoios modelados como duplos (com restrição de deslocamento nas direções horizontal e vertical), ou seja, a estrutura é hiperestática. Porém testes mostraram que o tipo de apoio utilizado praticamente não influencia no resultado da otimização, desde que a estrutura seja no mínimo isostática. A Figura 10 ilustra o esquema estrutural. O objetivo é obter a configuração geométrica ideal para esta estrutura, que suporte o carregamento aplicado, porém utilizando somente 30% do volume de material do domínio inicial.

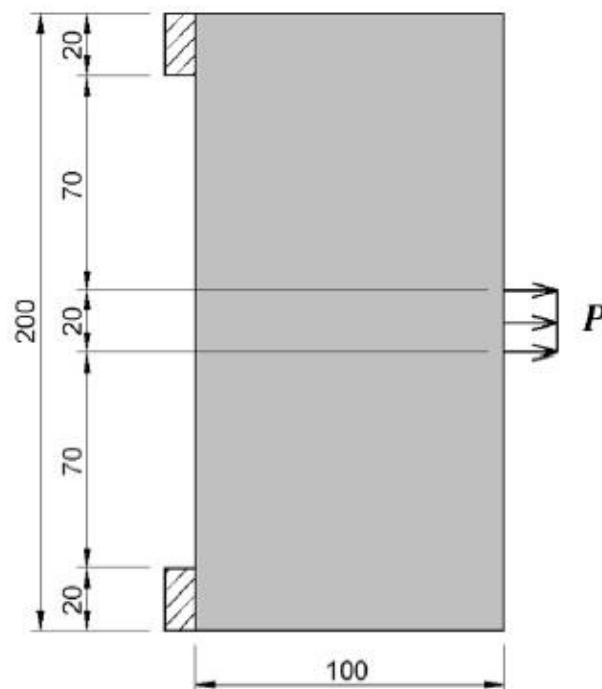


Figura 10: Estrutura inicial do Exemplo 1(dimensões em cm)  
FONTE: OLIVEIRA, 2015.

Como parâmetros geométricos e de material, a espessura da chapa é considerada unitária, seu módulo de elasticidade  $Y = 210$  GPa e o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . Porém para estudos de otimização topológica, a literatura indica que tais parâmetros não mostram influência no resultado final, já que praticamente não alteram a diferença entre os valores de tensão de cada elemento da malha. Isso reforça o fato dos resultados serem apenas qualitativos, não quantitativos. A estrutura deve ser otimizada para 30% do volume inicial.

Para a análise via MEF, são utilizadas três diferentes malhas, sendo a primeira mais grosseira e a terceira mais refinada, conforme mostrado na Figura 11. Objetiva-se obter a geometria ótima para as três malhas e comparar os resultados para cada uma. Dessa forma, avalia-se a qualidade da resposta para as malhas utilizadas e possíveis problemas como ótimos locais e interferência de malha, os quais a literatura cita como bastantes comuns para este tipo de análise. As características de cada malha são:

- Malha 1: 200 elementos de 10 por 10 cm;
- Malha 2: 800 elementos de 5 por 5 cm;
- Malha 3: 3200 elementos de 2,5 por 2,5 cm;



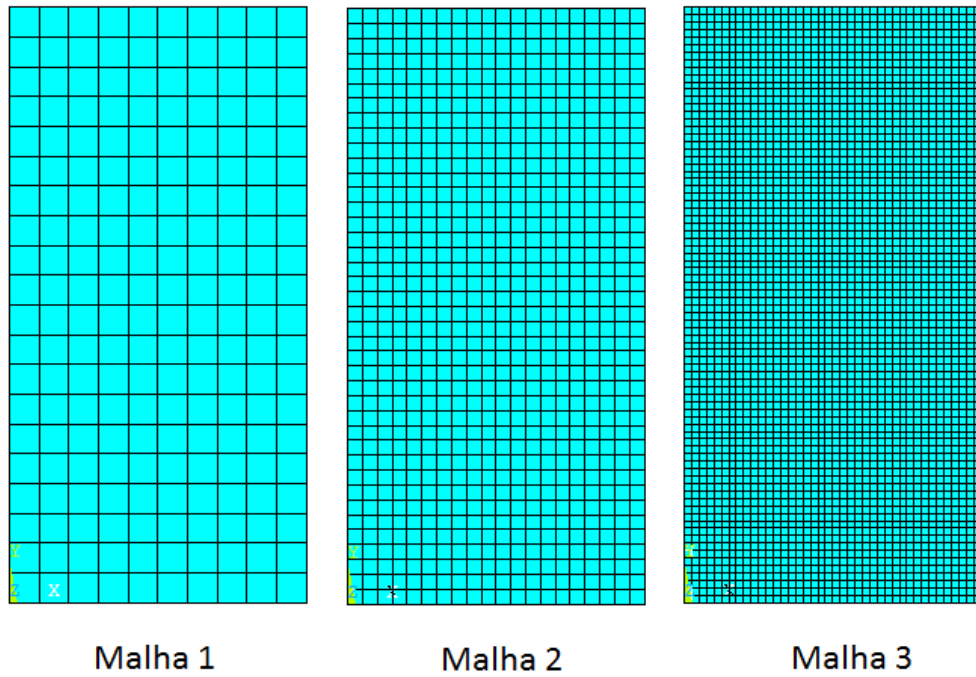


Figura 11: Malhas de elementos finitos para chapa do Exemplo 1

Visando analisar a qualidade da malha utilizada, um parâmetro denominado de densidade da malha de elementos finitos ( $\rho_m$ ) foi definido. Este parâmetro contabiliza a relação entre a área de um elemento finito e a área total da estrutura. Isto quer dizer que, quanto menor essa relação, mais refinada é a malha e, portanto, melhor é sua aproximação. Para as três malhas utilizadas neste exemplo, os valores obtidos são os seguintes:

$$\rho_{m,1} = \frac{10 * 10}{200 * 100} = 5 * 10^{-3} \quad (5.1)$$

$$\rho_{m,2} = \frac{5 * 5}{200 * 100} = 1,25 * 10^{-3} \quad (5.2)$$

$$\rho_{m,3} = \frac{2,5 * 2,5}{200 * 100} = 3,125 * 10^{-4} \quad (5.3)$$

Para a otimização utilizando a primeira malha, os parâmetros foram os seguintes: a menor razão de rejeição a cada iteração  $RR_i = 2\%$  e passo de aumento dessa razão igual à metade de ' $RR_i$ ' ( $ER = 1\%$ ). Foi utilizando primeiramente o critério de Von Mises para ranquear os elementos e depois Rankine, visando comparar os resultados. A Figura 12 mostra a evolução da geometria até o ótimo encontrado ao final do processo, com Von Mises (a) e com Rankine (b).

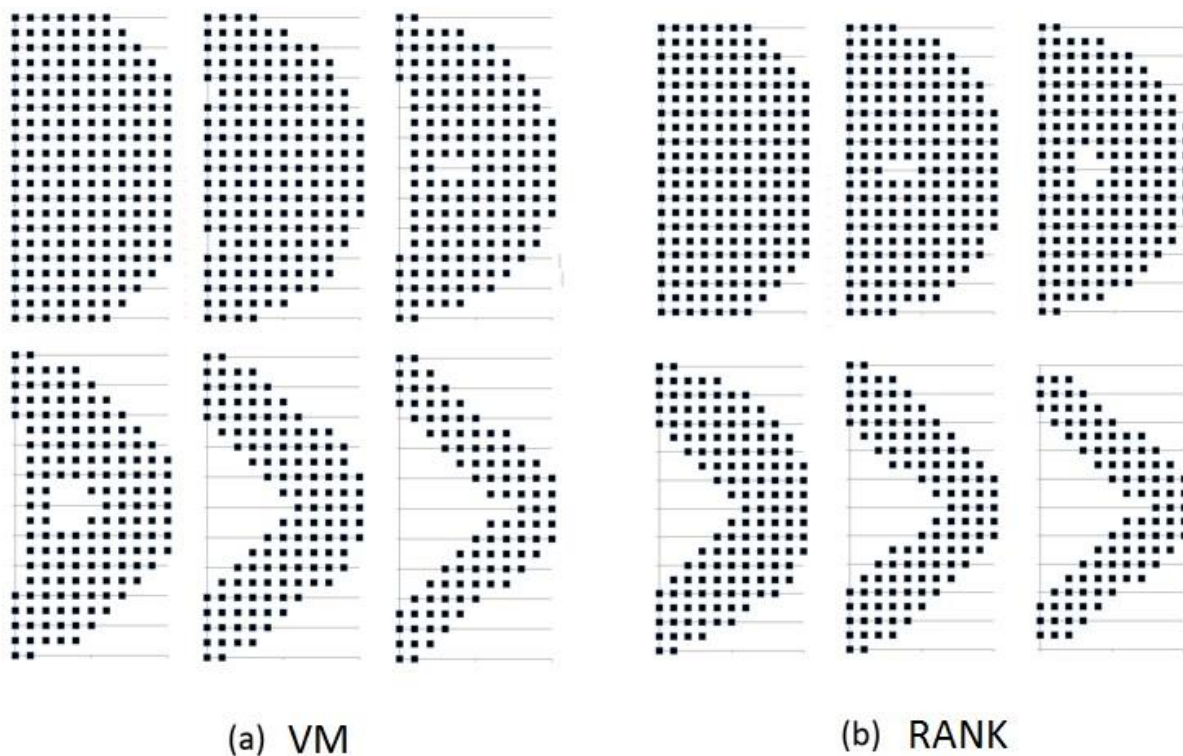


Figura 12: Evolução da geometria até o ótimo obtido para a malha 1 do Item 5.1

A Figura 13 resume o processo evolutivo para o parâmetro ' $RR_i$ ' (denominado de Taxa de Rejeição por iteração) e quantidade percentual de volume removido em relação ao volume inicial (denominado Retirada de material), quando o critério de Von Mises é utilizado. Vale observar que tais gráficos, quando obtidos para utilização do critério de Rankine, não foram adicionados a este relatório, pois não possuem diferença significativa com relação ao apresentado na Figura 13.

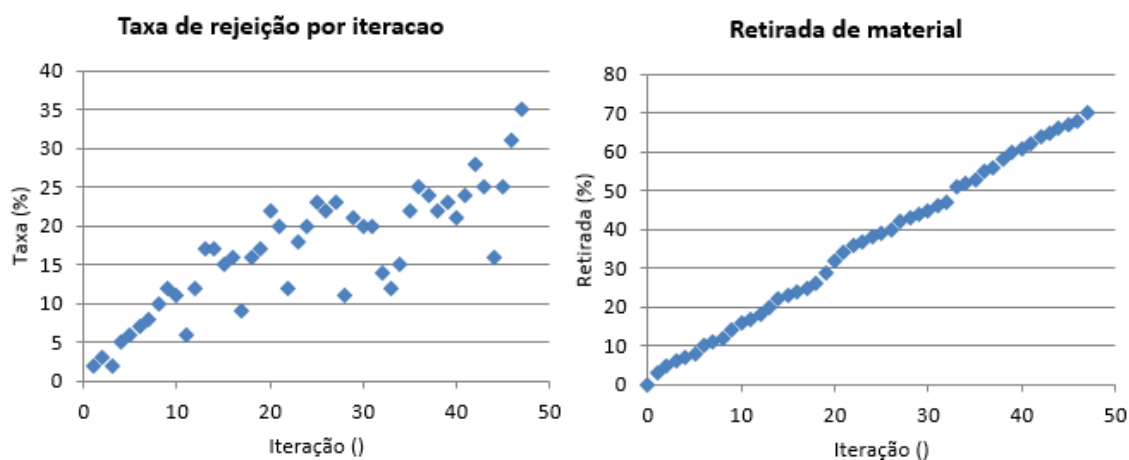


Figura 13: Evolução dos parâmetros de otimização para malha 1 do Item 5.1

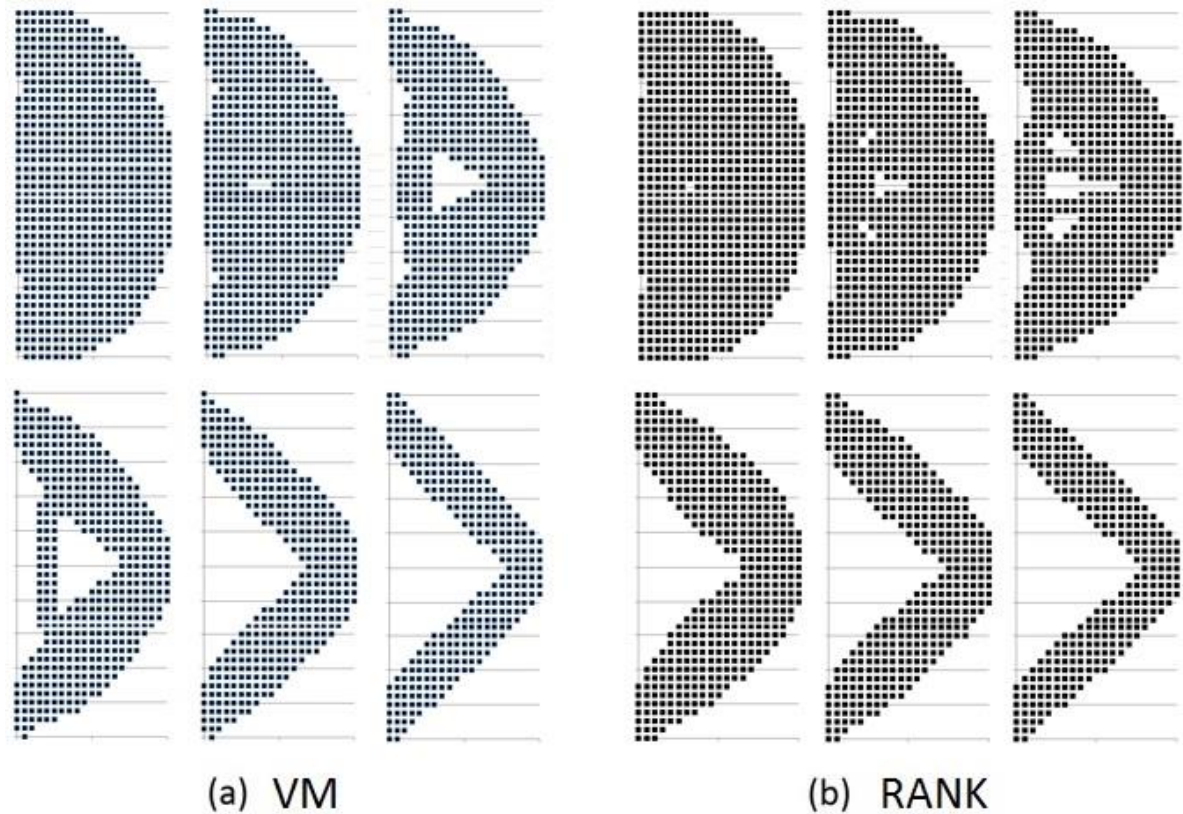


Figura 14: Evolução da geometria até o ótimo obtido para a malha 2 do Item 5.1

A Figura 15 é utilizada para resumir o processo evolutivo para o parâmetro ' $RR_1$ ' (denominado Taxa de rejeição por iteração na Figura 15) e a quantidade percentual de volume removido em relação ao volume inicial (denominado Retirada de material) quando a segunda malha foi utilizada. O gráfico apresentado na Figura 15 refere-se à utilização do critério de Von Mises. Os gráficos referentes à utilização do critério de Rankine não foram apresentados por não apresentarem mudanças significativas.

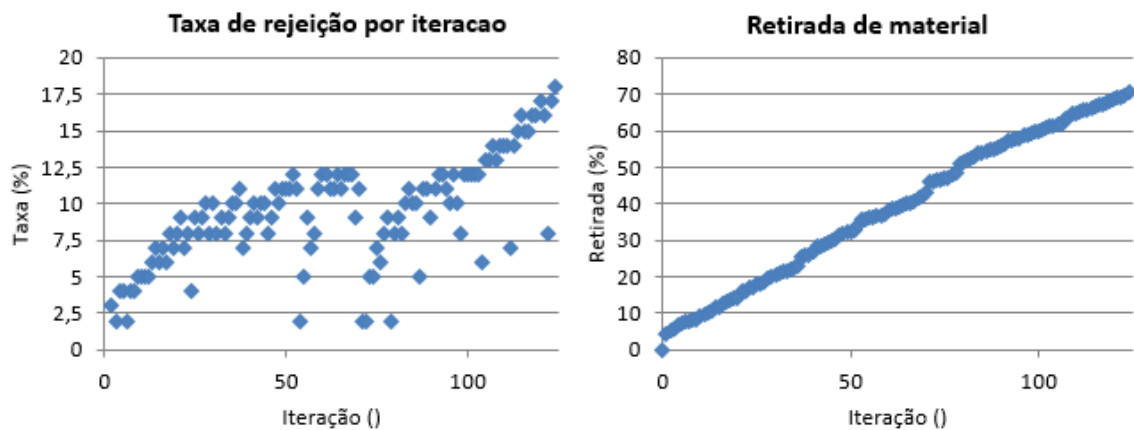


Figura 15: Evolução dos parâmetros de otimização para malha 2 do Item 5.1

Finalmente, para a terceira malha, os parâmetros de otimização utilizados foram também os mesmos ( $RR_i = 2\%$  e  $ER = 1\%$ ). Também foram utilizados os critérios de tensão equivalente de Von Mises e de Rankine para ranquear os elementos. A Figura 16 ilustra a evolução da geometria até desde o domínio inicial até ótimo encontrado ao final do processo, com Von Mises (a) e com Rankine (b):

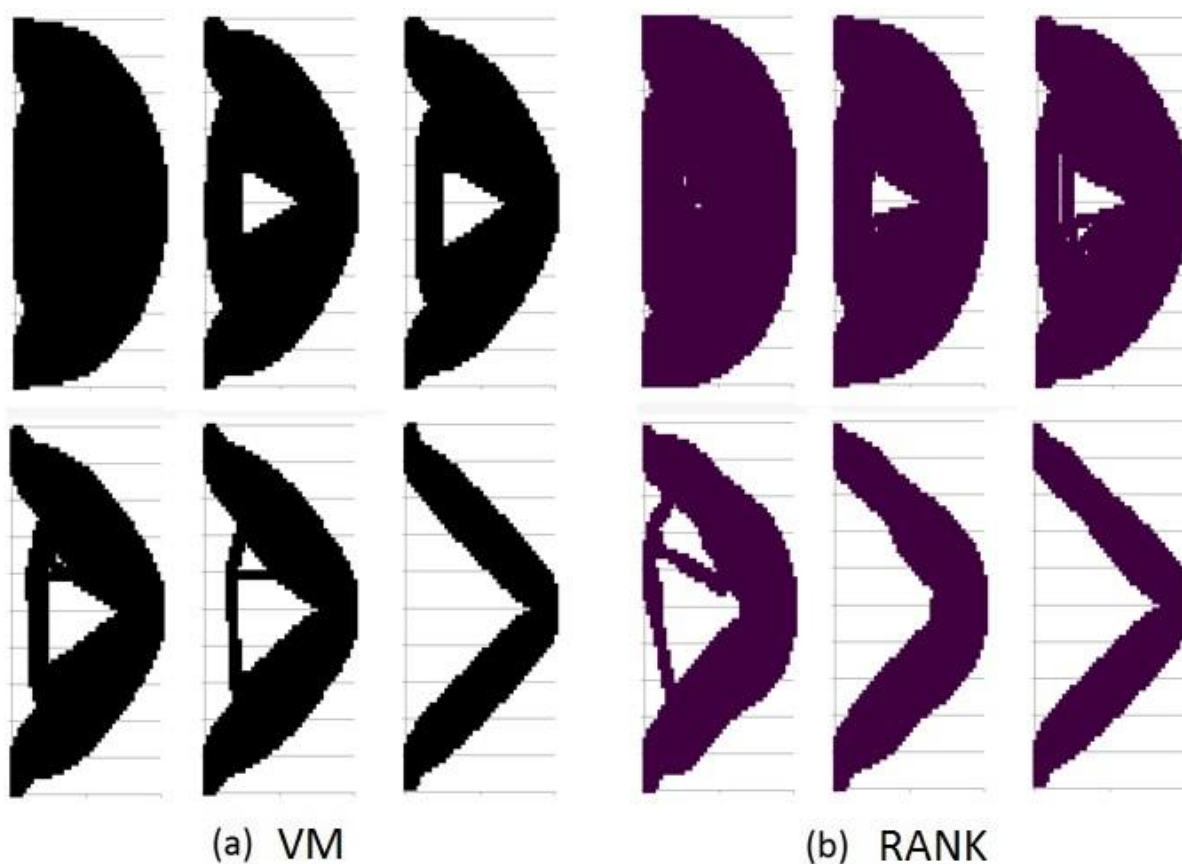


Figura 16: Evolução da geometria até o ótimo obtido para a malha 3 do Item 5.1

Da mesma forma, as Figura 17 e Figura 18 resumem o processo evolutivo para o parâmetro ' $RR_i$ ' (denominado Taxa de rejeição por iteração) e a quantidade percentual de volume removido em relação ao volume inicial (denominado Retirada de material) para o processo utilizando a terceira malha. Neste caso, foram separadas as informações obtidas quando se utiliza os critérios de Von Mises e de Rankine para ranquear os elementos, resultando nas Figura 17 e Figura 18, respectivamente. A apresentação desses resultados separadamente possibilita a comparação entre eles, o que, neste caso é relevante, visto que foram encontradas diferenças significativas.

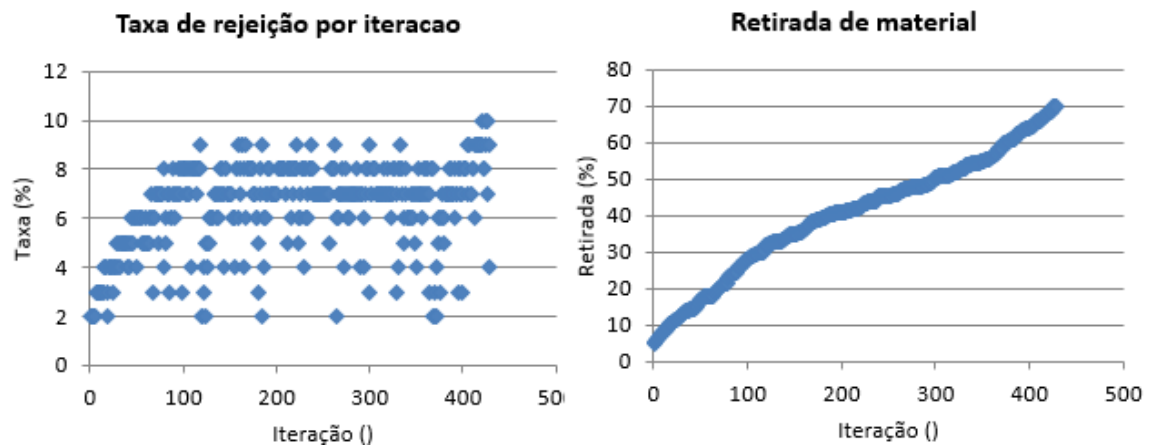


Figura 17: Evolução dos parâmetros para malha 3 com critério de Von Mises do Item 5.1

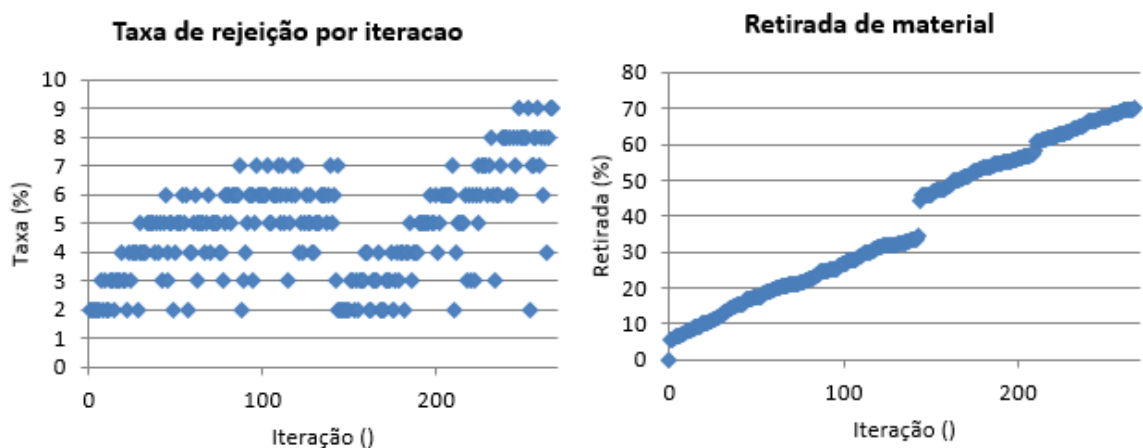


Figura 18: Evolução dos parâmetros para malha 3 com critério de Rankine do Item 5.1

Na terceira malha houve, pela primeira vez, uma diferença significativa nos gráficos obtidos quando se utiliza Von Mises ou Rankine (como pode ser visto nas Figura 17 e Figura 18). Percebe-se que por volta da iteração 150 a distribuição de tensão nos elementos finitos foi tal que, em determinada iteração foram encontrados vários elementos com um nível baixíssimo de tensão equivalente de Rankine e então houve uma grande retirada de material com uma pequena taxa de rejeição (por volta de 2%). Comparando com a parte (b) da Figura 16 pode-se claramente ligar essa grande e rápida retirada de material com a transição entre a 4ª e 5ª situação da geometria do domínio, onde ocorreu uma grande mudança na geometria, com a retirada de praticamente uma área inteira de material. Nesta situação, provavelmente, encontram-se os tais elementos com um nível de tensão baixíssimo citados logo acima. Porém, como essa situação ocorreu em uma iteração bastante longe do final do processo, não houve influência na geometria final obtida. Quando é utilizado o critério de von Mises percebe-se que a evolução dos parâmetros é bem mais comportada e não ocorrem situações



como essa, o que pode ser comprovado analisando a parte (a) da Figura 16. Nesta figura, pode-se verificar que as transições de geometria entre os momentos indicados são mais suaves.

Explicada a diferença encontrada nas Figura 17 e Figura 18, pode-se dizer que não houve uma diferença significativa na geometria ótima encontrada pelo método utilizando critério de von Mises ou Rankine. Comparando os resultados finais obtidos com ambos, a diferença não fica maior do que 5% dos elementos. A Figura 19 mostra exatamente os elementos “ativos” ao final do processo para as três malhas utilizadas, dando assim uma melhor representatividade da geometria ótima.

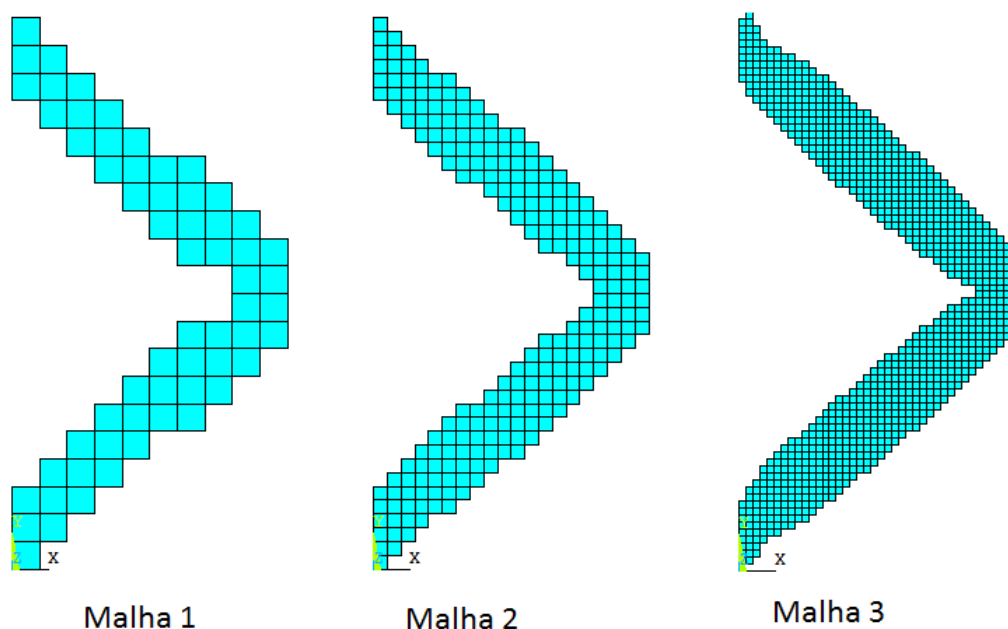


Figura 19: Geometria ótima encontrada com as três malhas utilizadas no Exemplo 1

A primeira conclusão a ser tomada deste exemplo é que não ocorreu nenhum problema numérico no processo de otimização. Além disso, não foi encontrada nenhuma interferência da malha no resultado, como pode ser observado na Figura 19. As geometrias encontradas pelas três malhas são coerentes e praticamente iguais, considerando o nível de refinamento crescente da primeira para a terceira. Por fim, essa geometria ótima é comparada à um resultado encontrado na literatura (Figura 20) e então pode-se finalmente dizer que os resultados encontrados são corretos e conforme o esperado.

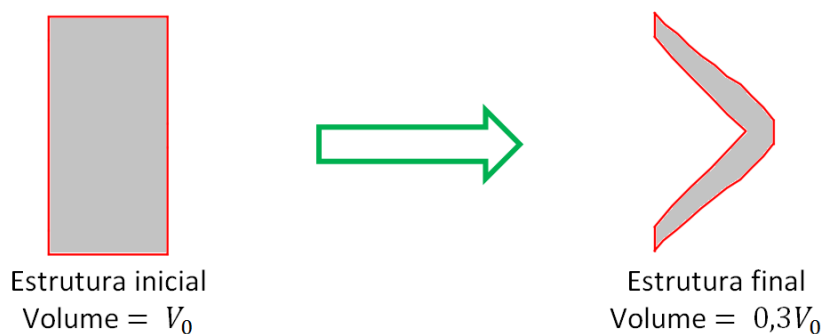


Figura 20: Geometria ótima para o Exemplo 1 encontrada na literatura  
 FONTE: OLIVEIRA, 2015.

Finalmente, é importante ressaltar o tempo de execução do código de otimização para este exemplo. Para a primeira malha, o processo finaliza-se com menos de 5 segundos, já para a segunda malha são necessários 3 minutos e para a terceira, quase 5 horas. Percebe-se que o refinamento da malha resulta em um aumento exponencial do tempo de execução, tornando o algoritmo bastante custoso computacionalmente quando utiliza-se malhas muito refinadas. Porém, avalia-se que, mesmo para a terceira malha utilizada, o tempo de processamento não impossibilita a utilização deste método, pois a espera das 5 horas citadas não trouxe obstáculos para a realização deste trabalho. Vale citar ainda que, foi utilizado um computador pessoal, com configurações de processamento de baixo custo e facilmente encontradas no mercado. A utilização de uma máquina mais potente poderia minimizar drasticamente este tempo de processamento.

## 5.2. Análise de Confiabilidade: Exemplo 1 – Chapa tracionada

Os resultados obtidos anteriormente, no Item 5.1 são agora analisados quanto à confiabilidade estrutural. A geometria analisada será a mostrada na Figura 19. Será utilizada a *segunda malha* para análise via MEF. Esta escolha foi baseada na avaliação do bom grau de refinamento da malha, segundo Eq. (5.2), na geometria final bem comportada, segundo Figura 19 e no tempo de execução do método apresentado quando esta malha foi utilizada. Segundo citado no item anterior, o processo de otimização foi finalizado com aproximadamente 3 minutos, o que foi considerado satisfatório e bem abaixo do tempo da terceira malha (aproximadamente 5 horas).

Para a análise de confiabilidade foi utilizada a Simulação de Monte Carlo Direta com 10 mil amostras. Segundo citado no item 4.1, esta quantidade resulta na avaliação precisa de

uma probabilidade de falha da ordem de  $10^{-2}$  ou até  $10^{-3}$ . Vale citar que, para este tamanho de amostra e utilizando uma máquina com as configurações citadas no Capítulo 1, o código que executa a Simulação de Monte Carlo apresenta um tempo de processamento entre 6 e 8 horas. Este tempo foi avaliado como satisfatório para os exemplos desse trabalho, pois não se apresentou como obstáculo para as análises realizadas.

Os modos de falha analisados são as tensões de Von Mises máximas em cada elemento finito da malha. Considera-se falha quando a tensão de Von Mises atuante é maior que a tensão de escoamento do material em um determinado elemento finito.

Para este exemplo, é simulado como material um aço carbono SAE 1020, cuja tensão de escoamento e sua incerteza foram consideradas segundo DOMENEGHETTI (2011). O coeficiente de Poisson é fixado em 0,3 e módulo de elasticidade  $Y=210$  GPa. A espessura da chapa analisada é de 1 cm.

Como incertezas associadas foram consideradas a tensão de escoamento, força aplicada e também seu ângulo em relação a horizontal ( $\alpha$ ). O ângulo ( $\alpha$ ) pode ser visualizado na Figura 21. Foram analisados 4 diferentes casos, sendo que as variáveis aleatórias foram adicionadas uma a uma em cada caso, visando mostrar a influência de cada uma no resultado final da confiabilidade da estrutura, como mostra a Tabela 3.

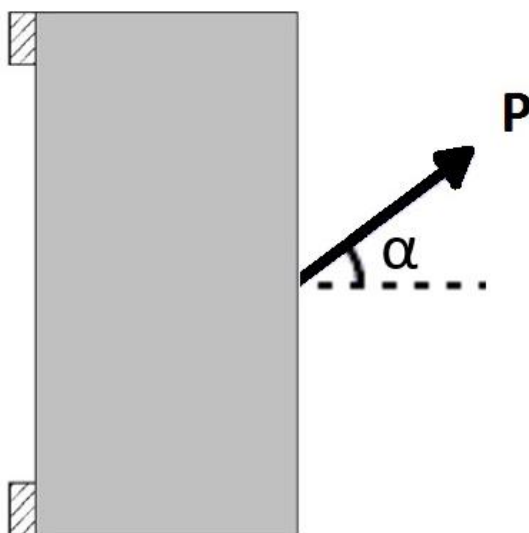


Figura 21: Ângulo considerado como incerteza associada

Na Tabela 3 observa-se que a diferença entre os casos 3 e 4 se resume ao desvio padrão da distribuição do ângulo ( $\alpha$ ): no terceiro caso a distribuição uniforme de  $\alpha$  é entre  $-15^\circ$  e  $+15^\circ$ ; já no quarto caso é entre  $-45^\circ$  e  $+45^\circ$ . Vale observar que o desvio padrão para as variáveis uniformes é dado pela Eq. (4.11), do item 4.1.



Tabela 3: Resultados da análise de confiabilidade para o item 5.2

	Variáveis aleatórias	Tipo de Distribuição	Média	Desvio padrão	Resultado de Probabilidade de Falha
<b>Caso 1</b>	Tensão Escoamento [kN/cm <sup>2</sup> ]	Normal	29,8	0,5	2,64%
<b>Caso 2</b>	Tensão Escoamento [kN/cm <sup>2</sup> ] Força Nodal [kN]	Normal Normal	29,8 70	0,5 7	3,82%
<b>Caso 3</b>	Tensão Escoamento [kN/cm <sup>2</sup> ] Força Nodal [kN] Ângulo $\alpha$ [graus]	Normal Normal Uniforme	29,8 70 0	0,5 7 8,66025	35,35%
<b>Caso 4</b>	Tensão Escoamento [kN/cm <sup>2</sup> ] Força Nodal [kN] Ângulo ( $\alpha$ ) [graus]	Normal Normal Uniforme	29,8 70 0	0,5 7 25,98076	73,16%

Com estes resultados de probabilidade de falha em mãos, pode-se concluir que a confiabilidade da estrutura é criticamente afetada pela variação da direção da força aplicada nos nós (representada para incerteza no ângulo  $\alpha$ ). Outros parâmetros não influenciaram significativamente na confiabilidade da estrutura. Esse comportamento pode ser explicado pela característica da otimização topológica, que apresenta um resultado quantitativo extremamente voltado para as condições iniciais do problema. Isto significa que, uma mudança na geometria do problema (como a direção das forças) faz com que o resultado da otimização perca sua qualidade. Ou seja, o ótimo encontrado pelo algoritmo é extremamente sensível às mudanças geométricas, em outras palavras, pouco robusto. A comparação entre os resultados do terceiro e quarto casos enfatiza a grande influência desse parâmetro na confiabilidade estrutural, pois o aumento da variação do ângulo da direção da força aplicada fez com que a probabilidade de falha mais que dobrasse.

Em seguida, outra análise foi realizada em cima deste exemplo. O código de otimização topológica foi executado, buscando obter as geometrias finais para reduções de material de 30% e 50%. Dessa forma, a confiabilidade pode ser analisada em cinco diferentes geometrias para este mesmo problema: 0%, 30%, 50% e 70% de material removido. Sendo que para 0% é utilizada a geometria inicial do problema, sem nenhuma alteração e 70% é a geometria ótima já analisada (resultado do item 5.1). A Figura 22 deixa claro as cinco geometrias utilizadas.

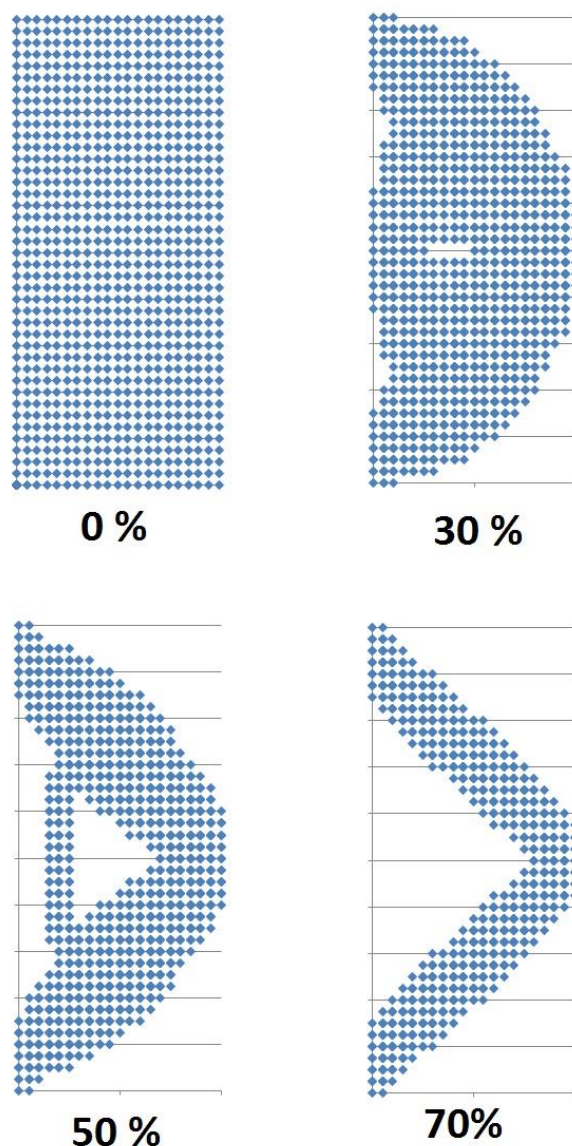


Figura 22: Diferentes geometrias analisadas quanto à confiabilidade para item 5.2

Para todas as geometrias, foram analisados os casos 3 e 4 da Tabela 3 e foi adicionado um quinto caso, que é análogo aos outros citados, porém com variação de  $\alpha$  entre  $-30^\circ$  e  $+30^\circ$ . Dessa forma, procura-se analisar a totalidade das interferências da quantidade de material removido e da amplitude de variação do ângulo da força aplicada. Portanto, tem-se 12 casos a serem analisados nesta etapa (4 geometrias com diferentes remoção de material e 3 amplitudes de variação do ângulo  $\alpha$  para cada uma). Os resultados são apresentados na ura 23 em forma de gráfico.

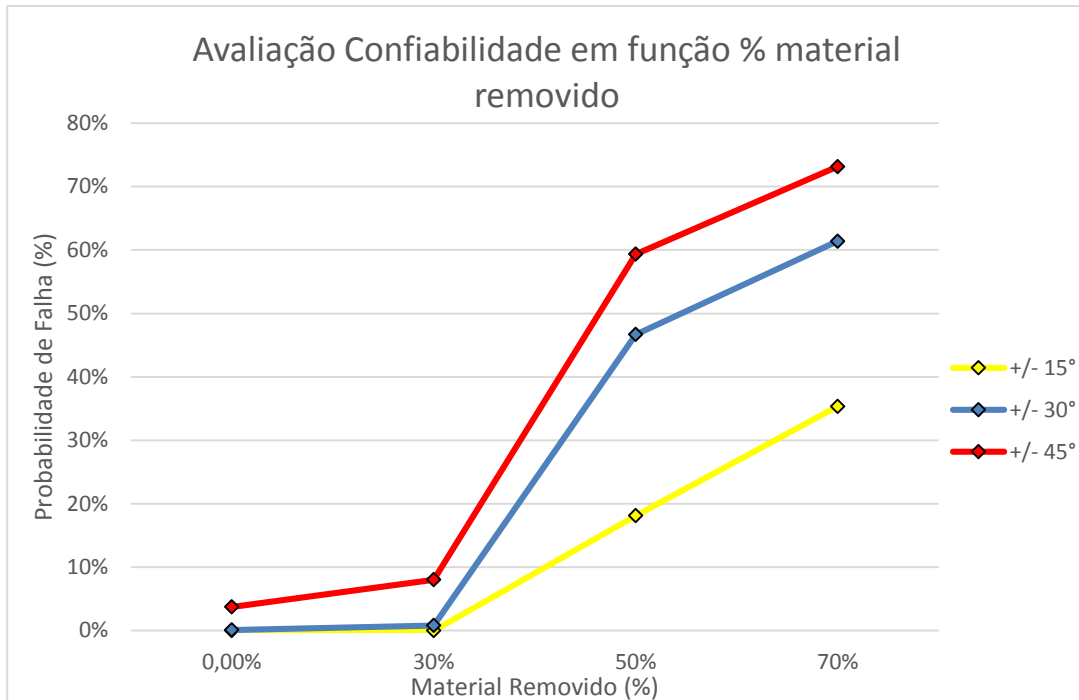


Figura 23: Resultados de confiabilidade para item 5.2

Conforme apresentado na Figura 23, pode-se obter as seguintes conclusões: claramente percebe-se que o aumento na porcentagem de material removido na estrutura gera um aumento significativo da probabilidade de falha, ainda mais a partir dos 30%. Percebe-se também que a amplitude da variação do ângulo de aplicação da força também interfere fortemente no resultado da confiabilidade. Quanto maior for a remoção de material da estrutura, mais essa variação influencia na confiabilidade, ou seja, menos robusta é a estrutura. Já para a geometria inicial (0%), os três valores de amplitudes do ângulo não modificam de forma significativa a confiabilidade, ou seja, trata-se de uma estrutura mais robusta e que, quanto mais se remove material, mais vulnerável se torna.

Neste exemplo confirma-se que todos os resultados esperados fisicamente foram obtidos a partir das simulações implementadas numericamente. Confirma-se também que a otimização topológica é extremamente focada nas condições geométricas iniciais da estrutura e do carregamento, e que esta torna a estrutura bastante vulnerável à variações nestes parâmetros, exatamente como era esperado.

### 5.3. Exemplo 2: Chapa em balanço

No segundo exemplo busca-se analisar um problema de otimização com solução um pouco mais complexa. Porém, ainda um problema clássico que possui solução na literatura. Esse seria uma chapa em balanço sujeita a uma ação elástica. A extremidade esquerda está fixa na parte superior e inferior e há uma força aplicada na extremidade superior direita  $P = 3000$  N. A Figura 24 ilustra a geometria inicial do problema, carregamentos e vinculações. A espessura da chapa é unitária. As propriedades do material utilizadas são módulo de elasticidade igual a 210 GPa e coeficiente de Poisson igual a 0,3. A estrutura será otimizada para 40% do volume inicial de material.

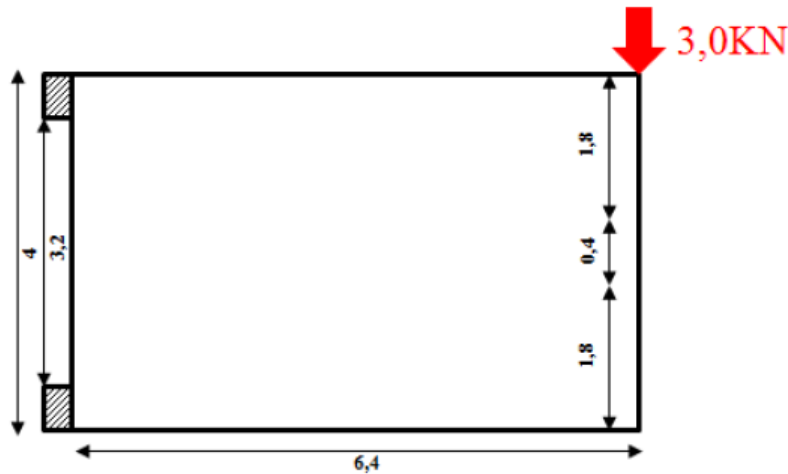


Figura 24: Estrutura inicial do Exemplo 2  
 FONTE: VITORIO JUNIOR, 2015, p. 830.

Para este exemplo, são utilizadas duas diferentes malhas, sendo uma mais grosseira e outra mais refinada, conforme mostrado na Figura 25:

- Malha 1: 160 elementos de 0,4 por 0,4 cm;
- Malha 2: 640 elementos de 0,2 por 0,2 cm;

O parâmetro densidade da malha ( $\rho_m$ ) neste exemplo fica igual a:

$$\rho_{m,1} = \frac{0,4 * 0,4}{6,4 * 4,0} = 6,25 * 10^{-3} \quad (5.4)$$

$$\rho_{m,2} = \frac{0,2 * 0,2}{6,4 * 4,0} = 1,56 * 10^{-3} \quad (5.5)$$

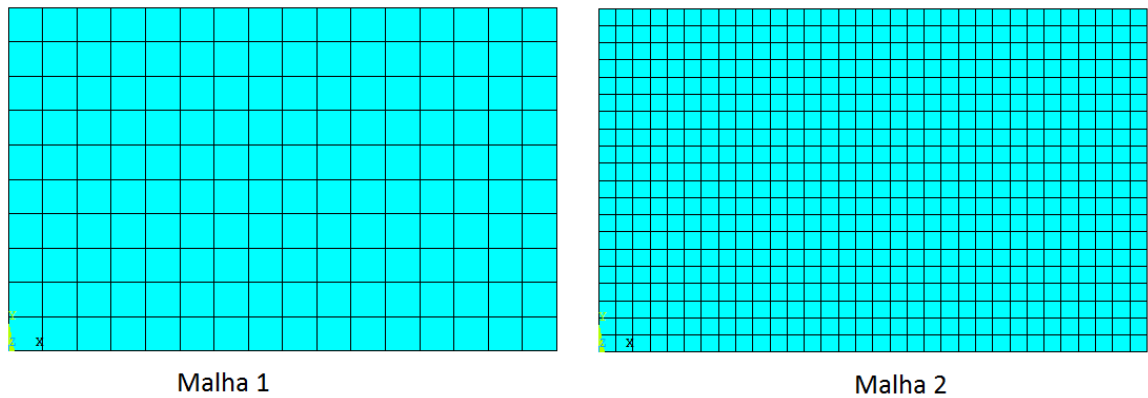


Figura 25: Malhas de elementos finitos para chapa do Exemplo 2

Para a primeira malha, os parâmetros de otimização utilizados foram os seguintes: a menor razão de rejeição a cada iteração  $RR_i = 2,5\%$  e passo de aumento dessa razão igual à metade de ' $RR_i$ ' ( $1,25\%$ ). Foi utilizando primeiramente o critério de Von Mises para ranquear os elementos e depois Rankine, visando comparar os resultados. A Figura 26 mostra a evolução da geometria até o ótimo encontrado ao final do processo, com Von Mises (a) e com Rankine (b).

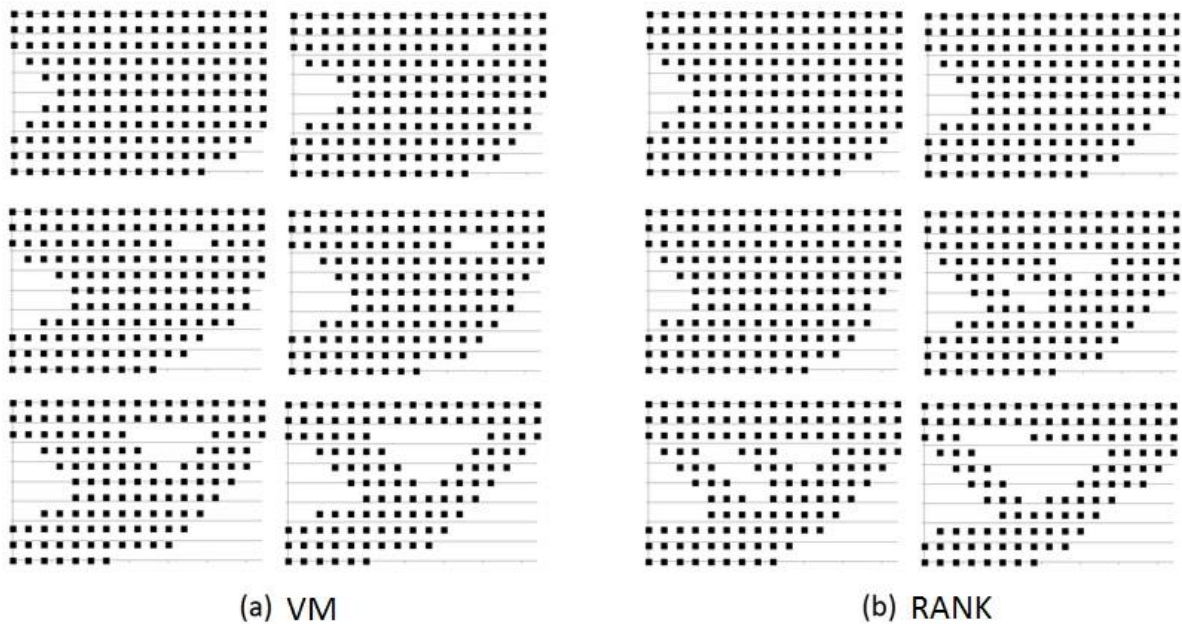


Figura 26: Evolução da geometria até o ótimo obtido para a malha 1 do Item 5.3

A Figura 27 resume o processo evolutivo para o parâmetro ' $RR_i$ ' (denominado de Taxa de Rejeição por iteração) e quantidade percentual de volume removido em relação ao volume inicial (denominado Retirada de material), quando o critério de Von Mises é utilizado. A evolução destes parâmetros quando a otimização é executada com o critério de Rankine

para ranquear os elementos não foi representada nesse trabalho. Pois, tal análise foi observada e não mostrou diferenças significativas em relação à evolução dos parâmetros apresentada na Figura 27.

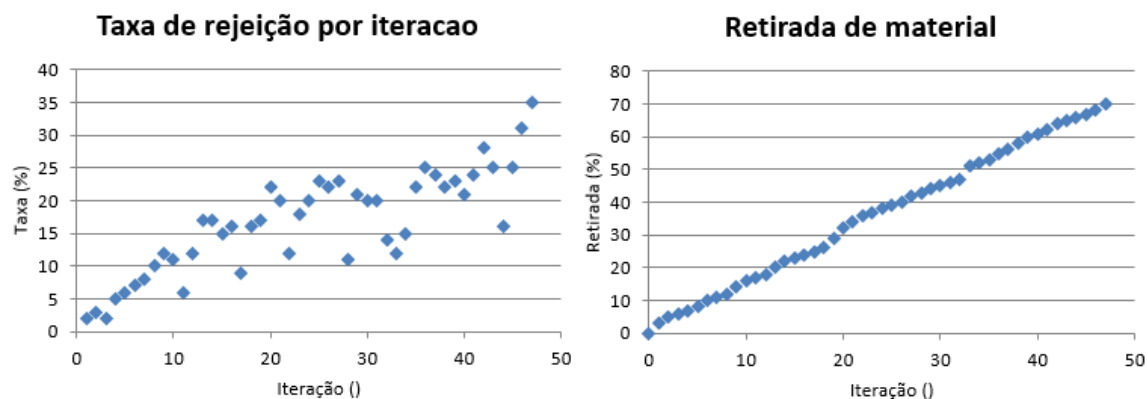


Figura 27: Evolução dos parâmetros de otimização para a malha 1 do Item 5.3

Para a segunda malha, os parâmetros de otimização utilizados foram os seguintes: a menor razão de rejeição  $RR_i = 0,25\%$  e passo de aumento  $ER = 0,125\%$ . Constatações dos exemplos anteriores mostraram que existe uma equivalência entre utilizar o critério de Von Mises ou Rankine para ranquear os elementos por tensão equivalente. Por este motivo, neste caso são apresentados os resultados apenas na utilização de Von Mises. A Figura 28 ilustra a evolução da geometria até o ótimo encontrado ao final do processo de otimização.

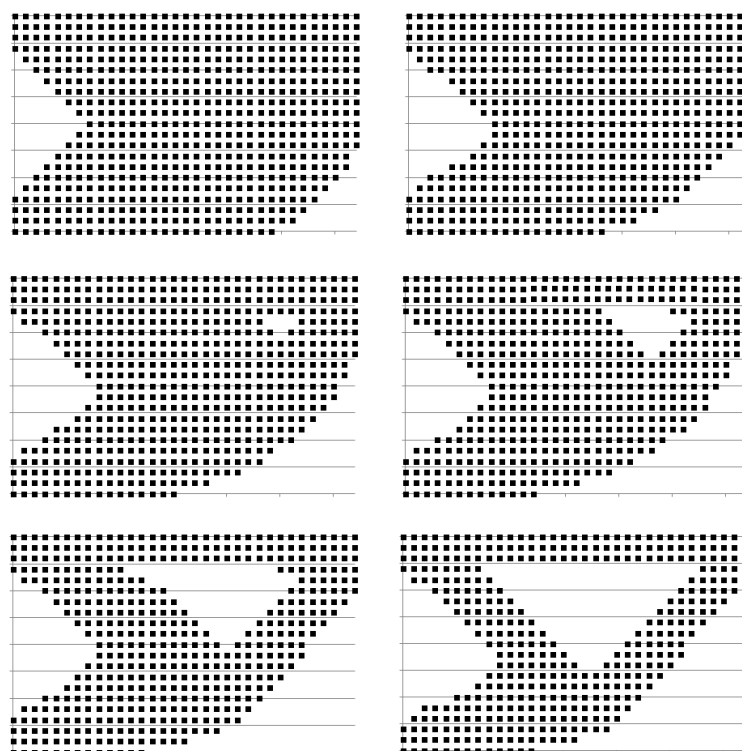


Figura 28: Evolução da geometria até o ótimo obtido para a malha 2 do Item 5.3

Como foi realizado em itens anteriores neste Capítulo, a Figura 29 apresenta o resumo do processo evolutivo para os parâmetros ‘RR<sub>i</sub>’ (taxa de rejeição por iteração) e quantidade percentual de volume removido em relação ao volume inicial (Retirada de material). Ambos os parâmetros são apresentados nesses gráficos em função do número de iterações.

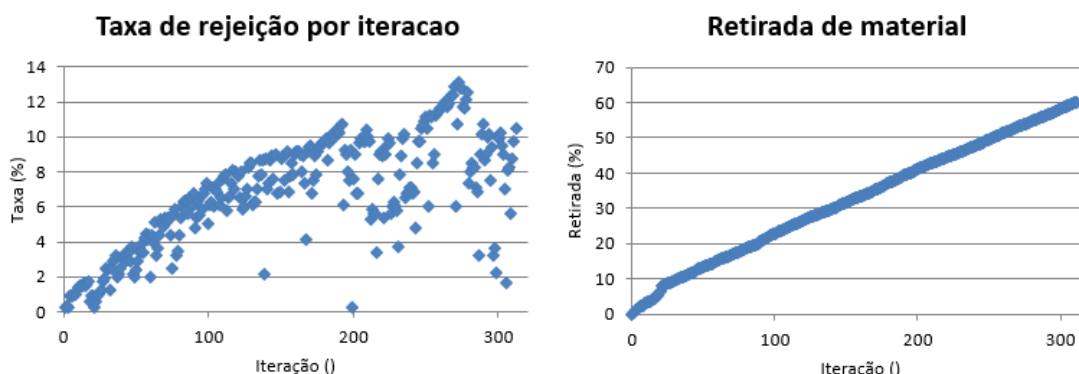


Figura 29: Evolução dos parâmetros de otimização para a malha 2 do Item 5.3

Por fim, os resultados obtidos para este exemplo podem ser avaliados como satisfatórios. Percebe-se que na malha mais grosseira o contorno do buraco formado no meio da estrutura fica ligeiramente diferente. Porém isto pode ser explicado pela falta de resolução desta discretização. Pode-se afirmar que ambas as respostas encontradas são coerentes, não houve nenhum problema numérico ou interferência da malha neste caso. Quando comparado com a geometria ótima encontrada na literatura (Figura 30), conclui-se também que o resultado encontrado está dentro do esperado, apesar da diferença nas dimensões externas da estrutura e seu contorno. Estas diferenças existem devido ao fato de Vitorio Junior (2013) utilizar um algoritmo de otimização baseado no Método dos Elementos de Contorno (MEC) e Método Level Set para análise mecânica, diferente do MEF utilizado nesse trabalho.

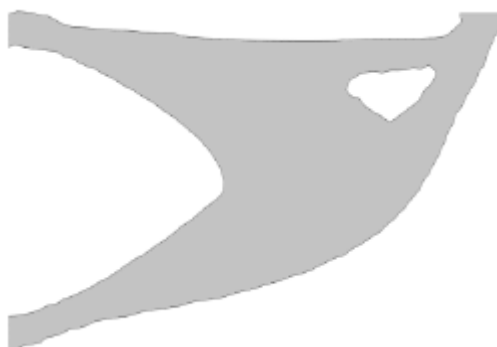


Figura 30: Geometria ótima para o Exemplo 2 encontrada na literatura  
 FONTE: VITORIO JUNIOR, 2015, p. 830.



Adicionalmente ao estudo já feito para este exemplo, uma terceira malha mais refinada, composta por 2560 elementos de dimensão 0,1 por 0,1 cm foi analisada. Esta malha apresenta uma densidade  $\rho_m = 3,9 * 10^{-4}$ . Essa análise busca a obtenção desse mesmo resultado final, porém tendo a aproximação de uma malha bem mais refinada. A geometria final também objetiva uma remoção de material total igual a 70%.

Neste caso, foram testados diferentes valores dos parâmetros de otimização ‘RR<sub>i</sub>’ e ‘ER’. Porém, com nenhuma combinação destes valores foi encontrada a geometria ótima como na Figura 30. Independente dos valores utilizados, a otimização encontrou interferências de malha e problemas de mínimos locais. Dessa forma, não foi possível chegar à geometria idêntica à encontrada na literatura utilizando o algoritmo ESO puro. Uma diminuição drástica nos parâmetros de taxa de rejeição de iteração (RR<sub>i</sub>) e passo do aumento dessa razão (ER) foi tentada, porém em nenhum caso obteve-se êxito. A Figura 31 apresenta os resultados da otimização obtidos, quando são utilizados diferentes valores para os parâmetros ‘RR<sub>i</sub>’ e ‘ER’. Nesta figura percebe-se claramente que existe uma grande diferença entre as geometrias ótimas encontradas e a apresentada na Figura 30.

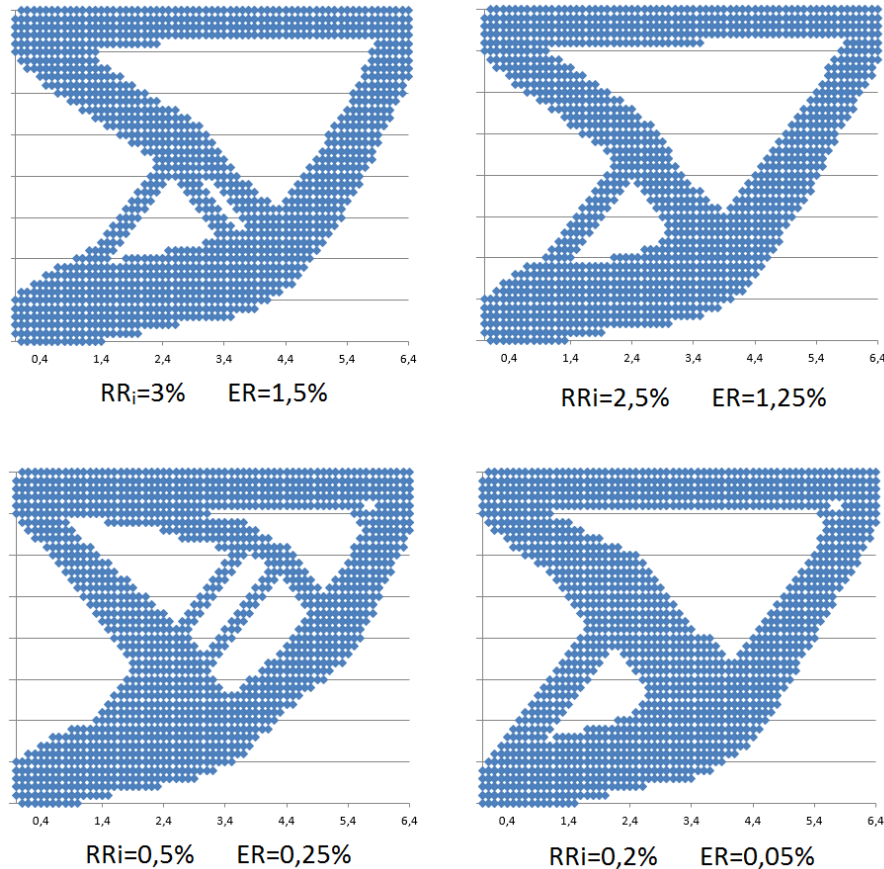


Figura 31: Geometrias encontradas no Exemplo 2 com diferentes parâmetros para malha 3



Essa diferença nos resultados e dificuldade em encontrar uma resposta independente da malha ou dos parâmetros pode ser explicada pela existência de mínimos locais. As diferentes geometrias encontradas mostradas na Figura 31 são ótimos locais para a função de otimização. Todas estas geometrias respeitam parâmetros e requisitos impostos na otimização, porém nenhuma delas é igual entre si ou ao ótimo encontrado na literatura. Por este lado, acredita-se que o refinamento da malha aumente a ocorrência de mínimos locais para a função de otimização encontrados pelo algoritmo. Essa constatação se dá devido ao fato da melhor aproximação e discretização do campo de tensões da estrutura levar à uma melhor aproximação da própria função de otimização. Dessa forma, os mínimos locais são mais facilmente encontrados no processo. Adicionalmente, uma vez que o processo se aproximou de um deste mínimos locais, o algoritmo não é capaz de sair desta região, ficando preso à essa resposta.

Essa situação não é observada quando são utilizadas malhas mais grosseiras. Ao contrário do problema descrito no parágrafo anterior, a malha menos refinada gera uma aproximação do campo de tensões menos perfeita, resultando em uma pior representação da função de otimização. Dessa forma, os mínimos locais que apresentam uma pequena variação nesta função não são identificados no processo de otimização. Por este motivo, é mais provável que o algoritmo chegue até o ponto ótimo global, pois somente grandes variações podem ser identificadas na aproximação da função de otimização.

Dessa forma, percebe-se que existe um valor ideal para densidade da malha de elementos finitos. Este valor representaria a melhor discretização da estrutura que pode-se utilizar, sem que o algoritmo de otimização encontre problemas de mínimos locais. Claramente observa-se que para cada problema esse valor ótimo é diferente, pois a função de otimização não é a mesma. A análise de outros problemas nesse trabalho buscará um valor típico para essa densidade, quando se utiliza os métodos implementados.

Os tempos de processamento do código de otimização apresentados neste exemplo foram muito semelhantes aos obtidos no Item 5.1. Para a primeira malha foram somente alguns segundos e para a segunda malha foram aproximadamente 4 minutos. Já para a terceira malha, o processo levou aproximadamente 5 horas. Vale citar que esse tempo de processamento para a terceira malha, mesmo sendo bastante elevado em relação aos demais, não foi um obstáculo para que o processo fosse executado diversas vezes em busca do ótimo global, como demonstrado na Figura 31.

#### 5.4. Análise de Confiabilidade: Exemplo 2 – Chapa em balanço

Os resultados obtidos no item 5.3 serão analisados quanto à confiabilidade estrutural. Inicialmente, a geometria analisada será a geometria final obtida pela otimização. Será utilizada também a *segunda malha* para análise de elementos finitos. Esta escolha foi baseada baseado nos mesmo argumentos do Item 5.2.

Para a análise de confiabilidade foi utilizado, novamente, um tamanho de 10 mil amostras para a Simulação de Monte Carlo. Os modos de falha analisados também são como no Item 5.2, a comparação entre tensões de Von Mises máximas e tensão de escoamento em cada elemento finito da malha.

Para este exemplo, os parâmetros do material foram ligeiramente diferentes do exemplo anterior. Foi mantido o coeficiente de Poisson em 0,3 e módulo de elasticidade  $Y=210$  GPa, com chapa de espessura de 1 cm. O valor da tensão de escoamento foi analisado como uma variável de incerteza, com valores em torno de  $35 \text{ kN/cm}^2$ .

Além da tensão de escoamento, como incertezas associadas foram considerados também o módulo da força aplicada e seu ângulo em relação a vertical ( $\alpha$ ). O ângulo ( $\alpha$ ) é análogo ao utilizado no Item 5.2, como pode-se verificar na Figura 21. Porém, neste caso, é o ângulo entre a força aplicada e a direção vertical. Neste exemplo, foram analisados 3 diferentes casos, todos eles já iniciaram com todas as variáveis aleatórias incorporadas, sendo que para cada um foi considerado um diferente valor para variação do ângulo  $\alpha$  ( $-15$  e  $+15^\circ$  para Caso 1,  $-30$  e  $+30^\circ$  para Caso 2,  $-45$  e  $+45^\circ$  para Caso 3). O resultado é mostrado na Tabela 4.

Tabela 4: Resultados da análise de confiabilidade para o Item 5.4

	Variáveis aleatórias	Tipo de Distribuição	Média	Desvio padrão	Resultado de Probabilidade de Falha
<b>Caso 1</b>	Tensão Escoamento [ $\text{kN/cm}^2$ ]	Normal	35,0	1,0	9,86%
	Força Nodal [kN]	Normal	4,0	0,4	
	Ângulo $\alpha$ [graus]	Uniforme	0	8,66025	
<b>Caso 2</b>	Tensão Escoamento [ $\text{kN/cm}^2$ ]	Normal	35,0	1,0	13,89%
	Força Nodal [kN]	Normal	4,0	0,4	
	Ângulo $\alpha$ [graus]	Uniforme	0	17,3205	
<b>Caso 3</b>	Tensão Escoamento [ $\text{kN/cm}^2$ ]	Normal	35,0	1,0	14,60%
	Força Nodal [kN]	Normal	4,0	0,4	
	Ângulo $\alpha$ [graus]	Uniforme	0	25,98076	

Neste exemplo não foram analisados casos com menor número de variáveis aleatórias, pois no Item 5.2 esse tipo de análise foi feita, visando certificar a validação do código construído. Nesta etapa, considera-se que essa validação já está corretamente realizada.

Vale observar também que o desvio padrão para a distribuição uniforme é dada pela Eq. (4.13), como no Item 5.2. Portanto os valores de desvio padrão para ângulo ( $\alpha$ ) mostrados na Tabela 4 são resultados da aplicação desta equação para variação do ângulo entre  $(-15^\circ; +15^\circ)$ ,  $(-30^\circ; +30^\circ)$  e  $(-45^\circ; +45^\circ)$  para os Casos 1, 2 e 3, respectivamente.

Conforme resultados apresentados na Tabela 4, pode-se concluir sobre a influência da incerteza do ângulo de aplicação da força na confiabilidade da estrutura. Percebe-se que o aumento dessa incerteza gera uma diminuição na confiabilidade. Porém não é um efeito muito acentuado, como no exemplo anterior. Na Tabela 3 percebe-se que, na outra estrutura, ao aumentar a variação do ângulo ( $\alpha$ ) de  $(-15^\circ; +15^\circ)$  para  $(-45^\circ; +45^\circ)$  a probabilidade de falha cresce de 35,35% para 73,16%. Enquanto nesta mesma comparação para esta estrutura, a probabilidade cresce de 9,86% para 14,60%. Claramente observa-se que houve um aumento no valor, porém não tão grande como se observou no exemplo anterior.

Como foi realizado no Item 5.2 a análise seguinte consiste em executar o código de otimização topológica novamente, buscando obter a geometria ótima para uma redução de material de 30%. Dessa forma, a confiabilidade pode ser analisada em três diferentes geometrias para este mesmo problema: 0%, 30% e 60% de material removido. Sendo que para 0% é utilizada a geometria inicial do problema, sem nenhuma alteração e 60% é a geometria ótima já analisada (como resultados da Tabela 4). A Figura 32 ilustra as três geometrias utilizadas.

Para estas geometrias, foram analisado os casos 1, 2 e 3 da Tabela 4. Isso significa que será possível analisar as interferências tanto da quantidade de material removido, quanto da amplitude de variação do ângulo da força aplicada. Portanto, tem-se 9 casos a serem analisados nesta etapa (3 diferentes geometrias, como mostrando na Figura 32, com 3 amplitudes de variação do ângulo  $\alpha$  para cada uma). Os resultados são apresentados na Figura 33 em forma de gráfico.

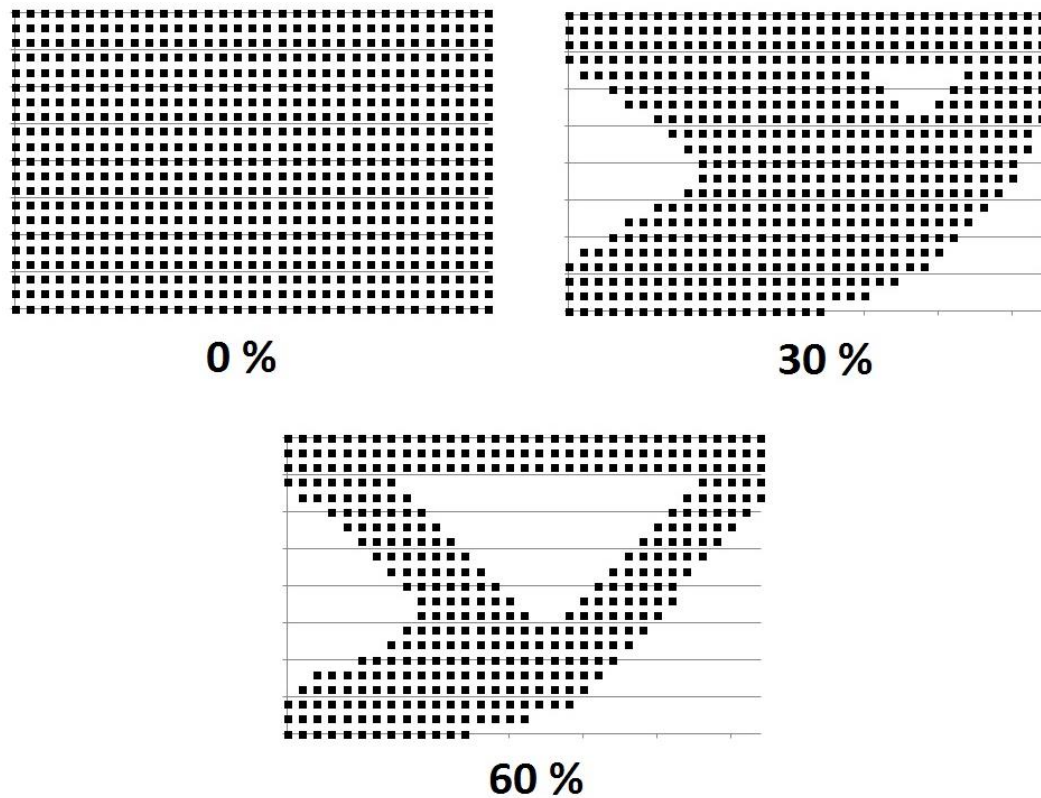


Figura 32: Diferentes geometrias analisadas quanto à confiabilidade no Item 5.4

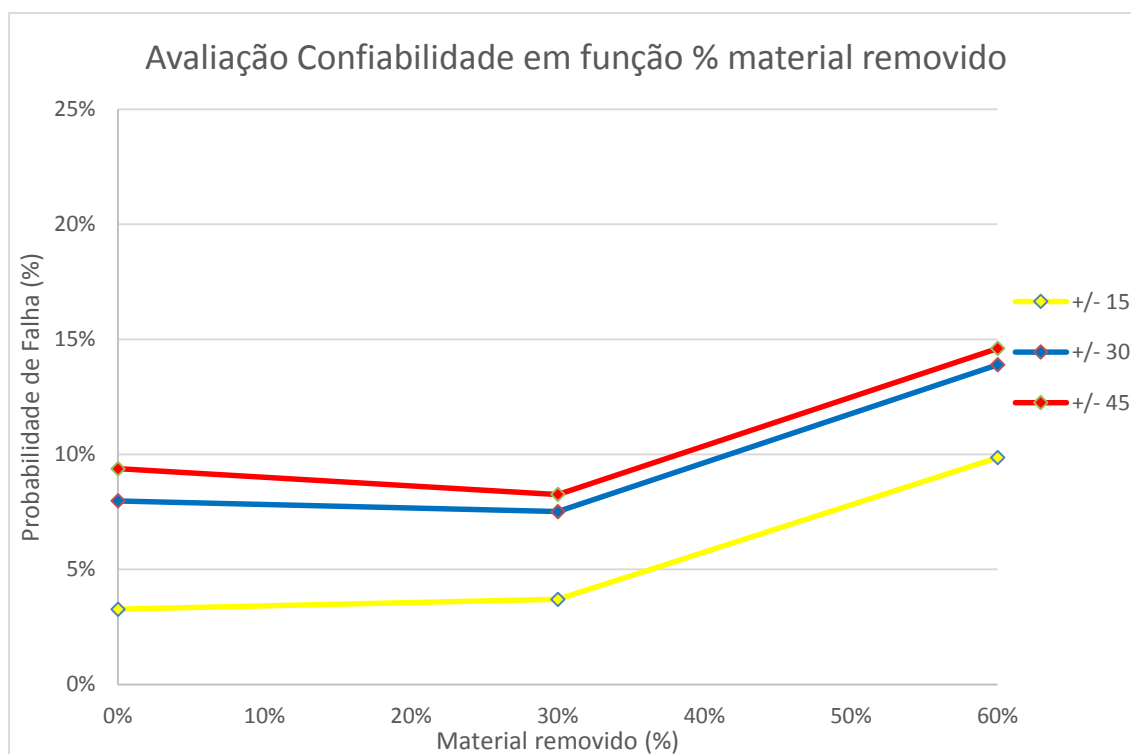


Figura 33: Resultados da confiabilidade para o item 5.4

Conforme apresentado na Figura 33, pode-se concluir que o aumento na porcentagem de material removido da estrutura reduz sua confiabilidade consideravelmente a partir dos 30%. Ainda é destacada a comparação entre as duas geometrias com 0% e 30% de material removido, onde houve uma redução da probabilidade de falha para os casos 1 e 2. Considerando o erro estatístico ao qual o resultado da Simulação de Monte Carlo está sujeito, pode-se considerar que estes dois resultados representam um mesmo valor de probabilidade de falha.

Finalmente, conclui-se que, segundo resultados da Figura 33, tanto a amplitude da variação do ângulo de aplicação da força e a porcentagem de material removidas influenciam de forma ligeiramente negativa para a confiabilidade estrutural. Diminuindo de forma sutil a robustez da estrutura quando se aumenta o material removido ou a amplitude de variação deste ângulo. Porém, deve-se ressaltar que essa influência não é tão acentuada como no Item 5.2, pois percebe-se que os valores de probabilidade de falha sofrem um aumento discreto, não atingindo valores muito elevados em relação à geometria inicial.

Para explicar esse comportamento diferente do ocorrido no Item 5.2, deve-se observar o tipo de carregamento atuante na estrutura, através da Figura 24. Pode-se analisar que a força concentrada na extremidade direita da estrutura acarreta um esforço de força cortante constante e momento fletor que vai de zero na extremidade direita até seu valor máximo próximo ao apoio. Conclui-se que a tensão predominante na estrutura é a tensão normal ao longo do eixo horizontal da estrutura, representada pela fórmula geral da flexão, segundo Hibbeler (2010), como mostra a Eq. (5.6):

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_{f_z} y}{I_z} + \frac{M_{f_y} z}{I_y} \quad (5.6)$$

Para o problema analisado, a parcela da tensão associada aos momentos fletores são maiores do que a parcela atribuída à força normal. Isso acontece devido às variáveis multiplicadoras desses esforços na Eq. (5.6). O que ocorre neste exemplo é que, ao aumentar a amplitude da incerteza no ângulo de aplicação da força concentrada, é aumentada a parcela de força normal atuante na estrutura.

Em outras palavras, a estrutura já está inicialmente solicitada na condição crítica, ou seja, flexão. Por este motivo, mudar as condições iniciais não influencia significativamente no resultado de confiabilidade estrutural.

O oposto desse efeito é observado no exemplo anterior (Itens 5.1 e 5.2), pois, segundo a Figura 10 percebe-se claramente que a força externa aplicada gera, inicialmente, um esforço predominantemente de tração pura. Então, ao aumentar a amplitude da incerteza no ângulo de aplicação desta força, é aumentada a parcela vertical, a qual causa o esforço de momento fletor. O aumento desse tipo de esforço causa um crescimento significativo da tensão normal, pois aumenta seu fator predominante. Dessa forma, a confiabilidade da estrutura cai consideravelmente ao aumentar a variação do ângulo ( $\alpha$ ).

Finalmente, conclui-se que neste exemplo foram obtidos todos os resultados esperados fisicamente, a partir das simulações implementadas. Foi observado também que as geometrias encontrados pela otimização topológica se apresentaram mais robustas do que no Item 5.2. Pois o aumento na porcentagem de material removido não causou grande variação no resultado da confiabilidade estrutural. Porém, se confirmou que houve um ligeiro aumento na probabilidade de falha, devido ao caráter altamente particularizado do resultado final da otimização topológica, que torna a estrutura vulnerável à variações nos parâmetros geométricos e físicos do problema inicial.

### **5.5. Exemplo 3: Chapa em balanço – Força central**

Este exemplo consiste na análise de uma estrutura com a mesma geometria do Item 5.3. Porém, a força  $P = 3000N$  é aplicada no centro da face direita do domínio, e não mais na sua extremidade superior. Todos os outros parâmetros e geometria são equivalentes ao Item 5.3. A Figura 34 ilustra a geometria, carregamentos aplicados e apoios dessa estrutura. Neste exemplo busca-se a otimização para 40% do volume inicial de material.

As malhas utilizadas para análise via MEF também são as mesmas do exemplo anterior e somente o critério de Von Mises é utilizado. Esta escolha foi feita com base em comparações anteriores, que já mostraram a equivalência das respostas entre a utilização do critério de Rankine e Von Mises. Vale lembrar que os parâmetros de densidade da malha valem, respectivamente 6,25 milésimos e 1,56 milésimos para as malhas 1 e 2, respectivamente. Isso significa que, em comparação com os exemplos executados nesse trabalho, a segunda malha apresenta a densidade mais próxima da ideal para o processo de otimização.



Figura 34: Estrutura inicial do Exemplo 3

Para a primeira malha foram utilizados os parâmetros  $RR_i = 2,0\%$  e  $ER = 1,0\%$ . Já para a segunda malha,  $RR_i = 0,25\%$  e  $ER = 0,05\%$  (um quinto de ' $RR_i$ '). Destaca-se que os parâmetros da segunda são consideravelmente menores, devido aos problemas de influência de malha e de mínimos locais já comentado. A Figura 35 mostra as geometrias ótimas encontradas para ambas as malhas.

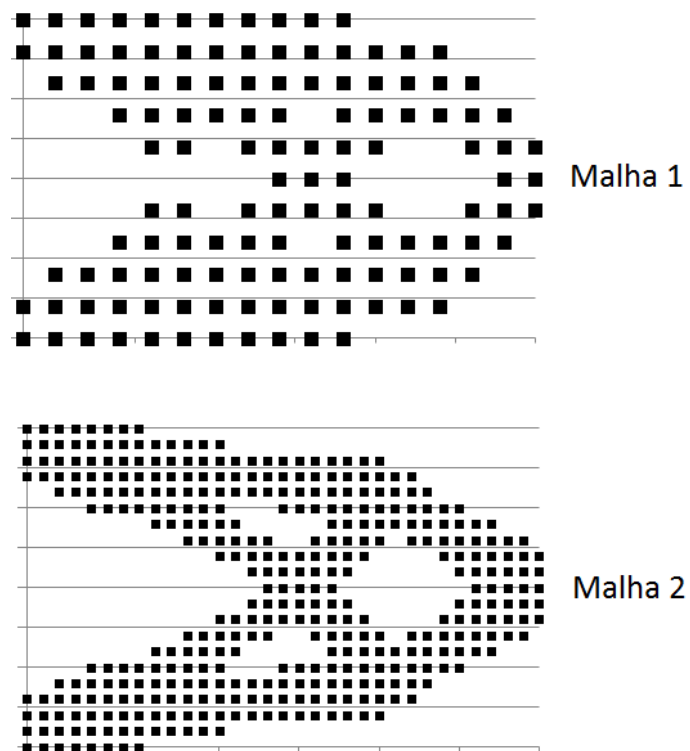


Figura 35: Geometrias ótimas encontradas para o Item 5.5

A Figura 36 mostra a evolução da geometria na otimização topológica, quando foi utilizada a segunda malha. Esta malha se mostrou mais adequada, tanto pelo parâmetro de densidade quanto pelas respostas observadas na Figura 35.

A Figura 37 é utilizada para resumir do processo evolutivo para os parâmetros ‘RR<sub>i</sub>’ e porcentagem de material removido em relação ao volume inicial (denominado Retirada de material). Vale observar que estes gráficos não se distanciaram do padrão desenvolvido nos processos de otimização dos exemplos anteriores.

Para validar a respostas desse exemplo, a estrutura ótima encontrada na literatura é mostrada na Figura 38. Claramente, percebe-se a semelhança entre esta e o resultado da segunda malha, o que demonstra que a resposta está coerente com o esperado. A primeira malha apresenta apresentou algumas disparidades. Porém, pode-se atribuir estas diferenças à falta de resolução da discretização que essa malha apresenta, ou seja, o elevado tamanho dos elementos finitos. Levando em consideração este fator, também pode-se dizer que a resposta confere com o esperado, devido à forma da geometria e até o número de buracos internos abertos na estrutura. Estas constatações mostram que não houveram problemas numéricos, interferência da malha ou problemas de mínimos locais para esse exemplo analisado.

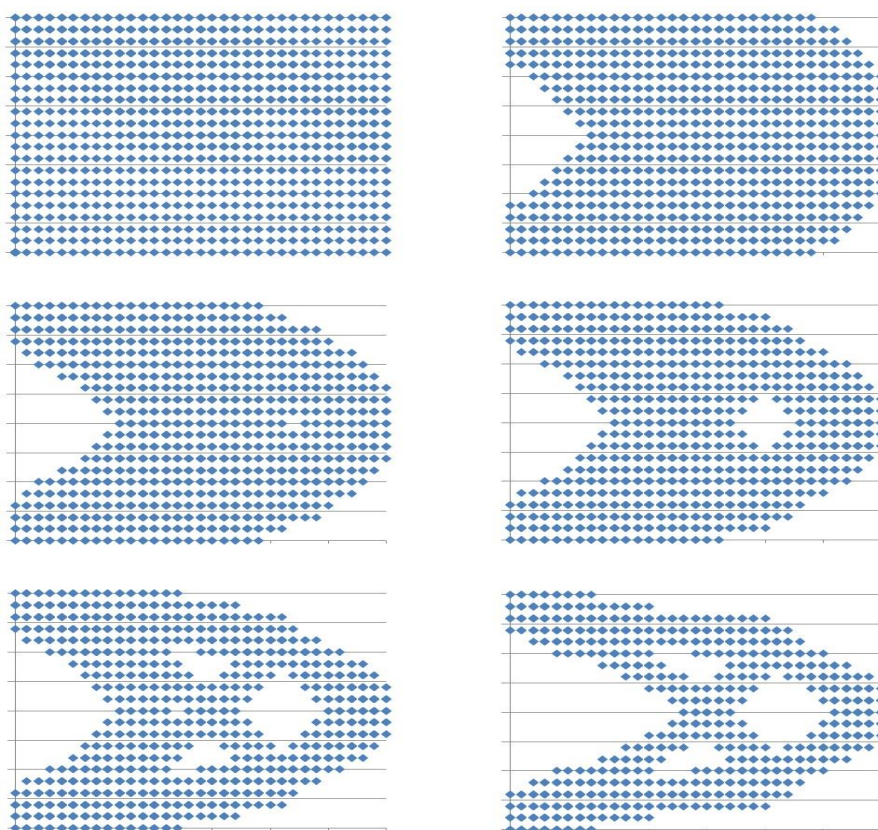


Figura 36: Evolução da geometria para malha 2 do item 5.5



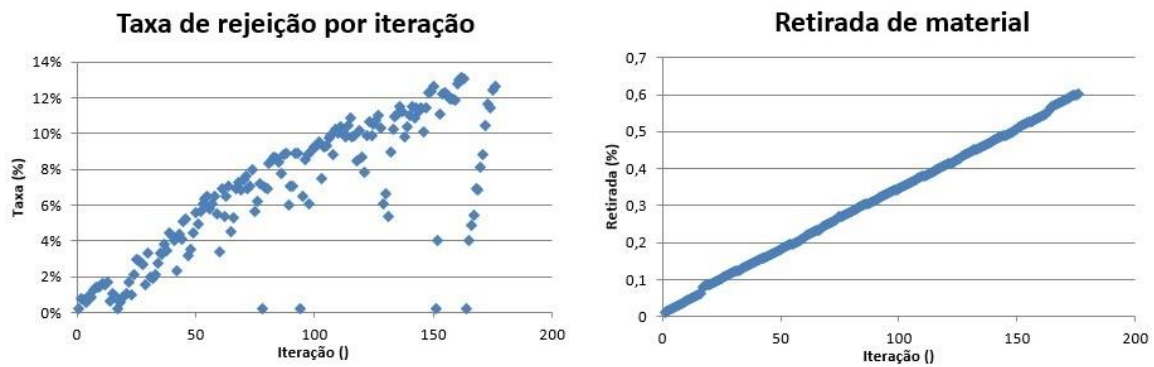


Figura 37: Evolução dos parâmetros da otimização para malha 2 no item 5.5

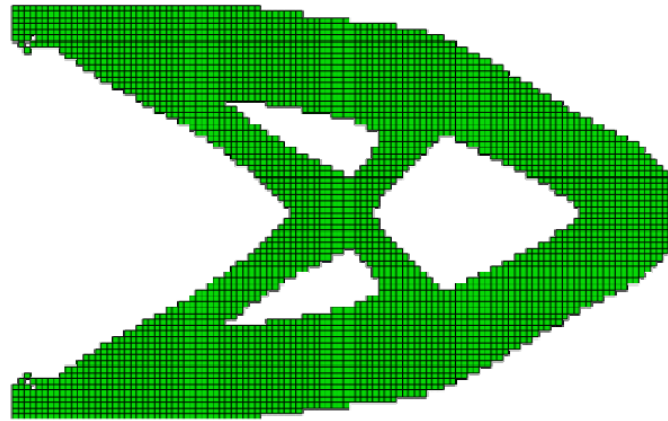


Figura 38: Topologia ótima para o Exemplo 3 encontrada na literatura  
 FONTE: LANES, 2013, p. 61.

Como no exemplo anterior, constatou-se que para a primeira malha o resultado foi correto, porém a geometria fica mal representada devido à falta de refinamento da malha. Já para a segunda malha, o resultado obtido foi exatamente como esperado, e a geometria apresentou boa qualidade, devido ao refinamento da malha. A terceira malha do Item 5.3 não foi utilizada, pois a análise de seus resultados indicou que esta encontraria problemas com mínimos locais. Além disso, o Item 5.3 também já demonstrou que a segunda malha apresenta um refinamento aceitável e não encontra esses problemas.

Os resultados desse exemplo evidenciam que a densidade da malha, ou seja, a relação entre a área do elemento finito e a área da estrutura apresenta um valor ideal próximo à densidade dessa segunda malha, segundo Eq. (5.7):

$$\rho_m = 1,56 * 10^{-3} \quad (5.7)$$

Isso significa que valores muito menores do que esse resultam em pouca qualidade da aproximação da geometria, já valores muito maiores, resultam em dificuldades numéricas para encontrar o ótimo global. Essa situação pode ser analisada também no Item 5.1, onde todas as malhas utilizadas resultaram na geometria esperada (devido à simplicidade do exemplo), porém observa-se que a segunda malha, com  $\rho_m = 1,25 * 10^{-3}$  resultou em uma geometria correta e também uma boa aproximação. Esse valor está bastante próximo do apresentado na Eq. (78), o que contribui para validação da hipótese.

Conclui-se que, genericamente, pode-se dizer que para exemplos futuros utilizando estes métodos, uma malha com aproximadamente esse valor de densidade resultará em uma resposta satisfatória, não presa a mínimos locais e com uma aproximação adequada.

### **5.6. Análise de Confiabilidade: Exemplo 3 – Chapa em balanço – Força Central**

Neste item será realizada a análise de confiabilidade para a estrutura otimizada no item 5.5. A primeira análise se dá com a geometria final obtida pela otimização. Será utilizada também a segunda malha do Item 5.5 para análise via MEF.

Para a análise de confiabilidade foi utilizado um tamanho de 10 mil amostras para a Simulação de Monte Carlo. Os modos de falha analisados são as tensões de Von Mises máximas em cada elemento finito da malha. Considera-se falha quando a tensão atuante é maior do que a tensão de escoamento do material.

Neste exemplo, os parâmetros foram exatamente iguais aos do Item 5.4, pois trata-se da mesma estrutura, somente o ponto de aplicação da carga foi modificado. Portanto, tem-se coeficiente de Poisson igual a 0,3 e módulo de elasticidade  $Y=210$  GPa, com chapa de espessura de 1 cm. O valor da tensão de escoamento foi considerado como uma variável de incerteza do problema, com mesmos parâmetros do item anterior citado.

Além da tensão de escoamento, como incertezas associadas foram considerados também a intensidade da força aplicada e seu ângulo em relação a vertical ( $\alpha$ ). Exatamente como no Item 5.4. Foram analisados os mesmos casos de variáveis aleatórias. A Tabela 5 foi construída, replicando os dados de variáveis aleatórias da Tabela 4 e indicado os resultados das análises de confiabilidade executada neste exemplo.

Tabela 5: Resultados da análise de confiabilidade para o Item 5.6

	Variáveis aleatórias	Tipo de Distribuição	Média	Desvio padrão	Resultado de Probabilidade de Falha
<b>Caso 1</b>	Tensão Escoamento [kN/cm <sup>2</sup> ]	Normal	35,0	1,0	3,25 %
	Força Nodal [kN]	Normal	4,0	0,4	
	Ângulo $\alpha$ [graus]	Uniforme	0	8,66025	
<b>Caso 2</b>	Tensão Escoamento [kN/cm <sup>2</sup> ]	Normal	35,0	1,0	3,10 %
	Força Nodal [kN]	Normal	4,0	0,4	
	Ângulo $\alpha$ [graus]	Uniforme	0	17,3205	
<b>Caso 3</b>	Tensão Escoamento [kN/cm <sup>2</sup> ]	Normal	35,0	1,0	2,17 %
	Força Nodal [kN]	Normal	4,0	0,4	
	Ângulo $\alpha$ [graus]	Uniforme	0	25,98076	

O desvio padrão para a distribuição uniforme indicada na Tabela 5 é dada pela Eq. (4.13). Portanto, os casos 1, 2 e 3 apresentam uma variação do ângulo ( $\alpha$ ) entre (-15°; +15°), (-30°; +30°) e (-45°; +45°), respectivamente.

Os resultados de confiabilidade apresentados na Tabela 5 mostram que a probabilidade de falha desta estrutura pouco é afetada pela incerteza no ângulo ( $\alpha$ ) de aplicação da força. Essa influência fica ainda menor do que foi observado no Item 5.4. A partir da consideração de todas as incertezas do problema, o valor da probabilidade não foi alterado significativamente com o aumento de ( $\alpha$ ). Em alguns casos houve uma diminuição neste valor. Em todos os outros exemplos analisados foi possível caracterizar o efeito negativo desse parâmetro na confiabilidade estrutural, mesmo que de forma sutil. Nesse caso, pode-se dizer que a diferença nos valores obtidos para os casos 1, 2 e 3 ficam dentro do erro estatístico ao qual o resultado da Simulação da Monte Carlo está sujeito.

Em seguida, outra análise foi realizada com base nesse exemplo. Foi analisado a confiabilidade com outras geometrias. Para isso, o código de otimização topológica foi executado, buscando obter a geometria ótima para uma redução de material de 30%. Dessa forma, a confiabilidade pode ser analisada em três diferentes geometrias para este mesmo problema: 0%, 30% e 60% de material removido. Sendo que para 0% é utilizada a geometria inicial do problema, sem nenhuma alteração. Já para 60% é utilizada a geometria ótima já analisada (como resultados da Tabela 5). A Figura 39 ilustra as três geometrias utilizadas.

Para estas geometrias, foram analisados os casos 1, 2 e 3 da Tabela 5. O objetivo aqui é avaliar a influência da quantidade de material removido e da amplitude de variação do ângulo da força aplicada no resultado de confiabilidade estrutural. Portanto, tem-se 9 casos a serem analisados (3 diferentes geometrias, como mostrando na Figura 39 e 3 diferentes amplitudes de variação de  $\alpha$  para cada uma). Os resultados são apresentados em forma de gráfico, na Figura 40.

Analisando os resultados apresentados Figura 40, pode-se obter as seguintes conclusões: como já citado, a amplitude de variação do ângulo ( $\alpha$ ) pouco influi no resultado da probabilidade de falha. Além disso, percebe-se que o aumento na porcentagem de material removido na estrutura diminui sua confiabilidade, principalmente a partir dos 30% de material removido. Esse comportamento já foi visualizado em exemplos anteriores. Porém, este aumento não é muito acentuado.

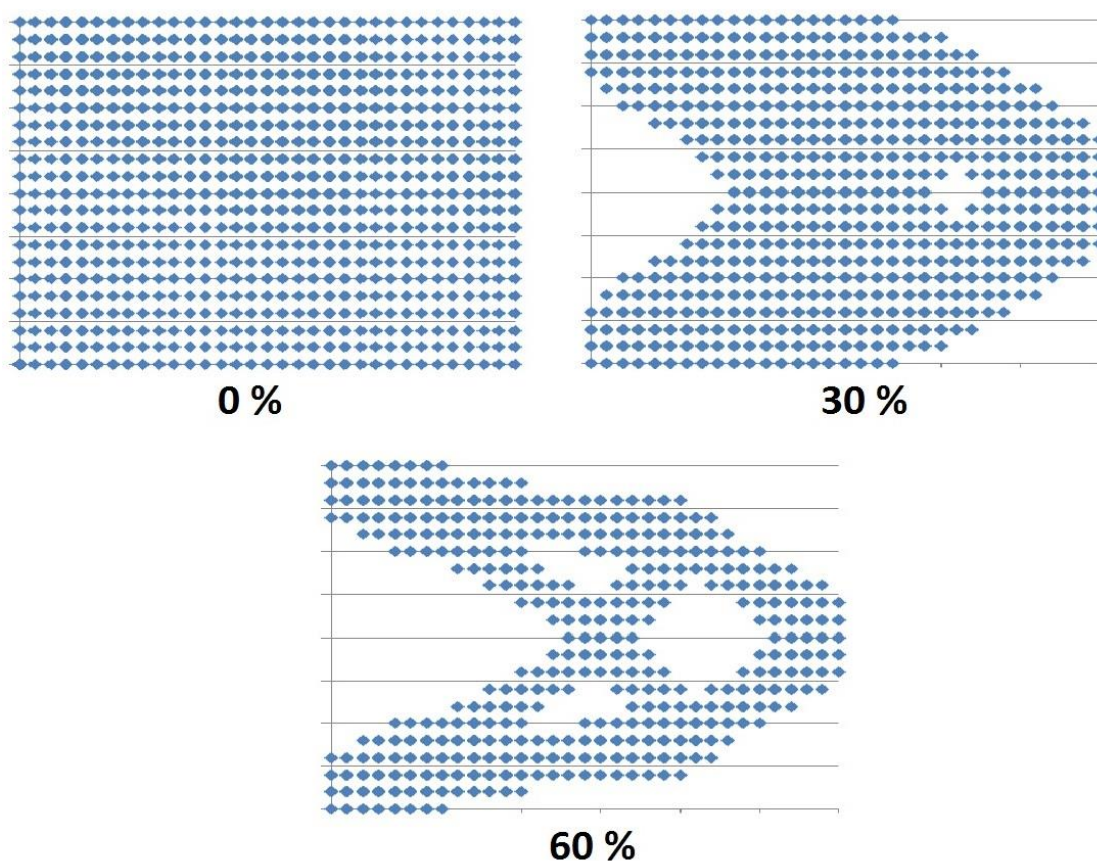


Figura 39: Diferentes geometrias analisadas quanto à confiabilidade no Item 5.6

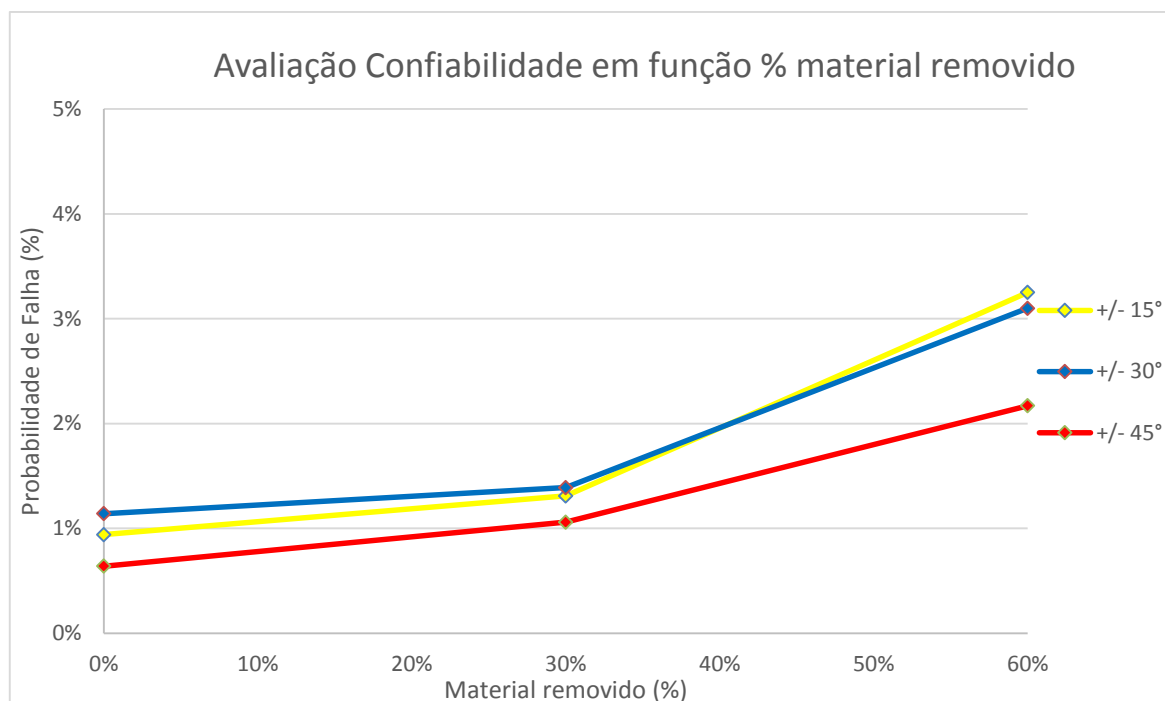


Figura 40: Resultados da confiabilidade para o item 5.6

Ainda analisando os resultados da Figura 40, percebe-se que essa pequena diferença nos valores de probabilidade de falha encontra-se dentro do erro estatístico ao qual a resposta do método de cálculo da confiabilidade está sujeito. Portanto, pode-se concluir que a confiabilidade da estrutura também é pouco afetada pela porcentagem de remoção de material. Porém, fica claro a tendência de aumento da probabilidade de falha com o evolução da retirada de material pela otimização topológica, principalmente após os 30% de material removido.

O resultado mais peculiar deste exemplo, segundo apresentado na Figura 40 é o fato de que os casos analisados quando ( $\alpha$ ) varia entre (-45°; +45°) apresentaram uma probabilidade abaixo dos outros casos. Esse comportamento é o oposto do que foi avaliado em outros exemplos. Nesse caso, fica claro a influência da flexão na solicitação de tensão da estrutura, pois quanto maior a variação do ângulo, mais próxima a força fica de realizar um esforço de tração pura. Como explicado no Item 5.4, a partir da Eq. (5.6), a flexão domina a tensão atuante nesta estrutura, enquanto a tração representa uma menor influência e menor parcela de tensão.

Nessa análise conclui-se que, quanto mais próximo da flexão pura estiver a solicitação da estrutura, maior será a tensão normal final e portanto mais crítico será o estado de tensão estrutural. Isso explicou, no Item 5.4, o pequeno aumento da probabilidade de falha com o

aumento da variação de  $(\alpha)$ . Neste item essa análise fica ainda mais evidente, pois quando a variação de  $(\alpha)$  aproxima-se mais da direção horizontal (que seria a tração pura) a probabilidade de falha sofre uma diminuição.

Finalmente, conclui-se que neste exemplo os resultados obtidos a partir das simulações apresentam um significado físico coerentemente. Foi observado que, em comparação com o exemplo da chapa em balanço (Itens 5.3 e 5.4), essa estrutura se mostrou mais robusta. Pois foram utilizados os mesmos valores para todos os parâmetros e, ao final, os resultados de confiabilidade apresentados foram maiores nesta estrutura para todos os casos. Além disso, foi demonstrado que nesse exemplo a confiabilidade é menos afetada pelo aumento das incertezas associadas e pela quantidade de material removida pela otimização.

## 6. CONCLUSÃO

Ao fim da realização desse trabalho, foi possível elaborar várias conclusões. Primeiramente, o MEF com elementos isoparamétricos lineares que foi utilizado se mostrou confiável e poderoso para resolver inúmeros problemas de estruturas, tanto isostáticas como hiperestáticas. Diferentemente dos métodos analíticos, este se mostrou capaz de analisar mecanicamente diferentes geometrias de estruturas, quando se trata de problemas planos. Vale citar que estruturas tridimensionais não fizeram parte do escopo do trabalho, os elementos finitos utilizados se limitam à estruturas 2D, com esforços aplicados no mesmo plano e identificando a espessura do elemento, na dimensão 'z'. Porém, este seria um interessante tema de pesquisa futuro, visando dar continuidade à esse trabalho.

Outro ponto importante a ser citado nesta conclusão é a utilização de elementos com respostas lineares. Este aspecto facilitou a modelagem de problemas reais, simplificando a representação de esforços e apoios. Segundo o projeto de iniciação científica conduzido por este mesmo autor (RODRIGUES NETO, 2014), onde foram estudados elementos finitos de ordem linear e quadrática, a ordem superior gera uma resposta muito mais precisa e rica, quando comparado elemento à elemento. Porém, ao refinar suficientemente a malha da estrutura, mesmo ao utilizar elemento de ordem menor, o resultado final pode chegar a ser satisfatório, pois o refinamento da malha faz com que a discretização do domínio seja próxima o suficiente da continuidade para que a aproximação do campo de tensões do elemento seja adequada. Outro ponto levado em consideração nesse trabalho foi o tempo de execução do código, pois ao realizar a análise de confiabilidade, o mesmo modelo deve ser executado dezenas de milhares de vezes e nesse ponto o elemento linear apresenta uma grande vantagem.

Em seguida, a implementação da otimização topológica baseada no algoritmo ESO utilizando o MEF como modelo mecânico para obter tensões e deformações se mostrou corretamente executada, pois foi possível chegar a soluções coerentes com as encontradas na literatura. Nesse ponto vale citar, com grande importância, que não foram encontradas inconsistências numéricas do tipo tabuleiro de xadrez, a qual a literatura cita como um problema bastante comum neste tipo de abordagem. Problemas de dependência de malha e ótimos locais foram encontrados ao se utilizar malhas bastante refinadas nos últimos exemplos, o que também não está fora do esperado. Dessa forma, os resultados obtidos pelo

algoritmo implementado concluíram que este é muito eficaz e leva à bons resultados de otimização.

Também é importante observar as limitações encontradas na utilização do algoritmo. Como ocorreu no Item 5.3, utilizando a malha mais refinada não foi possível chegar na geometria coerente com a encontrada na literatura, caracterizando um problema de ótimos locais. Foi constatado que ao utilizar uma malha muito refinada, a função de otimização passa a ser mais perfeitamente aproximada. Dessa forma o processo de otimização fica mais suscetível a identificar um ponto de mínimo local e, uma vez identificado, o algoritmo implementado não é capaz de sair deste mínimo. A literatura já prevê que estes problemas são comuns nesta abordagem e descreve alguns métodos para evita-los (Cap. 3 da Formulação Teórica). Porém nesse trabalho foi dado foco à utilização do algoritmo evolutivo puro, para que os esforços pudessem também ser aplicados aos outros tópicos. Vale citar que este seria um ponto de possibilidade de continuidade dessa pesquisa no futuro, o estudo e aprimoramento do algoritmo para evitar os problemas citados.

Conforme os exemplos estudados, foi encontrada uma densidade de malha que agregou tanto um refinamento adequado, quanto uma resposta satisfatória (ou seja, sem problemas de mínimos locais ou outros citados pela literatura). Esse valor foi chamado de “densidade de malha ideal” para o método implementado.

O passo seguinte foi a implementação da análise de confiabilidade, a qual foi realizada utilizando a Simulação de Monte Carlo Direta. Este objetivo também foi alcançado, sendo que sua utilização possibilitou a análise das geometrias ótimas encontradas para todos os exemplos executados no projeto. Segundo citado no Cap. 4 da Formulação Teórica, esse método é bastante custoso computacionalmente, pois é necessário um número muito elevado de repetições para que o estimador da probabilidade de falha se aproxime do valor real. Em todos os exemplos foram utilizadas 10 mil repetições, o que resulta na avaliação precisa de probabilidades de falha na ordem de  $10^{-2}$  até  $10^{-3}$ . Esse valor com certeza poderia ser melhor, utilizando um tamanho maior de amostra, porém devido ao grande número de vezes que essa análise seria executada nesse trabalho, foi escolhido que esse valor seria suficiente para os resultados procurados. Vale citar também que este seria outro ponto de possível continuidade dessa pesquisa no futuro, o estudo e implementação de outras metodologias de análise de confiabilidade estrutural, mais eficientes e menos custosas computacionalmente.



Finalmente, a Simulação de Monte Carlo foi escolhida pela sua simplicidade de implementação e didática, onde tratamentos e formulações estatísticas podem facilmente serem descartados, dessa forma esforços puderam ser mais aproveitados no estudo da física e engenharia dos problemas.

Como já se esperava, a confiabilidade confirmou que o resultado da otimização topológica gera uma estrutura efetivamente mais propensa ao colapso do que a geometria inicial. Além disso, em alguns exemplos essa estrutura se mostrou fortemente específica para as condições iniciais consideradas na otimização, pois a variação de parâmetros geométricos da estrutura levou à uma diminuição considerável da confiabilidade estrutural. Em outros exemplos o efeito observado foi diferente, porém todos tiveram seu significado físico estudado e explicado.

Por fim, este trabalho se mostrou de grande valor, tanto no estudo da formulação teórica como na aplicação dos métodos propostos. Tais métodos tem uma vasta área de aplicação e sua utilização é muito importante para a engenharia em geral. A realização desse trabalho foi de enorme importância para o desenvolvimento acadêmico, aumento do conhecimento e ganho de experiência para o aluno. Além disso, também trouxe uma grande motivação para dar sequência à sua vida acadêmica, deixando possibilidades de utilização deste trabalho como ponto de partida para o desenvolvimento de outros projetos de pesquisa no futuro na área da mecânica computacional.



## 7. REFERÊNCIAS

- ANG, A.H.-S.; TANG, W.H. **Probability concepts in engineering planning and design**, v.2, New York: John Wiley & Sons, 1984.
- BENDSØE, M.P.; SIGMUND, O. **Topology optimization: Theory, Methods and Application**. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- BORTOLI, A.L.; CARDOSO, C.; FACHIN, M.P.G.; CUNHA, R.D. **Introdução ao Cálculo Numérico**. 2ª ed. Departamento de matemática pura e aplicada, Instituto de matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001.
- CHAPMAN, S.J. **Fortran 95/2003 for Scientists and Engineers**. 3<sup>rd</sup>. Edition. McGraw-Hill, 2008.
- CHU, D. N.; XIE, Y. M.; HIRA, A.; STEVEN, G. P. Evolutionaty Structural optimization for problems with stiffness constraints. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 21, 1996. p. 239-251.
- COUTINHO, K.D. **Método de otimização topológica em estruturas tridimensionais**. 2006. 96 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.
- DÍAZ, A.; SIGMUND, O. (1995) Checkerboard Patterns in Layout Optimization. **Structural Optimization**, v. 10, p. 40-45, 1995. Disponível em: [http://www.giref.ulaval.ca/~deteix/bois/documents\\_references/sigmund1995.pdf](http://www.giref.ulaval.ca/~deteix/bois/documents_references/sigmund1995.pdf) .Acesso em: 10 jul. 2016.
- DOMENEGHETTI, G. **A expressão da incerteza de medição em ensaios mecânicos: ISSO GUM e Monte Carlo aplicados no ensaio de tração**. 2011. 121 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Sociedade Educacional de Santa Catarina – Instituto Superior Tupy, Joinville, 2011.
- FERNANDES, W.S. **Estudo de otimização topológica em estruturas 2D considerando a não linearidade geométrica**. 2013. 100 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2013.
- HIBBELER, R.C. **Resistência dos Materiais**. 8ª ed. São Paulo: Pearson Hall, 2010.
- JOG, C.S.; HABER, R.B. Stability of finite element model for distributed parameter optimization and topology design. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engineering**. v. 130, 1996. p.203-226.
- LANES, R.M. **Investigação de um método de otimização topológica evolucionária desenvolvido em script**. 2013. 133 f. Tese (Mestrado em Engenharia da Estruturas) – Escola de Engenharia da UFMG, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. 2013.
- LEONEL, E.D. **Modelos não-lineares do Método dos Elementos de Contorno para a análise de problemas de fratura e aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas a fadiga**. 2009. 406p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 2009.

NEVES, R.A. **Desenvolvimento de modelos mecânico-probabilísticos para estruturas de pavimentos de edifícios.**2004. 200 f. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2004.

NOGUEIRA, C.G. **Desenvolvimento de modelos mecânicos, de confiabilidade e de otimização para aplicação em estruturas de concreto armado.**2010. 345 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

NOGUEIRA, C.G.; LEONEL, E.D.; CODA, H.B. Corrosion time initiation modelling considering uncertainties. In: International symposium on uncertainty quantification and stochastic modeling, 1., 2012, Maresias, São Sebastião. **Proceedings...** Maresias, São Sebastião, 2012.

NOWAK, A.S.; COLLINS, K.R. **Reliability of structures**, Boston: McGraw-Hill, 2000.

OLIVEIRA, H.L. **Desenvolvimento de modelos numéricos para análises de otimização topológica probabilística utilizando o método dos elementos de contorno.** 2015. Tese (Exame de qualificação de Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2015.

PELLIZZER, G.P. **Análise mecânica e probabilística da corrosão de armaduras de estruturas de concreto armado submetidas à penetração de cloretos.**2015. 247 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

PITANGUEIRA, R. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos: Notas de aula do Curso Teoria das Estruturas III.** Escola de Engenharia, UFMG, 2003.

QUERIN, O. M. **Evolutionary structural optimization stress based formulation and implementation.**1997. 250 f. Tese de Doutorado. Sydney, Australia: University of Sydney, 1997.

RODRIGUES NETO, A. **Desenvolvimento de um modelo numérico para a otimização de forma de treliças planas considerando comportamento estrutural elastoplástico e incertezas associadas.** 2015. 59 f. Relatório Final (Iniciação Científica) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2015.

RODRIGUES NETO, A. **Modelos numéricos para a análise mecânica de corpos deformáveis utilizando o método dos elementos finitos e elementos isoparamétricos de alta ordem.** 2014. 64 f. Relatório Final (Iniciação Científica) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2014.

ROSS, S. **Probabilidade:** um curso moderno com aplicações. 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

SANCHES, R.P. **Otimização estrutural evolucionária usando malhas hexagonais.**2011. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas – Unicamp, Campinas. 2011.

SANT'ANNA, H.M. **Otimização topológica de estruturas bidimensionais contínuas submetidas a restrições de flexibilidade e tensão.** 2002. 161 f. Dissertação. (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002.

SIGMUND, O. On the design compliant mechanisms using topology optimization. **Mechanics of Structures and Machines**, v. 25, n. 4, 1997. p. 493-524,

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh dependencies and local minima. **Structural Optimization**, Springer-Verlag, v. 16, 1998. p. 68-75.

TANSKANEN, P. The evolutionary structural optimization method: theoretical aspects. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 191, 2002. p. 47-48, 5485-5498,

VITORIO JUNIOR, P.C.; LEONEL, E.D. Level set analysis of topology optimization in 2D structures using boundary element method. **1<sup>st</sup> Pan-American Congress on Computational Mechanics – PANACOM 201**. p. 823-833, 2015.

W. WEAVER, JR.; JOHNSTON, P.R. **Finite Elements for Structural Analysis**. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey. 1984.

XIE, M. Y.; STEVEN, G. P. A simple evolutionary procedure for Structural optimization. **Computer & Structures**, Elsevier, v. 49, n. 5, 1993. p. 885-896.

ZHAO, C.; HORNBY, P.; STEVEN G. P.; XIE, Y. M. A generalized evolutionay method for numerical topology optimization of structures under static loading conditions. **Structural Optimization**, Springer-Verlag, v. 15, n. 3-4, 1998. p. 251-260.

ZHOU, M.; ROZVANY, G. I. N. On the validity of ESO type methods in topology optimization. **Struct. Multidisc Optim.**, Springer-Verlag, v. 21, n. 1, 2001. p. 80-83.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method**. Oxford: Butterworth-Heinemann, Boston, 2000.