

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

**Mariana de Jesus Boscolo**

**Introdução à Física do efeito Hall**

**São Carlos**

**2024**

**Mariana de Jesus Boscolo**

## **Introdução à Física do efeito Hall**

Trabalho de Conclusão de Curso - Monografia apresentado ao Curso de graduação em Física na habilitação Teórico-Experimental no Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. José Abel Hoyos Neto

**São Carlos**  
**2024**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma introdução a sistemas de interesse em matéria condensada, com foco especial no efeito Hall quântico inteiro. Primeiramente, é realizada uma análise do efeito Hall clássico, que fornece ferramentas essenciais para a compreensão do efeito Hall quântico. Em seguida, resolve-se a equação de Schrödinger para sistemas com campos elétrico e magnético, utilizando dois *gauges* diferentes. Além disso, introduz-se o conceito de fase de Berry e realiza-se uma análise do fenômeno de fluxo espectral, fundamental para compreender o comportamento da condutividade no efeito Hall. Discute-se também o papel da desordem na formação de platôs no gráfico da resistividade do efeito Hall, e desenvolve-se o cálculo da condutividade e seu caráter quantizado. Por fim, aplica-se a formalização da segunda quantização para o estudo do modelo *tight-binding*, analisando tanto o caso bidimensional sem desordem quanto o caso unidimensional, considerando os efeitos da desordem.

**Palavras-chave:** Efeito Hall. Topologia. Localização de Anderson.

## 1 INTRODUÇÃO

O efeito Hall quântico inteiro trata-se de um sistema formado por elétrons não interagentes com movimento restrito a um plano perpendicular a um forte campo magnético. Os elétrons estão confinados a uma área do plano que, em grande parte do tempo, vamos tratar como uma área retangular, por onde passa um campo elétrico.

Tal organização do sistema faz com que a condutividade e a resistividade da amostra não sejam mais números, e sim, matrizes. A resistividade, por exemplo, é dada por uma matriz da forma

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ -\rho_{xy} & \rho_{xx} \end{pmatrix} \quad (1)$$

O interessante do efeito Hall quântico inteiro é que, quando mediu-se, experimentalmente, o valor da resistividade  $\rho_{xy}$  em função do campo magnético  $B$ , o resultado foi excepcional: para valores maiores de  $B$ , o comportamento de  $\rho_{xy}$  se deu por meio de platôs, como pode ser visto na Fig. 1, dados por

$$\rho_{xy} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} \frac{1}{\nu}, \quad (2)$$

com  $\nu \in \mathbb{N}^*$ . Os centros do platôs ocorriam em  $B = \frac{2\pi\hbar n}{\nu e}$ , onde  $n$  é a densidade de elétrons.

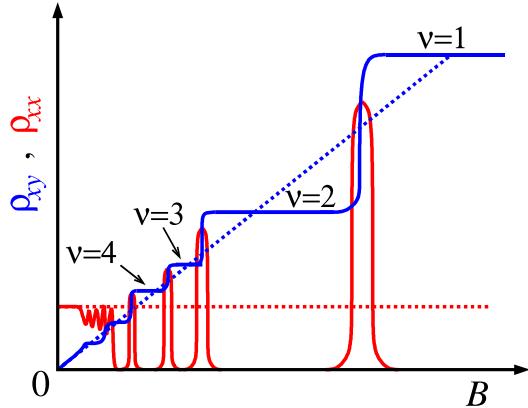


Figura 1 – Comportamento esquemático das resistividades longitudinal  $\rho_{xx}$  e transversal  $\rho_{xy}$  como função do campo magnético no efeito Hall quântico inteiro. A curva vermelha contínua representa o resultado experimental de  $\rho_{xx}$ , a curva azul contínua representa o resultado experimental de  $\rho_{xy}$ , a curva vermelha pontilhada representa a expectativa clássica para  $\rho_{xx}$  e a curva azul pontilhada representa a expectativa clássica para  $\rho_{xy}$ .

Esse resultado era encontrado com ainda mais precisão quando a desordem do sistema aumentava, ou seja, o valor inteiro de  $\nu$  era medido com ainda mais exatidão. Esse resultado claramente discordava do resultado clássico, como veremos mais a seguir.

### 1.1 Efeito Hall clássico

Considera-se então uma placa de elétrons restrita ao plano  $(x, y)$  perpendicular a um campo magnético constante  $\vec{B} = (0, 0, B)$ , com o campo elétrico  $\vec{E}$  constante na direção  $x$ , como na Fig. 2. Sendo  $M$  a massa de um elétron,  $-e$  a sua carga e  $\vec{v}$  a sua velocidade. Para resolvemos clasicamente esse caso, é interessante utilizarmos o modelo de Drude<sup>1</sup>, de forma que a equação de movimento dos elétrons é dada por

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v} \times \vec{B} - e\vec{E} - \frac{M\vec{v}}{\tau} \quad (3)$$

onde  $\tau$  é chamado tempo de espalhamento<sup>2</sup>. Para o caso sem considerar o termo de espalhamento, e sem campo elétrico, a solução é dada por:

$$x(t) = X - R \sin(\omega_B t + \phi) \quad \text{e} \quad y(t) = Y + R \cos(\omega_B t + \phi) \quad (4)$$

onde  $\omega_B = \frac{eB}{M}$  é chamada frequência de ciclotrônico. Por esse resultado temos que a trajetória do elétron seria uma circunferência de raio  $R$  centrada em  $(X, Y)$ .

<sup>1</sup> No modelo de Drude, considera-se um termo de fricção linear que, por sua vez, resumiria tudo aquilo que pode estar impedindo o elétron de seguir sua trajetória.

<sup>2</sup> O tempo médio entre colisões dos elétrons, por exemplo.

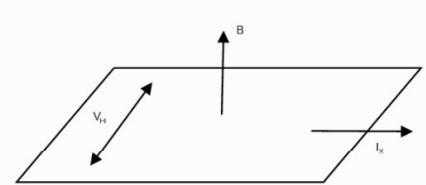


Figura 2 – Desenho sistemático do efeito Hall clássico.

Agora, considerando o campo elétrico  $\vec{E} = (E, 0, 0)$ , como estamos interessados no caso de equilíbrio, tomamos  $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$  e então temos  $\vec{v} + \frac{e\tau}{M} \vec{v} \times \vec{B} = \frac{e\tau}{M} e \vec{E}$ . Essa equação pode ser reescrita por

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega_B \tau \\ -\omega_B \tau & 1 \end{pmatrix} \vec{J} = \frac{e^2 n \tau}{m} \vec{E} \quad (5)$$

onde  $\vec{J} = -ne\vec{v}$  é a densidade de corrente, e  $n$  é densidade dos portadores de carga. Repare que essa equação pode ser reescrita como a lei de Ohm  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , em que a condutividade  $\sigma$  é uma matriz da forma

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} = \frac{\sigma_{DC}}{1 + \omega_B^2 \tau} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_B \tau \\ \omega_B \tau & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

onde  $\sigma_{DC} = \frac{ne^2 \tau}{M}$  é a condutividade da corrente DC na ausência do campo magnético. A resistividade, que é dada pelo inverso da condutividade, é da forma

$$\rho = \frac{1}{\sigma_{DC}} \begin{pmatrix} 1 & \omega_B \tau \\ -\omega_B \tau & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Os elementos de matriz da resistividade  $\rho_{xx} = \frac{M}{ne^2 \tau}$  e  $\rho_{xy} = \frac{B}{ne}$  tem propriedades muito interessantes. O primeiro só depende de  $\tau$  e tende a zero quando  $\tau$  tende a infinito, ou seja, quando as colisões dos elétrons tornam-se mais escassas. A resistividade  $\rho_{xy}$ , por outro lado, não depende de  $\tau$ , implicando sua independência das impurezas do sistema, além de que ele depende linearmente de  $B$ . Na Fig. 1, vemos o gráfico de ambas resistividades em função do campo magnético.

Acima consideramos que o sistema se encontra em equilíbrio, o qual é de fato alcançado. Considerando a placa de elétrons sem o campo magnético, como já foi comentado, teríamos apenas uma corrente na direção de  $\vec{E}$  (vamos assumir que é a direção  $x$ ). Ligando então o campo magnético, este desviaria os elétrons na direção  $y$ , de forma que os elétrons começariam a se acumular nas bordas inferiores da placa, criando uma tensão  $V_H = I_x B / (ned)$  como na Fig. 2, onde  $d$  é a espessura da placa. O equilíbrio é atingido quando o campo elétrico em  $y$  é forte o suficiente para anular o desvio de  $\vec{B}$ , e então voltaríamos a ter apenas uma corrente na direção  $x$ .

## 2 ELÉTRONS LIVRES NO CAMPO MAGNÉTICO: TRATAMENTO QUÂNTICO

Nesse tópico, faremos uma introdução da mecânica quântica de elétrons livres no campo eletromagnético em duas dimensões.

### 2.1 Níveis de Landau

O Hamiltoniano de uma partícula de carga  $-e$  em um campo magnético  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  é dado por

$$H = \frac{1}{2M}(\vec{p} + e\vec{A})^2 \quad (8)$$

onde  $\vec{p} = M\dot{\vec{x}} - e\vec{A}$  é o operador do momento canônico advindo da Lagrangiana (aqui,  $\vec{x}$  é o vetor posição). Definimos o momento cinético  $\vec{\pi} = \vec{p} + e\vec{A} = M\dot{\vec{x}}$  cuja relação de comutação é  $[\pi_x, \pi_y] = -ie\hbar B$ , a partir dos quais definimos os operadores de abaixamento e levantamento  $a = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\pi_x - i\pi_y)$  e  $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\pi_x + i\pi_y)$ , respectivamente, isomórficos aos do oscilador harmônico, que podem ser encontrados em [2]. Dessa forma, reescrevemos o Hamiltoniano como  $H = \frac{1}{2M}\vec{\pi} \cdot \vec{\pi} = \hbar\omega_B \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$ . Os níveis de energia então são dados por

$$E_n = \hbar\omega_B \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (9)$$

graficados na Fig. 3. Esses níveis de energia são chamados níveis de Landau. Será útil estudarmos a degenerescência dos níveis de Landau para duas escolhas diferentes de potencial vetor: o *gauge* de Landau e o *gauge* simétrico.

### 2.1.1 Gauge de Landau

Inicialmente escolhemos o *gauge* de Landau, temos então o potencial vetor  $\vec{A} = xB\hat{y}$ . Repare que  $\vec{A}$  é invariante por translação em  $y$ , dessa forma, supomos que os autoestados do Hamiltoniano sejam também autoestados de  $p_y$ , da forma  $\psi_k(x, y) = e^{iky}f_k(x)$ . Simplificamos então o Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2M}(p_x^2 + (p_y + eB)^2) = \frac{1}{2M}(p_x^2 + (\hbar k + eB)^2) = \frac{1}{2M}p_x^2 + \frac{M\omega_B^2}{2}(x + kl_B^2)^2$$

dito que  $\hbar k$  é autovalor de  $p_y$ . Repare que esse é o Hamiltoniano do oscilador harmônico deslocado, onde  $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$  é o chamado comprimento magnético.

As funções de onda então serão da forma

$$\psi_{n,k}(x, y) \sim e^{iky}H_n(x + kl_B^2)e^{-(x + kl_B^2)/(2l_B^2)} \quad (10)$$

onde  $H_n$  são os polinômios de Hermite. As funções de onda são exponencialmente localizadas em torno de  $x = -kl_B^2$ . Com essa aproximação, temos que o número de estados que cabem em nossa amostra retangular de lados  $L_x$  e  $L_y$ , é dado por  $N = \frac{L_y}{2\pi} \int_{-L_x/l_B^2}^0 dk = \frac{L_x L_y}{2\pi l_B^2} = \frac{eBA}{2\pi\hbar}$  onde  $A = L_x L_y$  é a área da amostra.

Acrescentando um campo elétrico na direção  $x$ , atualizamos o Hamiltoniano para

$$H = \frac{1}{2M}(p_x^2 + (\hbar k + eB)^2) + eEx = \frac{p_x^2}{2M} + \frac{M\omega_B^2}{2} \left( x + kl_B^2 + \frac{ME}{eB^2} \right)^2 - \frac{ME^2}{2B^2} - \hbar k \frac{E}{B} \quad (11)$$

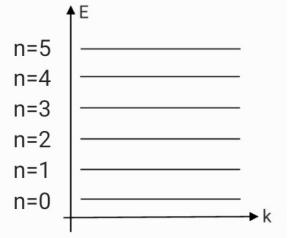


Figura 3 – Níveis de Landau.

Na segunda igualdade, houve completamento de quadrados. Temos então os níveis de Landau (vide Fig. 4) dados por

$$E_{n,k} = \hbar\omega_B \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{ME^2}{2B^2} - \hbar k \frac{E}{B} \quad (12)$$

e as autofunções são deslocadas em  $x$ :  $\psi(x, y) = \psi_{n,k} \left( x + \frac{ME}{(eB^2)}, y \right)$ .

Agora os níveis de energia dependem linearmente de  $k$ , e os estados sofrem um desvio na direção de  $y$  cuja velocidade de grupo é dada por

$$v_y = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_{n,k}}{\partial k} = -\frac{e}{\hbar} El_B^2 = -\frac{E}{B} \quad (13)$$

Para chegarmos no resultado acima, basta notarmos que  $\psi_n(y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(k) e^{i(ky - \frac{E_n t}{\hbar})} dk$ . Considerando uma aproximação de Taylor  $E(k) \approx E_0 + (k - k_0)E'_0$ , onde  $E'_0 = \frac{\partial E(k)}{\partial k}$  em  $k_0$ , temos

$$\psi_n(y, t) = e^{i(k_0 y - \frac{E_0 t}{\hbar})} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(k) e^{i(k - k_0) \left( y - \frac{E'_0 t}{\hbar} \right)} dk \quad (14)$$

onde o termo da função de onda caracterizado pela integral é uma onda envelope com velocidade  $v_y = E'_0 / \hbar$ .

### 2.1.2 Gauge simétrico

O *gauge* simétrico é útil para problemas com simetria cilíndrica, o potencial vetor é dado por  $\vec{A} = -\frac{yB\hat{x}}{2} + \frac{xB\hat{y}}{2}$ , que não é invariante sob nenhuma simetria translacional, contudo preserva simetria rotacional pelo eixo  $z$ . A degenerescência dos estados será evidenciada através de um novo momento definido por  $\tilde{\vec{p}} = \vec{p} - e\vec{A}$ . Para o *gauge* simétrico em específico, temos a relação de comutação  $[\pi_i, \tilde{\pi}_j] = 0$ , para  $i = x, y$  e  $j = x, y$ . Definimos então, respectivamente, os operados de abaixamento e levantamento:  $b = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\tilde{\pi}_x + i\tilde{\pi}_y)$  e  $b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\tilde{\pi}_x - i\tilde{\pi}_y)$ .

Um estado genérico no espaço de Hilbert é dado por

$$|n, m\rangle = \frac{a^{\dagger n} b^{\dagger m}}{\sqrt{n!m!}} |0, 0\rangle \quad (15)$$

onde  $m$  é o número relacionado ao momento angular da função de onda. Para encontrarmos a autofunção do nível de Landau mais baixo, faremos algumas manipulações. Primeiro, considere as seguintes definições:

$$z = x - iy \quad \text{e} \quad \bar{z} = x + iy$$

$$\partial = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{e} \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

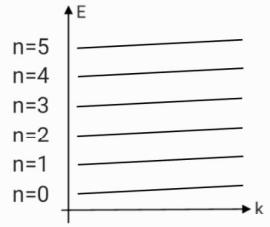


Figura 4 – Níveis de Landau de uma configuração com campo elétrico.

Então, reescrevemos os operadores de abaixamento e levantamento:

$$a = -i\sqrt{2} \left( l_B \bar{\partial} + \frac{z}{4l_B} \right) \quad \text{e} \quad a^\dagger = i\sqrt{2} \left( l_B \partial - \frac{\bar{z}}{4l_B} \right)$$

$$b = -i\sqrt{2} \left( l_B \partial + \frac{\bar{z}}{4l_B} \right) \quad \text{e} \quad b^\dagger = i\sqrt{2} \left( l_B \bar{\partial} - \frac{z}{4l_B} \right).$$

O estado do nível de Landau mais baixo é aniquilado por  $a$  e por  $b$ , logo, temos

$$\psi_{0,m=0} \sim e^{-|z|^2/(4l_B^2)}. \quad (16)$$

As autofunções para  $m \neq 0$  são encontradas utilizando o operador de levantamento  $b^\dagger$ , de forma que obtemos:

$$\psi_{0,m} \sim \left( \frac{z}{l_B} \right)^m e^{-|z|^2/(4l_B^2)}. \quad (17)$$

O restante das autofunções pode ser encontrado aplicando o operador de abaixamento  $a^\dagger$ . A autofunção de momento angular  $m$  concentra-se em uma região de raio  $r = \sqrt{2m}l_B$ .

É fácil ver que  $m$  é o número quântico associado ao momento angular, basta notar que o operador de momento angular é dado por

$$L = i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = \hbar(z\partial - \bar{z}\bar{\partial}),$$

se operarmos ele na autofunção do nível de Landau mais baixo, obtemos  $L\psi_{0,m} = \hbar m \psi_{0,m}$ . Logo, os autovalores de  $L$  são  $\hbar m$ .

Vale notar que, para os diferentes *gauge*, encontramos diferentes autoestados. Isto não é um problema, visto que os estados não contribuem fisicamente para o nosso estudo. Permanece invariante, contudo, o número de estados que cabe em nossa amostra de área  $A$ . Considere uma amostra circular de área  $A = \pi R^2$ , o número de estados, pela aproximação acima feita para a localização dos estados, é dado por

$$N = \int_0^{\mathcal{M}} dm = \int_0^{R^2/(2l_B^2)} dm = \frac{R^2}{2l_B^2} = \frac{A}{2\pi l_B^2} = eBA/(2\pi\hbar) \quad (18)$$

onde  $\mathcal{M}$  seria o maior momento cujo estado cabe na amostra.

## 2.2 Fase de Berry

Considera-se um Hamiltoniano qualquer de um sistema que depende das coordenadas generalizadas e de certos parâmetros fixos determinados por fatores externos, vamos então variar esses parâmetros adiabaticamente<sup>3</sup> e veremos o que acontece com seus autoestados.

<sup>3</sup> O teorema adiabático prediz que, se variarmos esses parâmetros de maneira suficientemente lenta, o estado atual do sistema (que por suposição, é não degenerado) permanecerá o mesmo por todo o processo de variação, ou seja, não será excitado para nenhum nível mais alto ou mais baixo de energia. Em outras palavras, não haverá cruzamento de nível.

Digamos que o sistema encontra-se em um certo estado (o estado fundamental, por exemplo), com uma certa escolha fixa de parâmetros  $\vec{\lambda}$ . Considerando que os autoestados dependam dos parâmetros, ao variá-los lentamente de forma que a escolha de parâmetros final seja igual a inicial, temos que o estado final do sistema é igual ao estado inicial do sistema a menos de uma fase. Essa fase que depende da variação dos parâmetros é chamada fase de Berry. Vale notar que a fase ( $e^{-iEt/\hbar}$ ) já existiria de antemão (diferente da fase de Berry), por conta da própria evolução temporal dos estados.

Para o cálculo da fase de Berry, consideremos a equação de Schrödinger  $i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H(\vec{\lambda}(t))|\psi\rangle$ . Para cada escolha de parâmetros, fixamos um estado fundamental, formando então uma família de estados chamada de estados de referência  $|n(\lambda)\rangle$ . Depois de um ciclo do espaço dos parâmetros do Hamiltoniano, o estado do sistema será dado por  $|\psi(t)\rangle = U(t)|n(\lambda(t))\rangle$ , onde  $U(t)$  é uma fase dependente do tempo. Projeta-se o estado em sua derivada temporal para a obtenção da seguinte relação

$$U^* \dot{U} = -\langle n | \dot{n} \rangle = -\langle n | \frac{\partial}{\partial \lambda^i} |n\rangle \dot{\lambda}^i. \quad (19)$$

Na equação acima, foi utilizada notação de Einstein. Vale lembrar que, como todos os estados de referência são estados fundamentais, consideramos que suas autoenergias são nulas. Podemos definir agora a conexão de Berry como  $A_i(\lambda) = -i \langle n | \frac{\partial}{\partial \lambda^i} |n\rangle$ . Para um caminho fechado, encontramos então a fase dada por

$$U(t) = \exp \left\{ \left( -i \int A_i(\lambda) \dot{\lambda}^i dt \right) \right\} = \exp \left\{ \left( -i \oint_C A_i(\lambda) d\lambda^i \right) \right\} \quad (20)$$

A conexão de Berry não é invariante por transformações de gauge no espaço de parâmetros, contudo, sua curvatura, dada por  $F_{ij}(\lambda) = \frac{\partial A_j}{\partial \lambda^i} - \frac{\partial A_i}{\partial \lambda^j}$  é invariante. A fase de Berry pode ser reescrita pela curvatura da conexão utilizando o teorema de Stokes para dimensões mais altas:  $U(t) = \exp \{ (-i \int_S F_{ij}(\lambda) dS^{ij}) \}$ . Perceba que é uma integral de superfície no espaço dos parâmetros, e que seu resultado depende da superfície escolhida, evidenciando a dependência da fase de Berry em relação a variação dos parâmetros.

### 2.3 Fluxo Espectral

Consideremos um fluxo de campo magnético  $\Phi$  delimitado por um cilindro, de forma que, fora do cilindro, o campo magnético é nulo, e, dentro, ele é constante. Podemos integrar o potencial vetor em um caminho fechado circular fora do cilindro, obtendo  $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi$  que é satisfeita pelo potencial vetor em coordenadas cilíndricas  $A_\phi = \frac{\Phi}{2\pi r}$ . Temos então o Hamiltoniano do sistema

$$H = \frac{1}{2m} (p_\phi + eA_\phi)^2 = \frac{1}{2mr^2} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{e\Phi}{2\pi} \right)^2. \quad (21)$$

Supondo que as autofunções do Hamiltoniano são da forma  $\psi = e^{i\phi}$ , e supondo condições periódicas de contorno, ou seja,  $\psi(\phi) = \psi(\phi + 2\pi)$ , obtemos as autofunções normalizadas

e suas devidas autoenergias, respectivamente:

$$\psi(\phi, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} e^{-in\phi}, \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left( n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \quad (22)$$

onde  $n \in \mathbb{Z}$  e  $\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{e}$  é chamado quantum de fluxo. O interessante desse sistema é que, se o fluxo for um múltiplo de  $\Phi_0$ , o espectro das energias não será diretamente afetado pelo fluxo dentro do cilindro, mas caso o fluxo não seja um múltiplo de  $\Phi_0$ , o espectro é transladado. Imagine que o campo magnético está desligado no início, de modo que o fluxo é nulo, e o sistema encontra-se no estado fundamental (com  $n = 0$ ), então vamos lentamente aumentando o fluxo magnético dentro do cilindro. Nesse caso, não podemos usar a fase de Berry para descobrirmos o estado final do sistema, já que não podemos garantir o não cruzamento de níveis de energia. Mas, quando o fluxo atingir o valor de  $\Phi_0$ , temos que a energia do estado nesse momento será a mesma energia do primeiro estado excitado em relação ao estado inicial, assim como cada nível de energia é transladado para o nível logo acima. Esse fenômeno chama-se fluxo espectral: a mudança de um parâmetro do Hamiltoniano causa a translação inteira dos níveis de energia.

### 3 A CONDUTIVIDADE NO EFEITO HALL QUÂNTICO INTEIRO

O motivo pelo qual o efeito Hall quântico inteiro se torna interessante é, de fato, a exatidão dos platôs presentes no gráfico da resistividade  $\rho_{xy}$  em função do campo magnético. Sobre esse fenômeno, podemos fazer os seguintes questionamentos:

1. Por que os platôs existem?
2. Por que esse fenômeno não é atrapalhado pela desordem do sistema, e, sim, favorecido?
3. Por que, em um platô, a resistividade tem o valor exato de  $\rho_{xy} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} \frac{1}{\nu}$  com  $\nu \in \mathbb{N}^*$  ?

Neste tópico, deve ser feito um estudo básico sobre as possíveis respostas desses questionamentos. Começamos com um Hamiltoniano igual o descrito na Eq. ?? A densidade de corrente é dada por  $\vec{J} = (e/A)\dot{\vec{x}}$ , onde  $A$  é a área da amostra, e  $M\dot{\vec{x}} = \vec{p} + e\vec{A}$ . Parece razoável supor que a densidade de corrente total seria igual à corrente de todos os estados ocupados somados:

$$\vec{J} = -\frac{e}{MA} \sum_{\text{estados ocupados}} \langle \psi | i\hbar\nabla + e\vec{A} | \psi \rangle.$$

Na direção  $x$ , a densidade de corrente é nula, já que a média do momento em  $x$  é nula para todos os estados (como no oscilador harmônico), mas na direção  $y$ , temos:

$$J_y = -\frac{e}{MA} \sum_{n=1}^{\nu} \sum_k \langle \psi_{n,k} | \hbar k + exB | \psi_{n,k} \rangle.$$

Como as funções de onda são localizadas em  $x = -\frac{\hbar k}{eB} - \frac{ME}{eB^2}$ , temos que  $\langle \psi_{n,k} | x | \psi_{n,k} \rangle = -\frac{\hbar k}{eB} - \frac{ME}{eB^2}$ . Logo temos,

$$J_y = e\nu \sum_k \frac{E}{AB} = e\nu \frac{E}{AB} \sum_k 1 = e\nu \frac{E}{AB} N = e\nu \frac{E}{AB} \frac{AB}{\Phi_0} = e\nu \frac{E}{\Phi_0}$$

onde  $N$  é o número de estados que cabem na amostra, calculado na Eq. 18. A densidade de corrente então é dada por

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ e\nu E / \Phi_0 \end{pmatrix} = \sigma \vec{E} \quad (23)$$

Dessa forma, temos que a condutividade e a resistividade assumem os seus valores esperados  $\sigma_{xy} = \frac{-e\nu}{\Phi_0}$  e  $\rho_{xy} = \frac{2\pi\hbar}{e^2\nu}$ , respectivamente. Enfim, chegamos ao resultado obtido experimentalmente para os valores de  $\rho_{xy}$  para  $\nu$  níveis de Landau preenchidos, contudo, esse modelo tem muitos pontos de insatisfação, a começar pelo fato de que ele não prevê nenhum platô, além de que nele é considerado que todos os estados colaboram igualmente para a condutividade, e também, em nenhum ponto foi considerada a desordem do sistema.

### 3.1 Modos de Borda

Antes de entrarmos com mais afincos no papel de desordem, é necessário comentar sobre a importância das bordas do sistema do efeito Hall. Consideremos, primeiramente, o caso em que o campo elétrico está desligado. Temos que, classicamente, a trajetória dos elétrons seria circular, como na Fig. 5, exceto por perto das bordas, onde os elétrons seriam obrigados a seguir por direções opostas. Em uma das bordas, os elétrons seguiriam todos ao longo de uma direção, e na outra borda, eles seguiriam pela direção contrária.

Dessa forma, na ausência do campo elétrico, a corrente desaparece. Agora, analisando o caso em que não temos apenas o campo magnético, consideramos o Hamiltoniano dado por

$$H = \frac{1}{2M} (p_x^2 + (p_y + eB)^2) + V(x), \quad (24)$$

onde  $V(x)$  é um potencial qualquer, desde que seja suave o suficiente em escalas de distância  $l_B$ . A velocidade de grupo de desvio dos estados é dada por  $v_y = -\frac{1}{eB} \frac{\partial V}{\partial x}$  como já foi utilizado na Eq. 13. Podemos então calcular a corrente gerada por esse potencial. Se esse potencial for uma ddp  $\Delta P$  aplicada em duas bordas opostas da amostra, temos a corrente

$$I_y = -e \int v_y(k) \frac{dk}{2\pi} = \frac{e}{2\pi\hbar} \int \frac{\partial V(x)}{\partial x} dx = \frac{e}{2\pi\hbar} \Delta P \quad (25)$$

onde  $\Delta P = eV_H$ , e  $\sigma_{xy} = I_y/V_H$ , então  $\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar}$  que é a condutividade para um nível de Landau preenchido. O ponto é que isso é verdade para qualquer potencial que for ligado no centro da amostra, contanto que tenha a diferença de potencial nas bordas. O estado desses elétrons que seguem em apenas uma direção são chamados modos de borda.

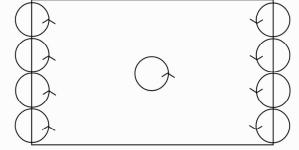


Figura 5 – Trajetória clássica dos elétrons por perto das bordas.

### 3.2 Estados localizados e estendidos

Nesse tópico, devemos discutir o papel da desordem na formação dos platôs. Resumidamente, segue abaixo o que a desordem causa no sistema do efeito Hall:

- A desordem levanta a degenerescência dos estados, de forma que os níveis de Landau deixam de ser algo como na Fig. 3 e passam a ser mais parecidos com a Fig. 6;
- A desordem diminui a quantidade de estados estendidos na amostra, e aumenta a quantidade de estados localizados.

O motivo pelo qual a desordem levanta estados degenerados vem de teoria da perturbação. Um potencial desordenado quebra simetrias que antes produziam as degenerescências, cada estado pode experenciar uma mudança diferente de energia a depender da sua posição espacial.

#### 3.2.1 Operadores de centro de órbita

No efeito Hall clássico, encontramos a trajetória dos elétrons sem o campo elétrico, vide Eq. 4. Os operadores de centro de órbita são então definidos por

$$X = x(t) + R \sin(\omega_B t + \phi) = x - \frac{\dot{y}}{\omega_B} = x - \frac{\pi_y}{M\omega_B}$$

$$Y = y(t) - R \cos(\omega_B t + \phi) = y + \frac{\dot{x}}{\omega_B} = y + \frac{\pi_x}{M\omega_B}$$

e, quando aplicados sobre um estado, esses operadores devem resultar na localização aproximada desse estado, ou então, no caso clássico, no centro de órbita da partícula. Ambos claramente comutam com o Hamiltoniano sem a desordem, e sua relação de comutação é  $[X, Y] = il_B^2$ .

A sua variação temporal em um sistema com o potencial desordenado  $V$  é dada por

$$i\hbar \dot{X} = [X, H + V] = [X, V] = [X, Y] \frac{\partial V}{\partial Y} = il_B^2 \frac{\partial V}{\partial Y}$$

e, analogamente,  $i\hbar \dot{Y} = -il_B^2 \frac{\partial V}{\partial X}$ . Se em uma determinada região do sistema,  $V$  possuir um ponto de mínimo, o estado ficaria localizado em uma equipotencial ao redor desse ponto. No sistema limpo, como foi visto na Seção 2, na direção  $y$ , a função de onda tem a forma de uma onda plana, então espera-se uma condutividade contínua em acordo com a teoria clássica ilustrada na linha azul pontilhada da Fig. 1, entretanto, o potencial visto pelos elétrons é randômico por conta da presença de impurezas/defeitos no material. Os efeitos de potenciais randômicos em uma e duas dimensões levam ao fenômeno da localização

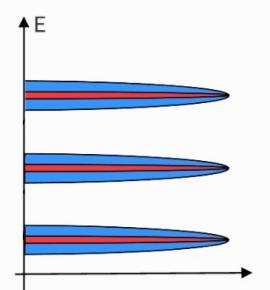


Figura 6 – Transformação de estados estendidos (vermelho) para localizados (azul).

de Anderson de todos os estados, de acordo com [7], devido a baixa probabilidade de interferência construtiva entre as funções de onda dos elétrons. Os platôs da condutividade então acontecem porque o preenchimento de estados localizados mantém a condutividade constante, já que estes não influenciam nos valores da condutividade, apenas os estados estendidos, de acordo com [3].

### 3.2.2 Fluxo Espectral revisitado

Deve-se mostrar agora que, apesar da desordem, os valores da condutividade e resistividade encontrados nos platôs são condizentes pela teoria. Para isso, consideremos um sistema como o da Fig. 7, onde temos os elétrons confinados a uma estrutura anelar por onde passa um campo magnético perpendicular a este, além de um fluxo magnético adicional confinado a um cilindro no centro do anel. O mesmo exercício de variar o fluxo de 0 até  $\Phi_0$  deve ser feito nesse caso, em um dado tempo  $T \gg 1/\omega_B$ , criando uma força eletromotriz  $\varepsilon = -\Phi_0/T$  ao redor do anel, de forma que, no processo,  $n$  elétrons vão se deslocar do interior do anel para seu raio mais externo, criando uma corrente dada por  $I_r = -ne/T$ . Dessa forma, o valor da resistividade seria  $\rho_{xy} = \frac{\varepsilon}{I_r} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} \frac{1}{n}$ , o que condiz com as previsões. Agora é necessário provar que  $n$  elétrons se deslocaram do raio mais interno para o raio mais externo no processo.

Ainda não considerando a desordem, pela simetria do sistema, deve-se estudar o caso com *gauge* simétrico. Fazendo a substituição  $z = x - iy = re^{i\phi}$ , as funções de onda do nível de Landau mais baixo são dadas por

$$\psi_m = r^m e^{im\phi} e^{-r^2/(4l_B^2)}. \quad (26)$$

A função de onda de momento  $m$  é localizada pelo raio  $r = \sqrt{2ml_B}$ .

Mas, pela análise do fluxo espectral, ao final do processo de variação do fluxo, a nova função de onda do estado é a função de onda do nível imediatamente superior, ou seja, a função de momento  $m + 1$  que é fortemente localizada em  $r = \sqrt{2(m + 1)l_B}$ . Dessa forma, se todos os estados do nível de Landau estiverem preenchidos, após um tempo  $T$ , um elétron se desloca do raio mais interno para o raio mais externo. Se  $n$  níveis de Landau estiverem completamente preenchidos,  $n$  elétrons serão deslocados.

O Hamiltoniano do caso com a desordem é dado por

$$H = \frac{1}{2M} \left[ -\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \left( -i \frac{\hbar}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{eBr}{2} + \frac{e\Phi}{2\pi r} \right)^2 \right] + V(r, \phi) \quad (27)$$

Com uma transformação de *gauge*, podemos tentar anular o fluxo, por meio de  $\psi(\theta, \phi) \rightarrow e^{ie\Phi\phi/(2\pi\hbar)} \psi(\theta, \phi)$ , satisfazendo a condição de que  $\psi(\theta, \phi) = \psi(\theta, \phi + 2\pi)$ . Para

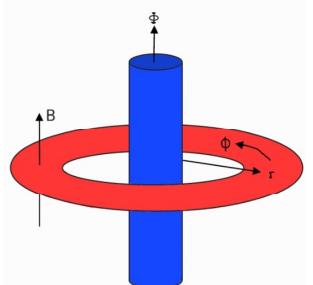


Figura 7 – Estrutura anelar com fluxo no centro.

os estados localizados, essa condição é sempre satisfeita, de forma que eles não são afetados pelo fluxo. Para os estados estendidos, essa condição só é satisfeita quando o fluxo é múltiplo de  $\Phi_0$ . Dessa maneira, a análise feita anteriormente ainda vale, porém apenas para os estados estendidos do nível de Landau.

### 3.3 Análise matemática da condutividade $\sigma_{xy}$

#### 3.3.1 Teoria de perturbação para a condutividade

Primeiramente, faremos uma rápida passagem por teoria de perturbação apenas para trazer alguns resultados. O Hamiltoniano é dado por  $H = H_0 + \Delta H$ , onde  $H_0$  é o Hamiltoniano não perturbado de um sistema com inúmeras partículas antes de ser ligado o campo elétrico dado por  $\vec{E} = -\partial_t \vec{A}$ , e  $\Delta H = -\vec{J} \cdot \vec{A}$ , onde  $\vec{J}$  é um operador associado com a corrente. Na resolução adiante, trataremos  $\vec{J}$  como o operador da densidade de corrente em prol da simplificação dos cálculos.

Também é considerado que o campo elétrico aplicado é da forma  $\vec{E} = \vec{E} e^{-i\omega t}$ , ou seja, um campo AC. Consequentemente, temos  $\vec{A} = \frac{\vec{E}}{i\omega} e^{-i\omega t}$ .

Por teoria de perturbação, sabemos que a evolução temporal dos estados ocorre por  $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$  com  $U(t, t_0) = T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \Delta H(t') dt'}$  e  $T$  é constante satisfazendo  $i\hbar \frac{dU}{dt} = \Delta H U$  de modo que  $U(t, t_0)$  seja unitário. Mais adiante, vamos considerar  $T$  como a identidade. Os operadores evoluem por meio de  $\mathcal{O}(t) = e^{iH_0 t/\hbar} \mathcal{O} e^{-iH_0 t/\hbar}$ .

Considerando um sistemas com partículas no estado fundamental, inicialmente no momento  $t_0 \rightarrow -\infty$ , a evolução temporal do valor medido pela corrente se dá por

$$\begin{aligned} \langle \vec{J}(t) \rangle &= \langle 0(t) | \vec{J}(t) | 0(t) \rangle = \langle 0 | U^{-1}(t) \vec{J}(t) U(t) | 0 \rangle \\ &\approx \left\langle 0 \left| \left( 1 + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \Delta H(t') dt' \right) \vec{J}(t) \left( 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \Delta H(t') dt' \right) \right| 0 \right\rangle \\ &\approx \langle 0 | \vec{J}(t) | 0 \rangle + \left\langle 0 \left| \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t [\Delta H(t'), \vec{J}(t)] dt' \right| 0 \right\rangle \end{aligned}$$

onde expandimos o operador  $U(t, t_0)$  em Taylor e consideramos apenas os primeiros termos da série. O primeiro termo do lado direito da equação é a corrente na ausência do campo elétrico, a qual será considerada nula. O sistema é invariante por translação temporal, dessa forma, podemos fazer uma substituição de variáveis em termos de  $t'' = t - t'$ . Logo, substituindo o valor de  $\Delta H$ , temos, para cada componente de  $\vec{J}$ ,

$$\langle \vec{J}_i(t) \rangle = \frac{1}{\hbar\omega} \left( \int_0^\infty e^{i\omega t''} \langle 0 | [\vec{J}_j(0), \vec{J}_i(t'')] | 0 \rangle dt'' \right) E_j e^{-i\omega t'} \quad (28)$$

com  $i, j = x, y$ . Logo, temos para a condutividade, o valor de

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{\hbar\omega} \int_0^\infty e^{i\omega t} \langle 0 | [\vec{J}_y(0), \vec{J}_x(t)] | 0 \rangle dt \quad (29)$$

Essa é chamada a fórmula de Kubo para a condutividade. A fórmula de Kubo é uma expressão que representa como as medidas de um certo observável mudam sob influência de alguma força perturbativa no sistema.

Evoluindo o operador  $\vec{J}$  no tempo, temos

$$\sigma_{xy}(\omega) = \frac{1}{\hbar\omega} \int_0^\infty e^{i\omega t} \sum_n (\langle 0|J_y|n\rangle\langle n|J_x|0\rangle e^{-i(E_0-E_n)t/\hbar} - \langle 0|J_x|n\rangle\langle n|J_y|0\rangle e^{-i(E_n-E_0)t/\hbar}) dt \quad (30)$$

Note que os operadores já foram projetados em uma base  $|n\rangle$  completa de autoestados do Hamiltoniano não perturbado. Repare que os estados  $|n\rangle = |0\rangle$  não contribuem para o somatório. Podemos fazer a aproximação para o caso DC em que  $\omega \rightarrow 0$ :  $\frac{1}{\hbar\omega+E_n-E_0} \approx \frac{1}{E_n-E_0} - \frac{\hbar\omega}{(E_n-E_0)^2} + \mathcal{O}(\omega^2)$ . O primeiro termo do lado direito da equação acaba por desaparecer, pelo fato do sistema ser invariante por rotação, ou seja, deve ser invariante sob a transformação  $x \rightarrow y$  e  $y \rightarrow -x$ , levando a

$$\sum_n \langle 0|J_y|n\rangle\langle n|J_x|0\rangle + \langle 0|J_x|n\rangle\langle n|J_y|0\rangle = 0$$

de modo que, integrando a Eq. 30, chegamos em

$$\sigma_{xy} = i\hbar L_x L_y \sum_{n \neq 0} \frac{\langle 0|J_y|n\rangle\langle n|J_x|0\rangle - \langle 0|J_x|n\rangle\langle n|J_y|0\rangle}{(E_0 - E_n)^2}. \quad (31)$$

onde a correção de corrente para densidade de corrente já foi feita, através da multiplicação pelas dimensões da amostra retangular de lados  $L_x$  e  $L_y$ .

### 3.3.2 Topologia do efeito Hall

Voltando para a análise do efeito Hall, consideremos nosso sistema localizado em um Toro espacial formado pelo dobramento do retângulo de lados  $L_x$  e  $L_y$ , de forma que temos algumas condições de contorno a mais para as funções de onda. Definimos os operadores de translação magnéticos como  $\vec{T}(\vec{d}) = e^{-i\vec{d}\cdot(i\nabla+e\vec{A}/\hbar)}$ , de forma que  $T_x = T(\vec{d} = (L_x, 0))$  e  $T_y = T(\vec{d} = (0, L_y))$ .

As novas condições de contorno então devem ser  $T_x\psi(x, y) = \psi(x, y)$  e  $T_y\psi(x, y) = \psi(x, y)$ , utilizando então o *gauge* de Landau, temos

$$T_x\psi(x, y) = \psi(x + L_x, y) \quad \text{e} \quad T_y\psi(x, y) = e^{-ieBL_yx/\hbar}\psi(x, y + L_y). \quad (32)$$

Repare que essas não são as condições de contorno usuais  $\psi(x, y) = \psi(x, y + L_y)$ , e essas equações não são consistentes para qualquer escolha  $B$ , visto que  $T_y T_x = e^{-ieBL_x L_y/\hbar} T_x T_y$ , contudo, ao aplicarmos  $T_x T_y$  precisamos chegar no mesmo estado após aplicarmos  $T_y T_x$ , o que só é verdade se  $\frac{eBL_x L_y}{\hbar} \in 2\pi\mathbb{Z}$ . Repare que essa relação representa uma quantização do fluxo magnético em termos de  $\Phi_0$

Agora, analisaremos o sistema perturbado. A vantagem que temos de estarmos enxergando a nossa amostra como um Toro, ao invés de um retângulo, é que podemos inserir diferentes fluxos magnéticos no nosso sistema, os quais serão utilizados para a teoria de perturbação, como mostra a Fig. 8.

O novo potencial vetor, portanto, (lembrando que estamos usando o *gauge* de Landau) é da forma  $\vec{A} = \left( \frac{\Phi_x}{L_x}, \frac{\Phi_y}{L_y} + Bx, 0 \right)$ .

Topologicamente, essa sistematização de fluxos pode ser substituída pela vizualização da Fig. 9(a); lembrando que, nessa representação, o fluxo  $\Phi_x$ , por exemplo, pode se encontrar contornando qualquer circunferência vertical do Toro, não especificamente a da imagem; analogamente para  $\Phi_y$ . Então, utilizando a nova visualização, corta-se o toro na parte serrilhada.

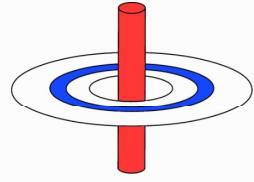
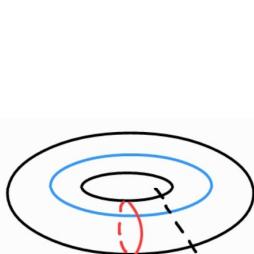


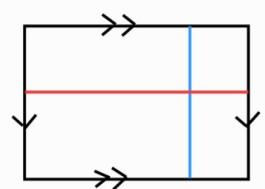
Figura 8 – Fluxos perturbativos  $\Phi_y$  em azul e  $\Phi_x$  em vermelho.



(a) Fluxos no Toro.



(b) Fluxos no cilindro.



(c) Fluxos no plano.

Figura 9 – Nova visão dos fluxos  $\Phi_y$  em azul e  $\Phi_x$  em vermelho.

Obtém-se algo como a Fig. 9(b), onde as setas nas bordas indicam a direção à qual elas estão orientadas ao utilizarmos sua relação de equivalência, como explicado em [6]. Então, novamente, cortá-se o cilindro na parte serrilhada.

Obtém-se então algo como a Fig. 9(c) mostra. O fluxo  $\Phi_x$  é de um campo que cruza a amostra (em todos os pontos da amostra) na direção em vermelho, e  $\Phi_y$  é de um campo que cruza a amostra na direção em azul. As bordas com uma seta seriam as de comprimento  $L_x$  e com duas setas teriam comprimento  $L_y$ .

Assim como no caso do fluxo espectral, o espectro do sistema é invariante para transformações de  $\Phi_x$  e  $\Phi_y$  múltiplas do quantum de fluxo. Dessa forma, a perturbação do Hamiltoniano é dada por  $\Delta H = -\sum_{i=x,y} \frac{J_i \Phi_i}{L_i}$ . Por teoria de perturbação, o novo estado fundamental é dado por

$$|\psi_0\rangle' = |\psi_0\rangle + \sum_{n \neq \psi_0} \frac{\langle n | \Delta H | \psi_0 \rangle}{E_n - E_0} |n\rangle. \quad (33)$$

Estamos interessados em repetir o procedimento do caso do fluxo espectral, então vamos variar  $\Phi_i$ . Derivando a Eq. 33, temos

$$\left| \frac{\partial \psi_0}{\partial \Phi_i} \right\rangle = -\frac{1}{L_i} \sum_{n \neq \psi_0} \frac{\langle n | J_i | \psi_0 \rangle}{E_n - E_0} |n\rangle. \quad (34)$$

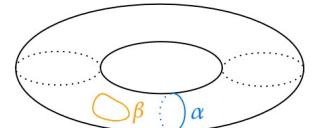


Figura 10 – Caminho trivial (em laranja) e não trivial (em azul) em um Toro.

Substituindo esses valores na Eq. 31, temos

$$\sigma_{xy} = i\hbar \left( \langle \frac{\partial \psi_0}{\partial \Phi_y} | \frac{\partial \psi_0}{\partial \Phi_x} \rangle - \langle \frac{\partial \psi_0}{\partial \Phi_x} | \frac{\partial \psi_0}{\partial \Phi_y} \rangle \right) = i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial \Phi_y} \langle \psi_0 | \frac{\partial \psi_0}{\partial \Phi_x} \rangle - \frac{\partial}{\partial \Phi_x} \langle \psi_0 | \frac{\partial \psi_0}{\partial \Phi_y} \rangle \right). \quad (35)$$

Como o importante não são os fluxo  $\Phi_i$ , e, sim, o resto da divisão de  $\Phi_i$  por  $\Phi_0$ , o espaço formado por esses fluxos é um Toro  $\mathbf{T}_{\vec{\Phi}}^2$  diferente do Toro já mencionado formado pelas coordenadas espaciais. Parametrizemos então  $\mathbf{T}_{\vec{\Phi}}^2$  com as coordenadas  $\theta_i = \frac{2\pi\Phi_i}{\Phi_0}$  com  $\theta_i \in [0, 2\pi]$ . Então, a conexão de Berry para a variação desses parâmetros e sua respectiva curvatura são dadas por

$$\mathcal{A}_i(\vec{\Phi}) = -i \left\langle \psi_0 \left| \frac{\partial}{\partial \theta_i} \right| \psi_0 \right\rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_{xy} = -i \left( \frac{\partial}{\partial \theta_y} \langle \psi_0 | \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta_x} \rangle - \frac{\partial}{\partial \theta_x} \langle \psi_0 | \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta_y} \rangle \right). \quad (36)$$

Substituindo o valor da curvatura na Eq. 35, obtemos  $\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{\hbar} \mathcal{F}_{xy}$ . Supondo que a condutividade é na verdade a média desse valor sobre todos os fluxos, de forma que temos que na verdade integrar a curvatura de Berry sobre todo  $\mathbf{T}_{\vec{\Phi}}^2$ :

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{\hbar} \int_{\mathbf{T}_{\vec{\Phi}}^2} \mathcal{F}_{xy} \frac{d^2\theta}{(2\pi)^2} = -\frac{e^2}{2\pi\hbar} C \quad (37)$$

onde  $C$  é conhecido como primeiro número de Chern, dado por  $C = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}_{\vec{\Phi}}^2} \mathcal{F}_{xy} d^2\theta$ . A princípio, diríamos que  $C = 0$ , visto que, como  $\mathbf{T}_{\vec{\Phi}}^2$  é uma superfície fechada, podemos usar o teorema de Gauss pelo volume interior de  $\mathbf{T}_{\vec{\Phi}}^2$ , de forma que o integrando é nulo, já que seria o divergente de um rotacional. Contudo, a conexão de Berry não é invariante por transformações de *gauge*, de forma que, para uma transformação  $\mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_i + \partial_i \omega$ , onde  $\omega$  é uma função qualquer, o número de Chern é dado por

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}_{\vec{\Phi}}^2} (\vec{\mathcal{A}} + \nabla \omega) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}_{\vec{\Phi}}^2} \nabla \omega ds$$

onde  $ds$  representa o infinitesimal de uma curva, e foi usado na segunda igualdade que a integral do *gauge* original é nula. A última integral da Eq. 3.3.2 também seria nula se calculada em um caminho fechado qualquer trivial de  $\mathbf{T}_{\vec{\Phi}}^2$ , como a curva  $\beta$  na Fig. 10, a qual pode ser deformada em um ponto. Porém, uma curva não trivial, como a  $\alpha$  não pode ser deformada em um ponto, de forma que o resultado da integral é dado por  $2\pi n$ , onde  $n$  é o número de voltas que o caminho faz no Toro, de forma que  $C \in \mathbb{Z}$ .

Esse resultado então condiz experimentalmente para o que é encontrado para  $\sigma_{xy}$ . O número de Chern é um invariante topológico, o que significa que ele é o mesmo para espaços homeomorfos.

## 4 PROBLEMA NA REDE QUADRADA

O Hamiltoniano segundo quantizado pelo modelo de *tight binding*<sup>4</sup> para elétrons em uma rede quadrada de parâmetro  $a$ , sem desordem e sem considerar o spin das partículas,

<sup>4</sup> Ou seja, considerando autoestados restritos a sítios de uma rede.

com o campo magnético perpendicular, é dado por

$$H = -t \sum_{m,n} (e^{ieaA_1(\mathbf{x})/\hbar} |m+1, n\rangle\langle m, n| + e^{ieaA_2(\mathbf{x})/\hbar} |m, n+1\rangle\langle m, n| + h.c.). \quad (38)$$

onde  $\mathbf{x} = (ma, na)$  e  $t$  é o termo de hopping entre um sítio e outro. Para a tradução do Hamiltoniano do modelo de *tight binding* usual para esse Hamiltoniano, usa-se o método da substituição de Peierls, vide [4], o qual afirma que, para elétrons em uma rede na presença de um potencial vetor que varia pouco espacialmente, os operadores de translação na rede são substituídos por

$$T_x = e^{i\theta_{m,n}^x} |m+1, n\rangle\langle m, n| \quad \text{e} \quad T_y = e^{i\theta_{m,n}^y} |m, n+1\rangle\langle m, n| \quad (39)$$

onde  $\theta_{m,n}^x = \frac{e}{\hbar} \int_m^{m+1} A_1(x, n) dx$  e  $\theta_{m,n}^y = \frac{e}{\hbar} \int_n^{n+1} A_2(m, y) dy$ . Como o potencial vetor é quase constante em um sítio, usamos a aproximação

$$\theta_{m,n}^x \approx \frac{e}{\hbar} a A_1(\mathbf{x}), \quad \theta_{m,n}^y \approx \frac{e}{\hbar} a A_2(\mathbf{x}). \quad (40)$$

Fazendo a substituição, temos que o Hamiltoniano resultante é dado pela Eq. 38. Restringindo o problema para campo magnético constante de valor  $B$  na vertical, podemos usar novamente o *gauge* de Landau, ou seja,  $A_1 = 0$  e  $A_2 = Bx =$ . Resolvendo a equação de Schrödinger para um estado qualquer de momento  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ ,  $|\psi_{\mathbf{k}}\rangle = \sum_{i,j} a_{i,j,\mathbf{k}} |i, j\rangle$ , obtemos a equação

$$a_{m+1,n,\mathbf{k}} + a_{m-1,n,\mathbf{k}} + e^{-\frac{i}{\hbar} e B a^2 m} a_{m,n+1,\mathbf{k}} + e^{\frac{i}{\hbar} e B a^2 m} a_{m,n-1,\mathbf{k}} = \frac{E(\mathbf{k})}{t} a_{m,n,\mathbf{k}} \quad (41)$$

onde foi utilizado  $x = ma$ . O *gauge* de Landau possibilita que os coeficientes sejam reescritos por separação de variáveis através de  $a_{m,n,\mathbf{k}} = e^{i\nu n} g_m$ . O fluxo magnético em um sítio, dado por  $\Phi = Ba^2$ , de acordo com [5], pode ser parametrizado em função do quantum de fluxo:

$$\Phi = \frac{p}{q} \Phi_0 \quad (42)$$

onde  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $p \leq q$  e  $\text{mdc}(p, q) = 1$ . A equação secular é, então, dada por

$$g_{m+1} + g_{m-1} + 2 \cos \left( 2\pi m \frac{p}{q} - \nu \right) g_{m,n} = \frac{E}{t} g_m \quad (43)$$

Reescrevendo na forma de matriz, temos:

$$\begin{pmatrix} g_{m+1} \\ g_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{t} - 2 \cos \left( 2\pi m \frac{p}{q} - \nu \right) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_m \\ g_{m-1} \end{pmatrix} \quad (44)$$

A parametrização dada na Eq. 42 é conveniente para a periodicidade em  $m$  da matriz em Eq. 44, com período  $q$ . Dessa forma, podemos impor as condições de contorno seguindo o teorema de Bloch:

$$g_{m+q} = e^{iaqk_x} g_m \quad (45)$$

O número  $\nu$  estaria relacionado com o número quântico  $k_y$ , o qual varia através de  $[-\frac{\pi}{qa}, \frac{\pi}{qa}]$ , por conta do campo magnético, diferente de  $k_x$ , que varia por  $[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$ . A Fig. 11 representa a diagonalização do sistema em função do fluxo. Nota-se  $q$  bandas de energia para  $\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{p}{q}$ .

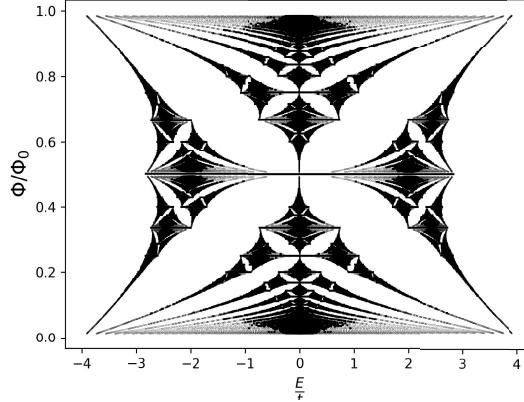


Figura 11 – Autoenergias da rede em função do fluxo magnético.

#### 4.1 Localização de Anderson em sistemas unidimensionais

Agora, vamos considerar o *tight binding* para um sistema unidimensional, o Hamiltoniano segundo-quantizado para o modelo de é dado por

$$H = \sum_n [\epsilon_n |n\rangle\langle n| - t(|n+1\rangle\langle n| + h.c.)] \quad (46)$$

O primeiro termo na somatória refere-se a energia do sítio, enquanto o segundo é o termo de *hopping*, que representa a possibilidade da transição da partícula de um sítio para os seus vizinhos. Um potencial desordenado pode ser atribuído a aleatoriedade dos coeficientes  $\epsilon_n$ , por exemplo. O fenômeno da localização de Anderson trata da localização de estados do sistema o aumento da amplitude de desordem; no caso da ausência da desordem, temos estados estendidos.

Um modo de estudarmos a localização de estados do sistema é por meio da localização dos autoestados, dados, em geral, por  $\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\xi} e^{\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{\xi}}$ , onde  $\xi$  é o comprimento de localização; isso pode ser feito através da quantidade chamada *inverse participation ratio*, calculada por  $IPR = \sum_{j=1}^L |a_{j,k}|^4$ , onde  $|\phi_k\rangle = \sum_{j=1}^L a_{j,k}|j\rangle$  é um autoestado para o sistema e  $L$  é o seu tamanho. O IPR de um autoestado localizado tende a uma constante proporcional ao inverso do comprimento de localização do estado, conforme mudamos o tamanho do sistema, e quanto maior o  $IPR$ , mais localizado seria esse estado. Para um estado perfeitamente estendido sobre toda a rede, teríamos  $a_{j,k} = 1/\sqrt{L}$  para  $j = 1, \dots, L$ , de modo que, para autoestados estendidos temos  $IPR \propto 1/L$ .

Resolvendo a equação de Schrödinger para o Hamiltoniano em Eq. 46, obtemos a equação secular

$$Ea_n = \epsilon_n a_n - ta_{n-1} - ta_{n+1} \quad (47)$$

que pode ser reescrita na forma matricial, utilizando condições periódicas de contorno. Utilizando um método computacional de diagonalização, e variando  $\epsilon_n$  através de uma distribuição uniforme  $[-W, W]$ , onde  $W$  é o parâmetro de desordem, obtemos o resultado ilustrado na Fig. 12(a). Observe que para cada valor distinto de  $L$ , o inverso da média do  $IPR$  permanece constante, indicando a localização dos estados, enquanto, no caso limpo, a  $\langle \frac{1}{L^* IPR} \rangle$  permanece constante, o que mostra que os estados são estendidos.

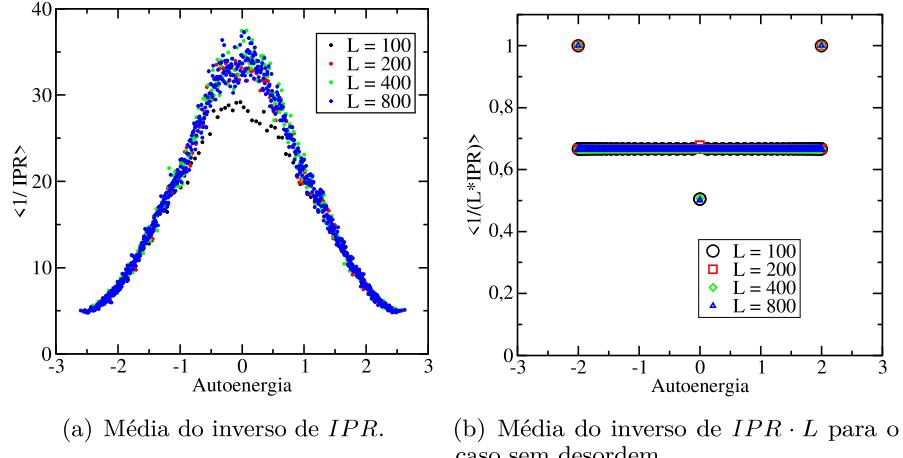


Figura 12 –  $IPR$  para cada autoestado da rede.

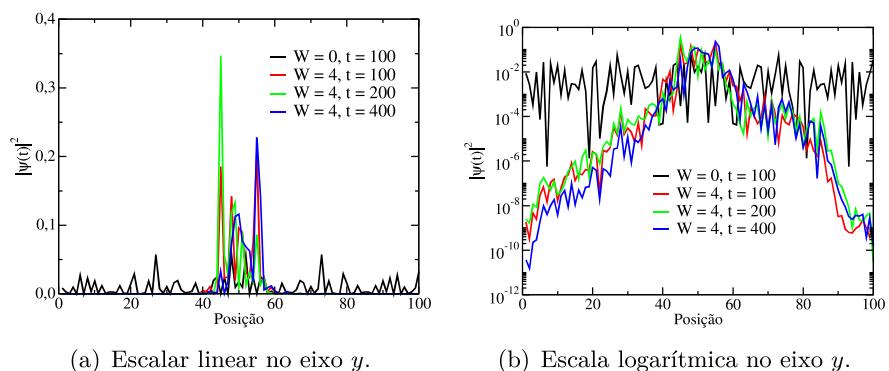


Figura 13 – Densidade de probabilidade em escala em função da posição na rede, o caso limpo foi implementado apenas para  $t = 100$ , quando já estava estendido, e o caso desordenado com  $W = 4$  foi implementado para três instantes diferentes.

Outro meio de análise sobre a localização dos estados é feito a partir da evolução temporal de um estado inicialmente localizado. Na Fig. 13(a), temos a densidade de probabilidade distribuída pela rede em um instante  $t = 100$  de um estado que, em  $t = 0$ , estava localizado no sítio central, para  $W = 0$  e para  $W = 4$ . Perceba que, para o caso com desordem, o estado continua localizado, em comparação ao caso sem desordem. Esse resultado fica mais evidente na Fig. 13(b).

## 5 CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi introduzir conceitos fundamentais da física da matéria condensada, com foco no efeito Hall quântico inteiro. Foram calculados os autoestados e

autoenergias do Hamiltoniano com campo magnético em dois *gauges* distintos, destacando a semelhança com o oscilador harmônico quântico. Discutiu-se a fase geométrica de Berry e o conceito de quantum de fluxo, o qual diz respeito a uma maneira quatizada de incrementar fluxo ao sistema, ressaltando sua utilidade na parametrização do fluxo magnético em uma rede. A formação de platôs de resistividade no efeito Hall foi explicada pela transição de estados estendidos para estados localizados devido à desordem, que também levanta a degenerescência dos níveis de Landau, impactando a condutividade em sistemas com topologia de Toro. O trabalho também abordou os estados de borda, que surgem para todos os níveis de Landau de maneira independente da desordem, e introduziu o fenômeno da localização de Anderson, mostrando como a desordem afeta a natureza dos estados, tornando-os localizados.

## REFERÊNCIAS

1. TONG, D. **Lectures on the Quantum Hall Effect**. arXiv:1606.06687, 2016.
2. GRIFFITHS, D. J.; SCHROETER, D. F. **Introduction to Quantum Mechanics**. 3. ed. Cambridge University Press, 2018.
3. ASHCROFT, N. W.; MERMIN, N. D. **Solid State Physics**. New York: Cengage Learning, USA, 1976.
4. KOHN, W. **Theory of Bloch Electrons in a Magnetic Field: The Effective Hamiltonian**. Phys. Rev. B, American Physical Society, v. 115, 1959. p. 1460–1478.
5. HOFSTADTER, D. R. **Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields**. Phys. Rev. B, American Physical Society, v. 14, 1976. p. 2239–2249.
6. MUNKRES, J. R.. **Topology: A Fist Course**. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1975.
7. ABRAHAMS, E. et al. **Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions**. Physical Review Letters, v. 42, n. 10, 1979. p. 673–676.