

JOSÉ GUILHERME GIL LENHARO

**PROJETO DE METASSUPERFÍCIES PARA
ACOPLAMENTO ASSIMÉTRICO**

São Carlos, SP

2019

JOSÉ GUILHERME GIL LENHARO

**PROJETO DE METASSUPERFÍCIES PARA
ACOPLAMENTO ASSIMÉTRICO**

Monografia apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Eletricista

Universidade de São Paulo – USP
Escola de Engenharia de São Carlos – EESC
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação

Orientador: Prof. Dr. Emiliano Rezende Martins

São Carlos, SP
2019

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

L563p Lenharo, José Guilherme Gil
PROJETO DE METASUPERFÍCIES PARA ACOPLAMENTO
ASSIMÉTRICO / José Guilherme Gil Lenharo; orientador
Emiliano Rezende Martins. São Carlos, 2019.

Monografia (Graduação em Engenharia Elétrica com
ênfase em Sistemas de Energia e Automação) -- Escola de
Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo,
2019.

1. Acoplador direcional. 2. Metassuperfície. 3.
Refração anômala. I. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Nome: José Guilherme Gil Lenharo

Título: “Projeto de metassuperfícies para acoplamento assimétrico”

**Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado
em 25 / 11 / 2019,**

com NOTA 8,5 (oito, cinco), pela Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Emílano Rezende Martins - Orientador - SEL/EESC/USP

Prof. Dr. Leonardo André Ambrosio - SEL/EESC/USP

Prof. Associado Luiz Gonçalves Neto - SEL/EESC/USP

**Coordenador da CoC-Engenharia Elétrica - EESC/USP:
Prof. Associado Rogério Andrade Flauzino**

Este trabalho é dedicado ao vô Gil e à vó Maria, que não concluiram o ensino fundamental, mas lutaram para que nós pudessemos ir para a universidade.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por tudo, aos meus pais pelo apoio emocional e financeiro, aos docentes que se dedicam a manter esse curso, aos orientadores que permitiram a realização desse trabalho e aos meus amigos pelo companheirismo ao longo dessa jornada.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo estudar os efeitos de metassuperfícies aplicadas em acopladores assimétricos. Composto de dois meios com índices de refração distintos, o acoplamento acontece quando a onda transmitida tem ângulo maior que o crítico ao entrar no meio com índice de refração maior. O efeito de refração anômala foi explorado a fim de se conseguir o comportamento assimétrico, para que a maior parte da potência fosse concentrada em um dos lados na propagação. Dois métodos de construção de metassuperfícies foram estudados, um mais simples, baseado em comportamento linear, e um mais complexo, baseado em teoria eletromagnética, para que pudessem ser comparados em questão de eficiência. Os resultados dizem que, neste estudo, ambos possuem eficiências similares e que a eficiência tende a cair drasticamente após atingirmos a condição de acoplamento, sendo esta possível com apenas 60% de eficiência e com ângulos pouco maiores que o ângulo crítico.

Palavras-chaves: Acoplador direcional. Metassuperfície. Refração anômala.

Abstract

The present work aims to study the effects of metasurfaces applied to asymmetric couplers. Consisting of two media with differing refractive index, coupling occurs when the transmitted wave has an angle greater than the critical when entering the medium with a higher refractive index. The anomalous refractive effect was explored in order to achieve asymmetric behavior so that most of the power was concentrated on one side of the propagation. Two methods of constructing metasurfaces were studied, one simpler, based on linear behavior, and one more complex, based on electromagnetic theory, so that they could be compared for efficiency. The results say that in this study both have similar efficiencies and that the efficiency tends to drop dramatically after reaching the coupling condition, which is possible with only 60 % efficiency and at angles slightly bigger than the critical angle.

Key-words: Directional coupler. Metasurfaces. Anomalous refraction.

Listas de ilustrações

Figura 1 – Refração anômala causada por uma metassuperfície.	21
Figura 2 – Guia de onda dielétrico constituído de três regiões básicas, núcleo e cascas. O índice de refração n_2 é maior do que n_1 . Na figura está indicado um raio de luz sofrendo reflexão total.	22
Figura 3 – Difração comum.	23
Figura 4 – Difração anômala.	23
Figura 5 – Exemplo de uma rede <i>blazed</i> binária.	23
Figura 6 – Geometria utilizada na dedução da lei de Snell pelo princípio de Fermat.	27
Figura 7 – Geometria utilizada na dedução da lei de Snell generalizada.	29
Figura 8 – Exemplo de uma Rede de difração e suas ordens difrativas.	31
Figura 9 – Exemplo de uma Rede <i>Subwavelength</i> com um determinado <i>fill factor</i> .	33
Figura 10 – Forma efetiva que a rede <i>Subwavelength</i> é enxergada pela onda incidente.	33
Figura 11 – Exemplo de um mapa de transmissão e fase de uma metassuperfície. Onda incidente com comprimento de 800nm e polarização TE, rede 2D periódica com período de 51,52 nm e espessura 600 nm. Rede e substrato com índice de refração de 2,5.	34
Figura 12 – Exemplo de um mapa de transmissão de uma metassuperfície. Onda incidente com comprimento de 800nm e polarização TE, rede 2D periódica com período no eito Y e espessura 600 nm. Rede e substrato com índice derefração de 2,5.	35
Figura 13 – Exemplo de um mapa de transmissão de uma metassuperfície. Onda incidida com comprimento de 800nm e polarização TE, rede 2D periódica com período no eito Y e espessura 600 nm. Rede e substrato com índice derefração de 2,5.	35
Figura 14 – Perfil da descontinuidade de fase ao longo da interface	36
Figura 15 – Construção de uma metassuperfície que gera refração anômala a partir do mapa de fase.	38
Figura 16 – Perfil de fase calculados com índice de refração do substrado de 2,5, polarização TE, incidência normal, $A_t = \sqrt{\cos \theta_i / \cos \theta_t}$ e transmissão de 15° e seu respectivo perfil lineares em linhas pontilhadas	40
Figura 17 – Mapa de transmissão.	43
Figura 18 – Mapa de fase.	43
Figura 19 – Eficiências das ordens $m = -1$ para perfil de fase linear(preto) e baseado no casamento de impedância e admitância(vermelho)	44
Figura 20 – Eficiência média das ordens difrativas para metassuperfície com perfil de fase linear.	45

Figura 21 – Eficiência média das ordens difrativas para metassuperfície com perfil baseado no casamento de impedância e admitância.	46
Figura 22 – Eficiências de transmissão para superfícies projetadas para transmissão de 15° em relação a normal e com função de descontinuidade de fase a) linear e b) baseada no perfil do casamento de impedância e admitância	47
Figura 23 – Eficiências de transmissão para superfícies projetadas para transmissão de 23, 58° em relação a normal e com função de descontinuidade de fase a) linear e b) baseada no perfil do casamento de impedância e admitância	47
Figura 24 – Eficiências de transmissão para superfícies projetadas para transmissão de 30° em relação a normal e com função de descontinuidade de fase a) linear e b) baseada no perfil do casamento de impedância e admitância	48
Figura 25 – Eficiências de transmissão para superfícies projetadas para transmissão de 45° em relação a normal e com função de descontinuidade de fase a) linear e b) baseada no perfil do casamento de impedância e admitância	48
Figura 26 – Geometria do RCWA	59

Lista de tabelas

Tabela 1 – Discretização e período de cada projeto 45

Listas de símbolos

OP	Caminho ótico
k	Número de onda
d	Distância
θ	Ângulo em relação à normal
n	Índice de refração
ϕ	Descontinuidade de fase
λ	Comprimento de onda
m	Ordem difrativa
N	Número de discretização
p	Tamanho de um meta-átomo
\vec{n}	Vetor normal
\vec{E}	Vetor campo elétrico
\vec{H}	Vetor campo magnético
Y_e	Admitância elétrica
Z_m	Impedância magnética
A_t	Amplitude de transmissão normalizada pela incidência
T	Coeficiente de Transmissão

Sumário

1	INTRODUÇÃO	21
I	REFERENCIAL TEÓRICO	25
2	REFRAÇÃO GENERALIZADA	27
3	PROJETANDO METASSUPERFÍCIES	31
3.1	O mapa de fase de uma metassuperfície	31
3.2	Metassuperfícies para refração generalizada	36
3.3	Superfícies com perfis de fase baseados no casamento de impedância e admitância	38
II	RESULTADOS	41
4	RESULTADOS OBTIDOS	43
5	CONCLUSÃO	51
6	BIBLIOGRAFIA	53
	APÊNDICES	57
	APÊNDICE A – <i>RIGOROUS COUPLED WAVE ANALYSIS</i>	59

1 INTRODUÇÃO

Fotônica é o campo do conhecimento que lida com a interação entre a luz e a matéria, encontrando diversas aplicações tecnológicas como geração de energia [1], comunicações óticas [2], manufatura de precisão a laser [3] e equipamentos médicos [4]. Em diversas aplicações, é necessário manipular os parâmetros das ondas eletromagnéticas, como amplitude, fase e polarização. Dentre as técnicas de controle das ondas eletromagnéticas, surgiu nas últimas décadas um elemento capaz de modular uma frente de maneira arbitrária, ou seja, variar amplitude, fase, ou polarização: trata-se das metassuperfícies. [5]

Metassuperfícies são compostas por estruturas de tamanho muito menores que o comprimento de onda da luz. Essas estruturas interagem fortemente com a onda incidente, permitindo assim sua manipulação [6-7]. Deste modo, a resposta desse sistema se dá pela interação da onda incidente com a unidade básica dessa estrutura, onde ocorrem ressonâncias locais [8-9-10].

Metassuperfícies podem ser utilizadas na construção de super lentes, lentes com uma capacidade de ampliação além das possíveis com as tradicionais [11], e também para lentes bidimensionais (2D) [12]. Outra possível aplicação é a confecção de mantos de invisibilidade [13], ou até mesmo em técnicas de holografia [14].

Uma aplicação de particular interesse para esse trabalho é a refração anômala. Esse é um fenômeno de extrema manipulação de uma onda incidente que pode ser realizado com metassuperfícies. [17] As ressonâncias locais se somam e geram como resultado a reflexão ou transmissão da onda com um ângulo de refração ou reflexão diferentes do ângulo previsto pela lei de *Snell*. [18] O efeito também pode ser chamado de refração generalizada. [19-23] O fenômeno descrito está ilustrado na Figura 1.

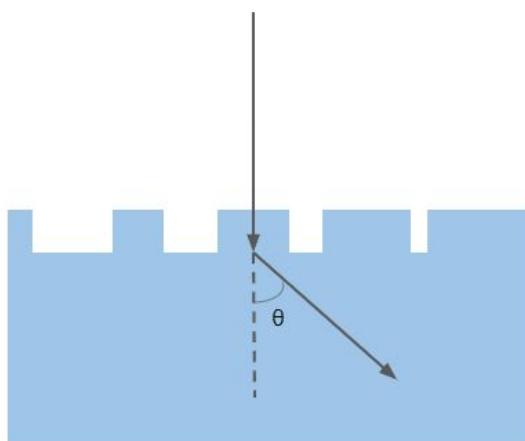


Figura 1 – Refração anômala causada por uma metassuperfície.

Outro elemento ótico de interesse neste trabalho é o guia de onda. De maneira geral, guias de onda são estruturas capazes de confinar e guiar luz em um espaço físico determinado. Dessa forma é possível fazer circuitos de ondas eletromagnéticas e transmitir sinais eletromagnéticos de forma similar ao que se faz com corrente elétrica. As fibras ópticas são exemplos de guias de onda cilíndricos. Em outras palavras, as superfícies interiores de um guia de onda funcionam como espelhos para o sinal luminoso que está sendo transmitido: assim a luz é confinada por reflexão interna total e, como resultado, guiada. [20] Pode-se observar um esquema de guia dielétrico na Figura 2, no qual a onda confinada no núcleo está sendo guiada.

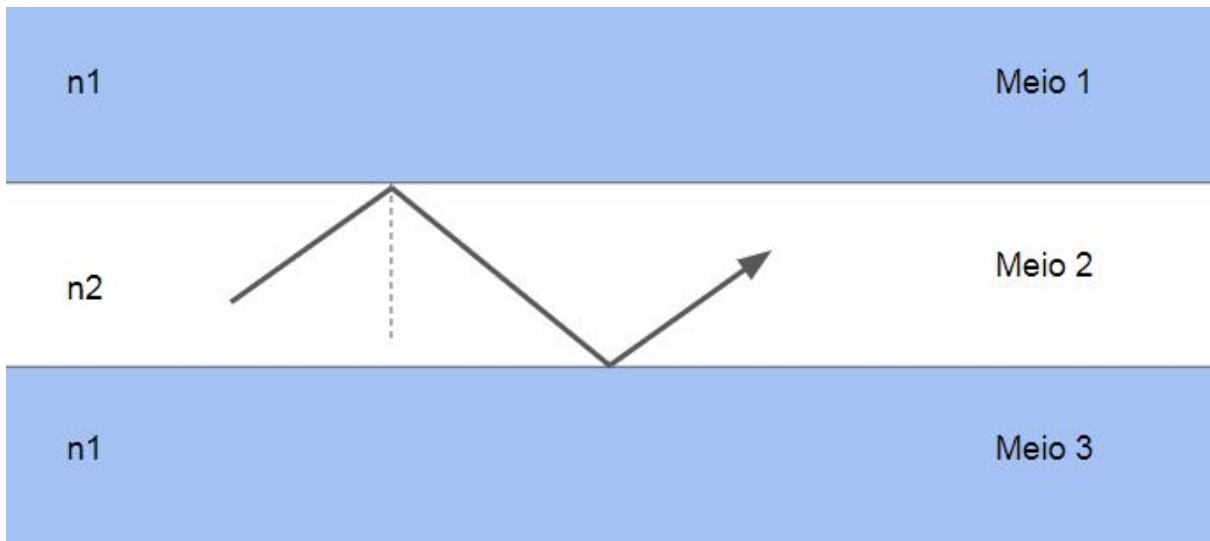


Figura 2 – Guia de onda dielétrico constituído de três regiões básicas, núcleo e cascas. O índice de refração n_2 é maior do que n_1 . Na figura está indicado um raio de luz sofrendo reflexão total.

Além disso, outro elemento de importância neste trabalho são os acopladores direcionais, responsáveis pela troca de energia entre diferentes partes de um sistema. São caracterizados por estruturas capazes de transmitir uma quantidade de energia de um meio para outro, minimizando perdas. [21]

Estruturas padrão utilizam redes de difração para acoplamento de luz com incidência perpendicular em guias de ondas [15-16]. Normalmente, após ser difratada, uma onda é transmitida simetricamente, direcionando energia tanto para a direita quanto para a esquerda, como pode se observar na Figura 3. Em muitos casos, entretanto, é desejável ou necessário que a transmissão seja unidirecional, ou seja, possua apenas uma ordem dominante. Neste caso, a estrutura deve ser necessariamente assimétrica, como representado na Figura 4.

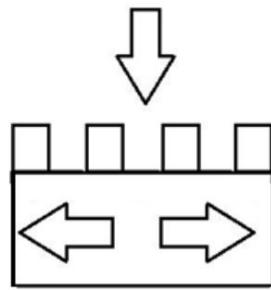


Figura 3 – Difração comum.

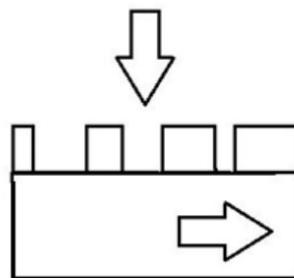


Figura 4 – Difração anômala.

O acoplamento assimétrico tipicamente sofre de baixa eficiência. Há, contudo, uma técnica, denominada por rede *blazed* binária e proposta em [22] que possibilita alta eficiência. A rede *blazed* binária consiste basicamente no estudo de geometrias retangulares em metamateriais. Primeiro estuda-se a relação do *fill factor* – que é razão entre a largura do retângulo e o período da célula básica da superfície - com a defasagem gerada em uma onda incidente. Com isso, cria-se então um padrão com n repetições, sendo n um número inteiro definido no projeto, e uma variação de fase que vai de 0 a 2π , escolhendo justamente os valores de *fill factors* capazes de gerar essa variação, definindo assim o padrão que será repedido por toda metassuperfície, como pode ser observado na Figura 5.

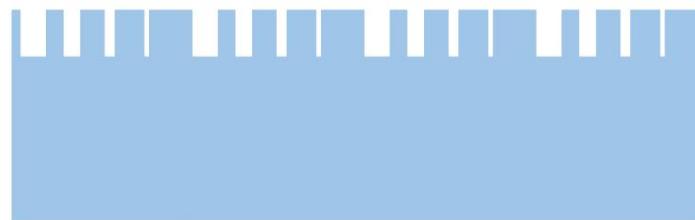


Figura 5 – Exemplo de uma rede *blazed* binária.

O objetivo deste projeto é investigar se os graus de liberdade na modulação de fase introduzidos por metassuperfícies podem ser utilizados no projeto de acopladores unidirecionais.

Um aspecto importante da pesquisa está associado ao fato de, no contexto de refração anômala, as metassuperfícies serem usadas para estudar casos de reflexão e transmissão em meios com o mesmo índice de refração. Para a aplicação como acoplador, entretanto, é necessário investigar a possibilidade de se transmitir uma onda incidente vinda de um material de índice de refração menor para outro com um índice de refração maior e com um ângulo de transmissão maior que o ângulo crítico, para garantir reflexão interna total. Esse último requerimento advém da condição de acoplamento de luz em guias de onda. [20]

Pretende-se realizar dois projetos distintos, um linear e outro baseado no casamento de impedância e admitância da teoria eletromagnética, de metassuperfície e comparar as eficiências. As simulações foram geradas com o auxílio do método RCWA, explicado no Apêndice A, o qual foi desenvolvido numericamente no *Matlab*.

Parte I

Referencial Teórico

2 REFRAÇÃO GENERALIZADA

A refração, fenômeno de mudança de ângulo de propagação sofrido por uma onda eletromagnética ao incidir numa interface que separa dois meios com índices de refração distintos, pode ser descrita pela lei de *Snell*, a qual pode ser deduzida aplicando o princípio de *Fermat*, como será demonstrado. O princípio de *Fermat* pode ser classificado como sendo um problema do tipo variacional¹. Mais especificamente, o princípio de *Fermat* afirma que o caminho óptico percorrido pela luz entre dois pontos é estacionário, ou seja, uma variação infinitesimal no caminho físico resulta em uma variação nula no caminho óptico.[24]

O caminho óptico de uma frente de onda corresponde à mudança de fase que a onda sofre ao se deslocar de uma determinada distância. Sendo assim, se a onda se desloca de uma distância d , então o seu caminho ótico OP é o produto entre o número de onda k e a distância d , ou seja:

$$OP = kd \quad (2.1)$$

Tomamos, então, a Figura 6, que mostra dois caminhos (azul e vermelho) alternativos para o raio de luz se deslocar do ponto P_1 ao ponto P_2 . O caminho azul difere do caminho vermelho por uma distância infinitesimal dx . De acordo com o princípio de Fermat, o caminho azul (ou vermelho) será o caminho percorrido pela luz se a diferença entre o caminho ótico azul e vermelho for zero.

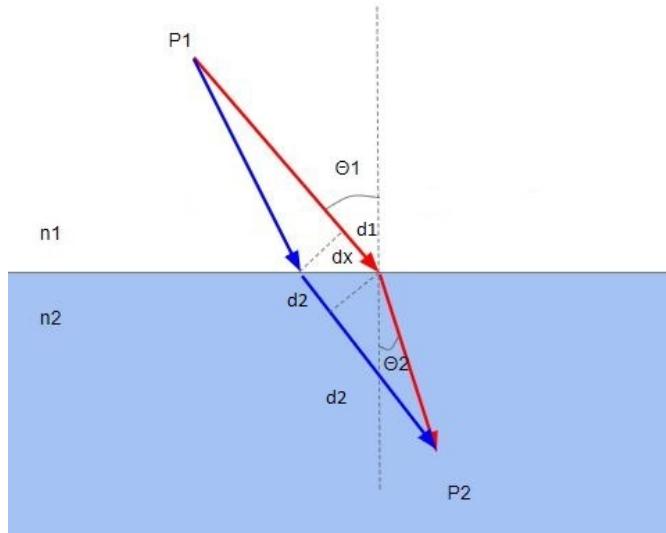


Figura 6 – Geometria utilizada na dedução da lei de Snell pelo princípio de Fermat.

¹ Problemas cujas soluções estão nos pontos máximos ou mínimos locais, nos extremos relativos.

O parâmetro d_1 é a diferença entre os caminhos vermelho e azul no meio 1, d_2 é a diferença entre eles no meio 2 e dx é a distância entre os caminhos na interface que separa os dois meios.

Existem duas contribuições para a diferença entre o caminho ótico azul e o caminho ótico vermelho. Uma é dada pela distância d_1 e a outra é dada pela distância d_2 . De fato, no meio 1, o caminho ótico vermelho é **maior** que o azul, porque a onda percorre a distância d_1 a mais no caminho vermelho que no azul. Por outro lado, o caminho vermelho é **menor** que o caminho azul no meio 2, já que o caminho azul percorre uma distância d_2 a mais que o caminho vermelho no meio 2. Sendo assim, a diferença total entre os caminhos ópticos vermelho e azul será dada por $k_1 d_1 - k_2 d_2$. Expressando d_1 e d_2 em termos dos ângulos θ_1 , θ_2 , e da distância dx , temos então que a variação no caminho ótico será de $[k_1 \sin \theta_1 dx] - [k_2 \sin \theta_2 dx]$. Mas, pelo princípio de *Fermat*, essa variação tem que ser zero, ou seja:

$$[k_1 \sin \theta_1 dx] - [k_2 \sin \theta_2 dx] = 0 \quad (2.2)$$

Expressando k_1 e k_2 em termos dos números de onda no espaço livre, temos que:

$$k_0 n_1 \sin \theta_1 dx = k_0 n_2 \sin \theta_2 dx \quad (2.3)$$

Sendo assim, finalmente, temos que o princípio de Fermat leva à lei de *Snell*:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (2.4)$$

Contudo, o caso descrito anteriormente assume continuidade de fase ao longo da interface. O que aconteceria, então, caso isso não ocorresse? Ilustrado em [18], nesse caso outro termo apareceria na equação para contribuir com a diferença de fase (caminho ótico) advindo da superfície, como será demonstrado a seguir.

A introdução de uma descontinuidade abrupta de fase na interface entre os dois meios leva à uma modificação na lei de *Snell*. Suponha que $\phi(x)$ represente a descontinuidade de fase ao longo da interface, como mostrado na Figura 7. Sendo assim, haverá uma variação de fase $d\phi = \phi(x + dx) - \phi(x)$ imposta pela superfície.

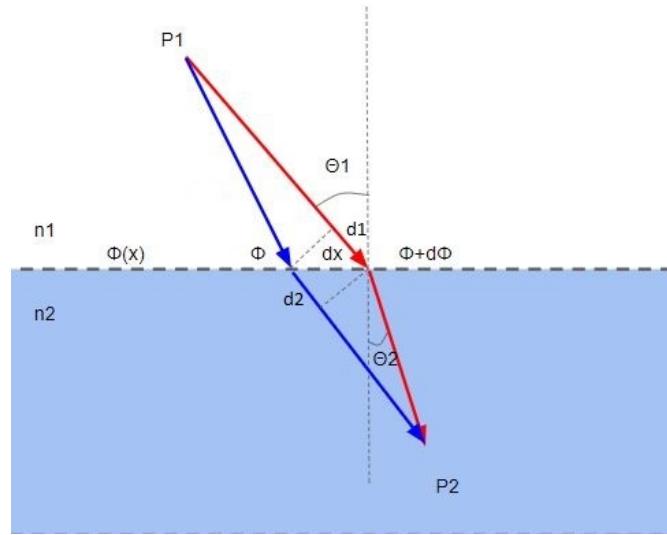


Figura 7 – Geometria utilizada na dedução da lei de Snell generalizada.

De forma análoga à dedução feita anteriormente, agora temos, portanto, um termo de fase incorporado na equação:

$$[k_0 n_1 \sin \theta_1 dx + (\phi + d\phi)] - [k_0 n_2 \sin \theta_2 dx + \phi] = 0 \quad (2.5)$$

Sabemos que $k_0 = \lambda_0 / 2\pi$. Podemos, então, deduzir a generalização da lei de Snell, que fica da forma:

$$n_2 \sin \theta_2 - n_1 \sin \theta_1 = \frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{d\phi}{dx} \quad (2.6)$$

Podemos ver que a presença de um gradiente de descontinuidade de fase ao longo da interface pode resultar em uma direção arbitrária para o raio refratado, e este é o princípio que rege a arbitrariedade da refração causada por metassuperfícies, uma vez que estas são capazes de introduzir esse fenômeno de acordo com o projeto.

3 PROJETANDO METASSUPERFÍCIES

3.1 O mapa de fase de uma metassuperfície

A operação de metassuperfícies é baseada em redes de difração *subwavelength*, isto é, de estruturas com período menor que o comprimento de onda. Nessa seção, as principais propriedades de redes de difração serão brevemente abordadas, seguidas de uma breve discussão a respeito de redes *subwavelength*.

Redes de difração são elementos óticos periódicos capazes de separar uma frente de onda incidente em diferentes direções, as chamadas ordens difrativas. São basicamente conjuntos de inúmeras fendas que interagem com as ondas eletromagnéticas e geram um comportamento que não pode ser explicado pela ótica geométrica, a chamada difração [21]. Difração é, portanto, o espalhamento de um feixe de ondas ao encontrar um obstáculo. Podemos ver um exemplo de rede de difração e suas ordens difrativas na Figura 8.

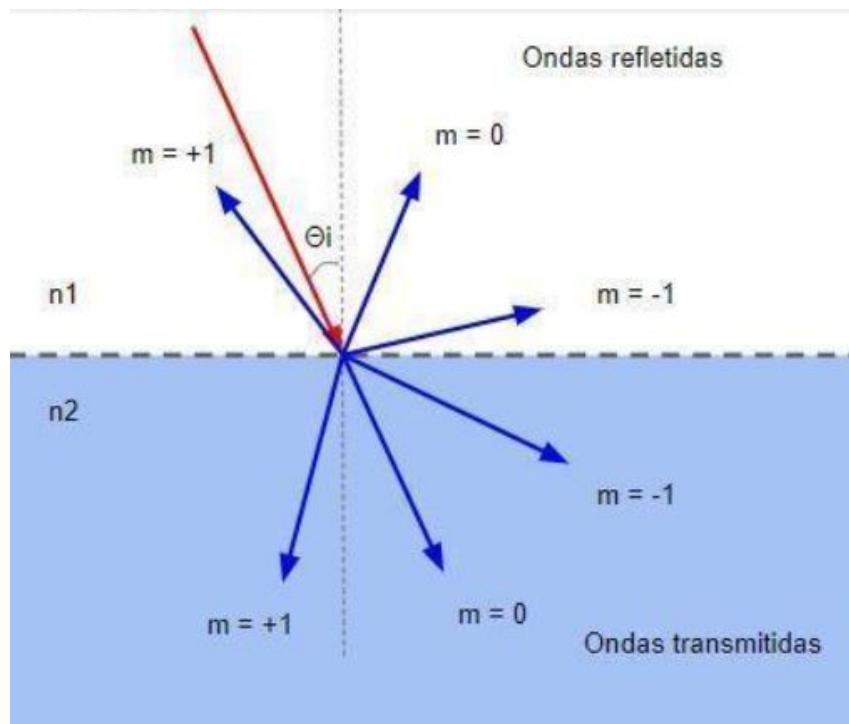


Figura 8 – Exemplo de uma Rede de difração e suas ordens difrativas.

A dependência dos ângulos de difração em relação ao comprimento de onda da luz incidente e do período da rede é expressa pela lei de Bragg [16], Equação 3.1, onde n_t é o índice de refração do meio para o qual as ondas estão sendo transmitidas (n_2 na Figura 8), n_i é o índice do meio da onda incidente (n_1 na Figura 8), θ_i é o ângulo da onda

incidente em relação à normal da superfície, θ_m é o ângulo de transmissão da ordem m , d é o período da rede, λ_0 é o comprimento da onda incidente no vácuo e m é a ordem de difração, que é um número inteiro [16]:

$$n_t \sin \theta_m = n_i \sin \theta_i - m \frac{\lambda_0}{d} \quad (3.1)$$

Nosso estudo será baseado em incidência normal. Podemos então isolar o $\sin \theta_m$ na equação 3.1 para uma breve análise:

$$\sin \theta_m = -\frac{m}{n_t} \frac{\lambda_0}{d} \quad (3.2)$$

Sabe-se que o comprimento de onda em um determinado meio é inversamente proporcional ao índice de refração desse meio, valendo a seguinte relação:

$$\lambda_t = \frac{\lambda_0}{n_t} \quad (3.3)$$

Juntando as equações 3.2 e 3.3 ficamos com a seguinte equação, onde λ_t é o comprimento de onda num meio cujo índice de refração vale n_t .

$$\sin \theta_m = -m \frac{\lambda_t}{d} \quad (3.4)$$

Observa-se na equação 3.4 que, se d for menor que λ_t , caso m seja diferente de zero, $\sin \theta_m$ terá que ter módulo maior do que 1 para a igualdade ser respeitada, o que não é possível. Pode-se concluir, então, que, se d for menor que o comprimento de onda no ar, a reflexão admitirá apenas a ordem zero de difração, e, da mesma forma, se d for menor que o comprimento de onda no substrato, a transmissão admitirá apenas a ordem zero. Logo redes *subwavelength* possuem as ordens de difração diferentes de zero evanescentes.

Uma rede de difração é caracterizada pelo período, unidade física que se repete infinitas vezes e pelo *fill factor*, que é definido como:

$$fill factor = \frac{d - f}{d} \quad (3.5)$$

onde d é o período da rede e f , a espessura da fenda, como ilustrado na Figura 9. O *fill factor*, portanto, é um parâmetro que estará no intervalo de 0 a 100%.

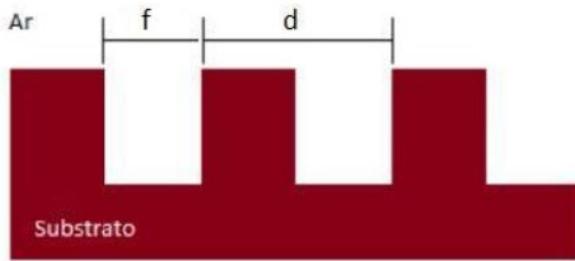


Figura 9 – Exemplo de uma Rede *Subwavelength* com um determinado *fill factor*.

Dentro da camada da rede acontecem diversas reflexões e transmissões. Como em uma rede *subwavelength* existe apenas a ordem 0, ela se comporta efetivamente como um meio homogêneo, ou seja, como uma cavidade de *Fabry-Perot*, cujo índice efetivo depende do *fill-factor*. A rede homogeneizada é ilustrada na Figura 10.



Figura 10 – Forma efetiva que a rede *Subwavelength* é enxergada pela onda incidente.

A rede *subwavelength*, portanto, atua como um filme fino. Dessa forma, a amplitude e fase das ondas transmitidas dependem de múltiplas reflexões que ocorrem dentro do filme fino, que interferem entre si [26]. Como a interferência depende da fase acumulada ao se propagar dentro do filme, e essa última depende da espessura e do índice de refração efetivo da rede, então esses dois parâmetros influenciam fortemente a fase e amplitude das ondas refletidas e transmitidas. Portanto é possível controlar as ondas refletidas e transmitidas de acordo com o valor do *fill-factor* da rede.

Utilizando métodos como o RCWA, o qual está explicado no Apêndice A, pode-se obter a amplitude e a fase da onda transmitida para uma rede com um determinado *fill factor*. Se os valores de amplitude e fase da onda transmitida forem plotados contra o *fill factor*, obtém-se o chamado mapa de transmissão e fase, como se vê na Figura 11.

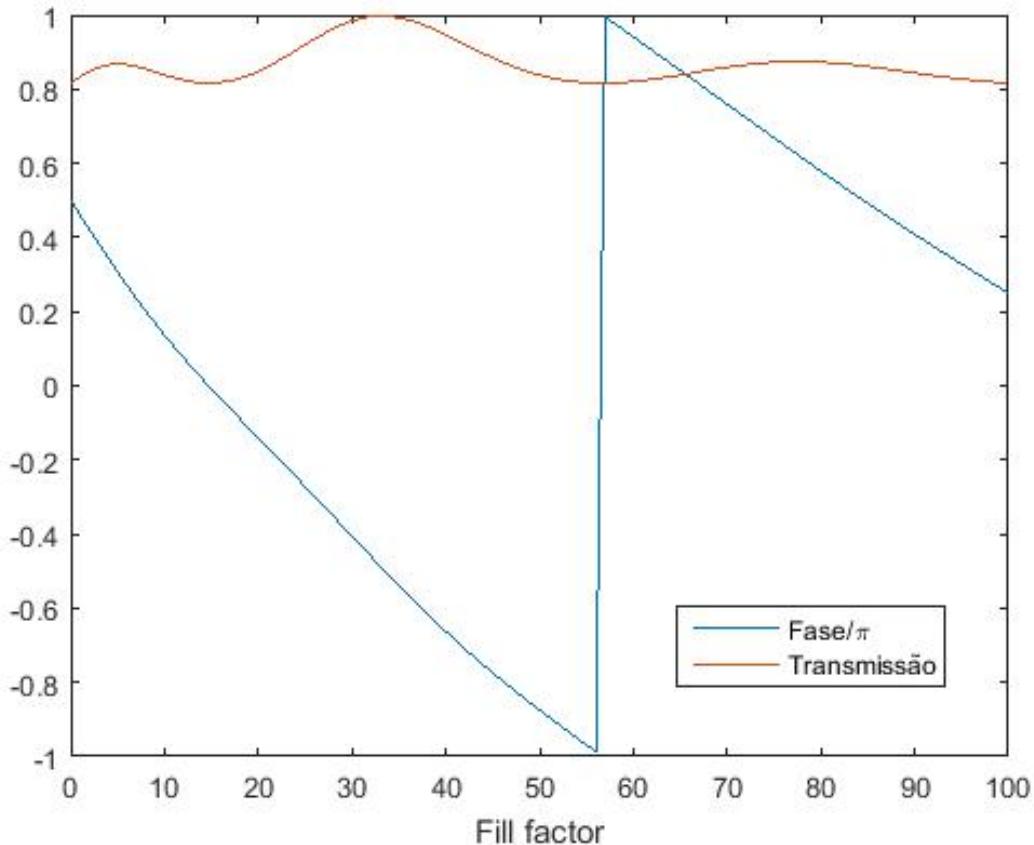


Figura 11 – Exemplo de um mapa de transmissão e fase de uma metassuperfície. Onda incidente com comprimento de 800nm e polarização TE, rede 2D periódica com período de 51,52 nm e espessura 600 nm. Rede e substrato com índice de refração de 2,5.

Cada ponto da Figura 11 se refere à uma rede *subwavelength* com período 51,52 nm e *fill factor* dado pelo eixo horizontal. O eixo vertical mostra a fase e a amplitude da onda transmitida considerando incidência perpendicular. Dessa forma é possível visualizar a correlação do *fill factor* com a amplitude e fase da onda transmitida. Note na Figura 11 que é possível cobrir uma variação de 0 a 2π variando apenas o *fill factor*.

Outro parâmetro que influencia no índice efetivo da rede é o próprio período. Como é importante encontrarmos um valor de período que permita alta transmissão e controle total de fase pelo *fill factor*, pode-se incluir esse parâmetro no mapa para permitir uma visualização completa dos efeitos do período e garantir, assim, que estamos atendendo as necessidades do projeto, como vemos na Figuras 12 e 13.

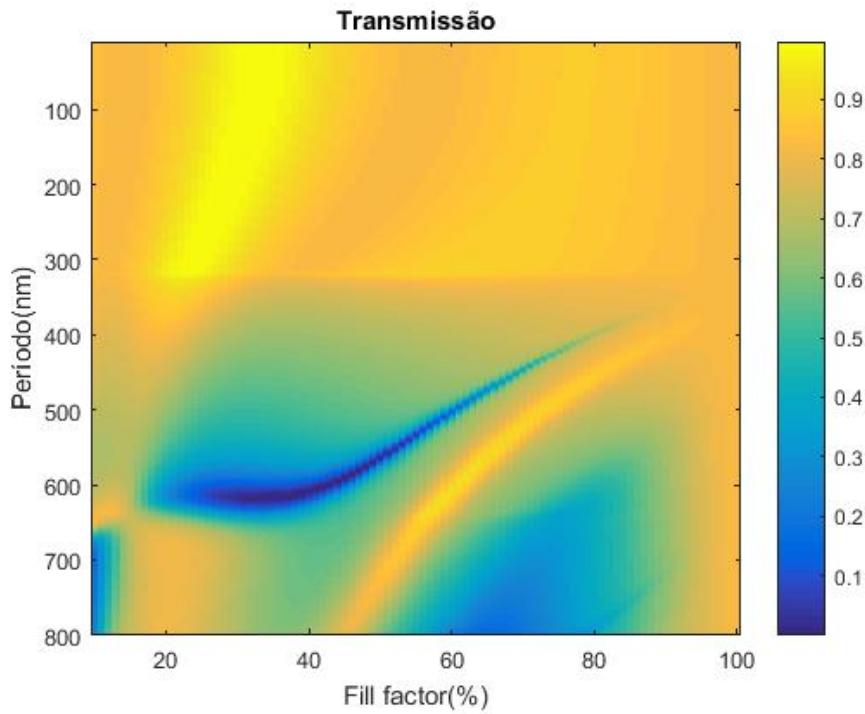


Figura 12 – Exemplo de um mapa de transmissão de uma metassuperfície. Onda incidente com comprimento de 800nm e polarização TE, rede 2D periódica com período no eixo Y e espessura 600 nm. Rede e substrato com índice derefração de 2,5.

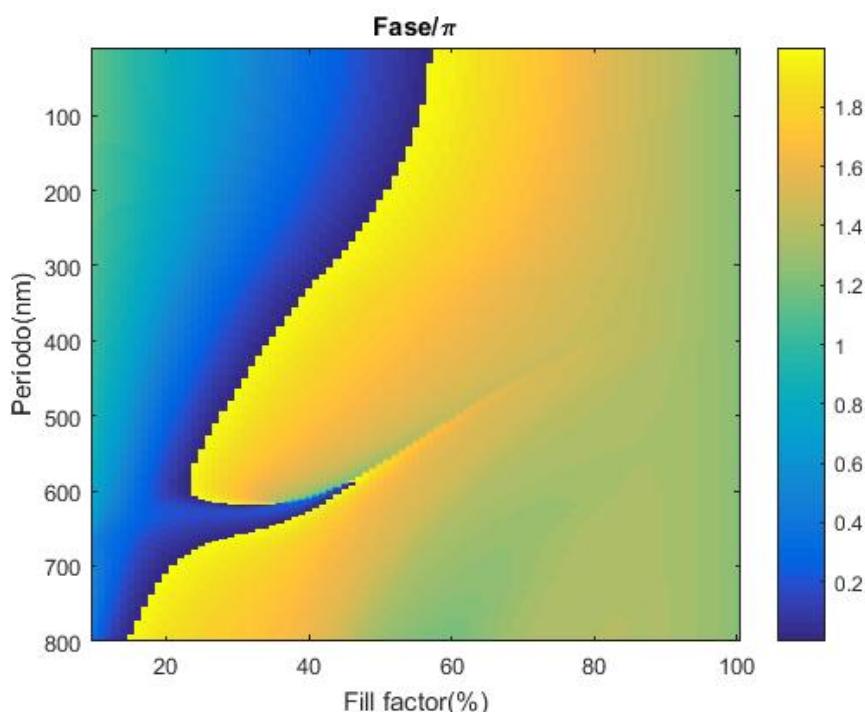


Figura 13 – Exemplo de um mapa de transmissão de uma metassuperfície. Onda incidida com comprimento de 800nm e polarização TE, rede 2D periódica com período no eixo Y e espessura 600 nm. Rede e substrato com índice derefração de 2,5.

3.2 Metassuperfícies para refração generalizada

Temos o interesse de construir uma metassuperfície capaz de gerar refração anômala. No capítulo 2 deduzimos a lei de *Snell* generalizada, governada pela equação a seguir.

$$n_2 \sin \theta_2 - n_1 \sin \theta_1 = \frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{d\phi}{dx} \quad (3.6)$$

Considerando que o estudo é baseado em incidência normal, teremos então a seguinte relação:

$$\sin \theta_2 = \frac{\lambda_0}{n_2 2\pi} \frac{d\phi}{dx} \quad (3.7)$$

A função $\phi(x)$ representa a descontinuidade de fase na interface. O papel da metassuperfície é exatamente o de impor essa descontinuidade. Note que a relação 3.7 implica que $d\phi/dx$ é constante, ou seja, que $\phi(x)$ deve ter perfil linear.

A fase de uma onda é periódica com período de 0 a 2π , como ilustrado na Figura 14 para um perfil linear. A periodicidade da fase implica que a própria metassuperfície será periódica, ou seja, que a metassuperfície será ela própria uma rede de difração, cujo período depende de $d\phi/dx$. No perfil da Figura 14, por exemplo, o período é dado pelo parâmetro d .

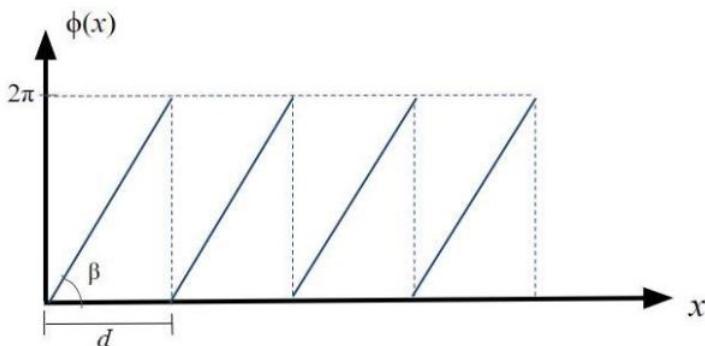


Figura 14 – Perfil da descontinuidade de fase ao longo da interface

Para ilustrar a relação entre o ângulo de refração generalizada e o período da rede, podemos expressar a inclinação da fase em termos do período, como na Equação 3.8:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{2\pi}{d} \quad (3.8)$$

Podemos, então, substituir a equação 3.8 na 3.7:

$$\sin \theta_2 = \frac{\lambda_2}{d} \quad (3.9)$$

Observa-se que a equação 3.9 é equivalente à equação de Bragg, 3.4, para a ordem difrativa $m = -1$. Sendo assim, podemos interpretar a metassuperfície como sendo uma rede de difração cuja célula unitária concentra a energia de difração na componente $m = -1$.

Note que o período da metassuperfície não é *subwavelength*, mas que a célula unitária da metassuperfície é composta de estruturas *subwavelength*, cujo papel é induzir o perfil linear de fase, como ilustrado na Figura 15. O método discretiza a $\phi(x)$ em N amostras ao longo de seu período, de maneira que:

$$d\phi = \frac{2\pi}{N} \quad (3.10)$$

O elemento derivativo do perfil de fase ao longo da superfície será dado então da seguinte forma, onde p é o comprimento da cada unidade discretizada dentro do período da metassuperfície :

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{2\pi}{Np} \quad (3.11)$$

Juntando as equações 3.7 com a 3.11 teremos que o ângulo da onda transmitida pode ser definido da seguinte maneira:

$$\sin \theta_2 = \frac{\lambda_0}{n_2 N p} \quad (3.12)$$

Dessa forma podemos selecionar N elementos com base no mapa de fase que possuam respectivos valores de fase espaçados de $2\pi/N$, e o mapa, contudo, deverá ter sido gerado com estruturas *subwavelengths* de período igual a p . Tendo em vista que o período da rede *subwavelength* interfere na amplitude e possibilidade de gerar total controle de fase, os parâmetros N e p devem ser escolhidos de forma estratégica, respeitando a relação 3.12.

Colocando os N elementos lado a lado, como se vê na Figura 15 para $N = 4$, teremos assim uma supercélula, a qual deve ser usada como célula unitária na composição de uma metassuperfície, concluindo assim um projeto capaz de gerar refração generalizada.

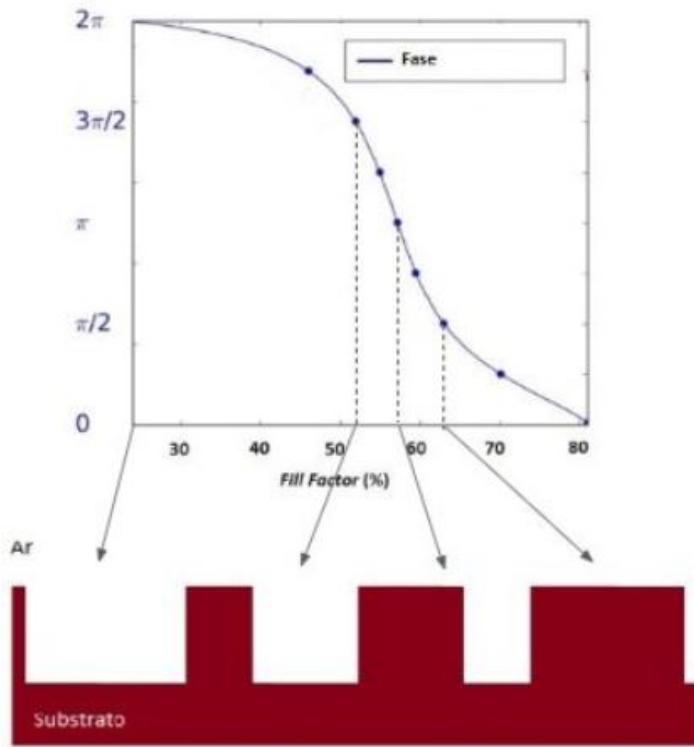


Figura 15 – Construção de uma metassuperfície que gera refração anômala a partir do mapa de fase.

Por mais que seja surpreendente que a fase gerada por cada valor de *fill factor* tenha considerado uma rede infinita, ela ainda vale quando compõe uma supercélula, construindo, assim, uma metassuperfície que transmite a onda incidente em um ângulo predeterminado.

3.3 Superfícies com perfis de fase baseados no casamento de impedância e admitância

Como visto no capítulo 2, a refração generalizada é obtida a partir do princípio de *Fermat*. Existe, entretanto, um método mais rigoroso, porém bem mais complexo, método esse que é baseado na aplicação das condições de contorno na metassuperfície, que é tratada como um plano [25]. Desse modelo mais rigoroso, deduz-se que a ação da metassuperfície será mais eficiente se for baseada no perfil de fase vinda do acoplamento de impedância e admitância, e não de forma linear, como foi descrito anteriormente. Um dos objetivos desse trabalho é comparar os dois métodos, para identificar se a complexidade do método mais rigoroso resulta em metassuperfícies mais eficientes.

Os valores de impedância e admitância estão relacionados com as equações de descontinuidade de campos elétrico e magnético na interface da superfície, como vemos

nas equações a seguir [25].

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) |_s = \frac{1}{2} Y_e (\vec{E}_{2t} + \vec{E}_{1t}) |_s \quad (3.13)$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) |_s = -\frac{1}{2} Z_m (\vec{H}_{2t} + \vec{H}_{1t}) |_s \quad (3.14)$$

O vetor \vec{n} é a normal unitária em relação à interface, \vec{H} é o vetor campo magnético, \vec{E} é o campo elétrico, os índices 1 e 2 representam o meio no qual os campos estão inseridos, o índice t representa as componentes tangenciais à interface, Y_e é a admitância elétrica e Z_m , a impedância magnética.

Considerando polarização TE em relação à interface, pode-se aplicar as equações de Maxwell a fim de encontrarmos as componentes de campo magnético com base no campo elétrico. Pode-se isolar, dessa forma, a impedância e admitância, como vemos a seguir [25].

$$Y_e = \frac{2}{n_1} \frac{A_t n_2 \cos \theta_t e^{-jk_2 \sin \theta_t x} - \cos \theta_i e^{-jk_1 \sin \theta_i x}}{A_t e^{-jk_2 \sin \theta_t x} + e^{-jk_1 \sin \theta_i x}} \quad (3.15)$$

$$Z_m = 2n_1 \frac{e^{-jk_1 \sin \theta_i x} - A_t e^{-jk_2 \sin \theta_t x}}{A_t n_2 \cos \theta_t e^{-jk_2 \sin \theta_t x} + \cos \theta_i e^{-jk_1 \sin \theta_i x}} \quad (3.16)$$

onde k é o número de onda nos respectivos meios e A_t é a amplitude normalizada da onda transmitida em relação à incidente. Para a transferência total de potência, admite-se $A_t = \sqrt{\cos \theta_i / \cos \theta_t}$. [25]

O coeficiente de transmissão, em função da impedância e admitância, é então dada pela seguinte equação [25]:

$$T = -\frac{(-2 + n_0 Y_e)}{2 + n_0 Y_e} + \frac{2(n_0^2 Y_e - Z_m)}{(2 + n_0 Y_e)(2n_0 + Z_m)} \quad (3.17)$$

Sendo uma função complexa, esta possui módulo e fase, sendo que apenas o perfil de fase dessa função será utilizado para projetar a metassuperfície.

A Figura 16 representa o perfil de fase calculado para transmissão com ângulos de 15° e sua comparação com o perfil de fase linear que está em linha tracejada.

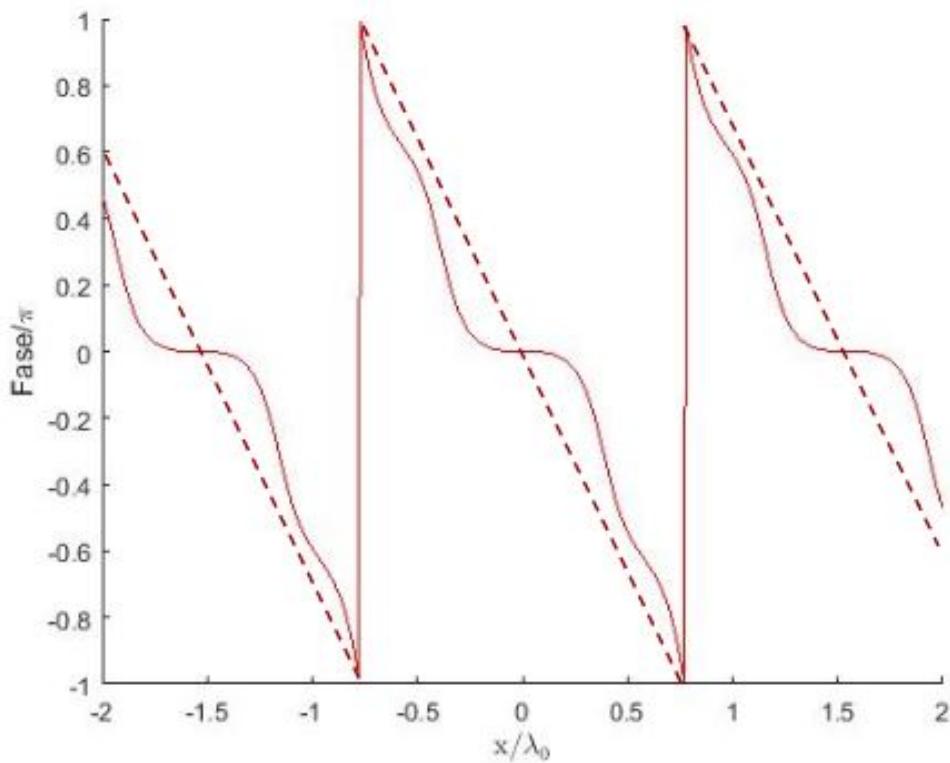


Figura 16 – Perfil de fase calculados com índice de refração do substrado de 2,5, polarização TE, incidência normal, $A_t = \sqrt{\cos \theta_i / \cos \theta_t}$ e transmissão de 15° e seu respectivo perfil lineares em linhas pontilhadas

A partir desse perfil de fase e do mapa de fase (Figura 11) pode-se determinar os *fill factors* e construir metassuperfícies com suas supercélulas, como já foi descrito, e compará-las em questão de eficiência de transmissão com as metassuperfícies com fase linear.

Parte II

Resultados

4 RESULTADOS OBTIDOS

Para auxiliar no projeto da metassuperfície, primeiramente foi levantado os mapas de transmissão e fase, utilizando a implementação numérica do RCWA, o qual está explicado no Apêndice A, no *Matlab*, para redes de espessura 600 nm, índice de refração da superfície e do substrato de 2,5, onda de incidência normal de 800 nm e polarização TE em relação à interface. Os parâmetros foram excolhidos de forma arbitrária a fim de obtenção de alta transmissão em períodos bem menores que o comprimento da onda incidente. Os mapas de transmissão e fase estão a seguir nas Figuras 17 e 18.

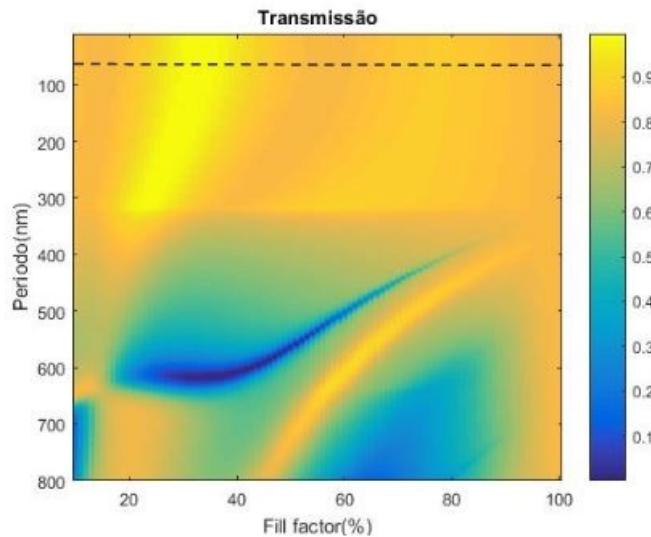


Figura 17 – Mapa de transmissão.

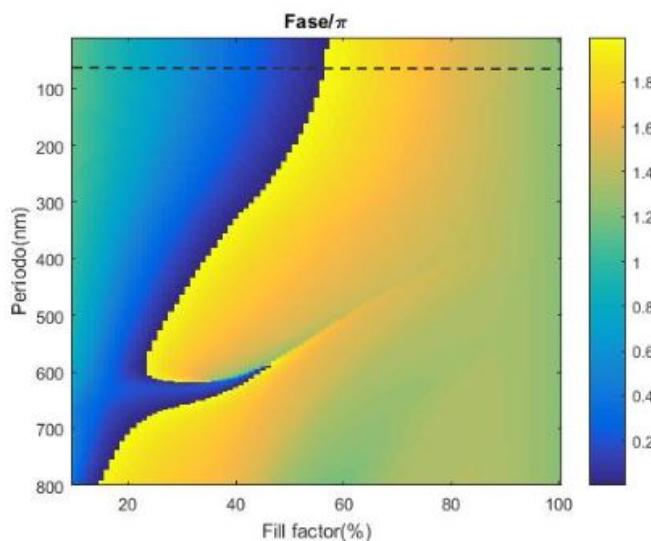


Figura 18 – Mapa de fase.

É possível observar que, para períodos inferiores a 300 nm, há alta transmissão e total controle de fase. Sendo assim, todas as estruturas projetadas terão meta-átomos de tamanho em torno de 50 nm, indicado pela linha preta tracejada nas imagens, pois assim é possível selecionar um número alto de meta-átomos para discretizar a função de descontinuidade de fase.

Projetaram-se então metassuperfícies baseadas nos perfis de fase linear e fase advinda do casamento de impedância e admitânciia, como já foi discutido no Capítulo 3, para os seguintes ângulos de transmissão em relação à normal da interface: 7°, 15°, 20°, 23, 58°(ângulo crítico), 30°, 45° e 75°. As respectivas eficiências de transmissão das ordens $m = -1$ (que é a ordem alvo) em relação à onda incidente encontram-se na Figura 19; a Tabela 1 apresenta os valores de discretização e período do meta-átomo para cada projeto. O número de meta-átomos foi definido pela Equação 3.12, respeitando o tamanho definido e o ângulo de transmissão.

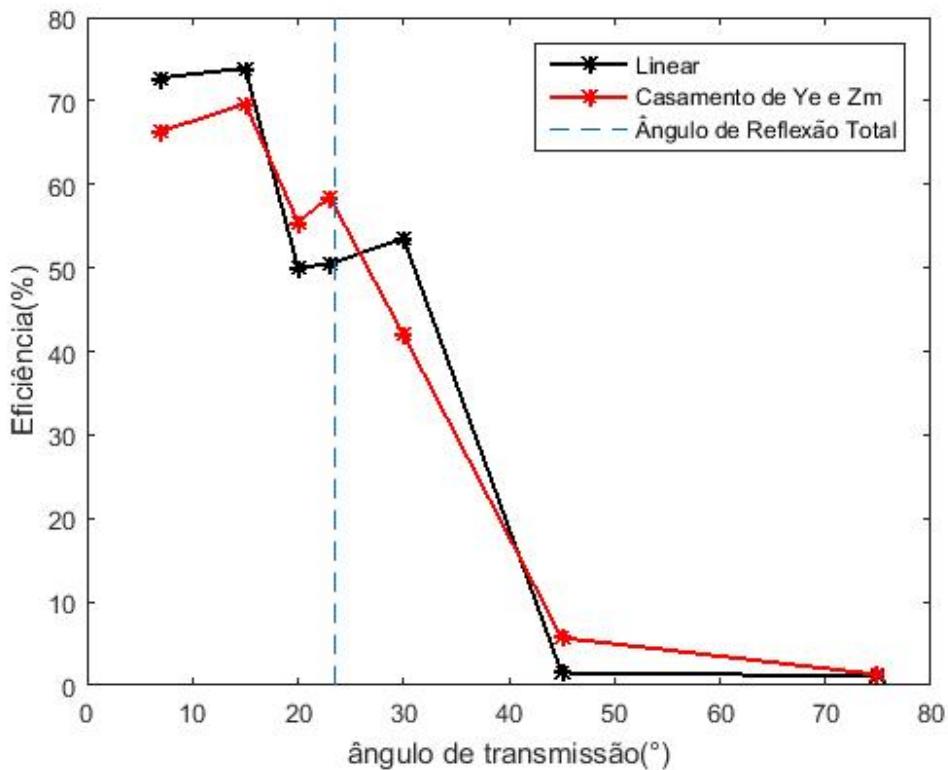


Figura 19 – Eficiências das ordens $m = -1$ para perfil de fase linear(preto) e baseado no casamento de impedância e admitânciia(vermelho)

Ângulo(°)	Número de meta-átomos	Período(nm)
7	50	52,52
15	24	51,52
20	20	46,78
23,58	20	40
30	12	53,33
45	10	45,26
75	6	55,22

Tabela 1 – Discretização e período de cada projeto

Observa-se na Figura 19 que a eficiência de transmissão cai quando o ângulo de transmissão aumenta. Uma das razões para a queda da eficiência é a discretização cada vez menor da célula unitária. De fato, como se vê na Tabela 1, quanto maior o ângulo, menos meta-átomos são utilizados, em razão da rápida variação do perfil de fase. Note também que os projetos com perfil de fase linear (mais simples) e com perfil de fase por casamento de impedância (mais rigoroso) resultaram em eficiências similares.

Para compreender o comportamento dos projetos com diferentes comprimentos de onda analisaram-se as eficiências médias das ordens $m = 0, 1$ e -1 , considerando onda incidente de 700, 800 e 900 nm. Os valores encontram-se na Figura 20 para o perfil linear de fase e na Figura 21, para o de casamento de impedância e admitância.

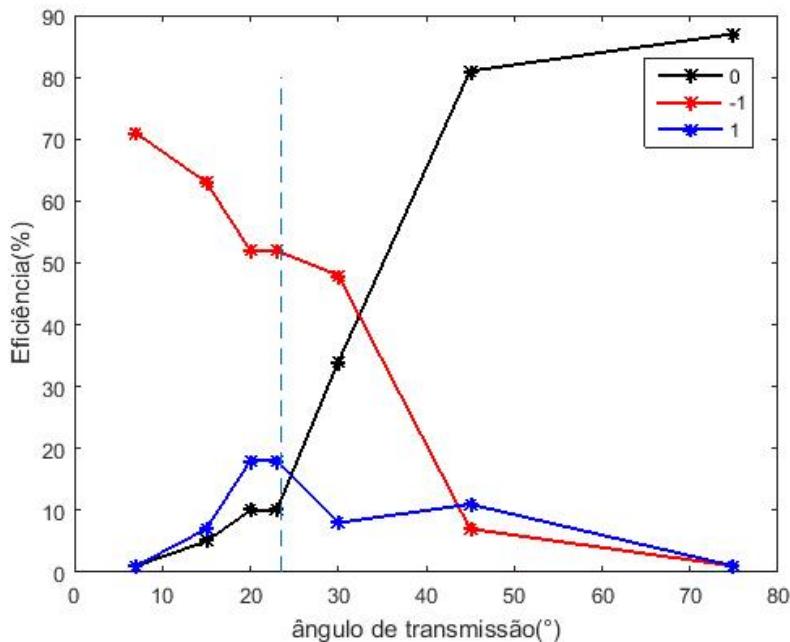


Figura 20 – Eficiência média das ordens difrativas para metassuperfície com perfil de fase linear.

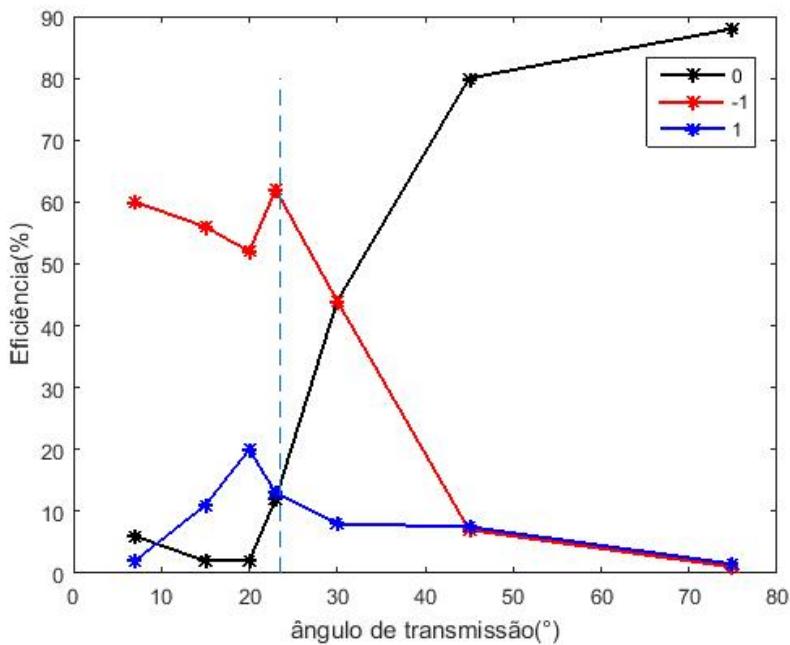


Figura 21 – Eficiência média das ordens difrativas para metassuperfície com perfil baseado no casamento de impedância e admitância.

Observa-se que a potência é alta para ângulos pequenos, e conforme aumentamos o ângulo de transmissão, há a tendência de migração gradativa de energia para a ordem zero, caindo rapidamente após o ângulo de reflexão interna total da estrutura.

Por fim, com o intuito de estudar o comportamento espectral das metassuperfícies, analisou-se mais detalhadamente as potências das ordens difrativas para o mesmo intervalo de comprimento de onda incidente para os ângulos de 15° , 23° , 58° , 30° e 45° , a fim de se entender a transição dos projetos com transmissão inferior para os de transmissão superior ao ângulo crítico, como se pode ver nas Figuras 22, 23, 24 e 25. As linhas tracejadas nas figuras indicam o comprimento de onda para o qual os projetos foram feitos.

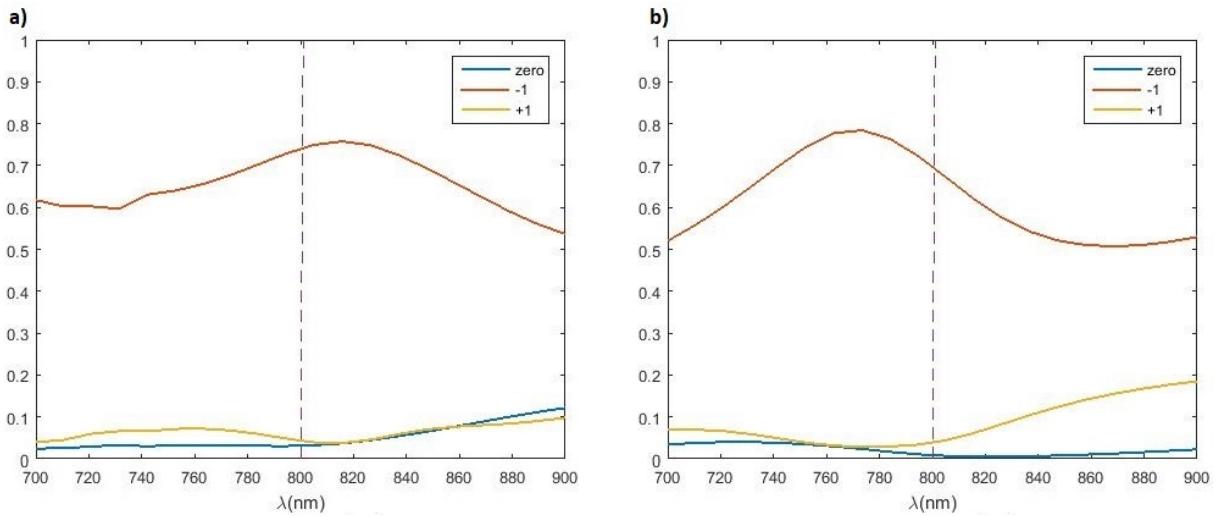


Figura 22 – Eficiências de transmissão para superfícies projetadas para transmissão de 15° em relação a normal e com função de descontinuidade de fase a) linear e b) baseada no perfil do casamento de impedância e admitância

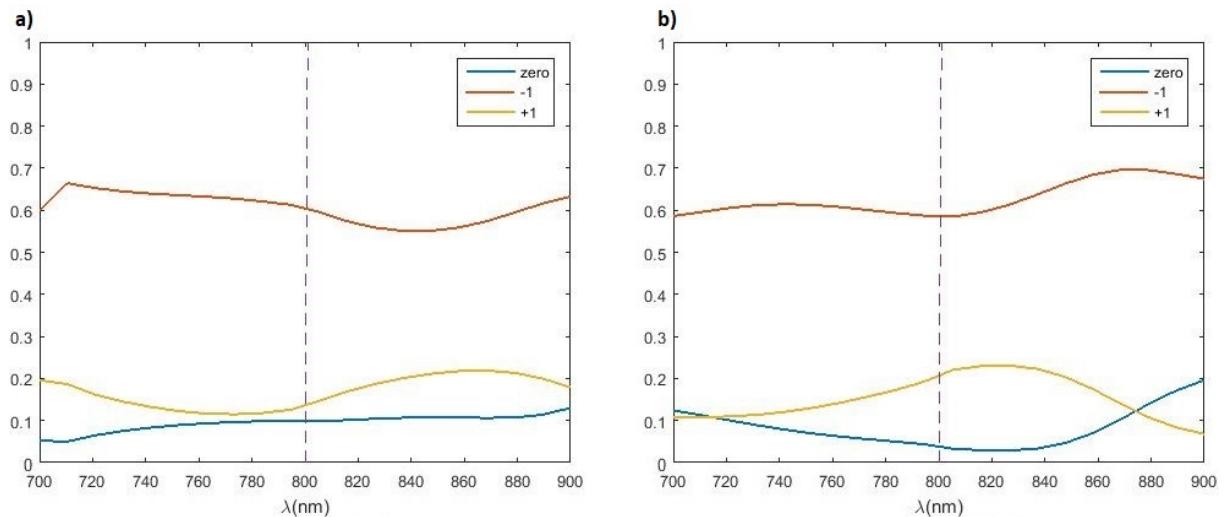


Figura 23 – Eficiências de transmissão para superfícies projetadas para transmissão de $23,58^\circ$ em relação a normal e com função de descontinuidade de fase a) linear e b) baseada no perfil do casamento de impedância e admitância

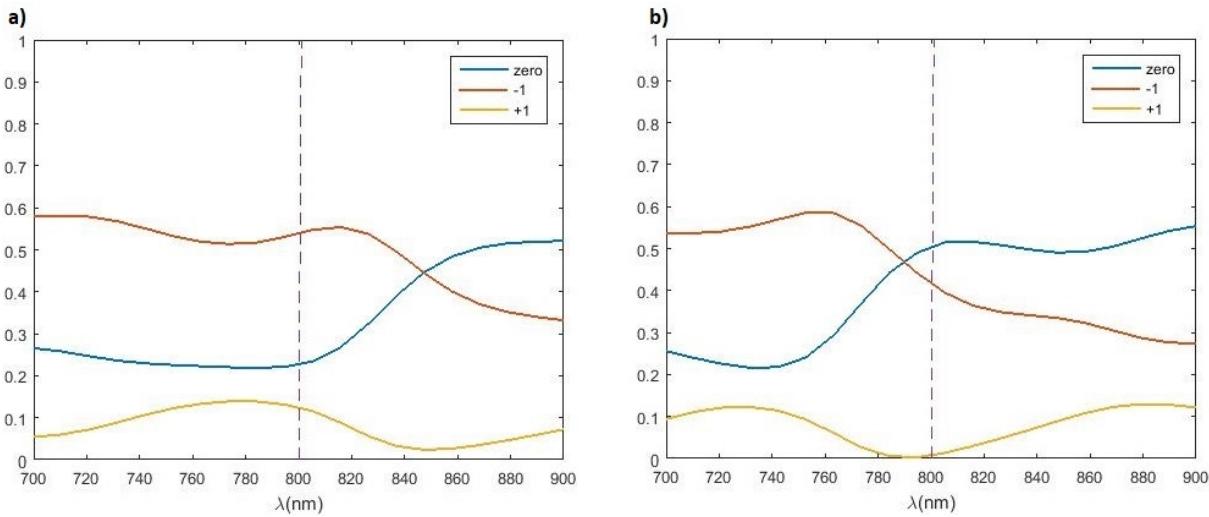


Figura 24 – Eficiências de transmissão para superfícies projetadas para transmissão de 30° em relação a normal e com função de descontinuidade de fase a) linear e b) baseada no perfil do casamento de impedância e admitância

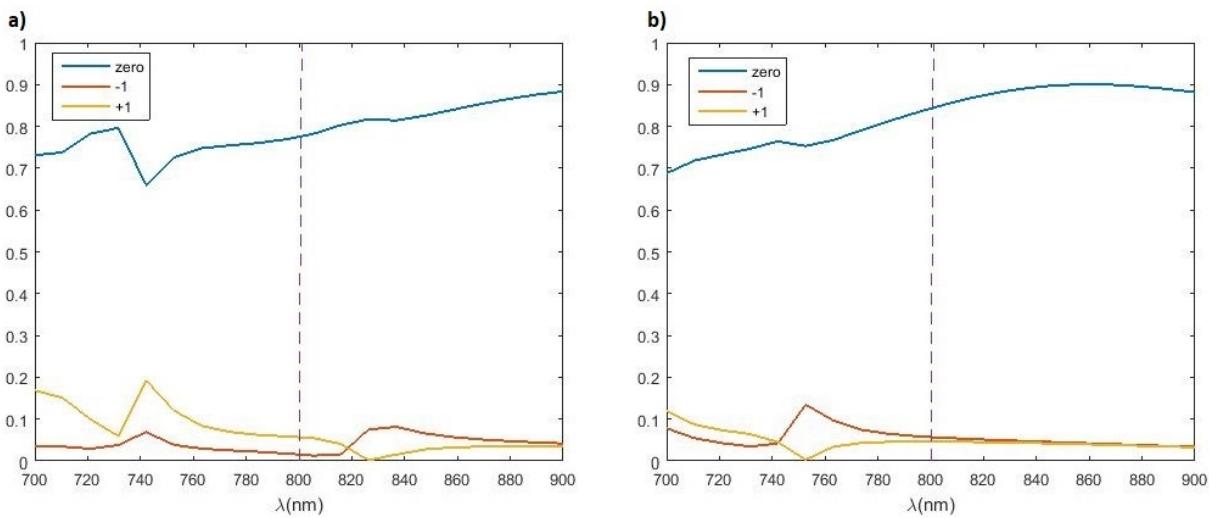


Figura 25 – Eficiências de transmissão para superfícies projetadas para transmissão de 45° em relação a normal e com função de descontinuidade de fase a) linear e b) baseada no perfil do casamento de impedância e admitância

Observa-se na Figura 22 que ambos os projetos têm comportamentos similares, com eficiência da ordem -1 um pouco superior a 50% e ainda com um pico que passa dos 70% em 820 nm para a discretização linear e 770 nm para a baseada no perfil de casamento de impedância e admittância. Sendo assim, pode-se concluir que o comportamento espectral não apresenta forte dependência do ângulo de projeto.

Na Figura 23, que se refere ao ângulo de $23,58^\circ$ vemos que a eficiência tem uma tendência mais constante em torno dos 60%. Esse é o ângulo de reflexão interna total, o

que indica então que 60% seria a melhor eficiência de um acoplador que conseguiremos nesta análise.

Na Figura 24 fica evidente o decaimento da eficiência da ordem -1 , e sua transfe-
rência para a ordem zero. O projeto baseado no casamento de impedância e admitânci-
a, aliás, perde potência antes mesmo do comprimento de onda para o qual a superfície foi
projetada (800 nm). Já na Figura 25, toda a potência já foi para ordem zero, daí em diante
praticamente não ocorre acoplamento nenhum.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo o estudo de metassuperfícies com efeito de refração anômala e sua aplicação na construção de acopladores unidirecionais. Como desenvolvido nos capítulos anteriores, o estudo foi baseado em redes *blazed* binárias, e as análises se atentaram a diferentes ângulos de transmissão para que, dessa forma, uma melhor compreensão do efeito pudesse ser obtida. Dois métodos distintos de projetos foram realizados a fim de compará-los.

Como abordado anteriormente, o acoplamento acontece no caso de reflexão interna total entre dois meios com índices de refração distintos, contudo constatou-se nas análises dos resultados que a tendência da eficiência do acoplador é de cair vertiginosamente após o ângulo crítico, apesar de termos registrado estruturas com eficiência em torno dos 60% e a condição de acoplamento respeitada. Pode-se concluir, então, que o acoplamento é possível, apesar de não ser viável para aplicações priorizem a eficiência.

Os dois métodos apresentaram eficiências parecidas em todos os casos estudados, o que leva à conclusão que a fase linear (mais simples) é suficiente para o projeto.

Para futuras pesquisas propomos que o foco esteja no ângulo crítico, ou um pouco acima dele. Com o intuito de compreender os efeitos das demais variáveis no projeto, sugerimos que outras formas de discretização sejam também estudadas.

6 BIBLIOGRAFIA

1. SHENG, R.; HO-BAILLIE, A. W. Y.; HUANG, S. J.; KEEVERS, M.; HAO, X. J.; JIANG, L. C.; CHENG, Y. B.; GREEN, M. A. Four-Terminal Tandem Solar Cells Using $\text{CH}_3\text{NH}_3\text{PbBr}_3$ by Spectrum Splitting. *J. Phys. Chem. Lett.* 6, 3931-3934, 2015.
2. DU, Y.; SUN, B .; LI, J. Optical Fiber Sensing and Structural Health Monitoring Technology. Shijiazhuang, China: Springer, 2019.
3. MIYAMOTO, I.; MARUO, H. Mechanism of laser cutting, Welding in the World, Le Soudage Dans Le Monde 29(9):283-294, 1991.
4. YEH, C. Applied Photonics. Ann Arbor, Michigan: Academic Press, 1994.
5. ZHOU, Z.; LI, J.; SU, R.; YAO, B.; FANG, H.; LI, K.; ZHOU, L.; LIU, J.; STELLINGA, D.; REARDON, C. P.; KRAUSS, T. F.; WANG, X. Efficient Silicon Metasurfaces for Visible Light, *ACS Photonics*, 4 (3), pp. 544–551, 2017.
6. SMITH, D. The www page of David Smith, University of California, San Diego. Disponível em: <<http://physics.ucsd.edu/>>. Acesso em: 2 abr. 2019.
7. PENDRY, J. B. Negative μ , negative ε , negative refractive index, and how to exploit them. St. Andrews, Scotland: s.n. Eletromagnetic Crystal Structure, Euroconference on Eletromagnetic Confinement, from Basic Research to the Market, 2001.
8. DARPA. Metamaterial home page of the future projects of the Defense Advanced Research Projects Agency's. Disponível em: <<http://www.darpa.mil/DSO/future/metamaterials/metamaterias.html>>. Acesso em: 2 abr. 2019.
9. WALSER, R.M. Electromagnetic metamaterials, Inaugural Lecture, Proc. of SPIE. Complex Medium II: Beyond Linear Isotropic Dielectrics. p. 4467, 2001.
10. SIHVOLA, A. Metamaterials in electromagnetics, *Metmat.* 1, 2-11, 2007.
11. BURGOS S. P.; WAELE, R.; POLMAN, A.; ATWATER, H. A. A single-layer wide-angle negative-index metamaterial at visible frequencies. *Nature Materials.* Vol.: 9, pp. 407-412, 2010.
12. KHORASANINEJAD, M.; CHEN, W. T.; DEVLIN, R. C.; OH, J.; ZHU, A. Y.; CAPASSO, F. Metalenses at visible wavelengths: Diffraction-limited focusing and subwavelength resolution imaging. *Science.* Vol. 352, Issue 6290, pp. 1190-1194, DOI: 10.1126/science.aaf6644, 2016.

13. CUI, T. J.; SMITH, D. R.; LUI, R. Metamaterials: Theory, Design, and Application. Springer. ISBN 978-1-4419-0572-7, 2010.
14. MARTINS, A.; LI, J.; MOTA, A. F.; WANG, Y.; NETO, L. G.; CARMO, J. P.; TEIXEIRA, F. L.; MARTINS, E. R.; BORGES, B. H. V. Highly efficient holograms based on c-Si metasurfaces in the visible range, Vol. 26, Issue 8, pp. 9573-9583, 2018.
15. MOHARAM, M. G.; GAYLORD, T. K. Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffraction, Vol. 71, No. 7/July 1981/J. Opt. Soc. Am, 1981.
16. HARPER, K. R. Theory, design, and fabrication of diffractive grating coupler for slab waveguide, 2003, 217f, Dissertação de mestrado – Universidade Brigham Young 2003.
17. SELL, D.; YANG, J.; WANG, E. W.; PHAN, T.; DOSHYA, S.; FAN, J. A. Ultra-High-Efficiency Anomalous Refraction with Dielectric Metasurfaces, ACS Photonics, 2018, 5 (6), pp 2402–2407. DOI: 10.1021/acsphotonics.8b00183, 2018.
18. YU, N.; GENEVAT, P.; KATS, M. A.; AIETA, F.; TETIENNE, J. P.; CAPASSO, F.; GABURRO, Z. Light Propagation with Phase Discontinuities: Generalized Laws of Reflection and Refraction, Science, Vol 334, Issue 6054, pp. 333-337, DOI: 10.1126/science.1210713, 2011.
19. LAROCHE, S.; SMITH, D. R. Reconciliation of generalized refraction with diffraction theory, Optics Letters, Vol. 37, Issue 12, pp. 2391-2393, doi.org/10.1364/OL.37.002391, 2012.
20. ZILIO, S. C. Óptica moderna: fundamentos e aplicações. Instituto de Física de São Carlos. Universidade de São Paulo, 2009.
21. COLLIN, R. E. Foundations for Microwave Engineering. Cap. 6. International Student Edition. McGraw-Hill, Tokyo, 1966.
22. LALANNE, P.; ASTILEAN, S.; CHAVEL, P.; CAMBRIL, E.; LAUNOIS, H. Blazed binary subwavelength gratings with efficiencies larger than those of conventional échelette gratings, Optics Letters, Vol. 23, Issue 14, pp. 1081-1083, doi.org/10.1364/OL.23.001081, 1998.
23. ACHOURI, K.; SALEM, M. A.; CALOZ, C. General metasurface synthesis based on susceptibility tensors. IEEE Trans Antennas Propag Volume: 63, Issue: 7, pp. 2977–2991, DOI: 10.1109/TAP.2015.2423700, 2015.
24. ZILIO, S., C. e-física: ensino de física online. Universidade de São Paulo, São Carlos. Disponível em: <<http://efisica.if.usp.br/otica/universitario/raios/fermat/>>. Acesso em: 3 de mai. 2019.

25. ESTAKHRI, N. M.; ALÙ, A. Wave-front Transformation with Gradient Metasurfaces, PHYSICAL REVIEW X 6, 041008, 2016.
26. YARIV, A. YEH, C. Photonics: Optical Electronics in Modern Communications. 6. ed. Nova Youk, Oxford University Press, 2007.

Apêndices

APÊNDICE A – *Rigorous Coupled Wave Analysis*

O RCWA(*Rigorous Coupled Wave Analysis*) é um método que foi desenvolvido na universidade *Georgia Tech*, no estado da Georgia nos estados unidos, na década de 1980 e ainda é tópico de pesquisas recentes. O método que pode ser implementado numericamente e baseia-se em cálculos sem aproximações, com convergência baseada em um grau de precisão arbitrário. Há uma explicação detalhada em [16] que aqui será brevemente abordada.

O método, então, recebe a geometria do problema, de forma similar ao que se pode ver na Figura 26.

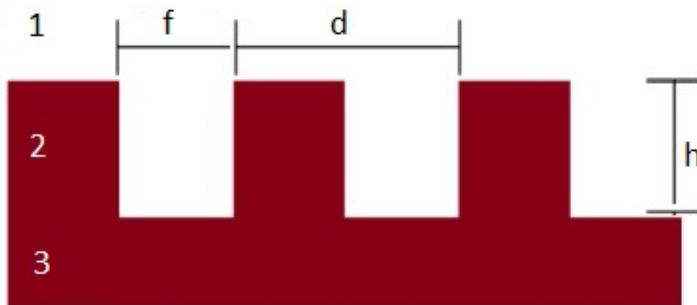


Figura 26 – Geometria do RCWA

Declara-se o número de camadas, os respectivos índices de refração e os parâmetros geométricos, como a altura das camadas, o período e dimensões da rede. As fronteiras laterais recebem as condições de contorno de *floquet*, assim o cálculo considera a estrutura periódica e infinita. A onda incidente também deve ser declarada juntamente com suas características, como polarização e comprimento de onda.

Por se tratar de uma estrutura periódica, os campos elétricos e magnéticos também serão periódicos, portanto pode-se aplicar a série de *Fourier* e dividir as ondas refletidas e transmitidas em harmônicos, permitindo assim que cada um seja calculado de forma independente. Os campos elétrico e magnético do superstrato é considerado como a somatória da onda incidente com os harmônicos da onda refletida, como se vê na equação A.1. Já o campo do substrato, os harmônicos da onda transmitida, equação A.2. Para a camada da rede, cada harmônico também existirá e será o intermédio entre o substrato e superstrato, como se vê na equação A.3.

$$E_1 = e^{jk_1 r} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} R_i e^{-jk_{1,i} r} \quad (\text{A.1})$$

$$E_3 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} T_i e^{-jk_{3,i} r} \quad (\text{A.2})$$

$$E_2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} S_i e^{-jk_{2,i} r} \quad (\text{A.3})$$

O método, então, aplica as equações de *Maxwell* para cada harmônico em cada uma das regiões da estrutura. Para a região da rede, a o campo respeita a relação A.4, que é a relação de acoplamento de onda, neste caso para polarização TE, no caso TM é similar mas trabalha-se com o campo magnético ao invés do elétrico.

$$\nabla^2 E_2 + k^2 \epsilon_n(x, z) E_2 = 0 \quad (\text{A.4})$$

Por fim, o método impõe as condições de contorno nas fronteiras entre as regiões, que é a continuidade das componentes tangenciais dos campos elétricos e magnéticos.

Dessa forma, com o método descrito é possível calcular as eficiências de reflexão e transmissão da rede de difração, e sua solução, se implementada de forma numérica, possui convergência relativamente rápida.