

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROJETO MECÂNICO

ESTUDO DE TENSÕES EM CORPOS EM ÓRBITA

AUTOR: PIERRE HANSU PAK

ORIENTADOR: PROF. G. E. O. GIACAGLIA

1985

Agradecimentos ao professor
Giacaglia, pela orientação.

ÍNDICE

	pág.
Introdução	1
1. Descrição do Problema	1
2. Comentários Sobre a Influência dos Fatores Térmicos Sobre as Tensões de Natureza Dinâmica e Vice-Versa	4
3. Objetivo desse Trabalho	5
1ª PARTE: Um Método para Análise de Tensões de Origem Dinâmica	6
1. Idéia Central	6
2. Determinação do Carregamento Equivalente	7
3. Carregamento Equivalente Descrito Como Função do Movimento do Corpo	10
4. Comentários sobre a Determinação das Componentes do Carregamento Equivalente	11
4.1. Forças de Ação	11
4.2. Forças de Inércia	12
2ª PARTE: Estudo de Tensões em uma Viga em Órbita	14
1. Determinação do Carregamento Equivalente	14
1.1. Forças de Ação	14
1.2. Forças de Inércia	17
1.3. Estudo do Movimento Geral de uma Viga em Órbita	18
1.3.1. Sistemas de Referência Adotados	19
1.3.2. Aplicação do Teorema do Baricentro	23
1.3.3. Aplicação do Teorema do Momento Angular	28
1.3.4. Integração Numérica das Equações do Movimento..	34
1.3.4.1. Transformação do Sistema de Segunda Ordem num Sistema de Primeira Ordem.	34
1.3.4.2. Verificação da Conservação da Energia	37
1.3.4.3. Variáveis a Serem Calculadas	40
1.3.4.4. Comentários Gerais sobre o Programa.	43
1.3.4.5. Casos Estudados	44
1.3.4.6. Resultados	50
1.4. Expressão Final do Carregamento Equivalente	65
2. Cálculo dos Esforços na Viga	67
2.1. Cálculo da Força de Tração	68
2.2. Cálculo do Momento Fletor	69
2.3. Esforços Solicitantes Máximos para os Casos Estudados ..	79
2.4. Cálculo das Tensões na Viga	83
3. Comentários Finais	88
Referências Bibliográficas	90
Anexos	A-1

INTRODUÇÃO

1. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Um corpo orbitando ao redor de um planeta, embora esteja totalmente livre ou desvinculado mecanicamente, está sujeito a condições que geram tensões internas. Essas tensões são provenientes de dois mecanismos distintos. O primeiro é resultante da influência térmica do sol e do espaço. Um corpo sólido orbitando no espaço terá uma parte de sua superfície externa exposta ao sol, enquanto que outra parte estará oculta. Nessa condição, enquanto que a superfície exposta ao sol recebe muito mais energia de radiação do que cede, tendendo assim a atingir uma alta temperatura, a superfície oculta cede muito mais energia de radiação do que recebe, tendendo assim a atingir uma temperatura muito baixa. Cria-se assim um gradiente térmico através do corpo e consequentemente um gradiente de dilatações. Esse gradiente de dilatações gera, então, tensões internas.

As tensões geradas por esse fenômeno dependem, entre ou

tros, de fatores tais como: forma do corpo, propriedades térmicas dos materiais, propriedades da superfície (emissividade, refletividade, etc.), propriedades mecânicas dos materiais, movimento do corpo, etc.

O movimento do corpo é, sem dúvida, um fator de grande importância no fenômeno, uma vez que influi diretamente na maneira como o corpo receberá a radiação solar.

O outro mecanismo que gera tensão é de natureza dinâmica. Um corpo pode ser considerado como um conjunto de partículas p_i com massas m_i . Seja um corpo sólido orbitando ao redor de um planeta, cada partícula desse corpo ocupa uma posição $\vec{r}_i$ no espaço e possui uma velocidade $\vec{v}_i$.

É sabido, da Mecânica Newtoniana, que para uma partícula orbitando ao redor de um centro de atração, se são definidas $\vec{r}_i$ e $\vec{v}_i$, fica definida a órbita $\vec{r}_i(t)$ da partícula. Sendo assim, cada partícula de um corpo sólido, se estivesse desvinculada das demais, descreveria uma órbita distinta definida por $\vec{r}_i$ e $\vec{v}_i$. Como todas as partículas estão vinculadas, criam-se tensões internas. Isso pode ser verificado matematicamente, como feito a seguir.

Seja um corpo sólido constituído de n partículas, com vetores posição $\vec{r}_i$ e massas m_i , orbitando ao redor de um centro de atração gravitacional. As posições das n partículas $\vec{r}_i$ podem ser determinadas através das seguintes equações.

Da 2ª lei de Newton, teremos n equações do tipo:

$$\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{\vec{F}_i}{m_i} \quad (1)$$

onde $\vec{F}_i$ é a força aplicada à partícula i , e da condição de corpo sólido, teremos n equações do tipo:

$$\vec{r}_i = f(\vec{r}_j, \vec{r}_k, \vec{r}_l) \quad (2)$$

onde $\vec{r}_j$, $\vec{r}_k$ e $\vec{r}_l$ são os vetores posição de três partículas (j , k e l) quaisquer do corpo.

Ou seja, dadas as posições de três partículas de um corpo sólido, as posições de todas as demais ficam determinadas.

A força $\vec{F}_i$ aplicada a cada partícula pode ser dividida em dois tipos:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{gi} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} \quad (3)$$

onde:

$\vec{F}_{gi}$ é a força gravitacional

$\vec{F}_{ij}$ é a força aplicada à partícula i pela partícula j .

A força gravitacional é função, unicamente, da distância entre a partícula e o centro de atração:

$$\vec{F}_{gi} = \vec{f}_g(\vec{r}_i) \quad (4)$$

Se não existirem tensões internas ao corpo, então as forças internas $\vec{F}_{ij}$ serão nulas e portanto as n equações (1)

terão a forma:

$$-\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{\vec{f}_g(\vec{r}_i)}{m_i} \quad (5)$$

Ou seja, para determinarmos a posição das n partículas, teremos $2n$ equações ((5) e (2)) e apenas n incógnitas ($\vec{r}_i$), o que demonstra que as forças internas não poderão ser nulas e portanto surgirão tensões internas.

Os fatores, entre outros, dos quais dependem essas tensões são: forma do corpo, propriedades mecânicas dos materiais, movimento do corpo, etc.

2. COMENTÁRIOS SOBRE A INFLUÊNCIA DOS FATORES TÉRMICOS SOBRE AS TENSÕES DE NATUREZA DINÂMICA E VICE-VERSA

Embora os mecanismos de geração de tensões térmico e dinâmico sejam totalmente distintos, as tensões de origem dinâmica dependem fortemente de fatores de natureza térmica e vice-versa.

No caso das tensões de origem dinâmica, um dos fatores dos quais elas dependem é, por exemplo, os módulos de elasticidade dos materiais. Essa propriedade depende, por sua vez, da temperatura, que é um fator de natureza térmica.

No caso das tensões de origem térmica, um dos fatores dos quais elas dependem é o movimento ou trajetória do corpo, que é um fator de natureza dinâmica.

Portanto, para um estudo completo das tensões, tanto de origem dinâmica como térmica, devem ser estudados os fatores de natureza dinâmica e térmica.

3. O OBJETIVO DESSE TRABALHO

O objetivo desse trabalho se concentra no mecanismo de geração de tensões de natureza dinâmica. E ainda assim não é um estudo completo, pois considera apenas os fatores de natureza dinâmica. Isso, porém, não o torna inválido, pois a maior parte das análises feitas se aplica a qualquer caso. Na primeira parte, é introduzido um método para a análise das tensões. Esse método, embora dependa do estudo de outros fatores, se aplica a qualquer caso.

Na segunda parte é feita uma análise completa das tensões para um caso. Nessa análise, embora os resultados finais obviamente só sejam válidos dentro das hipóteses feitas, são feitos estudos que se aplicam a casos mais gerais.

1A PARTE:

UM MÉTODO PARA ANÁLISE DE TENSÕES DE ORIGEM DINÂMICA

Nessa parte é apresentado um método para análise de tensões de origem dinâmica num corpo sólido que orbita ao redor de um planeta, e se aplica também quando esse corpo tem vínculos com outros corpos.

1. IDÉIA CENTRAL

Nesse método, é considerado como um dado inicial a forma do corpo sólido ou estrutura na qual se deseja calcular as tensões. A idéia central é de calcular um carregamento que será denominado "carregamento equivalente", e que se fosse aplicado à estrutura em questão, mas numa condição estática, geraria as mesmas tensões resultantes da condição conhecida, ou seja, na condição de movimento orbital. Conhecidos a forma da estrutura e o carregamento equivalente, poder-se-ia calcular as tensões por meio das teorias da "Resistência dos materiais" que se aplicam a corpos ou estruturas

estáticas. Por exemplo, se a estrutura em questão fosse uma estrutura tipo treliça, poder-se-ia aplicar a teoria das vigas e outras aplicáveis ao caso. Se o corpo fosse um disco, poder-se-ia aplicar a teoria das placas, e assim por diante.

2. DETERMINAÇÃO DO CARREGAMENTO EQUIVALENTE

Na determinação das tensões num ponto de um corpo estático sujeito a um carregamento, uma das equações utilizadas é a decorrente da condição de estaticidade aplicada às partículas do corpo:

$$\sum \vec{F}_i = 0 \quad (1.1)$$

onde:

$\vec{F}_i$ = força aplicada à partícula i .

As forças aplicadas a uma partícula i poderiam ser divididas em dois tipos:

1. Forças externas ao corpo = $\vec{f}_{exti}$

2. Forças de tensão (ou internas ao corpo) = $\vec{f}_{Ti}$

As forças externas, por sua vez, podem ser divididas em dois tipos:

1. Forças externas de ação = $\vec{f}_{ai}$

2. Forças de reação dos vínculos no corpo = $\vec{f}_{vi}$.

Teremos, portanto:

$$\sum \vec{f}_{ai} + \sum \vec{f}_{vi} + \sum \vec{f}_{Ti} = 0 \quad (1.2)$$

daí:

$$\sum \vec{f}_{Ti} = - \sum \vec{f}_{ai} - \sum \vec{f}_{vi} \quad (1.3)$$

As forças externas de ação são as forças de carregamento $\vec{f}_{ci}$.

Daí:

$$\sum \vec{f}_{Ti} = - \sum \vec{f}_{ci} - \sum \vec{f}_{vi} \quad (1.4)$$

Essa seria, portanto, uma das equações utilizadas na determinação das tensões num corpo estático.

Analisemos como ficaria a equação anterior para um corpo não estático. Nesse caso, a condição de estaticidade seria substituída pela 2ª lei de Newton:

$$\sum \vec{F}_i = m_i \cdot \vec{a}_i \quad (1.5)$$

onde:

m_i = massa da partícula i

$\vec{a}_i$ = vetor aceleração da partícula i em relação a um referencial inercial

daí:

$$\sum \vec{F}_i = \sum \vec{f}_{ai} + \sum \vec{f}_{vi} + \sum \vec{f}_{Ti} = m_i \cdot \vec{a}_i \quad (1.6)$$

$$\sum \vec{f}_{Ti} = m_i \cdot \vec{a}_i - \sum \vec{f}_{ai} - \sum \vec{f}_{vi} \quad (1.7)$$

Essa seria, portanto, a forma da equação (1.4) para um corpo não estático.

Nota-se que a única mudança da equação (1.4) para a equação (1.7) é a soma da força $m_i \cdot \vec{a}_i$ ao segundo termo. Sendo assim, podemos escrever a equação (1.7) na mesma forma que a equação (1.4):

$$\sum \vec{f}_{Ti} = - \sum \vec{f}_{cei} - \sum \vec{f}_{vi} \quad (1.8)$$

onde:

$$\sum \vec{f}_{cei} = \text{carregamento equivalente}$$

O carregamento equivalente será, portanto, determinado pela equação:

$$\sum \vec{f}_{cei} = \sum \vec{f}_{ai} - m_i \cdot \vec{a}_i \quad (1.9)$$

3. O CARREGAMENTO EQUIVALENTE DESCRITO COMO FUNÇÃO DO MOVIMENTO DO CORPO

Para escrevermos o carregamento equivalente como função do movimento do corpo, fixaremos um referencial ao mesmo e escreveremos o carregamento equivalente em termos do movimento desse referencial.

Considerando-se um referencial fixo ao corpo, podemos escrever a aceleração de uma partícula i como:

$$\vec{a}_i = \vec{a}_i' + \vec{a}_o + \vec{a}_{ti} + \vec{a}_{ci} \quad (1.10)$$

onde:

$\vec{a}_i'$ é a aceleração da partícula em relação ao referencial fixo ao corpo

$\vec{a}_o$ é a aceleração da origem do referencial fixo ao corpo em relação a um referencial inercial

$\vec{a}_{ti}$ será denominada "aceleração de transporte."

$\vec{a}_{ci}$ é a aceleração de Coriolis da partícula i

e

$$\vec{a}_{ti} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}_i + \vec{\Omega} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i) - \vec{r}_i \cdot \Omega^2 \quad (1.11)$$

$$\vec{a}_{ci} = 2 \cdot \vec{\Omega} \times \vec{v}_i' \quad (1.12)$$

onde:

$\vec{\Omega}$ é o vetor velocidade angular do referencial fixo ao corpo em relação a um referencial inercial

$\vec{r}_i$ é o vetor posição da partícula i em relação ao referencial fixo ao corpo

$\vec{v}_i'$ é a velocidade da partícula i em relação ao referencial fixo ao corpo.

Portanto, o carregamento equivalente pode ser descrito pela equação:

$$\sum \vec{f}_{ci} = \sum \vec{f}_{ai} - m_i (\vec{a}_i' + \vec{a}_o + \vec{a}_{ti} + \vec{a}_{ci}) \quad (1.13)$$

4. COMENTÁRIOS SOBRE A DETERMINAÇÃO DAS COMPONENTES DO CARREGAMENTO EQUIVALENTE

4.1 Forças de Ação

Num corpo em órbita, as forças de ação podem ser gravitacional, aerodinâmica, e outras.

As forças de ação seriam, portanto, a soma dessas componentes.

4.2 Forças de Inércia

As forças de inércia são as componentes dinâmicas, ou seja, $\vec{a}_i'$, $\vec{a}_o$, $\vec{a}_{ti}$ e $\vec{a}_{ci}$.

As acelerações relativa e de Coriolis são nulas, uma vez que é imposto que o referencial seja fixo ao corpo.

$$\vec{a}_i' = 0$$

$$\text{e } \vec{v}_i' = 0, \text{ daí } \vec{a}_{ci} = 2 \vec{\Omega} \times \vec{v}_i' = 0.$$

As acelerações da origem do referencial e de transporte são funções do movimento do corpo.

A aceleração de transporte é uma função da velocidade angular e da aceleração angular do corpo, enquanto que a aceleração da origem do referencial é uma função do movimento do baricentro do corpo, da velocidade angular e da aceleração angular do corpo.

É conveniente posicionar a origem do referencial no baricentro do corpo, o que torna a aceleração da origem uma função apenas do movimento do baricentro.

Portanto, para a determinação dessas componentes do carregamento equivalente, torna-se necessário um estudo sobre o movimento angular e do baricentro do corpo.

O carregamento equivalente será determinado, então, pela equação:

$$\sum \vec{f}_{ci} = \sum \vec{f}_{ai} - m_i(\vec{a}_o + \vec{a}_{ti}) \quad (1.14)$$

2ª PARTE:

ESTUDO DE TENSÕES EM UMA VIGA EM ÓRBITA

Nessa parte é apresentado um estudo de tensões num corpo em órbita para um caso particular. Esse estudo se baseia no método descrito na primeira parte desse trabalho.

O caso que será estudado é o de uma viga de grandes dimensões em órbita.

As hipóteses adotadas são apresentadas ao longo do desenvolvimento do estudo à medida em que isso se faz necessário.

1. DETERMINAÇÃO DO CARREGAMENTO EQUIVALENTE

1.1 Forças de Ação

Como foi comentado na primeira parte, essas forças po-

dem ser aerodinâmica , gravitacional, etc. Nesse estudo será considerada apenas a força gravitacional. A primeira hipótese adotada, portanto, será a não consideração de outras forças, além da gravitacional.

Hipótese 1 - A única força considerada é a gravitacional.

Para o cálculo da força gravitacional, serão adotadas as seguintes hipóteses:

Hipótese 2 - A terra tem formato perfeitamente esférico e distribuição esférica-simétrica de massa e, portanto, pode ser considerada como um ponto de atração gravitacional.

Hipótese 3 - A lei de força entre dois corpos que possuem massa é a lei de Newton.

$$\vec{F}_{12} = -k^2 m_1 m_2 r_{12}^{-3} \cdot \vec{r}_{12} \quad (2.1)$$

onde:

$\vec{F}_{12}$ = força de atração que o corpo 1 exerce sobre o corpo 2

k = constante gravitacional

m_1 e m_2 = massas dos corpos 1 e 2

$\vec{r}_{12}$ = vetor posição do corpo 2 em relação ao corpo 1

$r_{12} = |\vec{r}_{12}|$

Hipótese 4 - A massa da barra é desprezível em comparação com a massa da terra.

Hipótese 5 - O centro de massa da terra pode ser considerado uma origem inercial.

Tendo adotado as hipóteses (4) e (5), podemos escrever a lei de força aplicada a uma partícula i pela terra como:

$$\vec{F}_i = -\mu m_i r_i^{-3} \cdot \vec{r}_i \quad (2.2)$$

onde:

$$\mu = k^2 M$$

M = massa da terra

$\vec{r}_i$ = vetor posição da partícula i em relação à terra.

Hipótese 6 - A viga em questão é delgada, ou seja, as dimensões da seção transversal são desprezíveis em relação ao comprimento.

Hipótese 7 - A viga tem densidade linear constante em toda a sua extensão.

Escrevendo a equação (2.2) na forma diferencial, teremos:

$$d\vec{F} = -\mu dm r^{-3} \cdot \vec{r}$$

Das hipóteses (6) e (7), teremos:

$$dm = -\frac{m}{L} dl$$

onde:

L = comprimento da viga

m = massa total da viga

A força de ação pode, então, ser determinada pela equação:

$$d\vec{F} = -\gamma \cdot \frac{m}{L} r^{-3} \cdot \vec{r} \cdot dl \quad (2.3)$$

1.2 Forças de Inércia

Como foi mostrado na primeira parte, as forças de inércia se reduzem a duas componentes. Uma devida à aceleração da origem do referencial e outra devida à aceleração de transporte.

A aceleração de transporte é calculada pela equação (1.11):

$$\vec{a}_t = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{l} + \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{l}) - \vec{l} \cdot \omega^2 \quad (2.4)$$

onde a notação $\vec{r}$ foi substituída pela notação $\vec{l}$, e a notação $\vec{\Omega}$, pela notação $\vec{\omega}$.

As forças de inércia são calculadas pela equação:

$$\text{forças de inércia} = \frac{m}{L} (\vec{a}_o + \vec{a}_t) dl \quad (2.5)$$

Como foi dito anteriormente, o cálculo das forças de inércia exige o conhecimento do movimento angular e do movimento do baricentro do corpo em questão. Um estudo sobre o mesmo é feito em seguida, para a viga delgada.

1.3 Estudo do Movimento Geral de uma Viga em Órbita

O estudo do movimento geral de um corpo compreende tanto o estudo do movimento angular como do movimento do baricentro.

É sabido, da Mecânica Celeste, que a trajetória descrita por um corpo com massa concentrada num ponto, ou seja, com dimensões pequenas, ao redor de um planeta perfeitamente esférico e com distribuição *simétrica* de massa, será uma cônica. A hipótese (2) do presente estudo permite que se considere a terra como um ponto de atração gravitacional. Porém, não é possível se considerar o corpo em questão como um ponto, pois todo esse trabalho é feito visando a corpos de grandes dimensões. Portanto, não será possível adotar a órbita cônica genericamente como sendo o movimento descrito pelo centro de massa da viga.

Será feito, portanto, um estudo simultâneo do movimento do baricentro e do movimento angular.

Esse estudo se reduz à aplicação do teorema do baricentro e do teorema do momento angular. São conhecidas, para essa aplicação, a lei de força e a forma geometria do corpo.

No caso de existirem dois ou mais corpos sólidos vinculados mecanicamente, mas com algum grau de liberdade, deve-se aplicar os teoremas para cada um dos corpos sólidos e mais as condições vinculares.

1.3.1 Sistemas de referência adotados

Nesse estudo são utilizados dois sistemas de referência.

- a) Sistema inercial com origem fixa em O e eixos inerciais ($Ox^*y^*z^*$). Os vetores representados nesse sistema terão notação "asterisco" ($\vec{A}^*$). O é o centro de massa da terra
- b) Sistema com origem fixa ao baricentro da viga, eixo z' coincidente com o eixo longitudinal da viga e eixo x' pertencente ao plano x^*-y^* do referencial inercial ($Bx'y'z'$). Os vetores representados nesse sistema terão a notação "linha" ($\vec{A}'$)

Observação: O sistema $Bx'y'z'$ não é totalmente fixo à viga, pois esta pode girar no seu próprio eixo. Esse movimento não terá nenhuma influência, uma vez que a viga é delgada.

Os ângulos utilizados para descrever a posição angular relativa entre os dois sistemas são mostrados na figura 1.

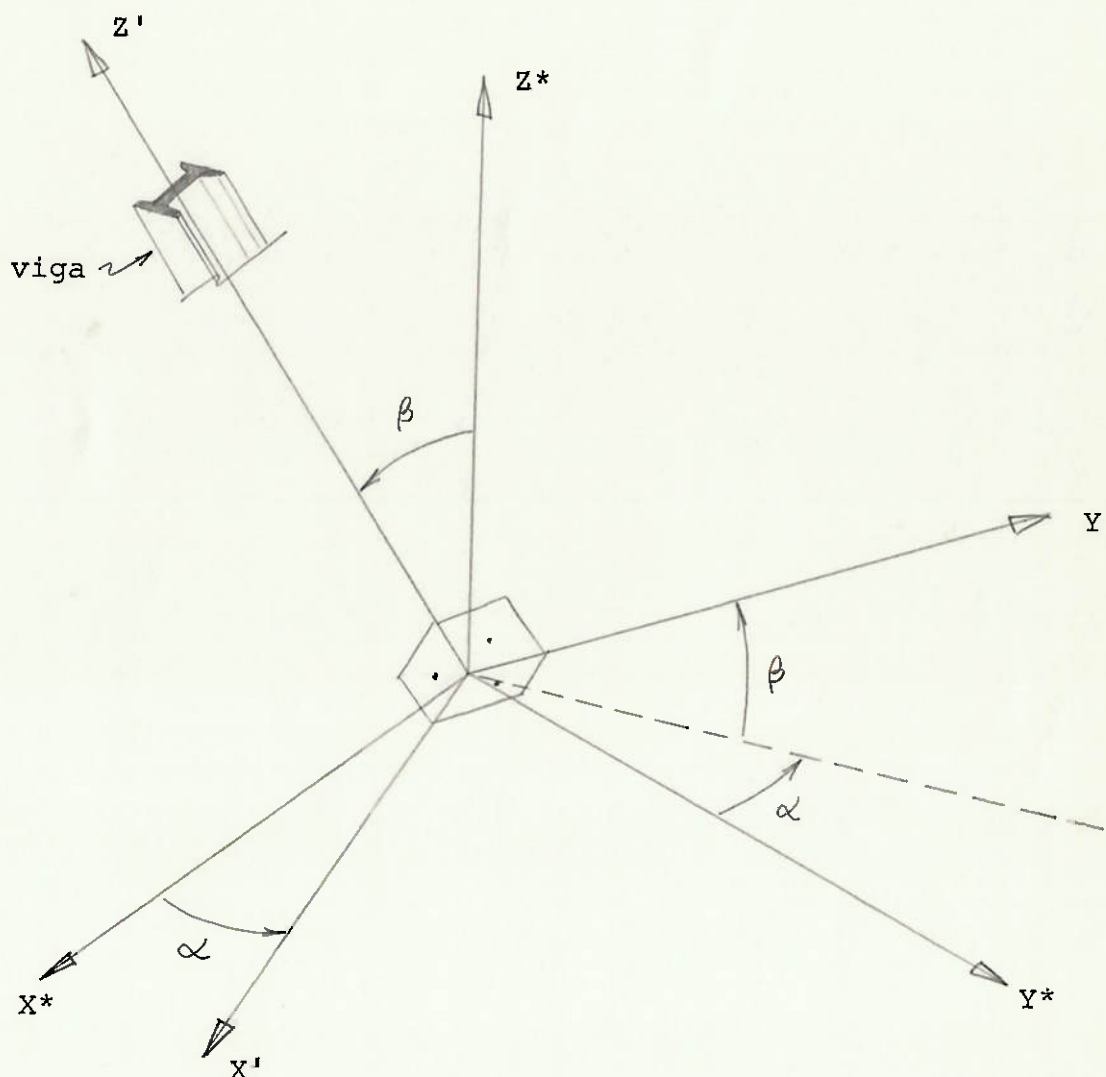


Figura 1.

Esses ângulos (α e β) coincidem com dois dos ângulos de Euler, sendo o outro indeterminado.

A posição do baricentro da viga e portanto da origem do referencial móvel será descrita por coordenadas cartesianas.

Nota-se que a viga pode ter um perfil qualquer. Porém,

nem a forma e nem a orientação desse perfil terão importância no estudo do movimento, em decorrência da hipótese (6).

Tendo sido apresentados os ângulos que descrevem a posição angular relativa entre os dois sistemas de referência, são apresentadas a seguir uma série de relações matemáticas entre os dois sistemas, que serão de grande utilidade ao estudo.

Seja $\vec{A}$ um vetor qualquer, representado no sistema inercial por $\vec{A}^*$ e representado no sistema móvel por $\vec{A}'$, são válidas as seguintes relações:

$$1. \quad \vec{A}^* = G \cdot \vec{A}' \quad (2.6)$$

$$2. \quad \vec{A}' = G^T \cdot \vec{A}^* \quad (2.7)$$

$$3. \quad \vec{w}^* = M \cdot \xi \quad (2.8)$$

$$4. \quad \vec{w}' = N \cdot \xi \quad (2.9)$$

$$5. \quad \dot{G} \cdot G^T = \Omega^* \quad (2.10)$$

$$6. \quad G^T \cdot \dot{G} = \Omega' \quad (2.11)$$

onde

G^T é a matriz transposta de G

$\vec{w}$ é o vetor velocidade angular do sistema móvel em relação ao sistema inercial

$\dot{G}$ é a derivada da matriz G em relação ao tempo.

$$\xi = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Omega^* = \begin{pmatrix} 0 & -wz^* & wy^* \\ wz^* & 0 & -wx^* \\ -wy^* & wx^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega' = \begin{pmatrix} 0 & -wz' & wy' \\ wz' & 0 & -wx' \\ -wy' & wx' & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}^* = \begin{pmatrix} wx^* \\ wy^* \\ wz^* \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}' = \begin{pmatrix} wx' \\ wy' \\ wz' \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cos \alpha & (\sin \alpha \sin \beta) \\ 0 & \sin \alpha & (-\cos \alpha \sin \beta) \\ 1 & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \beta & 0 & 0 \\ \text{cos } \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_{11} = \text{cos } \alpha$$

$$G_{12} = -\text{sen } \alpha \text{ cos } \beta$$

$$G_{13} = \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$$

$$G_{21} = \text{sen } \alpha$$

$$G_{22} = \text{cos } \alpha \text{ cos } \beta$$

$$G_{23} = -\text{cos } \alpha \text{ sen } \beta$$

$$G_{31} = 0$$

$$G_{32} = \text{sen } \beta$$

$$G_{33} = \text{cos } \beta$$

1.3.2 Aplicação do Teorema do Baricentro

Por conveniência, como já citado anteriormente, a origem do sistema móvel será coincidente com o baricentro da viga. Sendo assim, podemos escrever:

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{a}}{dt^2}$$

onde:

$\vec{F}$ é a força total aplicada à viga

$\vec{a}$ é o vetor posição da origem do sistema móvel.

A força total aplicada à viga se resume na força gravitacional total aplicada à viga, uma vez que é desprezado o efeito da atmosfera.

Sendo assim:

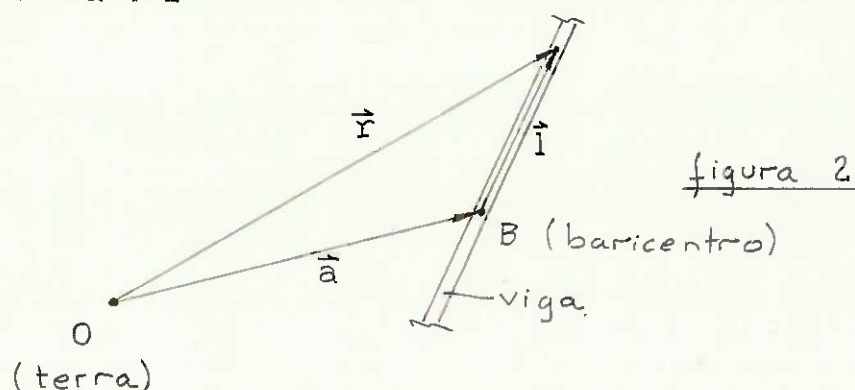
$$\vec{F} = \int_m -\mu r^{-3} \vec{r} dm$$

como $dm = \frac{m}{L} dl$

$$\vec{F} = -\mu \frac{m}{L} \int_{-L/2}^{L/2} r^{-3} \vec{r} dl \quad (2.12)$$

Como mostrado na figura 2, podemos escrever:

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{l}$$



Representando-se os vetores no sistema móvel, teremos:

$$\vec{l}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \vec{a}' = G^T \cdot \vec{a}^*$$

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{21} & G_{31} \\ G_{12} & G_{22} & G_{32} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11}x^* + G_{21}y^* + G_{31}z^* \\ G_{12}x^* + G_{22}y^* + G_{32}z^* \\ G_{13}x^* + G_{23}y^* + G_{33}z^* \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\text{daí: } \vec{r}' = \vec{a}' + \vec{l}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' + l \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$r = |\vec{r}'| = (x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2z'l + l^2)^{1/2}$$

$$r = (a^2 + 2z'l + l^2)^{1/2}$$

$$\text{ou } r = (C + B \cdot l + l^2)^{1/2}$$

$$\text{onde: } C = a^2$$

$$B = 2 \cdot z'$$

Representando $\vec{r}$ no referencial inercial, teremos:

$$\vec{r}^* = \vec{a}^* + \vec{l}^*$$

$$\vec{l}^* = G \cdot \vec{l}' = l \cdot \begin{pmatrix} G_{13} \\ G_{23} \\ G_{33} \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}^* = \begin{pmatrix} x^* + G_{13}l \\ y^* + G_{23}l \\ z^* + G_{33}l \end{pmatrix}$$

Reescrevendo então a equação (2.12), representada no sistema inercial:

$$\vec{F}^* = - \mu \frac{m}{L} \int_{-L/2}^{L/2} (C + Bl + l^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} x^* + G_{13}l \\ y^* + G_{23}l \\ z^* + G_{33}l \end{pmatrix} dl$$

Utilizando as seguintes relações:

$$(2.14) \quad \int (C + Bl + l^2)^{-3/2} dl = \begin{cases} \frac{4l + 2B}{(4C - B^2)(C + Bl + l^2)^{1/2}} & p/4C \neq B^2 \\ -\frac{1}{2(1 + B/2)^2} & p/4C = B^2 \end{cases}$$

$$(2.15) \quad \int (C + Bl + l^2)^{-3/2} l dl = \begin{cases} -\frac{(2Bl + 4C)}{(4C - B^2)(C + Bl + l^2)^{1/2}} & p/4C \neq B^2 \\ -\frac{1}{2} \frac{(2l + B/2)}{(1 + B/2)^2} & p/4C = B^2 \end{cases}$$

teremos:

$$\vec{F}^* = - \mu \frac{m}{L} \cdot \begin{pmatrix} x^* I_1 + G_{13} I_2 \\ y^* I_1 + G_{23} I_2 \\ z^* I_1 + G_{33} I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Fx^* \\ Fy^* \\ Fz^* \end{pmatrix}$$

onde:

$$I_1 = \frac{2}{(4C - B^2)} \left[\frac{(B + L)}{\left(C + \frac{BL}{2} + \frac{L^2}{4}\right)^{1/2}} - \frac{(B - L)}{\left(C - \frac{BL}{2} + \frac{L^2}{4}\right)^{1/2}} \right]$$

para $4C \neq B^2$

$$I_1 = \frac{2}{(B - L)^2} - \frac{2}{(B + L)^2} \quad \text{p/ } 4C = B^2 \quad (2.16)$$

$$I_2 = \frac{1}{(4C - B^2)} \left[\frac{(4C - BL)}{\left(C - \frac{BL}{2} + \frac{L^2}{4}\right)^{1/2}} - \frac{(4C + BL)}{\left(C + \frac{BL}{2} + \frac{L^2}{4}\right)^{1/2}} \right]$$

para $4C \neq B^2$

$$I_2 = \frac{2(B/2 - L)}{(B - L)^2} - \frac{2(B/2 + L)}{(B + L)^2} \quad \text{para } 4C = B^2 \quad (2.17)$$

A derivada primeira de $\vec{a}^*$ em relação ao tempo será:

$$\dot{\vec{a}}^* = \begin{pmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{y}^* \\ \dot{z}^* \end{pmatrix}$$

E a derivada segunda será:

$$\ddot{\vec{a}}^* = \begin{pmatrix} \ddot{x}^* \\ \ddot{y}^* \\ \ddot{z}^* \end{pmatrix}$$

A aplicação do teorema do baricentro fornece, portanto, três equações diferenciais de segunda ordem:

$$\vec{F}^* = m \cdot \ddot{\vec{a}}^*$$

$$\ddot{x}^* = - \frac{y}{L} (x^* \cdot I_1 + G_{13} \cdot I_2) \quad (2.18)$$

$$\ddot{y}^* = - \frac{y}{L} (y^* \cdot I_1 + G_{23} \cdot I_2) \quad (2.19)$$

$$\ddot{z}^* = - \frac{y}{L} (z^* \cdot I_1 + G_{33} \cdot I_3) \quad (2.20)$$

1.3.3 Aplicação do Teorema do Momento Angular

Assim como a origem do sistema móvel foi posicionada no baricentro, também é conveniente escolher os eixos principais de inércia da estrutura que está sendo estudada como os eixos do sistema. Para a viga, em virtude da hipótese de viga delgada, apenas a escolha do baricentro como origem do sistema e a escolha do eixo longitudinal da viga como um dos eixos do sistema será suficiente para a simplificação do estudo, uma vez que será desprezada a influência da orientação da seção transversal.

Sendo assim, a aplicação do teorema do momento angular ao baricentro será a mais conveniente.

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

onde:

$\vec{N}$ é o torque das forças externas em relação ao baricentro

$\vec{L}$ é o momento angular da viga em relação ao baricentro

As forças externas, assim como na aplicação do teorema do baricentro, serão as forças gravitacionais, portanto:

$$d\vec{N} = \vec{l} \times d\vec{F}$$

$$d\vec{F} = - \mu \frac{m}{L} r^{-3} \cdot \vec{r} \cdot dl$$

Representando todos os vetores no sistema móvel, teremos:

$$\vec{l}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d\vec{F}' = - \mu \frac{m}{L} r^{-3} \cdot \vec{r}' \cdot dl$$

$$d\vec{N}' = \vec{l}' \times d\vec{F}' = - \mu \frac{m}{L} r^{-3} \cdot \vec{l}' \times \vec{r}' \cdot dl$$

Da equação (2.13), temos:

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' + 1 \end{pmatrix}$$

Daí:

$$\vec{l}' \times \vec{r}' = \begin{vmatrix} \hat{i}' & \hat{j}' & \hat{k}' \\ 0 & 0 & 1 \\ x' & y' & z'+1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -y' & 1 \\ x' & 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d\vec{N}' = -\mu \frac{m}{L} r^{-3} \cdot \begin{pmatrix} -y' & 1 \\ x' & 1 \\ 0 \end{pmatrix} dl$$

$$\vec{N}' = -\mu \frac{m}{L} \int_{-L/2}^{L/2} r^{-3} \cdot \begin{pmatrix} -y' & 1 \\ x' & 1 \\ 0 \end{pmatrix} dl$$

Da relação (2.15), teremos:

$$\vec{N}' = -\mu \frac{m}{L} I_2 \cdot \begin{pmatrix} -y' \\ x' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Nx' \\ Ny' \\ Nz' \end{pmatrix}$$

Para calcularmos a derivada do momento angular, utilizaremos a seguinte relação:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

onde I é o tensor dos momentos de inércia.

Representando-se no sistema móvel:

$$\vec{L}' = I' \cdot \vec{\omega}'$$

$$I' = \begin{pmatrix} I_{x'} & -P_{x'y'} & -P_{x'z'} \\ -P_{x'y'} & I_{y'} & -P_{y'z'} \\ -P_{x'z'} & -P_{y'z'} & I_{z'} \end{pmatrix}$$

Lembrando que o eixo z' é coincidente com o eixo longitudinal da viga, passando pelo baricentro, e que a viga é delgada, teremos:

$$I_{x'} = I_{y'} = A$$

$$P_{x'y'} = 0$$

$$P_{x'z'} = 0$$

$$P_{y'z'} = 0$$

$$I_{z'} = 0$$

Teremos, então:

$$\dot{\vec{L}}' = G^T \cdot (\dot{\vec{L}}^*)$$

$$\vec{L}^* = G \cdot \vec{L}' = G \cdot (I' \cdot \vec{w}')$$

$$\dot{\vec{L}}^* = \dot{G} \cdot (I' \cdot \vec{w}') + G \cdot (I' \cdot \dot{\vec{w}}')$$

$$\text{Lembrando que } \dot{\vec{w}}' = (\dot{\vec{w}}')$$

$$\text{daí: } \dot{\vec{L}}' = G^T \cdot \dot{G} \cdot (I' \cdot \vec{w}') + (I' \cdot \dot{\vec{w}}')$$

Usando a relação (2.11):

$$\dot{\vec{L}}' = \Omega' \cdot (I' \cdot \vec{w}') + (I' \cdot \dot{\vec{w}}')$$

$$\vec{w}' = \begin{pmatrix} wx' \\ wy' \\ wz' \end{pmatrix} ; \quad \dot{\vec{w}}' = \begin{pmatrix} \dot{wx}' \\ \dot{wy}' \\ \dot{wz}' \end{pmatrix}$$

$$I' \cdot \vec{w}' = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} wx' \\ wy' \\ wz' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} wx' \\ wy' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega' \cdot (I' \cdot \vec{w}') = \begin{pmatrix} 0 & -wz' & wy' \\ wz' & 0 & -wx' \\ -wy' & wx' & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & wx' \\ A & wy' \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} -wy' & wz' \\ wx' & wz' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I' \cdot \dot{\vec{w}}' = A \cdot \begin{pmatrix} \dot{wx}' \\ \dot{wy}' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{daí: } \dot{\vec{L}}' = A \cdot \begin{pmatrix} \dot{wx}' - wy' & wz' \\ \dot{wy}' + wx' & wz' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Usando a relação (2.9):

$$\begin{aligned} \vec{w}' = N \cdot \xi &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & 0 \\ \cos \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \sin \beta \dot{\alpha} \\ \cos \beta \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} wx' \\ wy' \\ wz' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\dot{w}x' = \ddot{\beta}$$

$$\dot{w}y' = \sin\beta \ddot{\alpha} + \cos\beta \dot{\alpha} \dot{\beta}$$

$$\dot{w}z' = \cos\beta \ddot{\alpha} - \sin\beta \dot{\alpha} \dot{\beta}$$

A variação do momento angular será, então:

$$\dot{\underline{L}}' = A \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\beta} - \sin\beta \cos\beta \dot{\alpha}^2 \\ \sin\beta \ddot{\alpha} + 2 \cos\beta \dot{\alpha} \dot{\beta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

O teorema do momento angular fornece, portanto, mais duas equações diferenciais de segunda ordem:

$$\dot{\underline{N}}' = \dot{\underline{L}}'$$

$$12 \frac{4 I_2}{L^3} y' = \ddot{\beta} - \sin\beta \cos\beta \dot{\alpha}^2 \quad (2.22)$$

$$- 12 \frac{4 I_2}{L^3} x' = \sin\beta \ddot{\alpha} + 2 \cos\beta \dot{\alpha} \dot{\beta} \quad (2.23)$$

Temos, assim, cinco equações diferenciais de segunda ordem. Nota-se que estas são de difícil solução analítica. Em virtude disso, serão feitas integrações numéricas de alguns casos.

1.3.4 Integração numérica das equações do movimento

A integração numérica das equações deduzidas anteriormente foi feita utilizando-se uma subrotina para resolução de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem pelo método Runge Kutta-Verner. A linguagem utilizada é o Fortran IV e a subrotina utilizada é de biblioteca.

1.3.4.1 Transformação do sistema de segunda ordem num sistema de primeira ordem

Como foi mencionado, a subrotina integra sistemas de primeira ordem. Como o sistema que se deseja integrar é de cinco equações de segunda ordem, o mesmo deve ser transformado num sistema de dez equações de primeira ordem.

Teremos assim:

$$\alpha = y_1$$

$$\beta = y_2$$

$$x^* = y_3$$

$$y^* = y_4$$

$$z^* = y_5$$

$$\dot{\alpha} = y_6$$

$$\dot{\beta} = y_7$$

$$\dot{x}^* = y_8$$

$$\dot{y}^* = y_9$$

$$\dot{z}^* = y_{10}$$

E o sistema será:

$$\dot{y}_1 = y_6$$

$$\dot{y}_2 = y_7$$

$$\dot{y}_3 = y_8$$

$$\dot{y}_4 = y_9$$

$$\dot{y}_5 = y_{10}$$

$$\dot{y}_6 = \frac{1}{\sin(y_2)} \left(- \frac{12\mu}{L^3} \frac{I_2}{L} x' - 2 \cos(y_2) y_6 y_7 \right)$$

$$\dot{y}_7 = \frac{12\mu}{L^3} \frac{I_2}{L} y' + \sin(y_2) \cos(y_2) y_6^2$$

$$\dot{y}_8 = - \frac{\mu}{L} (y_3 I_1 + G_{13} I_2)$$

$$\dot{y}_9 = - \frac{\mu}{L} (y_4 I_1 + G_{23} I_2)$$

$$\dot{y}_{10} = - \frac{\mu}{L} (y_5 I_1 + G_{33} I_2)$$

onde:

$$x' = G_{11} y_3 + G_{21} y_4 + G_{31} y_5$$

$$y' = G_{12} y_3 + G_{22} y_4 + G_{32} y_5$$

$$z' = G_{13} y_3 + G_{23} y_4 + G_{33} y_5$$

$$I_1 = \frac{2}{(4C - B^2)} \left(\frac{(B + L)}{(C + BL/2 + L^2/4)^{1/2}} - \frac{(B - L)}{(C - BL/2 + L^2/4)^{1/2}} \right)$$

$$I_2 = \frac{1}{(4C - B^2)} \left(\frac{(4C - BL)}{(C - BL/2 + L^2/4)^{1/2}} - \frac{(4C + BL)}{(C + BL/2 + L^2/4)^{1/2}} \right)$$

$$\text{para } 4C \neq B^2$$

$$I_1 = \frac{2}{(B - L)^2} - \frac{2}{(B + L)^2}$$

$$I_2 = \frac{2(B/2 - L)}{(B - L)^2} - \frac{2(B/2 + L)}{(B + L)^2}$$

$$\text{para } 4C = B^2$$

$$B = 2 \quad z'$$

$$C = y_3^2 + y_4^2 + y_5^2$$

$$G_{11} = \cos(y_1)$$

$$G_{12} = -\sin(y_1) \cos(y_2)$$

$$G_{13} = \sin(y_1) \sin(y_2)$$

$$G_{21} = \sin(y_1)$$

$$G_{22} = \cos(y_1) \cos(y_2)$$

$$G_{23} = -\cos(y_1) \sin(y_2)$$

$$G_{31} = 0$$

$$G_{32} = \sin(y_2)$$

$$G_{33} = \cos(y_2)$$

1.3.4.2 Verificação da conservação da energia

Nota-se que o sistema de equações deduzido é bastante complexo, o que aumenta a possibilidade de erro na sua dedução. Por essa razão é feita, paralelamente à integração numérica, uma verificação da conservação da energia do sistema.

Esse sistema é conservativo, pois foram desprezadas as forças de atrito com a atmosfera, que seriam dissipativas.

A energia total do sistema é a soma da energia cinética com a energia potencial:

$$E = T + P$$

E = energia total

T = energia cinética

P = energia potencial

A energia cinética pode ser escrita como:

$$T = T_B + T_C$$

onde T_B = energia cinética de translação do baricentro

T_C = energia cinética de rotação

$$T_B = \frac{m v_B^2}{2} \quad \text{e} \quad T_C = \frac{\vec{w}'^T \cdot I' \cdot \vec{w}'}{2}$$

onde:

v_B é a velocidade do baricentro

$\vec{w}'^T$ é a transposta de $\vec{w}'$

$$v_G^2 = \dot{\vec{a}} \cdot \dot{\vec{a}} = \dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2} + \dot{z}^{*2}$$

$$\vec{w}'^T \cdot I' \cdot \vec{w}' = \frac{A}{2} (w_x'^2 + w_y'^2) = \frac{m L^2}{24} (w_x'^2 + w_y'^2)$$

Daí:

$$T = \frac{m}{2} \left(\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2} + \dot{z}^{*2} + \frac{L^2}{12} (w_x'^2 + w_y'^2) \right)$$

Para a energia potencial, teremos:

$$d(P - P_0) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} -\mu \, dm \, r^{-3} \, \vec{r} \cdot d\vec{r} = -\mu \, dm \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{r^{-3}}{2} dr^2 =$$

$$= -\mu \, dm \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = \mu \, dm \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$$

$$P - P_0 = \int_m \mu \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) dm = \mu \frac{m}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) dl$$

$$P - P_0 = \mu \frac{m}{L} (I_{50} - I_5)$$

onde:

$$I_5 = \ln \left| \frac{B + L + (L^2 + 2BL + 4C)^{1/2}}{B - L + (L^2 - 2BL + 4C)^{1/2}} \right| \quad (2.24)$$

$$I_{50} = \ln \left| \frac{B_0 + L + (L^2 + 2B_0 L + 4C_0)^{1/2}}{B_0 - L + (L^2 - 2B_0 L + 4C_0)^{1/2}} \right| \quad (2.25)$$

Convém convencionar $E = 0$.

Daí:

$$P_0 + T_0 = 0$$

$$P_0 = -T_0$$

$$P = \mu \frac{m}{L} (I_{50} - I_5) - T_0$$

Por unidade de massa, teremos:

$$\frac{T}{m} = -\frac{\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2} + \dot{z}^{*2}}{2} + \frac{L^2}{24} (w_x'^2 + w_y'^2) = T_e \quad (2.26)$$

$$\frac{P}{m} = \frac{\mu}{L} (I_{50} - I_5) - \frac{T_0}{m} = P_e \quad (2.27)$$

$$\frac{T_0}{m} = \frac{\dot{x}_0^{*2} - \dot{y}_0^{*2} + \dot{z}_0^{*2}}{2} + \frac{L^2}{24} (w_{x_0}'^2 + w_{y_0}'^2) = T_{0e}$$

Teremos assim:

$$P_e + T_e = E_e = 0 \quad (2.28)$$

Essa condição terá de ser verificada durante a integração. Deve-se observar, porém, que é admitido um pequeno aumento ou diminuição gradual da energia, pois isso será decorrente da imprecisão do cálculo. A amplitude dessa variação deverá ser pequena em relação à energia cinética do sistema.

1.3.4.3 Variáveis a serem calculadas

As variáveis que são integradas são os ângulos α e β e as coordenadas cartesianas do baricentro da viga em relação ao referencial inercial. Para melhor visualizar a posição da viga, após a integração são calculadas outras variáveis que descrevem melhor o movimento.

Essas variáveis são as coordenadas polares do baricentro da viga em relação ao referencial inercial, e o ângulo ψ , que substitui o ângulo α . Essas variáveis são mostradas nas figuras (3) e (4).

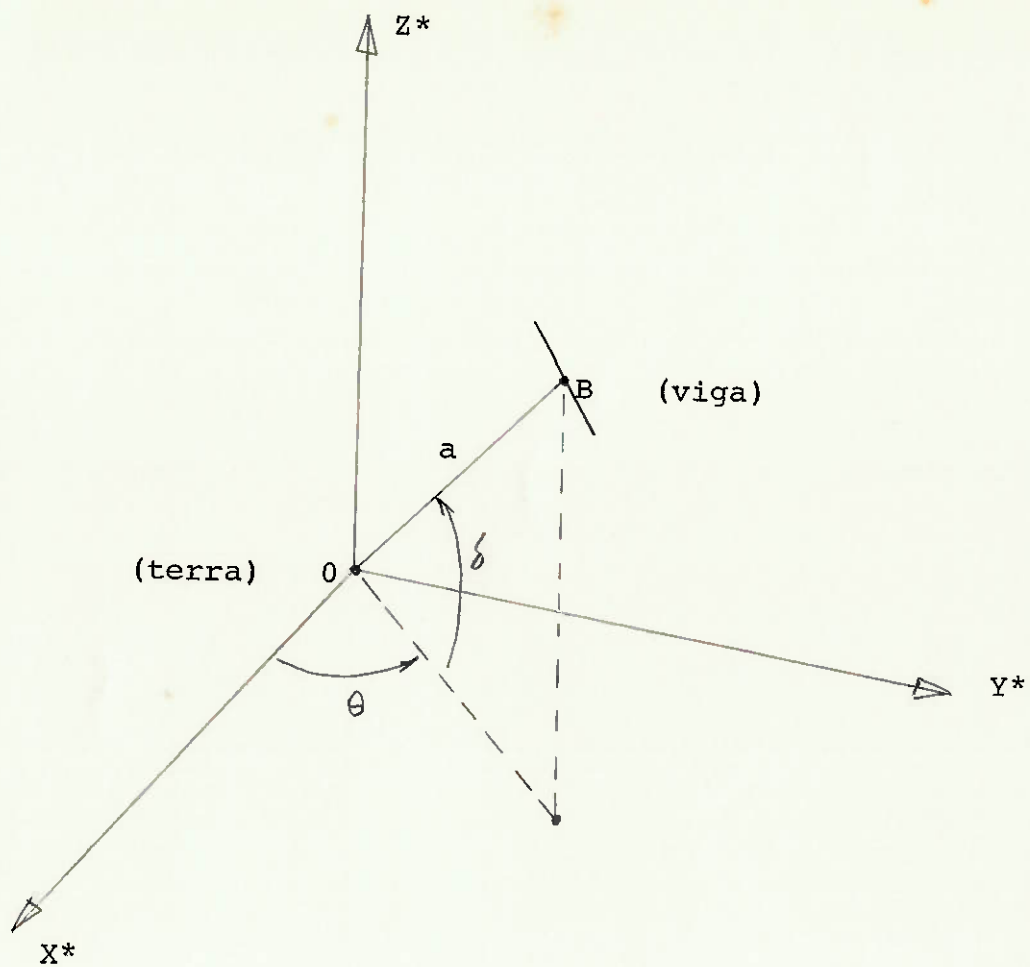


Figura 3

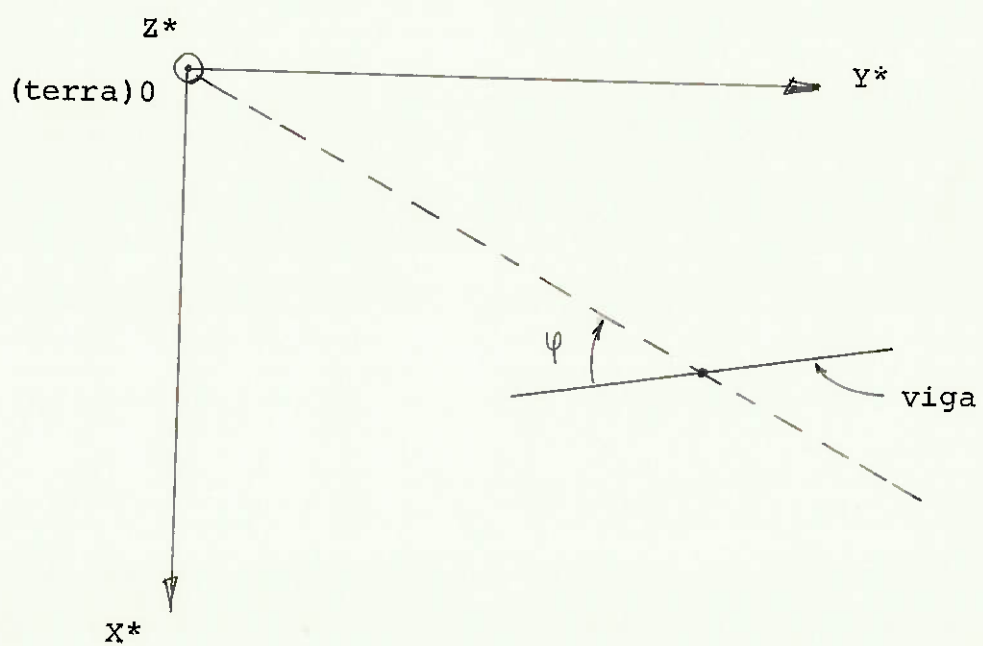


Figura 4

Os ângulos β e φ descrevem, assim, a posição angular da viga.

As equações que relacionam as variáveis integradas com as variáveis apresentadas acima são:

$$a = \sqrt{x^{*2} + y^{*2} + z^{*2}}$$

$$\delta = \arcsin(z^*/a)$$

$$\theta = \arccos(x^*/(a \cos \delta)) \quad \text{para } y^* \geq 0$$

$$\theta = 2\pi - \arccos(x^*/(a \cos \delta)) \quad \text{para } y^* < 0$$

$$\text{Obs.: } 0 \leq \theta < 360^\circ$$

$$\varphi = \alpha - \pi/2 - \theta$$

Além dessas variáveis e da energia por unidade de massa, são calculadas mais duas outras. O ângulo p e a variável w_2 , que são determinados pelas seguintes equações:

$$p = \arccos\left(\frac{z'}{a}\right)$$

$$w_2 = wx'^2 + wy'^2$$

Essas variáveis são calculadas porque, como será visto posteriormente, são utilizadas para calcular os esforços solicitantes na viga (momento fletor e força de tração).

O programa fornece, portanto, como resultados, as seguintes variáveis:

1. ângulo β
2. ângulo ψ
3. distância a (coordenada polar)
4. ângulo θ (coordenada polar)
5. ângulo δ (coordenada polar)
6. ângulo p
7. variável w_2
8. energia específica total do sistema
9. as variáveis integradas ($\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, x^*, \dot{x}^*, y^*, \dot{y}^*, z^*$ e $\dot{z}^*$)

1.3.4.4 Comentários gerais sobre o programa

No presente estudo do movimento angular da viga, deseja-se obter os valores das variáveis ao longo do tempo. Sendo assim, o programa foi concebido de maneira a fornecer seus valores para um número de instantes especificado, espaçados por um intervalo de tempo também especificado.

Os dados de entrada são, portanto, as condições iniciais do caso que está se estudando, o número de instantes onde se deseja a solução, e o espaçamento ou intervalo de

tempo entre esses instantes.

O programa fornece como saída o valor das variáveis, ou solução, para diversos instantes.

A listagem do programa encontra-se nos anexos, juntamente com o manual de utilização da subrotina de integração utilizada. A linguagem utilizada é o FORTRAN IV.

1.3.4.5 Casos estudados

Os casos que foram estudados foram as condições de equilíbrio, ou seja, as posições de torque gravitacional nulo. Esses casos foram estudados quanto à sua estabilidade. Também foram estudados mais dois casos. Um caso de oscilação no plano de órbita e o último caso, em que é dada uma rotação inicial elevada em relação ao período da órbita. Para todos esses casos, a órbita inicial é a mesma. Essa órbita é circular, com período de 105 minutos. O comprimento da viga estudada é de 1 km.

Teremos assim, as seguintes condições iniciais genéricas:

$$T_0 = 105 \text{ min} \quad (\text{período da órbita})$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{T^2 \mu}{4\pi^2}} \quad \mu = 1434963240 \text{ km}^3/\text{min}^2$$

$$a_0 = 7372,58654 \text{ km}$$

onde a_0 é a distância inicial entre o baricentro da viga e o centro da terra.

A velocidade inicial será:

$$v_0 = \frac{2\pi \cdot a_0}{T_0} = 441,1745469 \text{ km/min}$$

Tomando o plano X^*Y^* como plano orbital inicial, e a posição $(a_0, 0, 0)^*$, como posição inicial, teremos as seguintes condições iniciais comuns a todos os casos estudados:

$$x_0^* = a_0 = 7372,58654 \text{ km}$$

$$y_0^* = 0$$

$$z_0^* = 0$$

$$\dot{x}_0^* = 0$$

$$\dot{y}_0^* = 441,1745469 \text{ km/min}$$

$$\dot{z}_0^* = 0$$

Para cada caso, especificamente, teremos as seguintes condições iniciais:

Caso 1

Esse é o caso em que a viga está permanentemente alinhada com a Terra. Para isto, o período de sua rotação deve coincidir com o período da órbita. Teremos assim:

$$\alpha_0 = \pi / 2 \text{ rd} \quad \dot{\alpha}_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 0,05983986 \text{ rd/min}$$

$$\beta_0 = \pi / 2 \text{ rd} \quad \dot{\beta}_0 = 0$$

A tolerância adotada na integração é de 1%. (Tolerância na imprecisão da solução obtida, dado de entrada na subrotina de integração)

Caso 2

Nesse caso, a viga está no plano da órbita, mas seu eixo está perpendicular à direção da terra. Também aqui o período de sua rotação deve coincidir com o período da órbita. Para se estudar a estabilidade desse caso, é adotado um pequeno desvio em relação a essa posição, de aproximadamente $3,5^\circ$. Teremos assim:

$$\alpha_0 = \pi/2 + 0,01 = 1,5808 \text{ rd}$$

$$\beta_0 = \pi/2 \text{ rd}$$

$$\dot{\alpha}_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 0,05983986 \text{ rd/min}$$

$$\dot{\beta}_0 = 0$$

A tolerância adotada é de 1%.

Caso 3

Nesse caso a viga está perpendicular ao plano da órbita. As equações deduzidas não funcionam quando $\beta = 0^\circ$, por esse motivo, e para se estudar a estabilidade, será adotado um desvio de aproximadamente $3,5^\circ$. Teremos assim:

$$\alpha_0 = 0$$

$$\beta_0 = 0,06 \text{ rd } (\simeq 3,5^\circ)$$

$$\dot{\alpha}_0 = 0$$

$$\dot{\beta}_0 = 0$$

A tolerância adotada é de 1%.

Caso 4

A viga está no plano da órbita, mas não alinhada com a terra. Estudaremos o caso em que a viga faz um ângulo de 45° com a direção da terra. Também aqui o período de sua rotação deve coincidir com o período da órbita. Essa não é uma posição de equilíbrio. Teremos assim:

$$\alpha_0 = \pi/4 \text{ rd}$$

$$\beta_0 = \pi/2 \text{ rd}$$

$$\dot{\alpha}_0 = 0,05983986 \text{ rd/min}$$

$$\dot{\beta}_0 = 0$$

A tolerância adotada é de 1%.

Caso 5

Nesse caso será dada uma rotação inicial alta em relação ao período da órbita. O plano em que a viga gira inicialmente está a 30° do plano da órbita. Teremos assim:

$$\alpha_0 = \pi/2 \text{ rd}$$

$$\beta_0 = \pi/3 \text{ rd}$$

$$\dot{\alpha}_0 = 1 \text{ rd/min}$$

$$\dot{\beta}_0 = 0$$

A tolerância adotada é de 0,1%

Para melhor visualizar os casos estudados, estes são mostrados nas figuras (5), (6), (7) e (8).

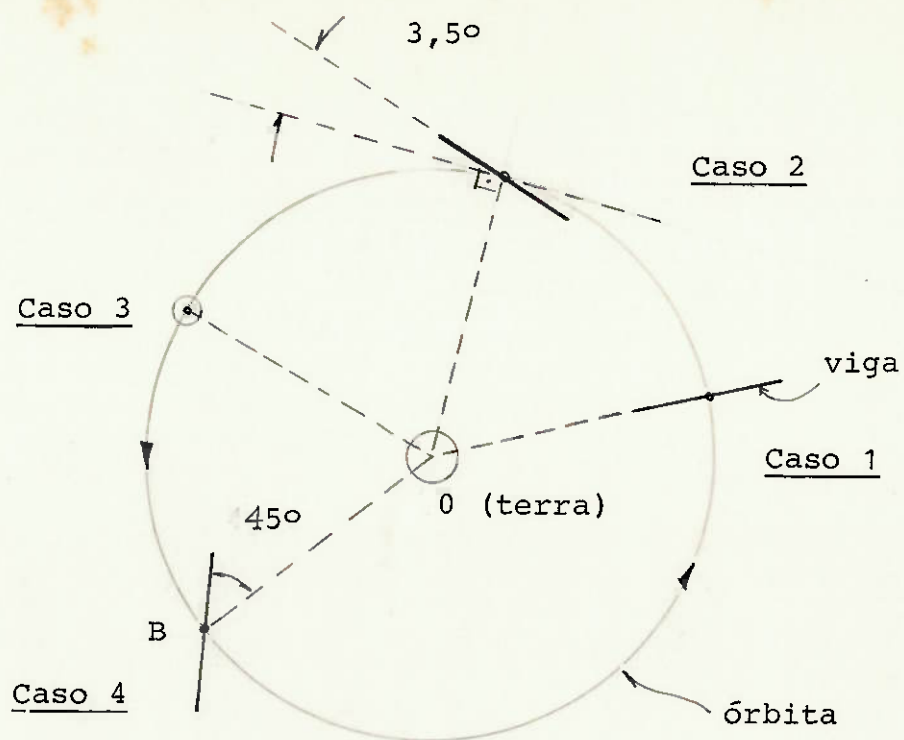


Figura 5

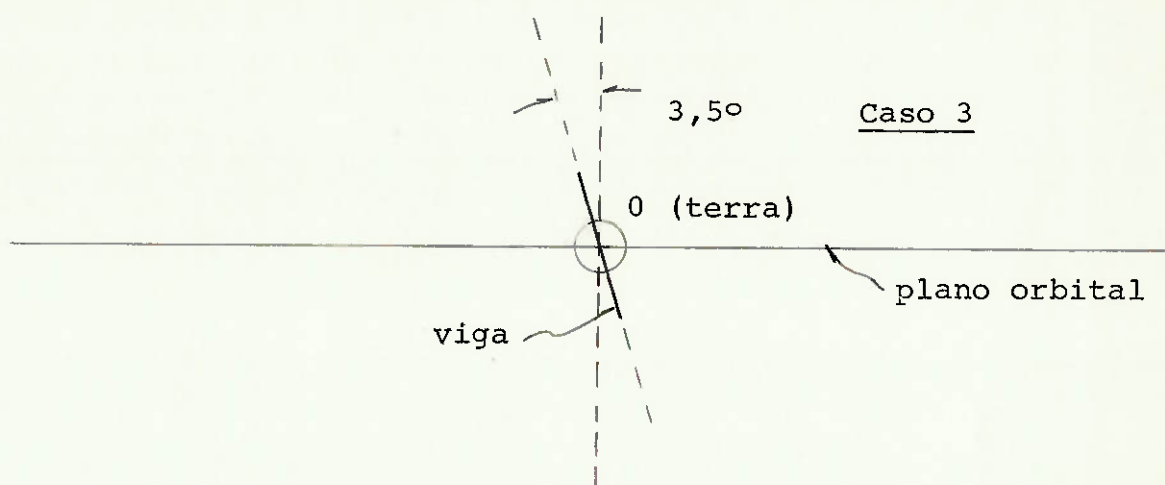


Figura 6

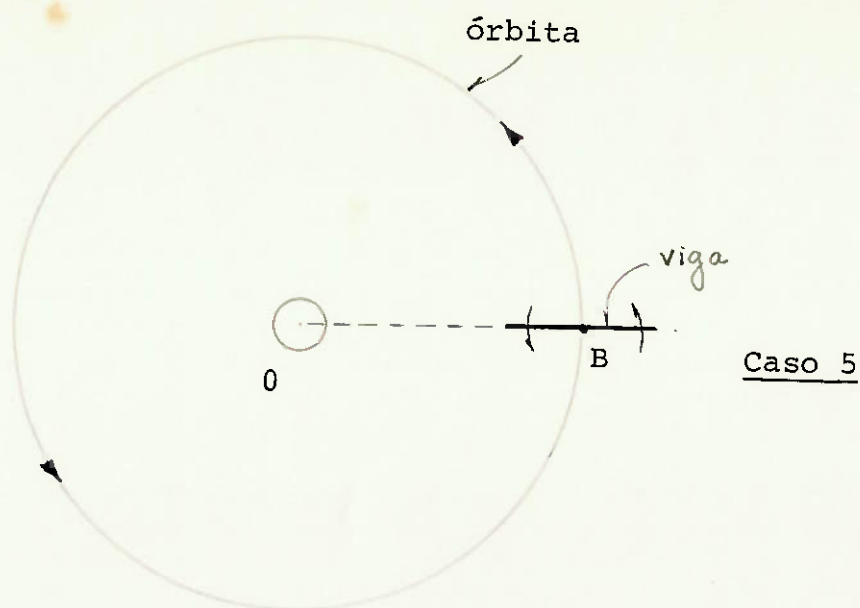


Figura 7

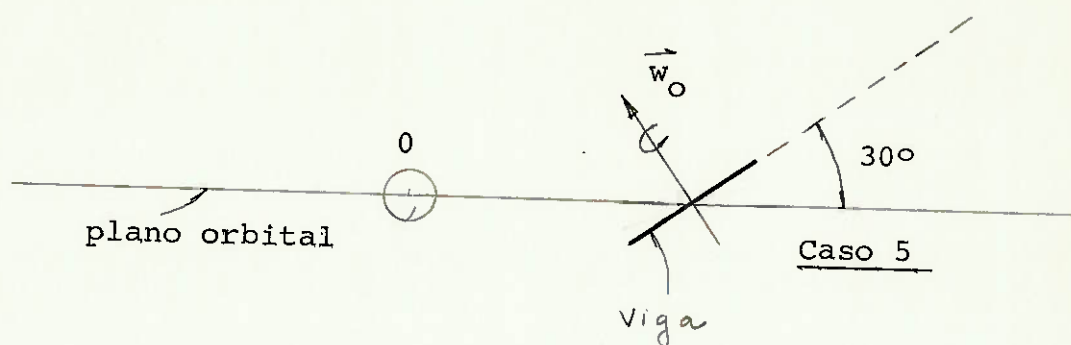


Figura 8

1.3.4.6 Resultados

Os resultados obtidos com as integrações numéricas são apresentados na forma de gráficos. Nesses gráficos são apresentadas as variáveis que descrevem a posição da viga e as variáveis utilizadas no cálculo dos esforços, em função do

tempo. Esses gráficos encontram-se no final da apresentação dos resultados.

Resultados gerais:

Em todos os casos, a órbita permaneceu circular e constante, ou seja, não houve variação significativa do raio da órbita e nem do plano orbital dentro do tempo em que foi feita a integração (da ordem de 400 min, ou 4 órbitas).

Pode-se concluir com isso que, para uma viga de 1 km de comprimento, não há grande influência de sua forma e movimento angular na sua órbita dentro do tempo citado acima. Como resultados gerais teremos, portanto:

$$a(t) = 7372,6 \text{ km}$$

$$\theta(t) = t \cdot 360/105 \text{ graus}$$

$$\zeta(t) = 0$$

Caso 1

Esse caso demonstrou ser estável, ou seja, a viga permaneceu alinhada com a terra. Os ângulos ψ e β permaneceram constantes. Para esse caso, dispensam-se os gráficos, uma vez que não houve nenhuma variação. Abaixo são colocados os valores das variáveis.

$$\psi(t) = 0$$

$$\beta(t) = 90^\circ$$

$$p(t) = 0$$

$$w_2(t) = w_x'^2 + w_y'^2 = 0,0035808 \text{ rd/min}^2$$

Caso 2

Esse caso demonstrou ser instável. A partir da posição inicial, a viga oscilou no plano da órbita. O período de oscilação, para um ângulo de desvio de aproximadamente $3,5^\circ$, foi de cerca de 161 minutos. Deve-se observar porém que esse período depende fortemente do desvio inicial.

Foram levantados gráficos para os ângulos ψ e p , e para a variável w_2 , em função do tempo. O ângulo β permaneceu constante.

$$\beta(t) = 90^\circ$$

Os gráficos levantados para esse caso são os gráficos (1), (2) e (3).

Caso 3

Esse caso também demonstrou ser instável. O movimento angular foi mais complexo que no caso 2. O ângulo β desviou-se rapidamente da posição inicial, atingindo 90° após aproximadamente 60 minutos. Tanto o ângulo β quanto o ângulo φ apresentaram uma oscilação complexa. Os gráficos mostram que a viga apresenta uma oscilação em torno da posição de equilíbrio estável, que corresponde ao caso 1. Como não há amortecimento, essa oscilação é permanente.

Foram levantados gráficos para os ângulos φ , β e p e para a variável w_2 . Os gráficos para esse caso são os gráficos (4), (5), (6) e (7).

Caso 4

Esse caso teve comportamento essencialmente idêntico ao caso 2. A viga oscilou no plano da órbita. A única diferença foi no período e amplitude de oscilação. O período foi de aproximadamente 72 minutos. Foram levantados os gráficos para os ângulos φ e p e para a variável w_2 .

O ângulo β permaneceu constante.

$$\beta(t) = 90^\circ$$

Os gráficos para esse caso são os de número (8), (9) e (10).

Caso 5

Esse caso demonstrou pouca variação em relação à condição inicial, ou seja, a rotação imposta à viga permaneceu praticamente constante e, conseqüentemente, seu momento angular também. Isso se explica pelo fato do torque gravitacional ser relativamente pequeno em relação ao momento angular, e além disso o seu sentido se altera à medida em que a órbita se desenvolve.

Para esse caso não é conveniente levantarem-se os gráficos dos ângulos ψ , β e p , pois esses variam muito rapidamente devido à rotação da viga e não descreveriam bem o seu movimento angular. Para melhor descrever esse movimento, foram levantados os gráficos das componentes do momento angular por unidade de massa, em relação ao referencial inercial. A partir delas pode-se ter uma idéia da direção da rotação da viga ao longo do tempo.

O ângulo p variou praticamente de 0° a 90° , e a variável w_2 permaneceu praticamente constante. Para efeito de cálculo dos esforços pode-se adotar para todo o instante:

$$w_2 = 0,75 \text{ rd/min}^2$$

Os gráficos para esse caso são os gráficos (11), (12) e (13).

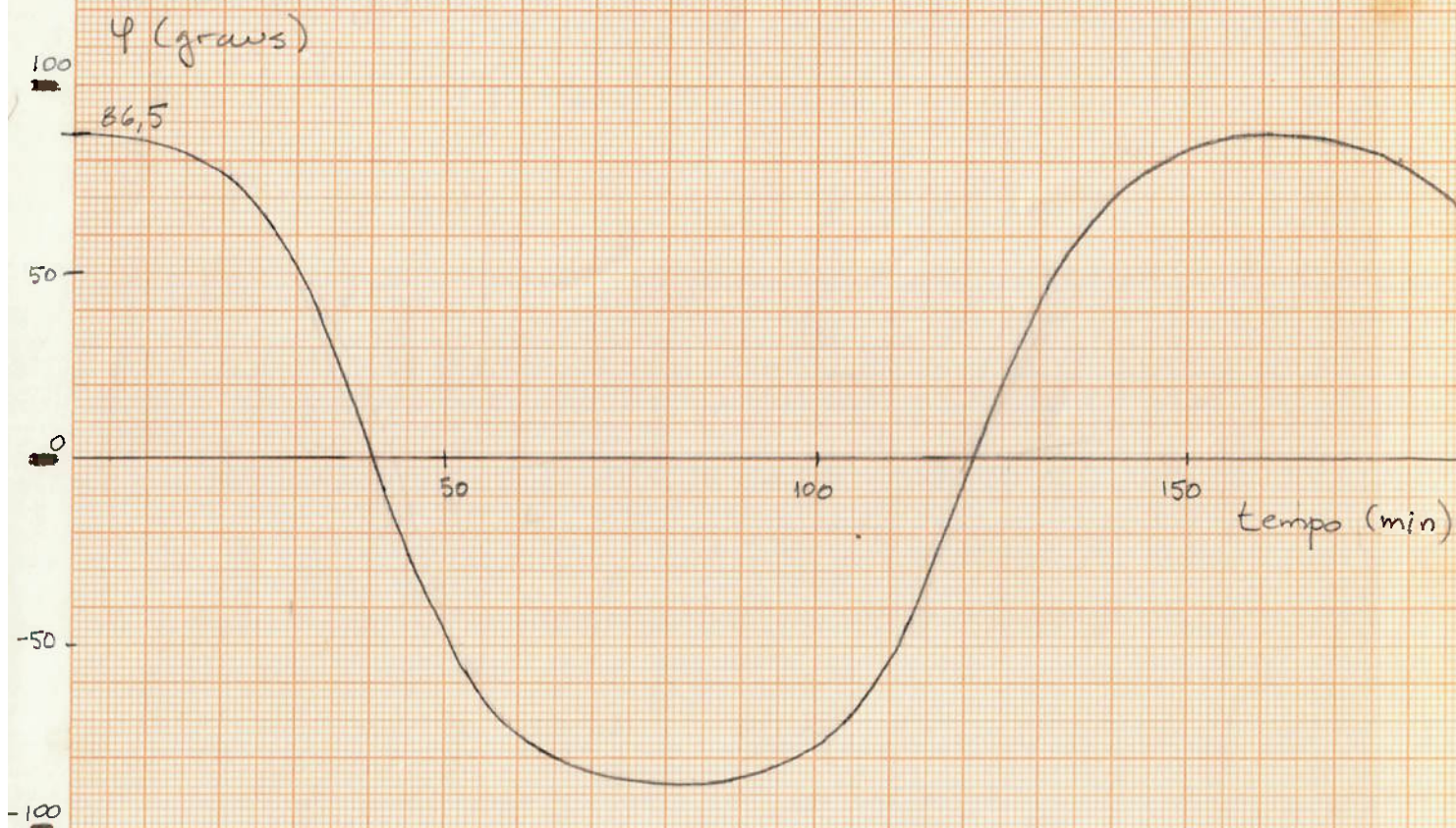
O momento angular específico é calculado pelas seguintes equações:

$$\vec{L}_e^* = \begin{pmatrix} L_{xe}^* \\ L_{ye}^* \\ L_{ze}^* \end{pmatrix}$$

$$L_{xe}^* = \frac{L^2}{12} (\dot{\beta} \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta \sin \beta \dot{\alpha})$$

$$L_{ye}^* = \frac{L^2}{12} (\dot{\beta} \sin \alpha - \cos \alpha \cos \beta \sin \beta \dot{\alpha})$$

$$L_{ze}^* = \frac{L^2}{12} \sin^2 \beta \dot{\alpha}$$



CASO 2

ANGULO φ X TEMPO
(graus) (min.)

GRÁFICO 1

CASO 2

ÂNGULO p X TEMPO
(graus) (min.)

GRÁFICO 2

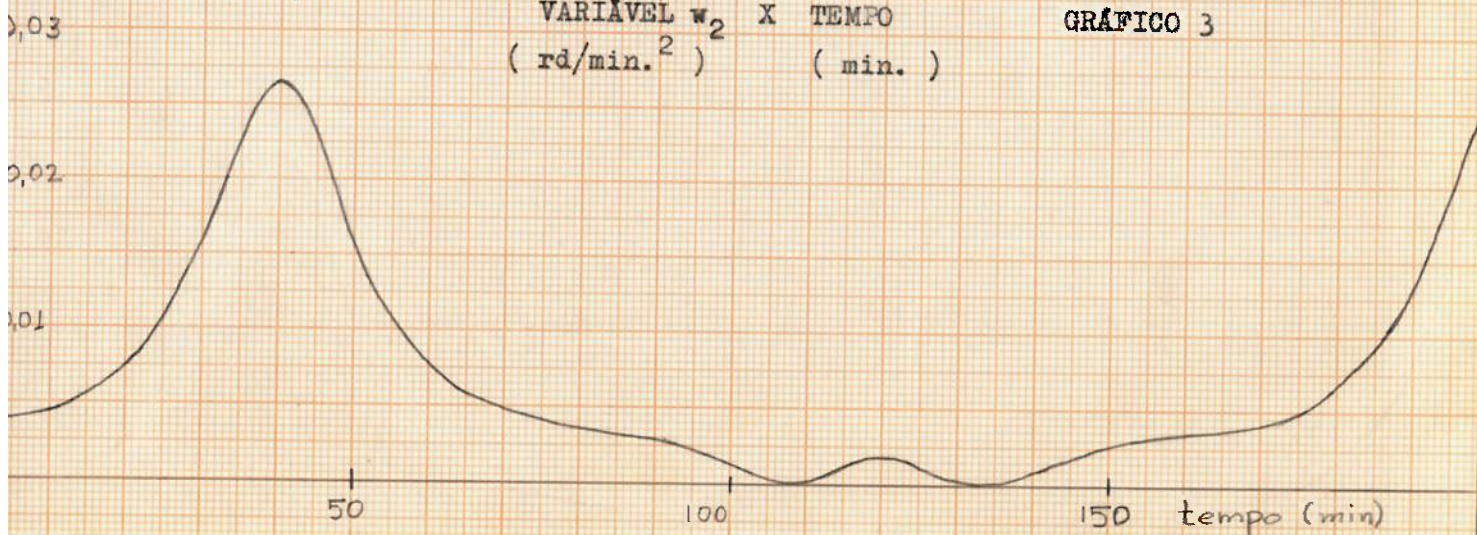


Observação: O gráfico acima apresenta uma descontinuidade em sua derivada porque o ângulo p é adotado sempre como positivo.

w_2 (rd/min²)

VARIÁVEL w_2 X TEMPO
(rd/min.²) (min.)

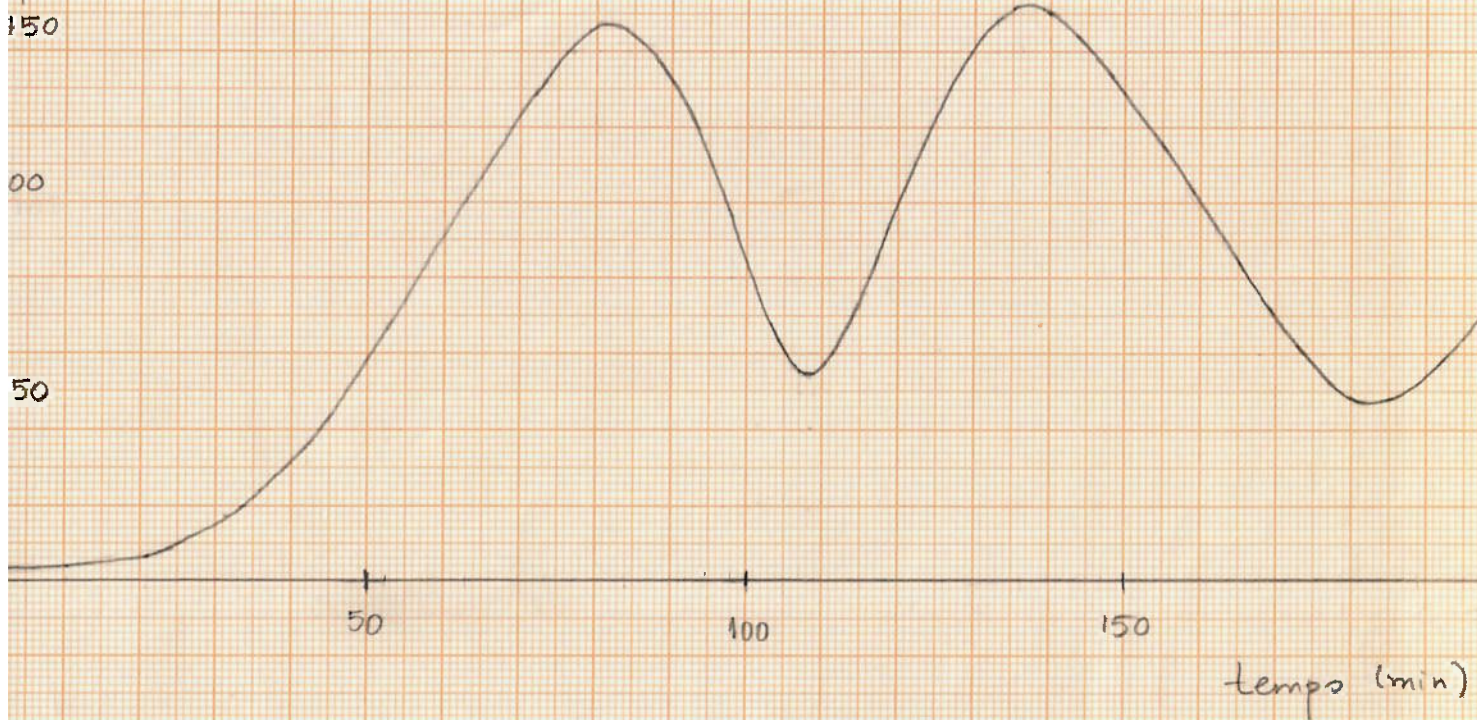
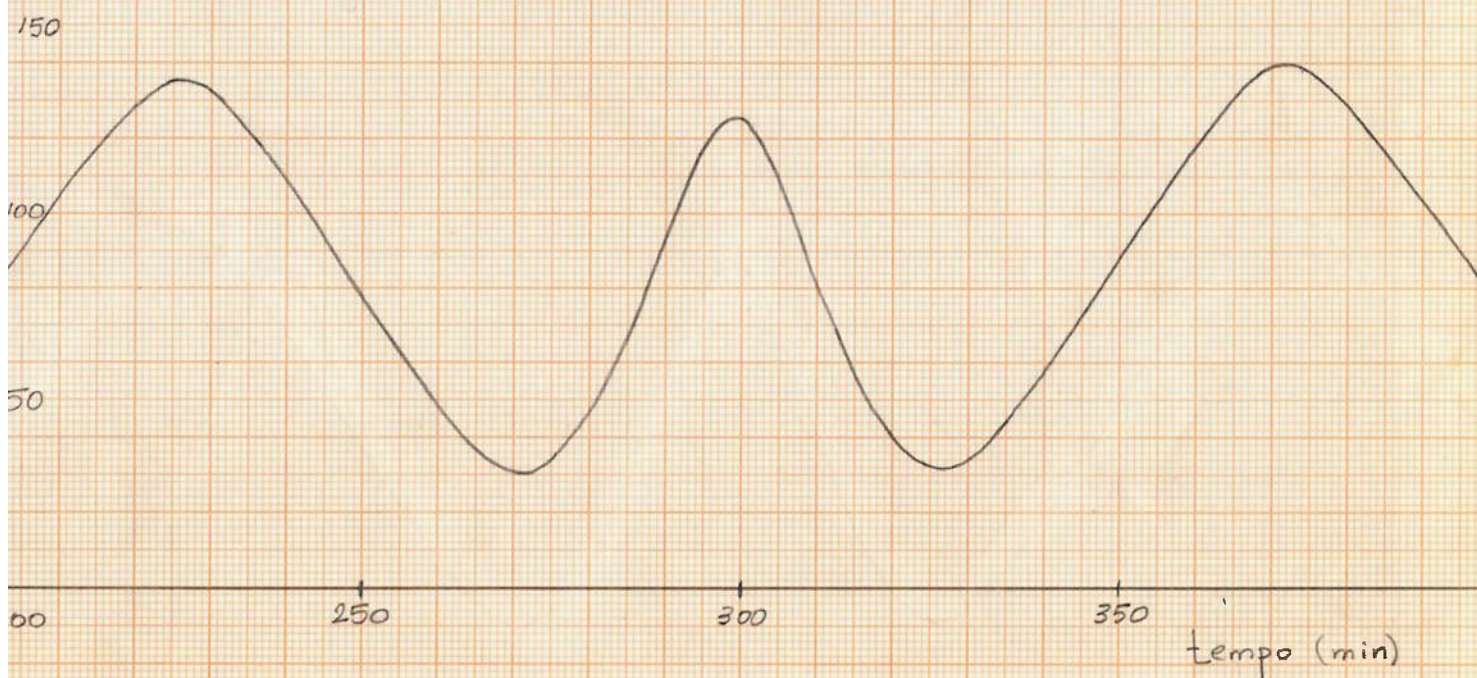
GRÁFICO 3



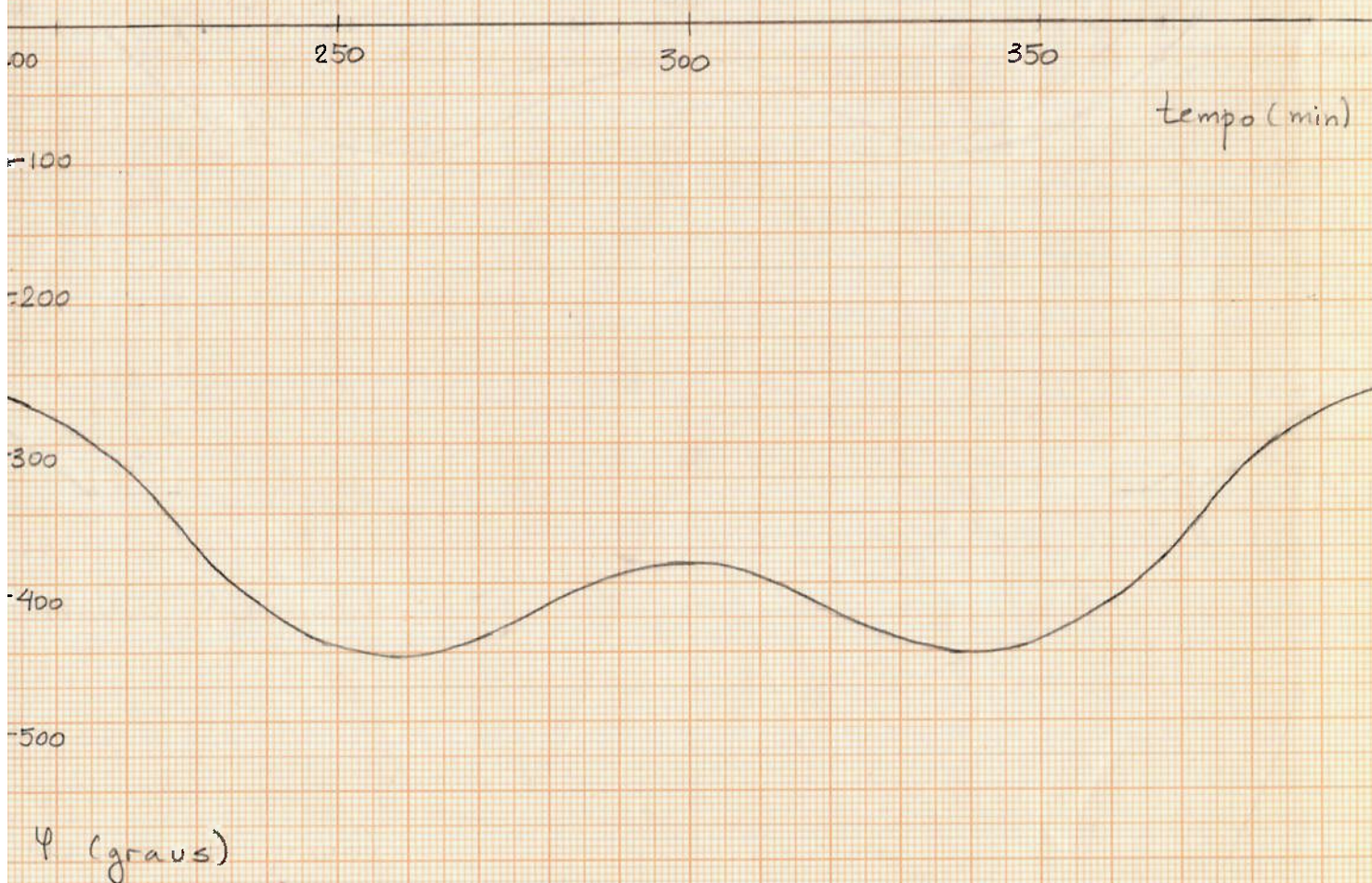
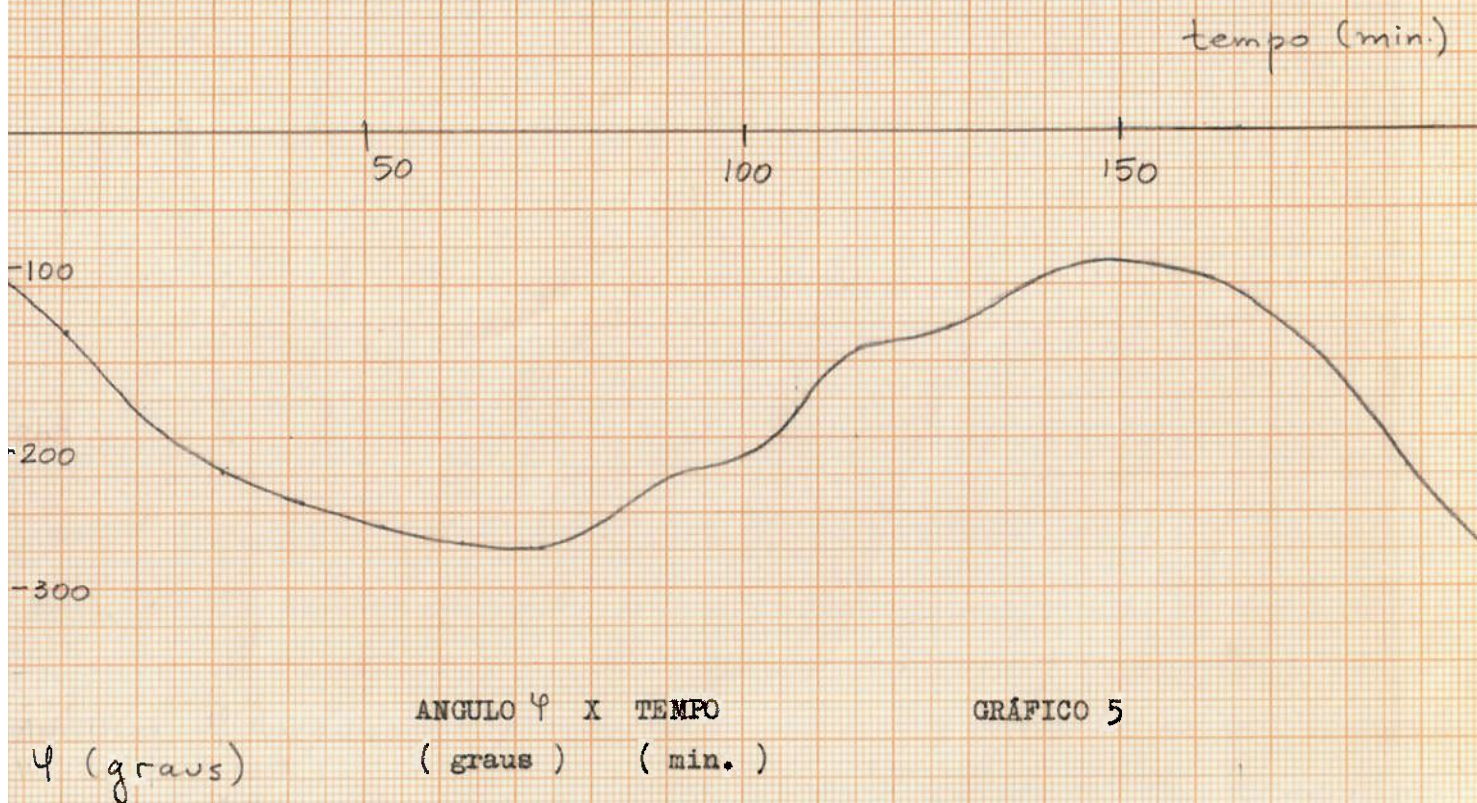
CASO 3

ANGULO β X TEMPO
(graus) (min.)

GRÁFICO 4

 β (graus) β (graus)

CASO 3



CASO 3

ANGULO p X TEMPO
(graus) (min.)

GRÁFICO 6

 p (graus)

00

10

50

100

150

tempo (min)

 p (graus)

100

50

0

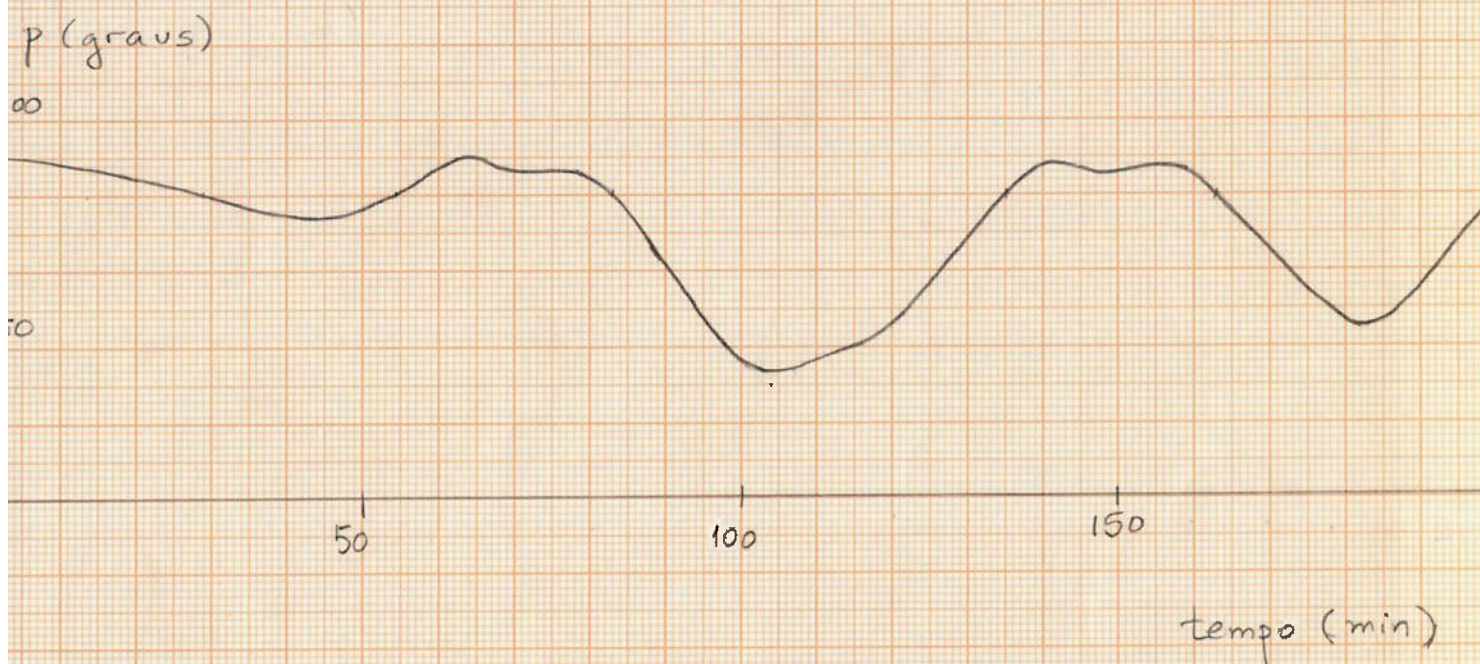
00

250

300

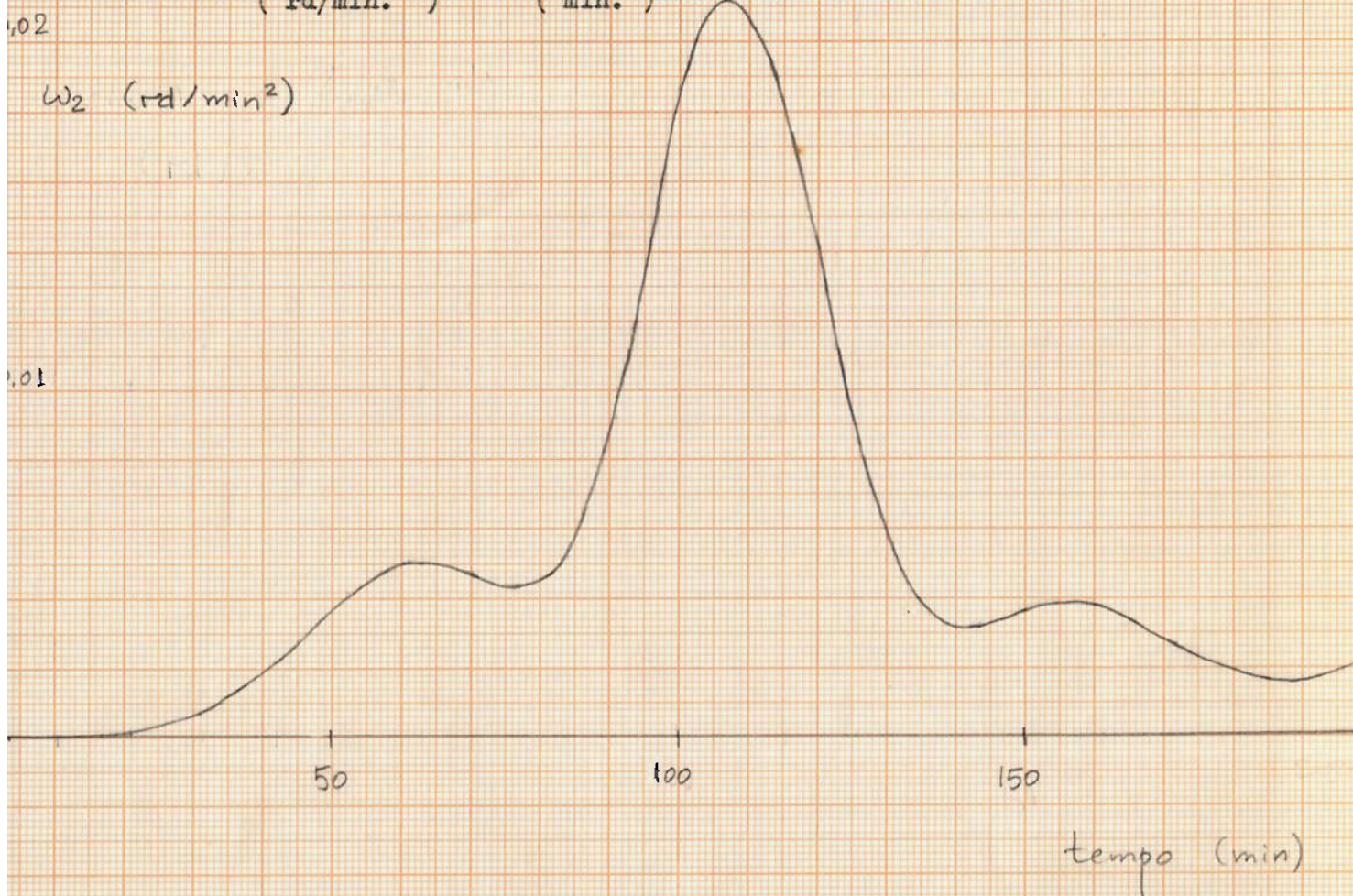
350

tempo (min)



CASO 3 VARIÁVEL w_2 X TEMPO
(rd/min.²) (min.)

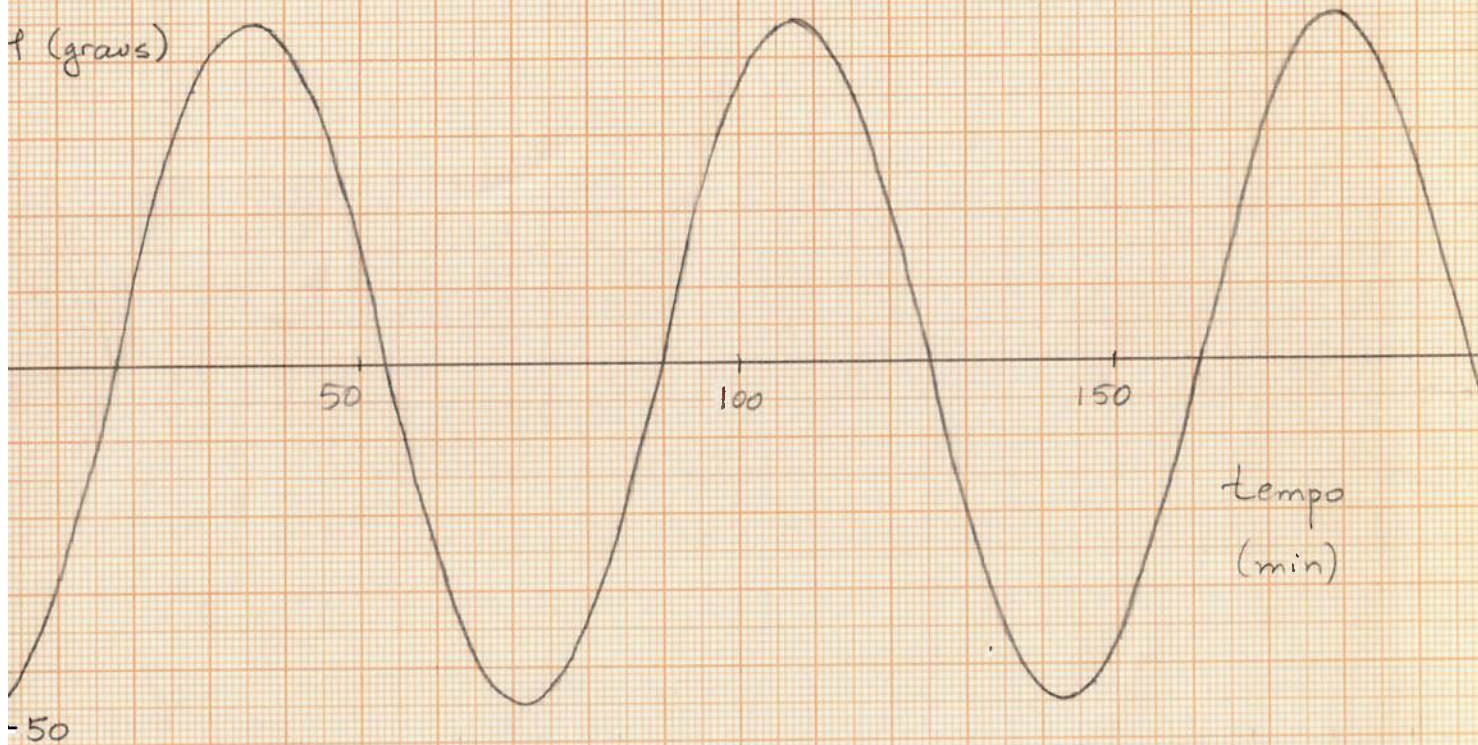
GRÁFICO 7



CASO 4

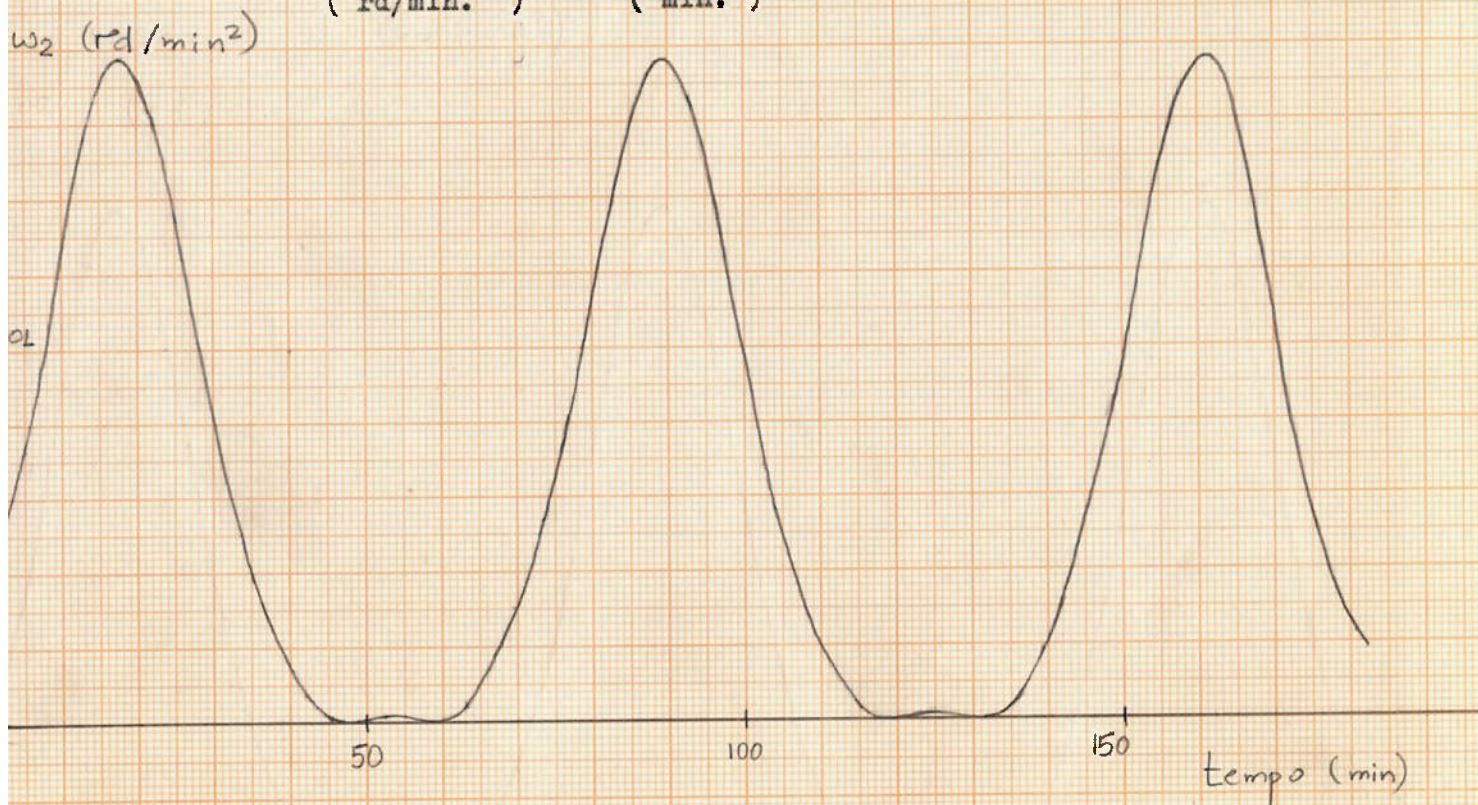
ANGULO φ X TEMPO
(graus) (min.)

GRÁFICO 8



VARIÁVEL w_2 X TEMPO
(rd/min.²) (min.)

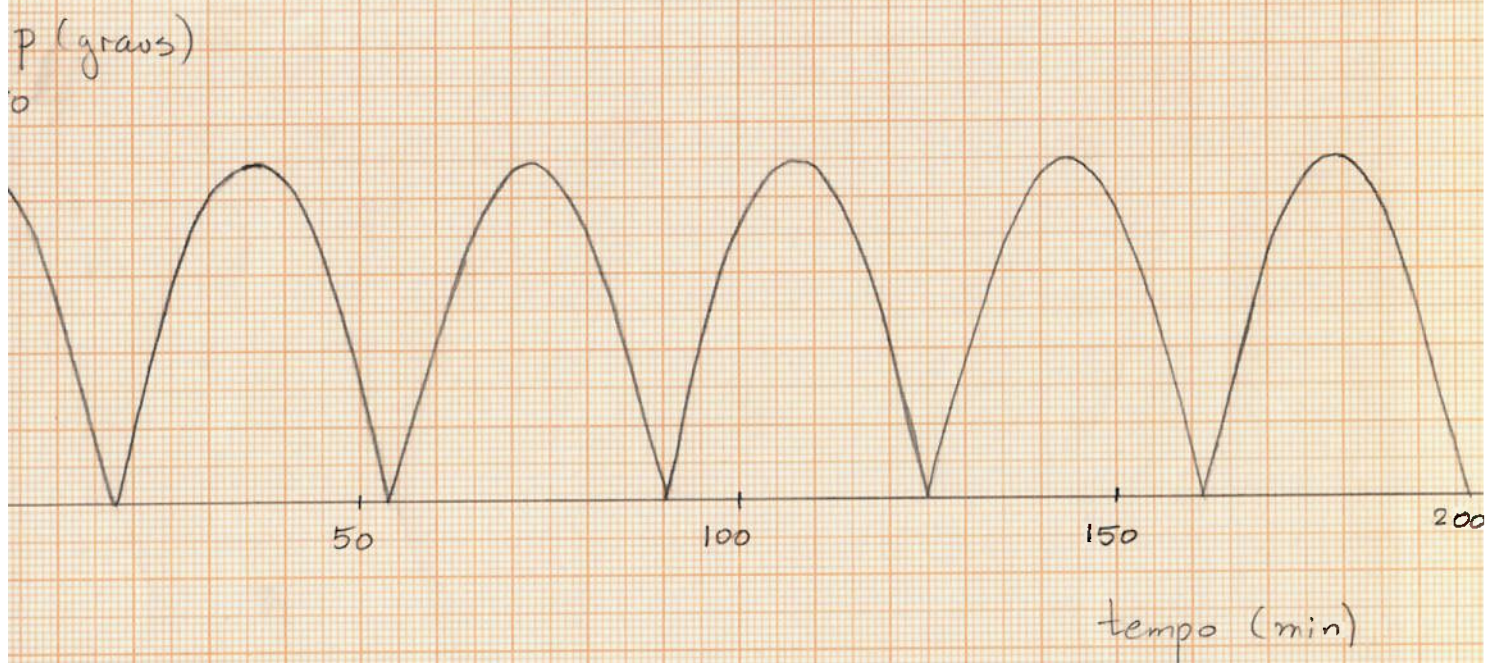
GRÁFICO 9



CASO 4

ÂNGULO p X TEMPO
(graus) (min.)

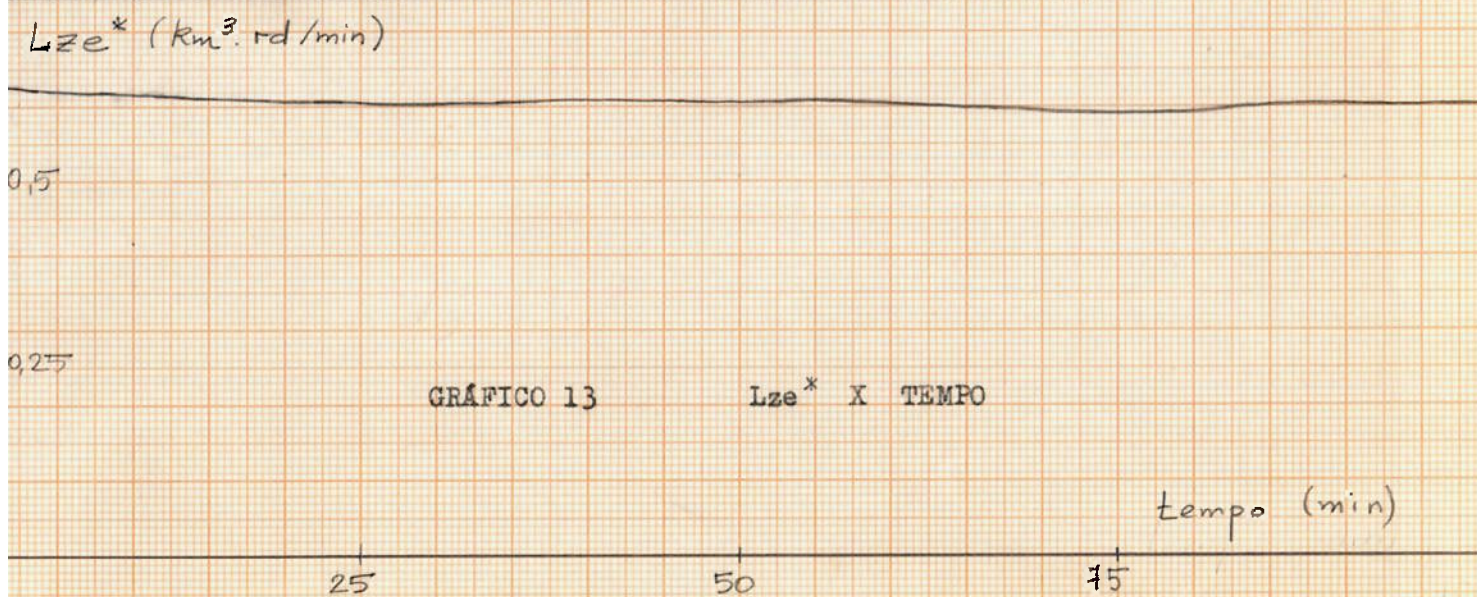
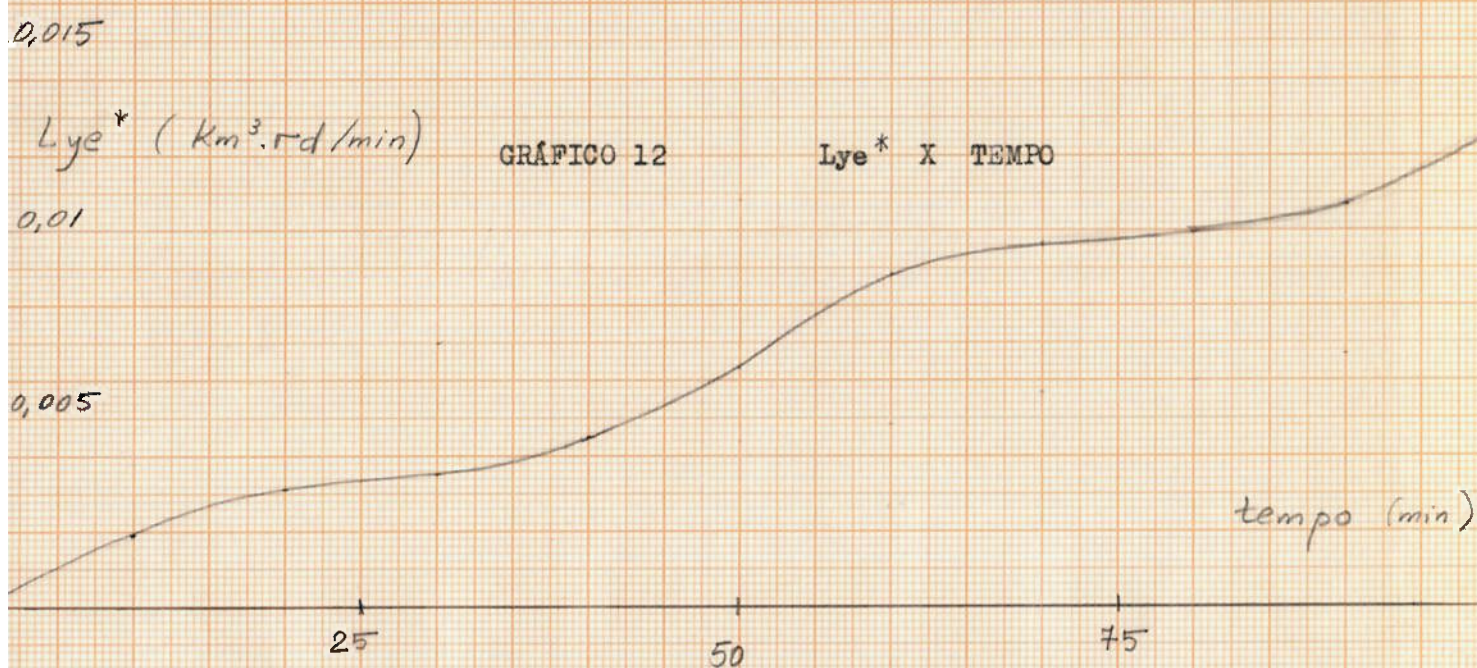
GRÁFICO 10



Observação: O gráfico acima apresenta uma descontinuidade em sua derivada porque o ângulo p é adotado sempre como positivo

CASO 5

MOMENTO ANGULAR ESPECÍFICO X TEMPO

 $(\text{km}^3 \cdot \text{rd} / \text{min.})$ (min.) 

1.4 Expressão Final do Carregamento Equivalente

Sendo conhecidas as componentes do carregamento equivalente, podemos escrever sua expressão final para uma viga.

Reescrevendo a equação (1.14) na forma diferencial:

$$d\vec{f}_c = d\vec{F}_a - dm (\vec{a}_O + \vec{a}_t)$$

Convém representar o carregamento equivalente no sistema móvel, para depois calcular os esforços solicitantes.

$$d\vec{F}_a' = -\mu \frac{m}{L} r^{-3} \cdot \vec{r}' = -\mu \frac{m}{L} r^{-3} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' + 1 \end{pmatrix} \cdot dl$$

$$\vec{a}_t' = \dot{\vec{w}}' \times \vec{l}' + \vec{w}' \cdot (\vec{w}' \cdot \vec{l}') - \vec{l}' \cdot w^2$$

$$\dot{\vec{w}}' \times \vec{l}' = \begin{pmatrix} \dot{w}_x' \\ \dot{w}_y' \\ \dot{w}_z' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{w}_y' \cdot 1 \\ -\dot{w}_x' \cdot 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}' \cdot \vec{l}' = w_z' \cdot 1 \quad \text{Observação. O vetor } \vec{l}' \text{ é ilustrado na figura 9, pág. 69.}$$

$$\vec{w}' \cdot (\vec{w}' \cdot \vec{l}') = 1 \cdot \begin{pmatrix} w_x' & w_z' \\ w_y' & w_z' \\ w_z'^2 \end{pmatrix}$$

$$w^2 = w_x'^2 + w_y'^2 + w_z'^2$$

$$\vec{l}' \cdot \vec{w}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ wx'^2 + wy'^2 + wz'^2 \end{pmatrix} \cdot 1$$

Daí:

$$\vec{a}_t' = 1 \cdot \begin{pmatrix} \dot{w}y' + wx' \cdot wz' \\ -\dot{w}x' + wy' \cdot wz' \\ -wx'^2 - wy'^2 \end{pmatrix}$$

Retomando a equação (2.21), teremos:

$$\frac{\dot{\vec{L}}'}{L'} = A \cdot \begin{pmatrix} \dot{w}x' - wy' \cdot wz' \\ \dot{w}y' + wx' \cdot wz' \\ \dot{w}z' \end{pmatrix} = \vec{N}_C' = -\mu \frac{m}{L} I_2 \cdot \begin{pmatrix} -y' \\ x' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Daí: } \dot{w}y' + wx' \cdot wz' = - \frac{12 \mu I_2 x'}{L^3}$$

$$-\dot{w}x' + wy' \cdot wz' = - \frac{12 \mu I_2 y'}{L^3}$$

$$\vec{a}_O' = \ddot{\vec{a}}' = \frac{\vec{F}'}{m} = - \frac{\mu}{L} \cdot \begin{pmatrix} x' & I_1 \\ y' & I_1 \\ z' & I_1 + I_2 \end{pmatrix}$$

A expressão final do carregamento equivalente será, portanto:

$$\vec{dfc}' = \begin{pmatrix} dfc_x' \\ dfc_y' \\ dfc_z' \end{pmatrix}$$

$$dfc_x' = -\omega \cdot \frac{m}{L} \cdot x' \cdot \left(r^{-3} - \frac{I_1}{L} - \frac{12}{L^3} I_2 \cdot 1 \right) dl \quad (2.29)$$

$$dfc_y' = -\omega \cdot \frac{m}{L} \cdot y' \cdot \left(r^{-3} - \frac{I_1}{L} - \frac{12}{L^3} I_2 \cdot 1 \right) dl \quad (2.30)$$

$$dfc_z' = \frac{m}{L} \cdot \left(-\omega r^{-3} (z' + 1) + \frac{\omega}{L} (z' \cdot I_1 + I_2) + 1 (\omega x'^2 + \omega y'^2) \right) dl \quad (2.31)$$

As componentes dfc_x' e dfc_y' são perpendiculares à viga e nota-se que estas dependem apenas da posição da viga, enquanto que a componente dfc_z' , que é paralela à viga, depende da posição e da velocidade angular.

2. CÁLCULO DOS ESFORÇOS NA VIGA

Para o cálculo das tensões na viga, será utilizada a teoria das vigas delgadas.

Os esforços solicitantes que serão considerados para esse cálculo serão o momento fletor e a força normal ou de tração.

2.1 Cálculo da Força de Tração

Uma vez calculado o carregamento equivalente, pode-se calcular facilmente a força de tração ao longo da viga. A viga não possui nenhum vínculo e portanto a força de tração numa seção será a integral do carregamento na direção longitudinal desde a seção em questão até uma das extremidades:

$$T = \int_s^E dfc_{z'}$$

Retomando a equação (2.31), teremos:

$$dfc_{z'} = \frac{m}{L} \left[-\mu r^{-3} (z' + 1) + \frac{\mu}{L} (z' \cdot I_1 + I_2) + 1 (wx'^2 + wy'^2) \right] dl$$

$$T = \frac{m}{L} \int_s^{L/2} \left[-\mu r^{-3} (z' + 1) + \frac{\mu}{L} (z' \cdot I_1 + I_2) + 1 (wx'^2 + wy'^2) \right] dl$$

Efetuada-se a integral, utilizando-se as relações (2.14) e (2.15), teremos:

$$T = \frac{m}{L} \left[-\mu (I_3 z' + I_4) + \frac{\mu}{L} (z' \cdot I_1 + I_2) \left(\frac{L}{2} - s \right) + (wx'^2 + wy'^2) \left(\frac{L^2}{4} - s^2 \right) \right]$$

onde:

$$I_3 = \frac{1}{(4C - B^2)} \left(\frac{2L + 2B}{(C + BL/2 + L^2/4)^{1/2}} - \frac{4S + 2B}{(C + BS + S^2)^{1/2}} \right)$$

para $4C \neq B^2$

$$I_3 = \frac{1}{2(S + B/2)^2} - \frac{2}{(B + L)^2} \quad \text{para } 4C = B^2 \quad (2.32)$$

$$I_4 = \frac{1}{(4C - B^2)} \left(\frac{2BS + 4C}{(C + BS + S^2)^{1/2}} - \frac{(4C + BL)}{(C + BL/2 + L^2/4)^{1/2}} \right)$$

para $4C \neq B^2$

$$I_4 = \frac{1}{2} \frac{(2S + B/2)}{(S + B/2)^2} - \frac{(2L + B)}{(L + B)^2} \quad \text{para } 4C = B^2 \quad (2.33)$$

2.2 Cálculo do Momento Fletor

Analogamente à força de tração, o momento fletor numa seção é calculado integrando-se o momento do carregamento equivalente em relação à seção em questão desde a mesma até uma das extremidades.

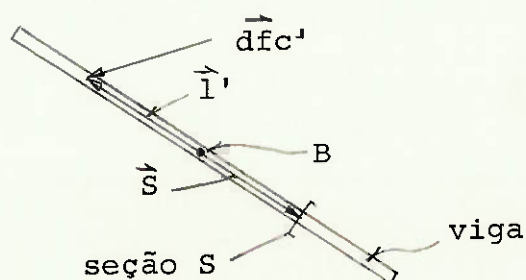


Figura 9

$$\vec{M} = \int_S^E (\vec{l} - \vec{s}) \times d\vec{fc}$$

$$\vec{l}' - \vec{s}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - S \end{pmatrix} \quad d\vec{fc}' = \begin{pmatrix} dfc_x' \\ dfc_y' \\ dfc_z' \end{pmatrix}$$

$$(\vec{l}' - \vec{s}') \times d\vec{fc}' = (1 - S) \cdot \begin{pmatrix} -dfc_y' \\ dfc_x' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_x' = - \int_S^E (1 - S) \cdot dfc_y'$$

$$M_y' = \int_S^E (1 - S) \cdot dfc_x'$$

Retomando as equações (2.29) e (2.30), teremos:

$$M_x' = - \int_S^{L/2} \mu \frac{m}{L} y' \left(r^{-3} - \frac{I_1}{L} - \frac{12 \cdot I_2}{L^3} \frac{1}{L} \right) (1 - S) dl$$

$$M_y' = \int_S^{L/2} -\mu \frac{m}{L} x' \left(r^{-3} - \frac{I_1}{L} - \frac{12 \cdot I_2}{L^3} \frac{1}{L} \right) (1 - S) dl$$

Efetutando-se as integrais:

$$M_{x'}' = -\frac{m}{L} y' \left[(I_4 - I_3 S) - \frac{I_1}{L} \left(\frac{L^2}{8} - \frac{SL}{2} + \frac{S^2}{2} \right) - \frac{12 I_2}{L^3} \left(\frac{L^3}{24} - \frac{SL^2}{8} + \frac{S^3}{6} \right) \right]$$

$$M_{y'}' = -\frac{m}{L} x' \left[(I_4 - I_3 S) - \frac{I_1}{L} \left(\frac{L^2}{8} - \frac{SL}{2} + \frac{S^2}{2} \right) - \frac{12 I_2}{L^3} \left(\frac{L^3}{24} - \frac{SL^2}{8} + \frac{S^3}{6} \right) \right]$$

Essas são as duas componentes do momento fletor. Uma na direção do eixo x' e outra na direção do eixo y' .

O momento fletor total será , em módulo :

$$|M| = \sqrt{M_{x'}'^2 + M_{y'}'^2}$$

Convencionando-se que o momento fletor seja positivo quando a fibra tracionada estiver voltada para a terra, teremos:

$$M = \frac{m y'}{L} \left[(I_4 - I_3 S) - \frac{I_1}{L} \left(\frac{L^2}{8} - \frac{SL}{2} + \frac{S^2}{2} \right) - \frac{12 I_2}{L^3} \left(\frac{L^3}{24} - \frac{SL^2}{8} + \frac{S^3}{6} \right) \right] \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

Como foi dito antes, as componentes do carregamento equivalente que são perpendiculares à viga só dependem da posição da mesma. Isso faz com que o momento fletor também dependa apenas da posição da viga. Essa posição pode ser descrita pelos ângulos p e n , mostrados na figura (10).

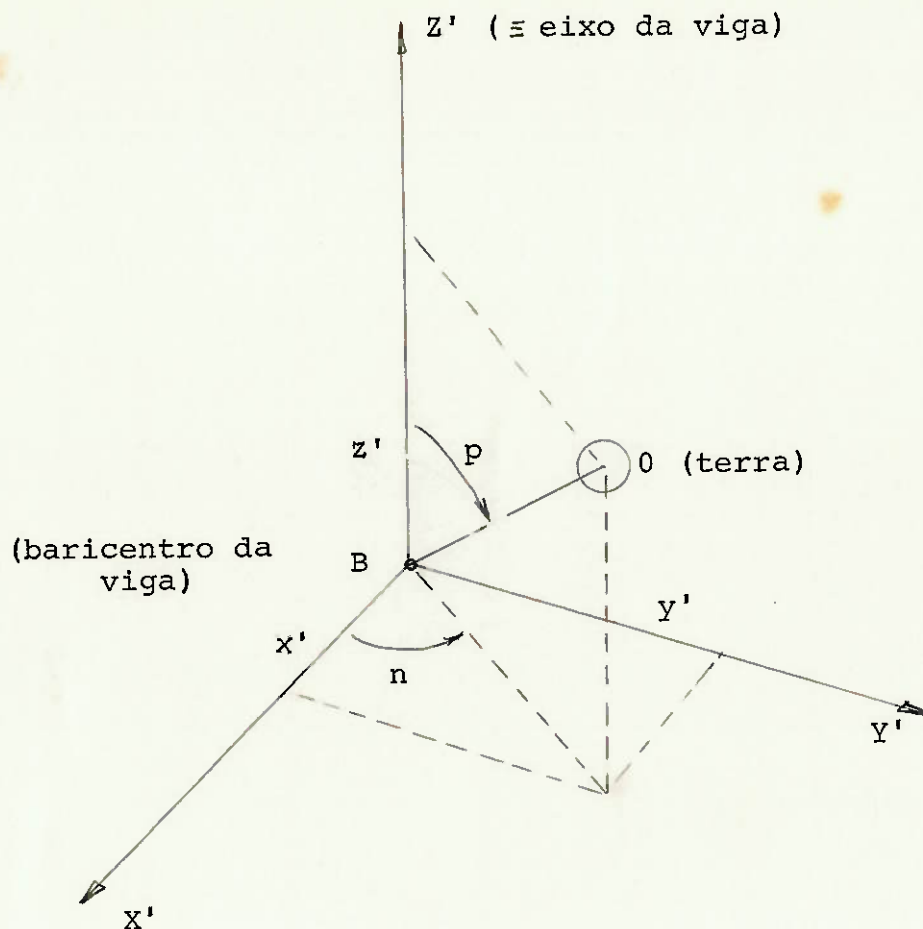


Figura 10

Teremos, então:

$$z' = a \cos p$$

$$x'^2 + y'^2 = a^2 \sin^2 p \cos^2 n + a^2 \sin^2 p \sin^2 n = a^2 \sin^2 p$$

Portanto, teremos o momento fletor como função única do ângulo p , que é o ângulo entre o eixo da viga e a direção de finida pelo baricentro da mesma e a terra, e da distância entre a viga e a terra.

$$M = \frac{m}{L} \left[(I_4 - I_3 S) - \frac{I_1}{L} \left(\frac{L^2}{8} - \frac{SL}{2} + \frac{S^2}{2} \right) - \frac{12 I_2}{L^3} \left(\frac{L^3}{24} - S \frac{L^2}{8} + \frac{S^3}{6} \right) \right] a \sin p$$

Retomando a equação da força de tração, nota-se que uma parte também depende apenas da posição da viga.

$$T = \frac{m}{L} \left[-\mathcal{U} (I_3 z' + I_4) + \frac{\mathcal{U}}{L} (z' I_1 + I_2) \left(\frac{L}{2} - S \right) \right] + m (wx'^2 + wy'^2) \left(\frac{L}{4} - \frac{S^2}{L} \right)$$

depende apenas da posição da viga

A parcela que depende apenas da posição é a força de tração gravitacional, enquanto que a parcela que depende da velocidade angular é a força de tração centrífuga:

$$T = T_g + T_{cf} \quad (2.34)$$

$$T_g = \frac{m}{L} \left[-I_3 a \cos p - I_4 + (a \cos p I_1 + I_2) \left(\frac{L}{2} - S \right) \right]$$

$$T_{cf} = m (wx'^2 + wy'^2) \left(\frac{L}{4} - \frac{S^2}{L} \right)$$

Podemos escrever esses esforços por unidade de massa. Teremos assim as equações do momento fletor específico, tração gravitacional específica e tração centrífuga específica.

$$M_e = \frac{\gamma}{L} \left[I_4 - I_3 S - I_1 \left(\frac{L}{8} - \frac{S}{2} - \frac{S^2}{2L} \right) - \right. \\ \left. - 12 I_2 \left(\frac{1}{24} - \frac{S}{L 8} + \frac{S^3}{L^3 6} \right) \right] a \sin p \quad (2.35)$$

$$T_{ge} = \frac{\gamma}{L} \left[-I_3 a \cos p - I_4 + (a \cos p I_1 + I_2) \left(\frac{L}{2} - S \right) \right] \quad (2.36)$$

$$T_{cfe} = (wx'^2 + wy'^2) \left(\frac{L}{4} - \frac{S^2}{L} \right) \quad (2.37)$$

$$wx'^2 + wy'^2 = w_2$$

Para os esforços que dependem apenas da posição da viga, foram levantados gráficos, em função da seção, para diversas posições angulares, ou seja, para diversos ângulos p . Esses gráficos são válidos para o caso que está sendo estudado, ou seja, distância de 7372 km entre a viga e o centro da terra e viga com 1 km de comprimento.

Verifica-se, pelos mesmos, que os esforços máximos ocorrem sempre na seção central da viga. Sendo assim, foram levantados gráficos desses esforços para a seção central, em função do ângulo p .

TRAÇÃO GRAVITACIONAL ESPECÍFICA X SEÇÃO
 (m^2/s^2) (m)

GRÁFICO 14

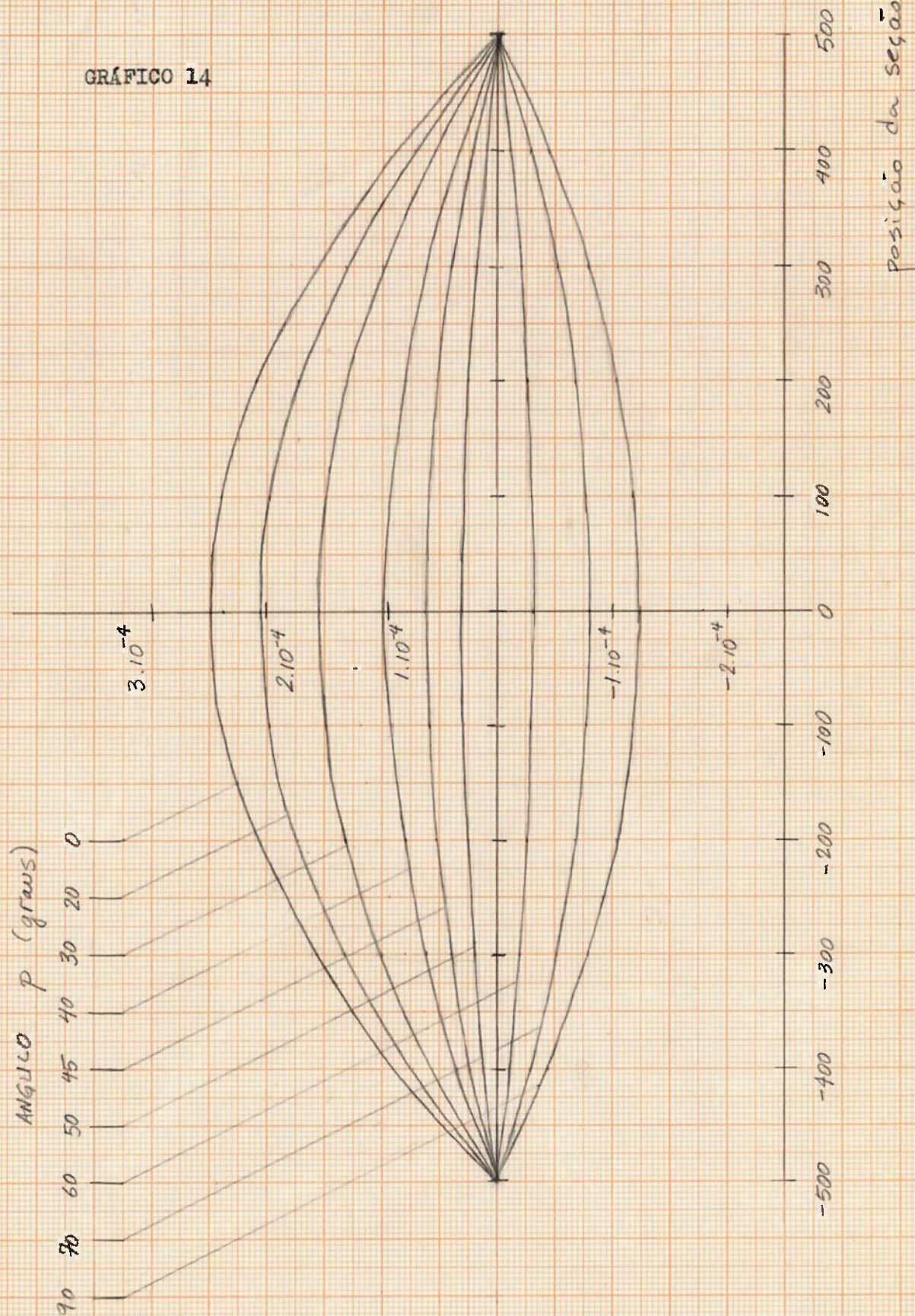
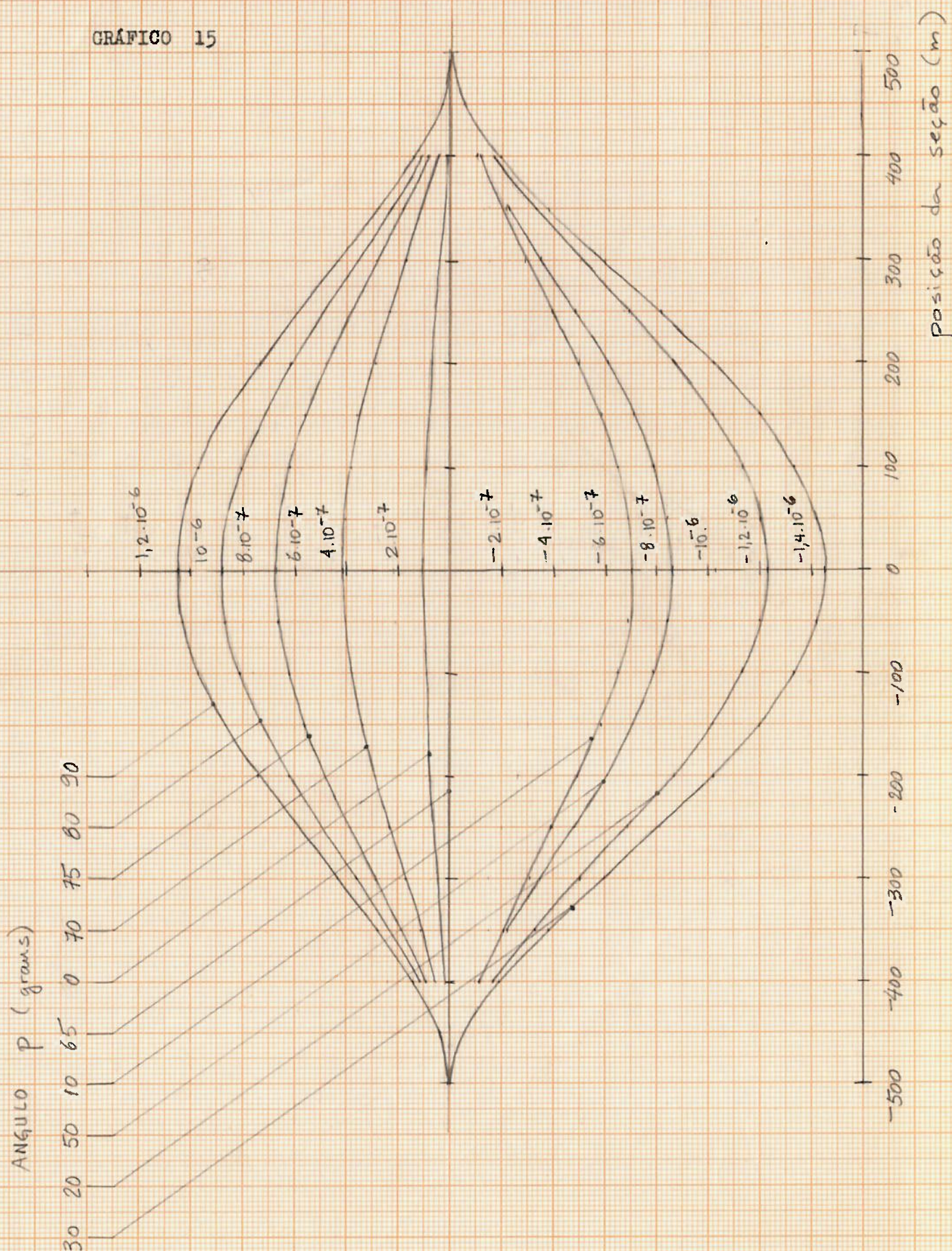


GRÁFICO 15

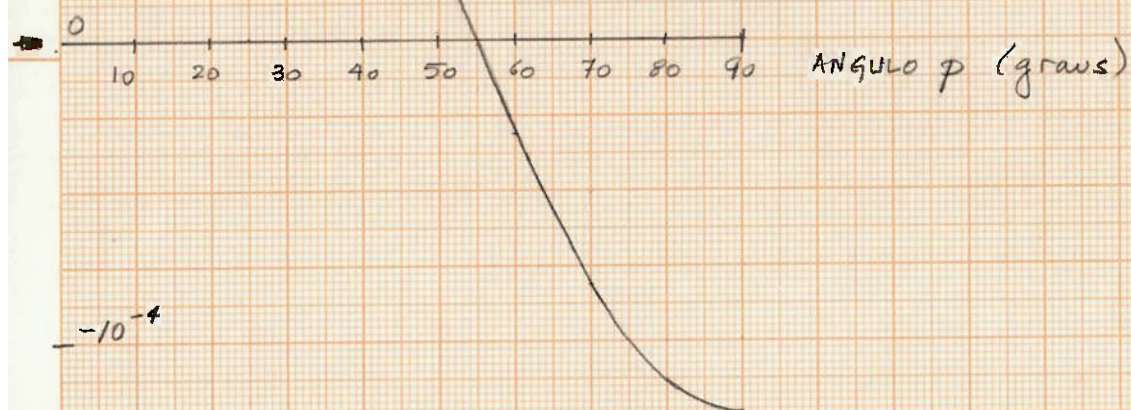


TRACÃO GRAVITACIONAL ESPECÍFICA X ÂNGULO ρ
(m/s^2) (graus)

T_{ge} (m/s^2)

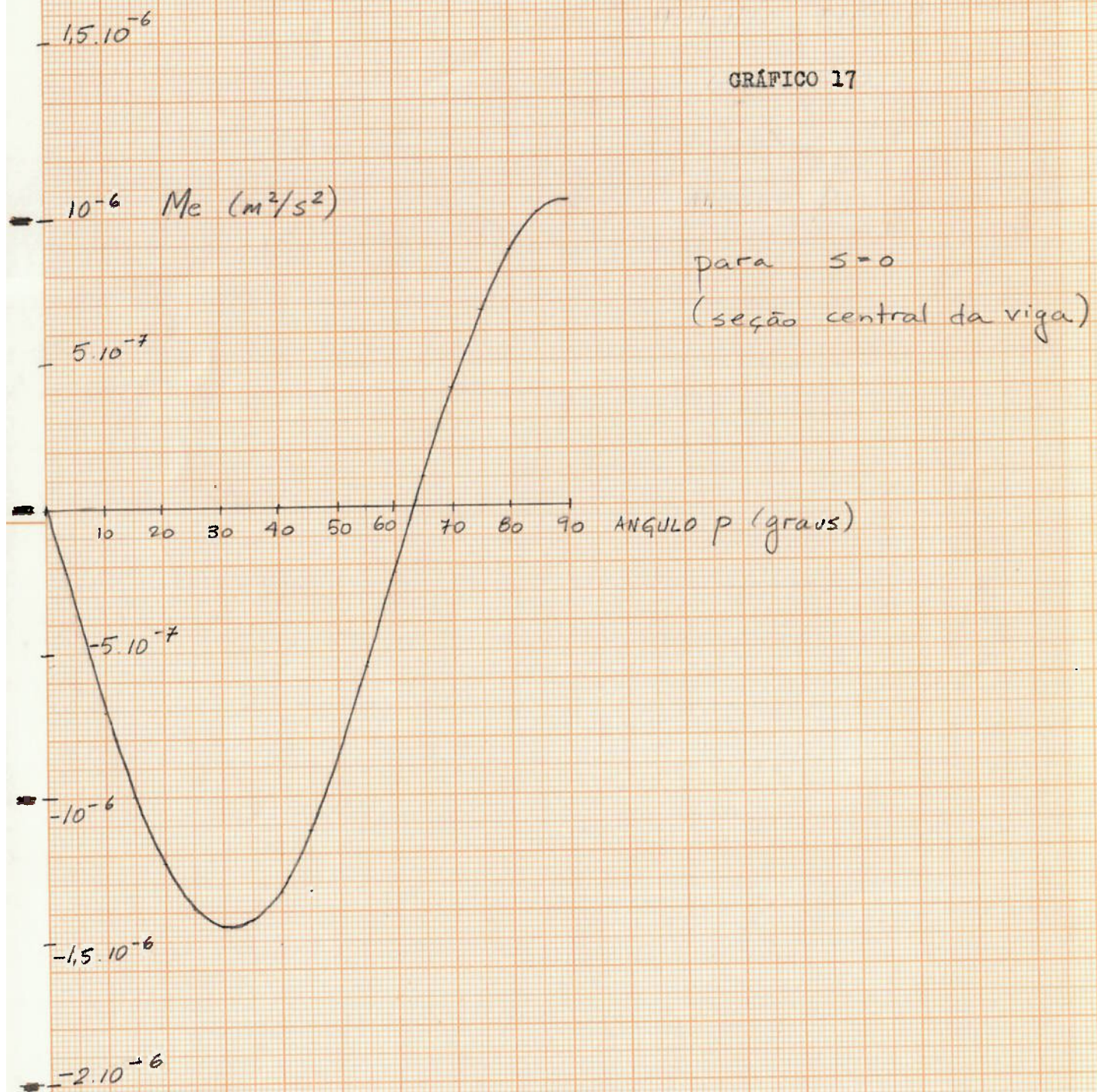
GRÁFICO 16

para $s = 0$
(seção central da viga)



MOMENTO FLETOR ESPECÍFICO X ÂNGULO p
(m^2/s^2) (graus)

GRÁFICO 17



2.3 Esforços Solicitantes Máximos para os Casos Estudados

Os esforços solicitantes apresentados são o momento fletor, a tração gravitacional e a tração centrífuga, todos e-les por unidade de massa da viga.

Para cada caso são apresentadas duas condições. A condi-ção em que o momento fletor é máximo e a condição em que a tração gravitacional e a tração centrífuga são máximas. Co-mo pode ser observado no gráfico (17), a primeira condição ocorrerá quando o ângulo p é o mais próximo de 30° ou o mais próximo de 90° . E pelo gráfico (16), observa-se que a condi-ção de máxima tração gravitacional ocorrerá quando p atingir seu valor mais baixo. Observa-se, pelos gráficos levantados para o ângulo p e para a variável w_2 nos casos estudados, que w_2 sempre atinge seu máximo quando p é mínimo. E conseque_n-mente, a condição de máxima tração gravitacional ocorre si-multaneamente com a condição de máxima tração centrífuga. É por esse motivo que se consideram essas duas condições como uma só.

As condições de máximos são apresentadas na forma de ta-belas. Foram utilizados os gráficos (17) e (16) para a deter-minação do momento fletor e tração gravitacional, e a equa-ção (2.37) para o cálculo da tração centrífuga, além dos grá-ficos levantados para o ângulo p e para a variável w_2 , em função do tempo, para cada caso.

Caso 1

No caso 1 o momento fletor é sempre nulo e a tração é constante. Portanto é uma condição única.

Tabela 1

tempo (min)	-
p (graus)	0
φ (graus)	0
β (graus)	90
M_e (m^2/s^2)	0
T_{ge} (m/s^2)	$2,5 \cdot 10^{-4}$
w_2 (rd/min ²)	0,0035808
T_{cfe} (m/s^2)	0,000248667

$$(w_2 = wx'^2 + wy'^2)$$

Caso 2

Tabela 2

tempo (min)	35	40
p (graus)	30	0
φ (graus)	30	0
β (graus)	90	90
M_e (m^2/s^2)	$1,45 \cdot 10^{-6}$	0
T_{ge} (m/s^2)	$1,53 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$
w_2 (rd/min ²)	0,0225	0,028
T_{cfe} (m/s^2)	0,0015625	0,001944

O momento fletor atinge seu máximo no instante $t=35$ minutos, enquanto que a tração é máxima para $t = 40$ minutos.

Observação: Observa-se, pelos gráficos (2) e (3), que essas condições se repetem para outros instantes, embora sejam apresentados apenas dois.

Caso 3

Tabela 3

tempo (min)	107
p (graus)	34
φ (graus)	-185
β (graus)	55
M_e (m^2/s^2)	$1,44 \cdot 10^{-6}$
T_{ge} (m/s^2)	$1,287 \cdot 10^{-4}$
w_2 (rd/min ²)	0,0212
T_{cfe} (m/s^2)	0,001472

Nesse caso a condição de momento fletor máximo coincide com a condição de tração máxima, pois p mínimo é 34º.

Caso 4

Tabela 4

tempo (min)	9	17,5
p (graus)	30	0
φ (graus)	30	0
β (graus)	90	90
M_e (m ² /s ²)	$1,45 \cdot 10^{-6}$	0
T_{ge} (m/s ²)	$1,53 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$
w_2 (rd/min ²)	0,016	0,0177
T_{cfe} (m/s ²)	0,001111	0,00123

Obs.: Observa-se pelos gráficos (9) e (10), que essas condições se repetem para outros instantes.

Caso 5

Tabela 5

tempo (min)	0	71
p (graus)	30	0
φ (graus)	0	0
β (graus)	60	90
M_e (m ² /s ²)	$1,45 \cdot 10^{-6}$	0
T_{ge} (m/s ²)	$1,53 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$
w_2 (rd/min ²)	0,75	0,75
T_{cfe} (m/s ²)	0,052083	0,052083

2.4 Cálculo das Tensões na Viga

Conhecendo-se os esforços ao longo da viga, podemos calcular o valor da máxima tensão. É importante observar, porém, que, como foi mencionado na introdução desse trabalho, não serão considerados os fatores térmicos nesse cálculo. Esses fatores são de grande importância caso exista um gradiente térmico ao longo da seção transversal da viga, uma vez que isso provocaria uma variação no módulo de elasticidade ao longo da seção transversal. O valor do módulo de elasticidade ao longo da seção transversal é um fator que influi muito as tensões decorrentes tanto do momento fletor como da força de tração. Essa é, portanto, uma das hipóteses adotadas no cálculo final das tensões.

Hipótese 8. O módulo de elasticidade é constante em toda a viga.

Todos os cálculos feitos até aqui não necessitaram levar em conta a forma e as dimensões da seção transversal e nem a massa da viga. Para se calcular as tensões será necessário adotar um determinado perfil e uma densidade para o material da viga.

A viga para a qual serão calculadas as tensões será uma barra circular, com diâmetro de 10 cm. O material terá densidade de 7000 kg/m^3 (aproximadamente a densidade de um aço).

As tensões serão calculadas pelas seguintes fórmulas da

teoria das vigas delgadas:

$$\sigma_M = \frac{M}{W}$$

$$\sigma_T = \frac{T}{S}$$

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_T$$

onde:

σ_M = tensão de tração devida ao momento fletor

σ_T = tensão de tração devida à força de tração.

σ = tensão total de tração

M = momento fletor

T = força de tração

W = módulo de resistência da seção

S = área da seção

Para a barra em estudo, teremos:

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = 78,54 \text{ cm}^2$$

$$W = \frac{\pi D^3}{32} = 98,17 \text{ cm}^3$$

$$L = 1000 \text{ m}$$

$$\rho = 7000 \text{ kg/m}^3$$

$$m = S \cdot L \cdot \rho = 54978 \text{ kg}$$

As tensões para as condições listadas para cada caso nas tabelas (1) a (5) serão, portanto:

Caso 1

$$M = M_e \quad m = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_M = 0$$

$$T = (T_{ge} + T_{cfe}) \cdot m = (2,5 \cdot 10^{-4} + 2,486 \cdot 10^{-4}) \cdot 54978$$

$$T = 27,41 \text{ N} = 2,797 \text{ kgf}$$

$$\sigma_T = \frac{T}{S} = \frac{2,797}{78,54} = 0,03561 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma = \sigma_T + \sigma_M = 0,03561 \text{ kgf/cm}^2$$

Caso 2

Condição de momento fletor máximo:

$$\begin{aligned} M = M_e \quad m &= 1,45 \cdot 10^{-6} \cdot 54978 = 0,07972 \text{ Nm} = \\ &= 0,81345 \text{ kgf.cm} \end{aligned}$$

$$\sigma_M = \frac{M}{W} = 0,008286 \text{ kgf/cm}^2$$

$$T = (T_{ge} + T_{cfe}) \cdot m = (1,53 \cdot 10^{-4} + 15,625 \cdot 10^{-4}) \cdot 54978$$

$$T = 94,3 \text{ N} = 9,624 \text{ kgf}$$

$$\sigma_T = \frac{T}{S} = 0,1225 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_T = 0,008286 + 0,1225 = 0,1308 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma = 0,1308 \text{ kgf/cm}^2$$

Condição de força de tração máxima:

$$M = 0 \rightarrow \sigma_M = 0$$

$$T = 120,6 \text{ N} = 12,3 \text{ kgf}$$

$$\sigma_T = 0,1567 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma = 0,1567 \text{ kgf/cm}^2$$

Caso 3

$$M = 0,07916 \text{ Nm} = 0,80784 \text{ kgf.cm}$$

$$\sigma_M = 0,008228 \text{ kgf/cm}^2$$

$$T = 88 \text{ N} = 8,98 \text{ kgf}$$

$$\sigma_T = 0,11433 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_T = 0,12256 \text{ kgf/cm}^2$$

Caso 4

Condição de momento fletor máximo:

$$M = 0,81345 \text{ kgf.cm}$$

$$\sigma_M = 0,008286 \text{ kgf/cm}^2$$

$$T = 7,1 \text{ kgf}$$

$$\sigma_T = 0,090285 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma = \sigma_T + \sigma_M = 0,098571 \text{ kgf/cm}^2$$

Condição de força de tração máxima:

$$M = 0$$

$$T = 8,3 \text{ kgf}$$

$$\sigma_T = 0,1057 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma = 0,1057 \text{ kgf/cm}^2$$

Caso 5

Condição de momento fletor máximo:

$$M = 0,81345 \text{ kgf.cm}$$

$$\sigma_M = 0,008286 \text{ kgf/cm}^2$$

$$T = 293 \text{ kgf}$$

$$\sigma_T = 3,7311 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_T = 3,7394 \text{ kgf/cm}^2$$

Condição de força de tração máxima:

$$M = 0$$

$$T = 293,58 \text{ kgf}$$

$$\sigma_T = 3,738 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma = 3,738 \text{ kgf/cm}^2$$

3. COMENTÁRIOS FINAIS

As tensões obtidas no exemplo estudado são extremamente baixas.

Verifica-se que na maioria dos casos a tensão devida à tração centrífuga é predominante sobre as demais. A tensão devida ao momento fletor é extremamente baixa em todos os casos e pode ser desprezada frente às demais.

Lembrando, porém, que os esforços, e portanto as tensões, são proporcionais à massa da viga ou estrutura, as tensões numa estrutura poderiam ser significativamente mais altas, caso nessa estrutura apenas uma pequena parcela de sua massa ou material contribuísse na resistência mecânica. O momento fletor, que no caso da viga revelou-se muito baixo, pode tornar-se importante numa estrutura com outra geometria, como por exemplo numa estrutura triangular. Numa estrutura desse tipo, o momento fletor dependeria não só da posição da mesma, como também da sua velocidade angular, pois ele teria uma componente centrífuga.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. FITZPATRICK, Philip M. - Principles of Celestial Mechanics.
Editora Academic Press, N.Y., 1970 - 405 páginas.
2. SYNGE & GRIFFITH. - Mecânica Racional.
Tradução de Nelson França Furtado.
Editora Globo, Porto Alegre, 1969 - 567 páginas.
3. SETZER, SIMON, KOWALTOWSKI; - Curso de Fortran IV - Básico.
Editora Edgard Blücher LTDA., São Paulo, 1979 - 102 páginas.
4. NASH, William A. - Resistência dos Materiais.
Tradução de Jaime Ferreira da Silva.
Editora McGraw-Hill do Brasil, LTDA., São Paulo, 1979 - 384 páginas.
5. PISKOUNOV, N. - Cálculo Diferencial e Integral.
Tradução de Antonio Eduardo Pereira Teixeira & Maria José P. Teixeira.
Editora Lopes da Silva, Porto, 1979 - 516 páginas.

ANEXOS

Listagem do programa utilizado para a integração numérica das equações do movimento da viga.

```
C   SUBROTINA QUE DESENVOLVE O SISTEMA DE EQUACOES.
      SURROUTINE FCN(N,T,Y,YD)
      INTEGER N
      REAL Y(N), YD(N), T, L, MI, SA, SB, CA, CB, G(3,3)
      REAL YX, YL, ZL, C6, C7, AP
      DOUBLE PRECISION I1, I2, C1, C2, C3, C4, C5, A, B, C
C   ATRIBUICAO DE VALORES
      L=1
      MI = 1434963240
C   CALCULO DE COEFICIENTES
      SA = SIN(Y(1))
      SB = SIN(Y(2))
      CA = COS(Y(1))
      CB = COS(Y(2))
      G(1,1) = CA
      G(1,2) = -SA*CB
      G(1,3) = SA*SB
      G(2,1) = SA
```

$$G(2,2) = CA*CB$$

$$G(2,3) = -CA*SB$$

$$G(3,2) = SB$$

$$G(3,3) = CB$$

$$XL = G(1,1)*Y(3)+G(2,1)*Y(4)$$

$$YL = G(1,2)*Y(3)+G(2,2)*Y(4)+G(3,2)*Y(5)$$

$$ZL = G(1,3)*Y(3)+G(2,3)*Y(4)+G(3,3)*Y(5)$$

$$C = Y(3)*Y(3)+Y(4)*Y(4)+Y(5)*Y(5)$$

$$A = DSQRT(C)$$

$$B = 2*ZL$$

$$C1 = 4*C - B*B$$

$$C4 = B+L$$

$$C5 = B-L$$

C QUANDO $C1 < 100$, O ANGULO P E MENOR QUE 0.04 GRAUS

IF($C1.GT.100$) GO TO 10

$$I1 = 2/(C5*C5)-2/(C4*C4)$$

$$I2 = 2*(B*0.5-L)/(C5*C5)-2*(B*0.5+L)/(C4*C4)$$

GO TO 20

10 $C2 = DSQRT(C+B*L*0.5+L*L*0.25)$

$$C3 = DSQRT(C-B*L*0.5+L*L*0.25)$$

$$I1 = 2*(C4/C2-C5/C3)/C1$$

$$I2 = ((4*C+B*L)/C3 - (4*C+B*L)/C2)/C1$$

20 $C6 = MI/L$

$$C7 = 12*C6*I2/(L*L)$$

C CALCULO DAS DERIVADAS

$$YD(1) = Y(6)$$

$$YD(2) = Y(7)$$

$$YD(3) = Y(8)$$

$$YD(4) = Y(9)$$

$$YD(5) = Y(10)$$

$$YD(6) = (-C7*XL - 2*CB*Y(6)*Y(7))/SB$$

$$YD(7) = C7*YL + SB*CB*Y(6)*Y(6)$$

$$YD(8) = -C6*(Y(3)*I1 + G(1,3)*I2)$$

$$YD(9) = -C6*(Y(4)*I1 + G(2,3)*I2)$$

$$YD(10) = -C6*(Y(5)*I1 + G(3,3)*I2)$$

RETURN

END

C SUBROTINA PARA CALCULO DE VARIAVEIS

SUBROUTINE RESULT (Y,N,K,FI,AP,A,DL,TT,W2,E,T0,I50)

INTEGER N,K

REAL Y(N),FI,XL,YL,ZL,DL,TT,AP,WX,WY,W2

REAL T,P,E,G(3,3),SA,SB,CA,CB,L,MI,T0

DOUBLE PRECISION A,B,C,C1,C2,I5,I50

C ATRIBUICAO DE VALORES

L=1

MI=1434963240

C CALCULO DE COEFICIENTES

SA=SIN(Y(1))

SB=SIN(Y(2))

CA=COS(Y(1))

CB=COS(Y(2))

G(1,1)=CA

G(1,2)=-SA*CB

G(1,3)=SA*SB

G(2,1)=SA

G(2,2)=CA*CB

G(2,3)=-CA*SB

G(3,2)=SB

G(3,3)=CB

XL=G(1,1)*Y(3)+G(2,1)*Y(4)

```

YL=G(1,2)*Y(3)+G(2,2)*Y(4)+G(3,2)*Y(5)
ZL=G(1,3)*Y(3)+G(2,3)*Y(4)+G(3,3)*Y(5)
C=Y(3)*Y(3)+Y(4)*Y(4)+Y(5)*Y(5)
C  CALCULO DE A (COORDENADA POLAR)
A=DSQRT(C)
B=2*ZL
C  CALCULO DE DELTA (COORDENADA POLAR)
DL=Y(5)/A
DL=ARSIN(DL)
C  CALCULO DE TETA (COORDENADA POLAR)
TT=Y(3)/(A*COS(DL))
TT=ARCOS(TT)
IF (Y(4).LT.0) TT=6.283185307-TT
C  CALCULO DA VARIÁVEL W2
WX=Y(7)
WY=Y(6)*SB
W2=WX*WX+WY*WY
C  CALCULO DO ÂNGULO FI
FI=Y(1)-1.570796237-TT
C  CALCULO DA ENERGIA
T=0.5*(Y(8)*Y(8)+Y(9)*Y(9)+Y(10)*Y(10))+L*L*W2/24
C1=B+L+DSQRT(L*L + 2*B*L+4*C)
C2=B-L+DSQRT(L*L - 2*B*L+4*C)
I5=DLOG(DABS(C1/C2))
C  NA CONDIÇÃO INICIAL K=0 E PORTANTO E=0
IF (K.GT.0) GO TO 10
I50=I5
T0=T
10 P=MI*(I50-I5)/L-T0
E=T+P

```

C CALCULO DO ANGULO P

AP=ZL/A

AP=ARCOS(AP)

RETURN

END

C PROGRAMA PRINCIPAL

INTEGER N,NW,IND,NI,K,IER,I

REAL TOL, TI, T, L, MI, Y(10), WX, WY, W2, TEND, C(24)

REAL FI, DL, TT, AP, W2, E, T0

DOUBLE PRECISION A, I50

C FORMATOS DE IMPRESSAO

100 FORMAT (IH0)

101 FORMAT (1X, 10E12.5)

110 FORMAT (1X, 5HIND=0, I5, 7H00IER=0, I5)

EXTERNAL FCN

C INICIALIZACAO DE PARAMETROS DA SUBROTINA DVERK

N=10

NW=10

TOL=0.01

IND=1

C ESPECIFICACAO DO NUMERO DE INSTANTES E INTERVALO ENTRE

C ELES

NI=120

TI=3.5

C CONDICAOES INICIAIS (CORRESPONDE AO CASO 4)

T=0

Y(1)=0.785398164

Y(2)=1.570796237

Y(3)=7372.58654

```
Y(4)=0
Y(5)=0
Y(6)=0.05983986007
Y(7)=0
Y(8)=0
Y(9)=441.1745469
Y(10)=0
C   CALCULA VARIAVEIS INICIAIS
    CALL RESULT (Y,N,K,FI,AP,A,DL,TT,W2,E,T0,I50)
C   IMPRIME VARIAVEIS E CONDICAO INICIAIS
    WRITE(6,101) T,Y(2), FI, AP,A,DL,TT,W2,E
    WRITE(6,101) (Y(I),I=1,10)
    WRITE(6,100)
    TEND=T
C   CALCULA NI-1 SOLUCOES
    DO 10 K=2,NI
        TEND=TEND+TI
C   CHAMA A SUBROTINA DE INTEGRACAO
        CALL DVERK (N,FCN,T,Y,TEND,TOL,IND,C,NW,W,IER)
C   CALCULA VARIAVEIS A PARTIR DA SOLUCAO
        CALL RESULT (Y,N,K,FI,AP,A,DL,TT,W2,E,T0,I50)
C   IMPRESSAO DE RESULTADOS
        WRITE(6,101) T,Y(2),FI,AP,A,DL,TT,W2,E
        WRITE(6,101) (Y(I),I=1,10)
        WRITE(6,100)
C   VERIFICA SE HOUE ERRO
        IF (IND.LT.0.OR.IER.GT.0) GO TO 20
10   CONTINUE
20   WRITE (6,110) IND, IER
    STOP
```

END

Esse programa utiliza a subrotina de biblioteca "DVERK".
O manual de utilização dessa subrotina se encontra em anexo.

SL ROUTINE NAME - DVERK

PURPOSE - DIFFERENTIAL EQUATION SOLVER - RUNGE
KUTTA-VERNER FIFTH AND SIXTH ORDER METHOD

PAGE - CALL DVERK (N,FCN,X,Y,XEND,TOL,IND,C,NW,W,IER)

ARGUMENTS N - NUMBER OF EQUATIONS. (INPUT)

FCN - NAME OF SUBROUTINE FOR EVALUATING FUNCTIONS.
(INPUT)

THE SUBROUTINE ITSELF MUST ALSO BE PROVIDED
BY THE USER AND IT SHOULD BE OF THE
FOLLOWING FORM

SUBROUTINE FCN(N,X,Y,YPRIME)
REAL Y(N),YPRIME(N)

FCN SHOULD EVALUATE YPRIME(1),...,YPRIME(N)
GIVEN N,X, AND Y(1),...,Y(N). YPRIME(I)
IS THE FIRST DERIVATIVE OF Y(I) WITH
RESPECT TO X.

FCN MUST APPEAR IN AN EXTERNAL STATEMENT IN
THE CALLING PROGRAM AND N,X,Y(1),...,Y(N)
MUST NOT BE ALTERED BY FCN.

X - INDEPENDENT VARIABLE. (INPUT AND OUTPUT)
ON INPUT, X SUPPLIES THE INITIAL VALUE.
ON OUTPUT, X IS REPLACED WITH XEND UNLESS
ERROR CONDITIONS ARISE. SEE THE DES-
CRPTION OF PARAMETER IND.

Y - DEPENDENT VARIABLES, VECTOR OF LENGTH N.
(INPUT AND OUTPUT)
ON INPUT, Y(1),...,Y(N) SUPPLY INITIAL
VALUES.

ON OUTPUT, Y(1),...,Y(N) ARE REPLACED WITH
AN APPROXIMATE SOLUTION AT XEND UNLESS
ERROR CONDITIONS ARISE. SEE THE DES-
CRPTION OF PARAMETER IND.

XEND - VALUE OF X AT WHICH SOLUTION IS DESIRED.
(INPUT)

XEND MAY BE LESS THAN THE INITIAL VALUE OF
X.

TOL - TOLERANCE FOR ERROR CONTROL. (INPUT)
THE SUBROUTINE ATTEMPTS TO CONTROL A NORM
OF THE LOCAL ERROR IN SUCH A WAY THAT THE
GLOBAL ERROR IS PROPORTIONAL TO TOL.
MAKING TOL SMALLER IMPROVES ACCURACY AND
MORE THAN ONE RUN, WITH DIFFERENT VALUES
OF TOL, CAN BE USED IN AN ATTEMPT TO
ESTIMATE THE GLOBAL ERROR.
IN THE DEFAULT CASE (IND=1), THE GLOBAL
ERROR IS

$\text{MAX}(\text{ABS}(E(1)), \dots, \text{ABS}(E(N)))$
WHERE $E(K) = (Y(K) - Y_T(K)) / \text{MAX}(1, \text{ABS}(Y(K)))$
Y_T(K) IS THE TRUE SOLUTION, AND

Y(K) IS THE COMPUTED SOLUTION AT XEND, A-10
FOR K=1,2,...,N.
OTHER ERROR CONTROL OPTIONS ARE AVAILABLE.
SEE THE DESCRIPTION OF PARAMETERS IND AND
C BELOW.

- IND - INDICATOR. (INPUT AND OUTPUT)
ON INITIAL ENTRY IND MUST BE SET EQUAL TO
EITHER 1 OR 2.
IND = 1 CAUSES ALL DEFAULT OPTIONS TO BE
USED AND ELIMINATES THE NEED TO SET
SPECIFIC VALUES IN THE COMMUNICATIONS
VECTOR C.
IND = 2 ALLOWS OPTIONS TO BE SELECTED. IN
THIS CASE, THE FIRST 9 COMPONENTS OF C
MUST BE INITIALIZED TO SELECT OPTIONS AS
DESCRIBED BELOW.
THE SUBROUTINE WILL NORMALLY RETURN WITH
IND = 3, HAVING REPLACED THE INITIAL VALUES
OF X AND Y WITH, RESPECTIVELY, THE VALUE
XEND AND AN APPROXIMATION TO Y AT XEND.
THE SUBROUTINE CAN BE CALLED REPEATEDLY WITH
NEW VALUES OF XEND WITHOUT CHANGING ANY
OF THE OTHER PARAMETERS.
THREE ERROR RETURNS ARE ALSO POSSIBLE, IN
WHICH CASE X AND Y WILL BE THE MOST
RECENTLY ACCEPTED VALUES.
IND = -3 INDICATES THAT THE SUBROUTINE WAS
UNABLE TO SATISFY THE ERROR REQUIREMENT.
THIS MAY MEAN THAT TOL IS TOO SMALL.
IND = -2 INDICATES THAT THE VALUE OF HMIN
(MINIMUM STEP-SIZE) IS GREATER THAN HMAX
(MAXIMUM STEP-SIZE), WHICH PROBABLY MEANS
THAT THE REQUESTED TOL (WHICH IS USED IN
THE CALCULATION OF HMIN) IS TOO SMALL.
IND = -1 INDICATES THAT THE ALLOWED MAXIMUM
NUMBER OF FCN EVALUATIONS HAS BEEN
EXCEEDED. THIS CAN ONLY OCCUR IF OPTION
C(7), AS DESCRIBED BELOW, HAS BEEN USED.
- C - COMMUNICATIONS VECTOR OF LENGTH 24. (INPUT IF
IND.NE.1, AND OUTPUT).
C IS USED TO SELECT OPTIONS AND TO RETAIN
INFORMATION BETWEEN CALLS. THE USER NEED
NOT BE CONCERNED WITH THE FOLLOWING
DESCRIPTION OF THE ELEMENTS OF C WHEN
DEFAULT OPTIONS ARE USED (IND=1).
HOWEVER, WHEN IT IS DESIRED TO USE IND=2
AND SELECT OPTIONS, A BASIC UNDERSTANDING
OF DVERK IS REQUIRED. THE FOLLOWING
PARAGRAPH DESCRIBES, BRIEFLY, THE BASIC
TERMS. FOR MORE DETAILS, SEE THE DOCUMENT
REFERENCE.
DVERK ADVANCES THE INDEPENDENT VARIABLE
X ONE STEP AT A TIME UNTIL XEND IS
REACHED. THE SOLUTION IS COMPUTED AT
XTRIAL = X+HTRIAL ALONG WITH AN ERROR
ESTIMATE EST. IF EST IS LESS THAN OR
EQUAL TO TOL (SUCCESSFUL STEP), THE STEP
IS ACCEPTED AND X IS ADVANCED TO XTRIAL.

IF EST IS GREATER THAN TOL (FAILURE) A-11
 HTRIAL IS ADJUSTED AND THE SOLUTION IS
 RECOMPUTED. HMAG = ABS(HTRIAL) IS NEVER
 ALLOWED TO EXCEED HMAX NOR IS IT ALLOWED
 TO BECOME SMALLER THAN HMIN. THE FIRST
 TRIAL STEP IS HSTART. DURING THE
 COMPUTATION, A COUNTER (C(23)) IS
 INCREMENTED EACH TIME A TRIAL STEP FAILS
 TO PROVIDE A SOLUTION SATISFYING THE ERROR
 TOLERANCE. ANOTHER COUNTER (C(22)) IS
 USED TO RECORD THE NUMBER OF SUCCESSFUL
 STEPS. AFTER A SUCCESSFUL STEP, C(23) IS
 SET TO ZERO.

OPTIONS. IF THE SUBROUTINE IS ENTERED WITH
 IND=2, THE FIRST 9 COMPONENTS OF THE
 COMMUNICATIONS VECTOR MUST BE INITIALIZED
 BY THE USER. NORMALLY THIS IS DONE BY
 FIRST SETTING THEM ALL TO ZERO, AND THEN
 THOSE CORRESPONDING TO PARTICULAR OPTIONS
 ARE MADE NON-ZERO.

C(1) - ERROR CONTROL INDICATOR.

THE SUBROUTINE ATTEMPTS TO CONTROL A NORM
 OF THE LOCAL ERROR IN SUCH A WAY THAT THE
 GLOBAL ERROR IS PROPORTIONAL TO TOL.
 THE DEFINITION OF GLOBAL ERROR FOR THE
 DEFAULT CASE (IND=1) IS GIVEN IN THE
 DESCRIPTION OF PARAMETER TOL. THE DEFAULT
 WEIGHTS ARE $1/\text{MAX}(1, \text{ABS}(Y(K)))$. WHEN IND=2
 IS USED, THE WEIGHTS ARE DETERMINED
 ACCORDING TO THE VALUE OF C(1).

IF C(1)=1 THE WEIGHTS ARE 1

(ABSOLUTE ERROR CONTROL)

IF C(1)=2 THE WEIGHTS ARE $1/\text{ABS}(Y(K))$
 FOR $K=1, 2, \dots, N$.

(RELATIVE ERROR CONTROL)

IF C(1)=3 THE WEIGHTS ARE
 $1/\text{MAX}(\text{ABS}(C(2)), \text{ABS}(Y(K)))$
 FOR $K=1, 2, \dots, N$.

(RELATIVE ERROR CONTROL, UNLESS
 $\text{ABS}(Y(K))$ IS LESS THAN THE FLOOR
 VALUE, $\text{ABS}(C(2))$)

IF C(1)=4 THE WEIGHTS ARE
 $1/\text{MAX}(\text{ABS}(C(K+30)), \text{ABS}(Y(K)))$
 FOR $K=1, 2, \dots, N$.

(HERE INDIVIDUAL FLOOR VALUES
 ARE USED)

IN THIS CASE, THE DIMENSION OF C
 MUST BE GREATER THAN OR EQUAL TO
 $N+30$ AND C(31), C(32), ..., C(N+30)
 MUST BE INITIALIZED BY THE USER.

IF C(1)=5 THE WEIGHTS ARE $1/\text{ABS}(C(K+30))$
 FOR $K=1, 2, \dots, N$.

IN THIS CASE, THE DIMENSION OF C
 MUST BE GREATER THAN OR EQUAL TO
 $N+30$ AND C(31), C(32), ..., C(N+30)
 MUST BE INITIALIZED BY THE USER.

FOR ALL OTHER VALUES OF C(1), INCLUDING A-12
C(1)=0 THE DEFAULT VALUES OF
THE WEIGHTS ARE TAKEN TO BE
 $1/\text{MAX}(1, \text{ABS}(Y(K)))$
FOR $K=1, 2, \dots, N$.

- C(2) - FLOOR VALUE. USED WHEN THE INDICATOR C(1) HAS THE VALUE 3.
- C(3) - HMIN SPECIFICATION. IF NOT ZERO, THE SUBROUTINE CHOOSES HMIN TO BE $\text{ABS}(C(3))$. OTHERWISE IT USES THE DEFAULT VALUE $10 * \text{MAX}(\text{DWARF}, \text{RREB} * \text{MAX}(\text{NORM}(Y) / \text{TOL}, \text{ABS}(X)))$ WHERE DWARF IS A VERY SMALL POSITIVE MACHINE NUMBER AND RREB IS THE RELATIVE ROUNDOFF ERROR BOUND.
- C(4) - HSTART SPECIFICATION. IF NOT ZERO, THE SUBROUTINE WILL USE AN INITIAL HMAG EQUAL TO $\text{ABS}(C(4))$, EXCEPT OF COURSE FOR THE RESTRICTIONS IMPOSED BY HMIN AND HMAX. OTHERWISE IT USES THE DEFAULT VALUE $\text{HMAX} * (\text{TOL})^{**}(1/6)$.
- C(5) - SCALE SPECIFICATION. THIS IS INTENDED TO BE A MEASURE OF THE SCALE OF THE PROBLEM. LARGER VALUES OF SCALE TEND TO MAKE THE METHOD MORE RELIABLE, FIRST BY POSSIBLY RESTRICTING HMAX (AS DESCRIBED BELOW) AND SECOND, BY TIGHTENING THE ACCEPTANCE REQUIREMENT. IF C(5) IS ZERO, A DEFAULT VALUE OF 1 IS USED. FOR LINEAR HOMOGENEOUS PROBLEMS WITH CONSTANT COEFFICIENTS, AN APPROPRIATE VALUE FOR SCALE IS A NORM OF THE ASSOCIATED MATRIX. FOR OTHER PROBLEMS, AN APPROXIMATION TO AN AVERAGE VALUE OF A NORM OF THE JACOBIAN ALONG THE TRAJECTORY MAY BE APPROPRIATE.
- C(6) - HMAX SPECIFICATION. FOUR CASES ARE POSSIBLE, IF $C(6) \neq 0$ AND $C(5) \neq 0$, HMAX IS TAKEN TO BE $\text{MIN}(\text{ABS}(C(6)), 2 / \text{ABS}(C(5)))$. IF $C(6) \neq 0$ AND $C(5) = 0$, HMAX IS TAKEN TO BE $\text{ABS}(C(6))$. IF $C(6) = 0$ AND $C(5) \neq 0$, HMAX IS TAKEN TO BE $2 / \text{ABS}(C(5))$. IF $C(6) = 0$ AND $C(5) = 0$, HMAX IS GIVEN A DEFAULT VALUE OF .2.
- C(7) - MAXIMUM NUMBER OF FUNCTION EVALUATIONS. IF NOT ZERO, AN ERROR RETURN WITH $\text{IND} = -1$ WILL BE CAUSED WHEN THE NUMBER OF FUNCTION EVALUATIONS EXCEEDS $\text{ABS}(C(7))$.
- C(8) - INTERRUPT NUMBER 1. IF NOT ZERO, THE SUBROUTINE WILL INTERRUPT THE CALCULATIONS AFTER IT HAS CHOSEN ITS PRELIMINARY VALUE OF HMAG, AND JUST BEFORE CHOOSING HTRIAL AND XTRIAL IN PREPARATION FOR TAKING A STEP (HTRIAL MAY DIFFER FROM HMAG IN SIGN, AND MAY REQUIRE ADJUSTMENT IF XEND IS NEAR). THE SUBROUTINE RETURNS WITH $\text{IND} = 4$, AND WILL RESUME CALCULATION AT THE POINT OF INTERRUPTION IF RE-ENTERED WITH $\text{IND} = 4$.

C(9) - INTERRUPT NUMBER 2. IF NOT ZERO, THE SUB- A-13
ROUTINE WILL INTERRUPT THE CALCULATIONS
IMMEDIATELY AFTER IT HAS DECIDED WHETHER OR
NOT TO ACCEPT THE RESULT OF THE MOST RECENT
TRIAL STEP, WITH IND = 5 IF IT PLANS TO
ACCEPT, OR IND = 6 IF IT PLANS TO REJECT.
Y(*) IS THE PREVIOUSLY ACCEPTED RESULT,
WHILE W(*,9) IS THE NEWLY COMPUTED TRIAL
VALUE, AND W(*,2) IS THE UNWEIGHTED ERROR
ESTIMATE VECTOR. THE SUBROUTINE WILL RESUME
CALCULATIONS AT THE POINT OF INTERRUPTION
ON RE-ENTRY WITH IND = 5 OR 6.
IND MAY BE CHANGED BY THE USER IN ORDER TO
FORCE ACCEPTANCE OF A STEP (BY CHANGING IND
FROM 6 TO 5) THAT WOULD OTHERWISE BE
REJECTED, OR VICE VERSA.

NW - ROW DIMENSION OF THE MATRIX W EXACTLY AS
SPECIFIED IN THE DIMENSION STATEMENT
IN THE CALLING PROGRAM. (INPUT)
NW MUST BE GREATER THAN OR EQUAL TO N.

W - WORKSPACE MATRIX.
THE FIRST DIMENSION OF W MUST BE NW AND THE
SECOND MUST BE GREATER THAN OR EQUAL TO 9.
W MUST REMAIN UNCHANGED BETWEEN SUCCESSIVE
CALLS DURING INTEGRATION.

IER - ERROR PARAMETER. (OUTPUT)
TERMINAL ERROR
IER = 129, NW IS LESS THAN N OR TOL IS LESS
THAN OR EQUAL TO ZERO.
IER = 130, IND IS NOT IN THE RANGE 1 TO 6.
IER = 131, XEND HAS NOT BEEN CHANGED FROM
PREVIOUS CALL OR X IS NOT SET TO
THE PREVIOUS XEND VALUE.
IER = 132, THE RELATIVE ERROR CONTROL
OPTION (C(1)=2) WAS SELECTED AND
ONE OF THE SOLUTION COMPONENTS
IS ZERO.

PRECISION/HARDWARE - SINGLE AND DOUBLE/H32
- SINGLE/H36,H48,H60

REQD. IMSL ROUTINES - UERTST,UGETIO

NOTATION - INFORMATION ON SPECIAL NOTATION AND
CONVENTIONS IS AVAILABLE IN THE MANUAL
INTRODUCTION OR THROUGH IMSL ROUTINE UHELP

REMARKS 1. IN A TYPICAL SITUATION, DVERK IS CALLED
REPEATEDLY WITH A SEQUENCE OF VALUES FOR XEND.
AFTER EACH SUCH CALL, THE USER SHOULD INTERROGATE
IND AND IER. ERROR CONDITIONS ARE SIGNALLED WHEN
IND IS LESS THAN ZERO AND/OR IER IS GREATER THAN
ZERO. CORRECTIVE ACTION (SUCH AS CHANGING CERTAIN
PARAMETER VALUES) MUST BE TAKEN PRIOR TO RE-ENTRY.
2. WHEN ERROR CONDITIONS ARISE, IT IS OFTEN HELPFUL
TO EXAMINE COMPONENTS OF THE COMMUNICATIONS VECTOR.
C. A SUMMARY FOLLOWS-

PRESCRIBED AT THE OPTION OF THE USER

- C(1) ERROR CONTROL INDICATOR
- C(2) FLOOR VALUE
- C(3) HMIN SPECIFICATION
- C(4) HSTART SPECIFICATION
- C(5) SCALE SPECIFICATION
- C(6) HMAX SPECIFICATION
- C(7) MAXIMUM NUMBER OF FCN EVALUATIONS
- C(8) INTERRUPT NUMBER 1
- C(9) INTERRUPT NUMBER 2

DETERMINED BY THE PROGRAM

- C(10) RREB (RELATIVE ROUNDOFF ERROR BOUND)
- C(11) DWARF (VERY SMALL MACHINE NUMBER)
- C(12) WEIGHTED NORM OF Y
- C(13) HMIN
- C(14) HMAG
- C(15) SCALE
- C(16) HMAX
- C(17) XTRIAL
- C(18) HTRIAL
- C(19) EST
- C(20) PREVIOUS XEND
- C(21) FLAG FOR XEND
- C(22) NUMBER OF SUCCESSFUL STEPS
- C(23) NUMBER OF SUCCESSIVE FAILURES
- C(24) NUMBER OF FCN EVALUATIONS

IF C(1) = 4 OR 5, C(31), C(32), ..., C(N+30) ARE FLOOR VALUES.

3. PARAMETER NW GIVES THE ROW DIMENSION OF W EXACTLY AS IT APPEARS IN THE DIMENSION STATEMENT IN THE CALLING PROGRAM. IF ONLY ONE SYSTEM OF EQUATIONS IS BEING SOLVED, NW NORMALLY WILL HAVE THE SAME VALUE AS N. HOWEVER, IF MORE THAN ONE SYSTEM IS BEING HANDLED, AND THEY ARE TO USE A COMMON WORKSPACE, W, ONE AFTER THE OTHER, THE VALUE OF NW (AND HENCE, THE ROW DIMENSION OF W IN THE CALLING PROGRAM) MUST BE AS LARGE AS THE MAXIMUM VALUE OF THE INDIVIDUAL N VALUES.

Algorithm

DVERK finds approximations to the solution of a system of first order ordinary differential equations of the form $y' = f(x, y)$ with initial conditions. It is designed to be easy to use. By setting parameter IND to 1, the user need only provide parameters to describe the problem; everything else is done automatically by the subroutine. Alternatively, the user may set IND to 2 and then select any one of several options, including different kinds of error control, restrictions on step sizes, and interrupts which permit the user to examine the state of the calculations (and perhaps make modifications) during intermediate stages. DVERK attempts to keep the global error proportional to a tolerance

specified by the user. The proportionality depends on the kind of error control that is used as well as the differential equation and A-15 range of integration.

DERK is efficient for non-stiff systems where derivative evaluations are not expensive and where solutions are not required at a large number of finely spaced points (as might be the case for example with graphical output). See the Chapter D prelude for general guidelines.

The subroutine is based on a code designed by T. E. Hull, W. H. Enright, and K. R. Jackson. It uses Runge-Kutta formulas of orders 5 and 6 that were developed by J. H. Verner.

See references:

- T. E. Hull, W. H. Enright, and K. R. Jackson, "User's Guide for DVERK - A Subroutine for Solving Non-Stiff ODE's", TR No. 100, Department of Computer Science, University of Toronto, October, 1976.
- K. R. Jackson, W. H. Enright, and T. E. Hull, "A Theoretical Criterion for Comparing Runge-Kutta Formulas TR101", January, 1977.

Example 1

This example illustrates the basic usage (all default options) of DVERK. A table of solution values for $x = 1.0, 2.0, \dots, 10.0$ is obtained for the predator-prey problem:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1(1-y_2) & y_1 &= 1 \\ y_2' &= y_2(y_1-1) & y_2 &= 3 \end{aligned} \quad \text{at } x = 0$$

```

INTEGER  N,IND,NW,IER,K
REAL     Y(2),C(24),W(2,9),X,TOL,XEND
EXTERNAL FCN1
NW       = 2
N        = 2
X        = 0.0
Y(1)     = 1.0
Y(2)     = 3.0
TOL      = .0001
IND      = 1
DO 10 K=1,10
  XEND=FLOAT(K)
  CALL DVERK(N,FCN1,X,Y,XEND,TOL,IND,C,NW,W,IER)
  IF(IND.LT.0.OR.IER.GT.0) GO TO 20
  Y(1) and Y(2) are current solution values at X.
  Insert write statement here.

```

```

CONTINUE
STOP
CONTINUE

```

Handle IND.LT.0 or IER.GT.0

Items that may help diagnose the problem should be output here.

IND,TOL,N,W,Y(1),...,Y(N),XEND, and C(1),...,C(24).

```

TOP
ND
SUBROUTINE FCN1(N,X,Y,YPRIME)
  INTEGER N
  REAL Y(N),YPRIME(N),X
  PRIME(1) = 2.0*Y(1)*(1.0-Y(2))
  PRIME(2) = Y(2)*(Y(1)-1.0)
  RETURN
END

```

Output:

ER = 0

X	Y(1)	Y(2)
1.	0.08	1.46
2.	0.09	0.58
3.	0.29	0.25
4.	1.45	0.19
5.	4.05	1.44
6.	0.18	2.26
7.	0.07	0.91
8.	0.15	0.37
9.	0.65	0.19
10.	3.15	0.35

Example 2

This example shows how IND = 2 is used to select specific options, while using default values for others. The differential equation

$$y' = y, \quad y = 1 \text{ at } x = 0,$$

is solved for $x = .1, .2, \dots, 1.0$, using the absolute error control option (C(1)=1).

```

INTEGER N,IND,NW,IER,I,K
REAL Y(1),C(24),W(1,9),X,TOL,XEND
EXTERNAL FCN2
NW = 1
N = 1
X = 0.0
Y(1) = 1.0
TOL = 0.0005
IND = 2

```

Select all default options, first

```

DO 5 I=1,9
C(I) = 0.0

```

Then specify C(1)=1.0 to select the absolute error control option.

```

C(1) = 1.0
DO 10 K=1,10
  XEND = FLOAT(K)*0.1
  CALL DVERK(N,FCN2,X,Y,XEND,TOL,IND,C,NW,W,IER)
  IF(IND.LT.0.OR.IER.GT.0) GO TO 20

```

DVERK-8

A-17

Y(1) is the current solution value at X. Insert write statement here.

CONTINUE
STOP
CONTINUE

Handle IND.LT.0 or IER.GT.0

Items that may help diagnose the problem should be output here.

IND,TOL,N,X,Y(1),...,Y(N),XEND, and C(1),...,C(24).

STOP
END
SUBROUTINE FCN2(N,X,Y,YPRIME)
INTEGER N
REAL Y(N),YPRIME(N),X
YPRIME(1) = Y(1)
RETURN
END

Output:

IER = 0

X	Y(1)
.1	1.105
.2	1.221
.3	1.350
.4	1.492
.5	1.649
.6	1.822
.7	2.014
.8	2.226
.9	2.460
1.0	2.718