

PMC 581
PROJETO MECÂNICO II

**"CAD E ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS NÃO LINEARES DE
UM PISTÃO PARA MOTORES DE COMBUSTÃO INTERNA"**

ALUNA: CRISTINA ZORIKI
NUSP: 1947090
CURSO: MECATRÔNICA
PROF. ORIENTADOR: EDSON GOMES

ÍNDICE

I - OBJETIVOS	2
II - INTRODUÇÃO	3
III - INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	4
IV - CONCEITOS BÁSICOS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	5
V - HISTÓRICO DA ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS	8
VI - O CONCEITO DOS ELEMENTOS FINITOS	10
VII - O SOFTWARE - ALGOR	21
VIII MÓDULOS DO ALGOR	22
1. SUPERDRAW II - COMPUTER AIDED DESIGN	22
2. VIZICAD - MODELING AND DESIGN VISUALIZATION	22
3. LINEAR STRESS ANALYSIS	22
4. STRESS, VIBRATION AND MODE SHAPE ANALYSIS	23
5. STEADY - STATE HEAT TRANSFER ANALYSIS	23
IX - PISTÕES PARA MOTORES DE COMBUSTÃO INTERNA	24
X - CONCLUSÃO	25
XI- BIBLIOGRAFIA	26

I - OBJETIVOS

É objetivo deste trabalho a implementação de um método de simulação e modelamento de um pistão para motores de combustão interna via CAD e elementos finitos não linear visando otimização por análise de vibrações, tensões e deformações e tensões térmicas. Os softwares utilizados serão o Algor e o Autocad XII for Windows.

II - INTRODUÇÃO

PROGRAMAS DE ELEMENTOS FINITOS BASEADOS EM MICROCOMPUTADORES TÊM SE TORNADO CADA VEZ MAIS POPULARES NA INDÚSTRIA. O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS É PROVAVELMENTE A FORMA MAIS AMPLAMENTE USADA DE ANÁLISES DE ENGENHARIA BASEADA EM COMPUTADORES. A MAIORIA DOS ENGENHEIROS, DE TODAS AS ÁREAS, ESBARRAM NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS EM ALGUM PONTO DE SUAS CARREIRAS. O MÉTODO É USADO PARA ANALISAR UMA GRANDE VARIEDADE DE ESTRUTURAS DE ENGENHARIA E COMPONENTES, DESDE O CORPO HUMANO ATÉ AS ASAS DE UM AVIÃO. COM O ADVENTO DO MICROCOMPUTADOR, MAIS E

MAIS ENGENHEIROS ESTÃO CONSEGUINDO ACESSO AOS PROGRAMAS DE ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS E OS ESTÃO USANDO PARA RESOLVER UMA SÉRIE DE PROBLEMAS. ENQUANTO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS É EXTREMAMENTE ÚTIL, COMO QUALQUER OUTRA FERRAMENTA, ELE PODE SER USADO DE UMA FORMA ERRADA, LEVANDO A RESULTADOS IMPRECISOS OU INEFICIENTES. NO ENTANTO, A GRANDE MAIORIA DOS ENGENHEIROS UTILIZAM A ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS COMO UMA FERRAMENTA PARA ANALISAR A ADEQUAÇÃO DE UMA ESTRUTURA OU COMPONENTE SOB UMA VARIEDADE DE CONDIÇÕES DE CONTORNO.

III - INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método de elementos finitos é predominantemente usado para fazer análises, baseadas em computadores, do comportamento estático, dinâmico ou térmico de sistemas físicos, estruturas e componentes. Eles são usados principalmente quando cálculos manuais não proporcionam resultados suficientemente precisos ou detalhados ou quando o sistema a ser analisado é tão complexo que cálculos manuais não são apropriados. Com o custo reduzido de processamentos em computadores e softwares acessíveis, análise por elementos finitos tem se

tornado, também, uma alternativa viável para resolver pequenos problemas de engenharia que anteriormente eram resolvidos na mão. A análise por elementos finitos é definida como um grupo de métodos numéricos para aproximar as equações que governam qualquer sistema contínuo. É imperativo para o usuário entender o problema físico que se está tentando resolver e saber usar o programa de elementos finitos e interpretar seus resultados corretamente.

IV. CONCEITOS BÁSICOS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

A TEORIA DOS ELEMENTOS FINITOS É, ALGUMAS VEZES, CHAMADA DE "TEORIA DAS APROXIMAÇÕES CONTÍNUAS DAS PARTES". EM GERAL, O OBJETIVO DA ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS É APROXIMAR COM UM GRAU SUFICIENTE DE PRECISÃO OS VALORES DE EQUÇÕES DIFERENCIAIS DESCONHECIDAS EM PONTOS SELECIONADOS NO DOMÍNIO DE UM SISTEMA FÍSICO CONTÍNUO OU ESTRUTURA. UM MODELO MATEMÁTICO DO SISTEMA FÍSICO OU ESTRUTURA, DIVIDIDO EM NÓS E ELEMENTOS FINITOS, É CRIADO, AS EQUAÇÕES SÃO APLICADAS A ELES E RESOLVIDAS PARA CADA NÓ.

A EQUAÇÃO DIFERENCIAL EM QUESTÃO PODE DEFINIR UMA GRANDE VARIEDADE DE FENÔMENOS FÍSICOS. A EQUAÇÃO DE Poisson, POR EXEMPLO, É UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL DE SEGUNDA ORDEM QUE GOVERNA DEFLEÇÕES DE UMA MEMBRANA, A INCLINAÇÃO DE UM VIÇA PRISMÁTICA, TRANSFERÊNCIA DE CALOR COM GERAÇÃO E MUITOS OUTROS FENÔMENOS. A

FUNÇÃO PRINCIPAL DO PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS É REDUZIR A EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARA UM CONJUNTO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS SIMULTÂNEAS QUE PODEM SER FACILMENTE RESOLVIDAS POR UM COMPUTADOR. A SOLUÇÃO DESTAS EQUAÇÕES PRODUZ DIRETAMENTE, OU POR MEIOS DE PEQUENOS CÁLCULOS ADICIONAIS, AS QUANTIDADES DESCONHECIDAS DESEJADAS, COMO DEFLEXÕES, TEMPERATURAS OU TENSÕES.

O PRIMEIRO PASSO ENVOLVIDO NUMA ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS É CRIAR UM MODELO DE ELEMENTOS FINITOS. O MODELO É UMA REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DA ESTRUTURA FÍSICA REAL SENDO ANALISADA. O MODELO É CRIADO DIVIDINDO-SE A ESTRUTURA EM UM NÚMERO DE SUBREGIÕES CHAMADAS "ELEMENTOS". OS VALORES DAS QUANTIDADES DESCONHECIDAS SERÃO CALCULADOS NOS PONTOS SELECIONADOS DOS ELEMENTOS, GERALMENTE NOS CANTOS. ESTES PONTOS SÃO CHAMADOS "NÓS". O

PROCESSO DE DIVISÃO DA PEÇA É GERALMENTE CHAMADO DE "DISCRETIZAÇÃO" E NORMALMENTE FEITO PELO USUÁRIO. A DISCRETIZAÇÃO DA ESTRUTURA É A FASE MAIS IMPORTANTE DA ANÁLISE E AFETA CONSIDERAVELMENTE A ACURACIDADE DOS RESULTADOS. ALÉM DE DEFINIR A LOCALIZAÇÃO DOS NÓS E ELEMENTOS, O USUÁRIO GERALMENTE FORNECE PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DOS ELEMENTOS, PROPRIEDADES DOS MATERIAIS, CONDIÇÕES DE CONTORNO, E CARREGAMENTOS RELEVANTES À ANÁLISE. ALGUNS PROGRAMAS DE ELEMENTOS FINITOS INCLUEM OU PERMITEM O USO DE TABELAS DE DADOS QUE AUTOMATICAMENTE FORNECEM AS PROPRIEDADES DE ELEMENTOS ESTRUTURAIIS PADRÕES.

É IMPORTANTE SALIENTAR QUE O MODELO DE ELEMENTOS FINITOS É UMA SIMULAÇÃO MATEMÁTICA DA ESTRUTURA OU CORPO FÍSICO REAL QUE ELE REPRESENTA. AS PROPRIEDADES FÍSICAS DEBVM SER ESPECIFICADAS. SE O CORPO É FEITO DE AÇO, AS PROPRIEDADES MATERIAIS DO AÇO DEVEM SER ATRIBUÍDAS AOS ELEMENTOS DO CORPO. SE O CORPO É PREGADO NUM

PONTO DO SUPORTE OU FIXADO RIGIDAMENTE, AS CONDIÇÕES DESTE SUPORTE DEVEM SR REPRESENTADAS NO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS. FINALMENTE, AS CARGAS APLICADAS DEVEM SER MODELADAS. POR EXEMPLO, UMA ANÁLISE DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR PODE REQUERER UMA MUDANÇA NA TEMPERATURA DO FLUIDO DE 300o EM UM PERÍODO DE 10 SEGUNDOS. UMA ANÁLISE ESTÁTICA PODE SIMPLEMENTE INCLUIR UMA CARGA ESTÁTICA DA ESTRUTURA.

NA SEGUNDA PARTE DA ANÁLISE, O PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS APLICA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL E SUAS CONDIÇÕES DE CONTORNO NA FORMA DE UMA FORMULAÇÃO INTEGRAL EQUIVALENTE. ESTE PROCEDIMENTO ENVOLVE A MINIMIZAÇÃO DA LEI DE CONSERVAÇÃO DE ENERGIA. POR EXEMPLO, A MAIORIA DOS PROGRAMAS DE ELEMENTOS FINITOS USAM PARA ANÁLISE ESTRUTURAL O PRINCÍPIO DOS DESLOCAMENTOS VIRTUAIS PARA EXPRESSAR AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO EM SUAS FORMULAÇÕES INTEGRAIS EQUIVALENTE. OS PROGRAMAS DE ELEMENTOS FINITOS SÃO PROJETADOS PARA

TRABALHAR COM EQUÇÕES DIFERENCIAIS ESPECÍFICAS. DESTA FORMA, UM PROGRAMA DESIGNADO PARA RESOLVER PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR NÃO PODEM RESOLVER PROBLEMAS DE ANÁLISE ESTRUTURAL. NO ENTANTO, MUITOS PROGRAMAS INCLUEM DIVERSOS "MÓDULOS", CADA QUAL DESIGNADO A RESOLVER DETERMINADOS TIPOS DE PROBLEMAS.

APÓS UM MODELO DE ELEMENTOS FINITOS É COMPLETAMENTE DEFINIDO, A FASE PRINCIPAL DA ANÁLISE É REALIZADA PELO PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS.

O PROGRAMA TRATA OS DESLOCAMENTOS DOS NÓS COMO VARIÁVEIS DE UMA FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO, GERALMENTE UM POLINÔMIO, PARA DAR UMA EXPRESSÃO ANALÍTICA PARA O DESLOCAMENTO EM QUALQUER PONTO DENTRO DO ELEMENTO. UMA FUNÇÃO POLINOMIAL (ALGUMAS VEZES

DIFERENCIAL) DEVE SER FORMULADA PARA CADA ELEMENTO NO CORPO. OS POLINÔMIOS SÃO, ENTÃO, SUBSTITUÍDOS NA FORMULAÇÃO INTEGRAL DAS EQUÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS RESULTANDO NUM CONJUNTO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS SIMULTÂNEAS QUE SÃO RESOLVIDAS PARA DAR OS VALORES NODAIS DESCONHECIDOS.

ESTE PODE SER O ÚLTIMO PASSO NA ANÁLISE OU PODE SER SEGUIDO POR CÁLCULOS ADICIONAIS ONDE OS VALORES NODAIS SÃO USADOS PARA CALCULAR OUTRAS QUANTIDADES. POR EXEMPLO, NA MAIORIA DOS PROGRAMAS DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE ESTRUTURAL, OS VALORES NODAIS CALCULADOS SÃO OS DESLOCAMENTOS DO CORPO. ESTES DESLOCAMENTOS PODEM SER USADOS PARA CALCULAR TENSÕES EM CADA ELEMENTO.

V - HISTÓRICO DA ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS

A ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS FOI PRIMEIRAMENTE FORMULADA POR R.W.CLOUGH NUMA TESE DE ANÁLISE DE TENSÕES PLANAS, PUBLICADA EM 1960. NO ENTANTO, A RAIZ DA ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS VOLTA PARA O MÉTODO DE RITZ DE ANÁLISE NUMÉRICA, INTRODUZIDA EM 1909. USANDO O PRINCÍPIO DE MINIMIZAÇÃO DO CÁLCULO DE VARIAÇÕES, R.COURANT APLICOU O MÉTODO DE RITZ PARA OBTER APROXIMAÇÕES POR PARTES DE SOLUÇÕES PARA PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO E VIBRAÇÕES EM 1943, E DEPOIS, O DESENVOLVIMENTO DESTAS IDÉIAS CONTINUARAM PELOS ANOS 1940'S E INÍCIO DA DÉCADA DE 50. EM 1953, ENGENHEIROS COMEÇARAM A USAR COMPUTADORES PARA RESOLVER PROBLEMAS ESTRUTURAIS.

A TESE DE M.J.TURNER, R.W.CLOUGH, H.C.MARTIN, E L.J.TOPP, PUBLICADA EM 1956, É CONSIDERADA A MAIOR VIRADA

NO DESENVOLVIMENTO DA ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS. A TESE ENVOLVIA DUREZA E DEFLEXÃO DE ESTRUTURAS COMPLEXAS E CONTRIBUIU PARA AMPLIAR O INTERESSE EM ANÁLISE NUMÉRICA ENTRE OS ENGENHEIROS. EM 1960, A ANÁLISE NUMÉRICA DE ESTRUTURAS DE ENGENHARIA USANDO COMPUTADORES DIGITAIS RÁPIDOS AVANÇAVA RAPIDAMENTE NA AERONÁUTICA E INDÚSTRIAS ESPACIAIS.

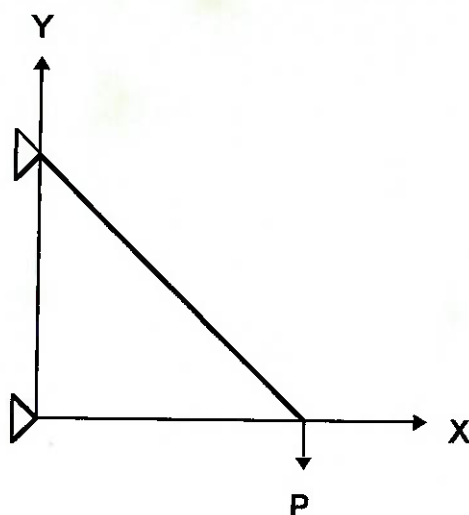
MAS SOMENTE EM 1963, A ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS FOI REALMENTE RECONHECIDA COMO UMA VARIAÇÃO DO MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ USADO NO CÁLCULO VARIACIONAL. ESTE RECONHECIMENTO ESTABELECEU A ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS COMO UMA SÉRIA DISCIPLINA ACADÊMICA E LEVOU A MAIORES PESQUISAS E A APLICAÇÕES A TRANSFERÊNCIA DE CALOR E PROBLEMAS DE MECÂNICA DOS FLUIDOS, ALÉM DE PROBLEMAS ESTRUTURAIS.

No início dos ANOS 70's, A ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS FOI ESTABELECIDADA COMO UMA TÉCNICA NUMÉRICA GERAL PARA RESOLVER QUAISQUER SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E ENCONTRAR APLICAÇÕES EM UM GRANDE NÚMERO DE DISCIPLINAS. NO ENTANTO, ATÉ RECENTEMENTE, A ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS FOI LIMITADA PARA COMPUTADORES CAROS, PRIMEIRAMENTE USADOS NAS

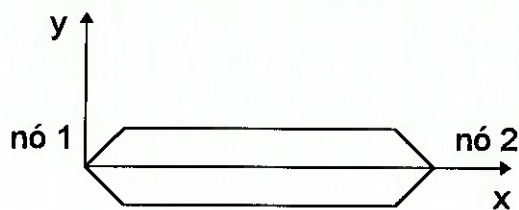
INDÚSTRIAS AERONÁUTICAS, AUTOMOTIVAS, NUCLEARES E DE DEFESA. COM O GRANDE DECLÍNIO DOS CUSTOS DE PROCESSAMENTO DE HARDWARE, A ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS É ACESSÍVEL PARA QUASE TODOS ENGENHEIROS E CIENTISTAS E ESTÁ GANHANDO ACEITAÇÃO COMO UMA FERRAMENTA DE ANÁLISE ECONÔMICA E PODEROSA.

VI - O CONCEITO DOS ELEMENTOS FINITOS

PARA ILUSTRAR O CONCEITO DE ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS SERÁ FEITA UMA ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DE UMA TRELIÇA SIMPLES. ENQUANTO A TRELIÇA É UMA ESTRUTURA SIMPLES, O MÉTODO DE SOLUÇÃO POR ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS É APLICÁVEL A QUALQUER ESTRUTURA DE ELEMENTOS FINITOS.



CADA MEMBRO DA TRELIÇA É UM ELEMENTO NATURAL DO MODELO POR ELEMENTOS FINITOS. NÃO É NECESSÁRIO DIVIDIR OS MEMBROS DA TRELIÇA EM ELEMENTOS MENORES JÁ QUE ELE SÓ RECEBE CARGAS AXIAIS E TEM UMA TENSÃO CONSTANTE EM CADA SEÇÃO AO LONGO DE SEU COMPRIMENTO. É POSSÍVEL OBTERMOS UMA SOLUÇÃO EXATA DAS FORÇAS E DESLOCAMENTOS SEM RECAIR EM FORMULAÇÕES INTEGRAIS OU MÉTODOS DE ENERGIA. O OBJETIVO DA ANÁLISE É DETERMINAR OS DESLOCAMENTOS DA ESTRUTURA QUANDO SUJEITA A UMA CARGA P.



Um nó é localizado em cada ponta da barra. Como a barra é presa em cada ponta e não pode receber cargas na direção z, cada ponta da barra só pode deslocar em duas direções: X e Y. Isto significa que cada nó tem 2 graus de liberdade, abreviado como G.L.

O número de graus de liberdade por nó varia para diferentes elementos. Por exemplo, uma viga bi-dimensional teria 3 G.L. já que a rotação devido ao momento de carregamento seria incluído. No caso mais geral, um nó pode ter 6 G.L.: uma rotação e um deslocamento em cada eixo de coordenadas.

O deslocamento no nó 1 é denotado u_1 e u_2 na direção positiva de X e Y. No nó 2 é denotado por u_3 e u_4 . As forças correspondentes são aplicadas a cada nó, F_1 e F_2 no nó 1, F_3 e F_4 no nó 2. A seção da barra tem uma área uniforme A e módulo de Young E.

A relação entre força e deslocamento é dada pela equação:

$$\varepsilon \cdot F \cdot \nabla = [K] \cdot \varepsilon \cdot U \cdot \nabla$$

onde

$\varepsilon.F.\nabla$ = VETOR DE FORÇAS APLICADAS

[K] = DUREZA DA ESTRUTURA NA DIREÇÃO DA FORÇA APLICADA

$\varepsilon.U.\nabla$ = VETOR DE DESLOCAMENTOS

No caso de elementos da treliça plana, esta relação é expressa pela notação em matriz:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

onde k_{ij} é o coeficiente de influência de tenacidade (força no nó i devido ao deslocamento j). A matriz de termos k_{ij} é chamada de matriz de dureza. A equação é equivalente a um conjunto de 4 equações lineares simultâneas da forma:

$$F1 = k_{11} \cdot u_1 + k_{12} \cdot u_2 + k_{13} \cdot u_3 + k_{14} \cdot u_4$$

$$F2 = k_{21} \cdot u_1 + k_{22} \cdot u_2 + \dots$$

A equação representa quatro equações lineares porque existem 4 G.L. Existe sempre o mesmo número de equações lineares quanto o grau de liberdade dos nós.

Se ajustarmos o deslocamento u_j para 1 e todos os outros deslocamentos para 0, a coluna j de k_{ij} é o conjunto de forças nodais que atuam na barra para manter equilíbrio estático. Para visualizar isto, assume-se

então, a equação se reduz a:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \end{bmatrix} \{u_1\}$$

DO MECANISMO BÁSICO DOS MATERIAIS, A MUDANÇA NO COMPRIMENTO DEVIDO A UMA FORÇA AXIAL É DADA PELA EQUAÇÃO:

$$u = \frac{FL}{AE}$$

ONDE A NOTAÇÃO É CONSISTENTE COM AS DEFINIÇÕES ANTERIORES. ESTA EQUAÇÃO É DERIVADA DA TEORIA DA ELASTICIDADE E DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE UMA VIGA. PARA SISTEMAS E GEOMETRIAS MAIS COMPLEXAS, NÃO APLICAREMOS UMA EQUAÇÃO LINEAR SIMPLES COMO SE FAZ COM UMA TRELIÇA.

UM DESLOCAMENTO UNITÁRIO DE u_1 CAUSA UMA TENSÃO DE COMPRESSÃO NA BARRA IGUAL A σ , E, DA EQUAÇÃO ACIMA, A FORÇA AXIAL NA BARRA É P .

EXPRIMINDO ESTAS FORÇAS NA PRIMEIRA COLUNA DA MATRIZ DE DUREZA, TEMOS:

$$k_{11} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} \\ 0 \\ -\frac{AE}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SE FIZERMOS u_4 IGUAL A 1 E OS OUTROS DESLOCAMENTOS IGUAL A 0, NÃO HAVERÁ TENSÃO NA BARRA JÁ QUE OS MEMBROS DA TRELIÇA SÓ PODEM RECEBER CARGAS AXIAIS. PORTANTO, k_{11} É SIMPLEMENTE IGUAL A 0. O DESLOCAMENTO DE u_3 CAUSA UMA TENSÃO NA BARRA DANDO O

MESMO RESULTADO QUE U1, COM EXCEÇÃO DOS SINAIS INVERTIDOS. A MATRIZ DE DUREZA DA BARRA É:

$$k_y = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ESTA É UMA SOLUÇÃO EXATA DAS FORÇAS E DESLOCAMENTOS RELACIONADOS PARA ESTE ELEMENTO SIMPLES DE TRELIÇA.

NO CASO DAS ELEMENTOS DA TRELIÇA ORIENTADOS EM UM ÂNGULO θ PARA O EIXO X, AS FORÇAS VERTICAIS F2 E F4 IRÃO CONTRIBUIR COM UMA COMPONENTE VERTICAL PARA CADA DESLOCAMENTO E TERÁ VALORES DIFERENTES DE ZERO. FAZENDO u_3 IGUAL A 1 E OS DESLOCAMENTOS REMANESCENTES IGUAL A 0 PODEMOS GERAR k_{ij} DA MATRIZ DE DUREZA. A COMPONENTE DE u_3 NORMAL À BARRA NÃO CONTRIBUI PARA AS TENSÕES DA BARRA. ENTÃO, A TENSÃO É $u_3(\cos \theta)/L$, E A FORÇA AXIAL É $AE(\cos \theta)/L$. APLICANDO TRIÇONOMETRIA SIMPLES, OBTAMOS OS VALORES PARA AS FORÇAS.

$$F_3 = \frac{AE(\cos^2 \theta)}{L}$$

$$F_4 = \frac{AE(\cos \theta)(\sin \theta)}{L}$$

$$F_1 = -F_3$$

$$F_2 = -F_4$$

PORTANTO:

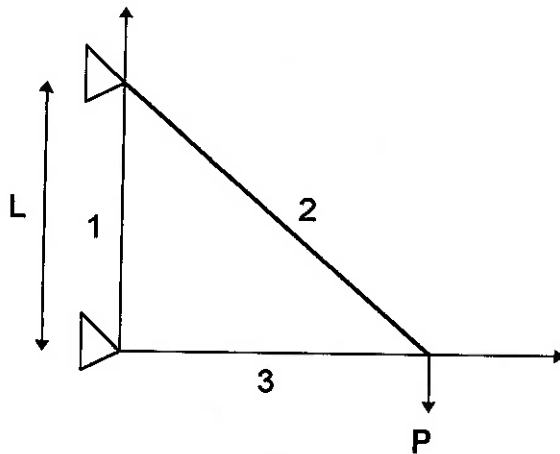
AS OUTRAS COLUNAS PODEM SER OBTIDAS DE MANEIRA SIMILAR, DANDO A SEQUINTE MATRIZ DE DUREZA:

$$k_{(i,j)} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}$$

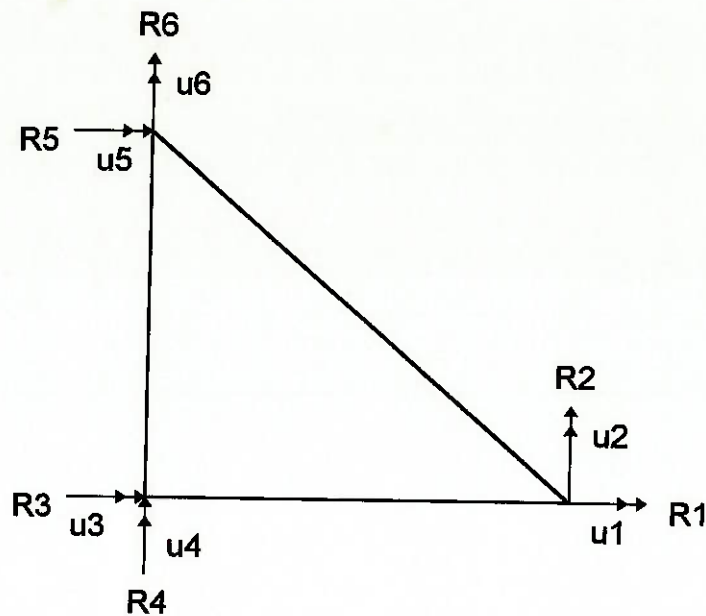
ONDE $c = \cos \theta$ E $s = \sin \theta$

DESENVOLVEMOS, ENTÃO, UMA MATRIZ GERAL DE DUREZA PARA UM ELEMENTO BI-DIMENSIONAL DE TRELIÇA. A MATRIZ DE DUREZA PODE SER APLICADA PARA QUALQUER PROBLEMA PLANO DE TRELIÇA.

EM GERAL, A MATRIZ DE DUREZA É GERADA PARA CADA ELEMENTO DA TRELIÇA APLICANDO A EQUAÇÃO ACIMA. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO SÃO GERADAS PARA CADA NÓ DA TRELIÇA, E AS MATRIZES DE DUREZA DOS ELEMENTOS SÃO TRANSFORMADAS EM UMA MATRIZ GLOBAL DE DUREZA, COM AS MATRIZES DE FORÇA E DESLOCAMENTOS. ESTAS EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS SÃO, ENTÃO, RESOLVIDAS APLICANDO AS CONDIÇÕES DE CONTORNO DO PROBLEMA. SERÁ UTILIZADA UMA TRELIÇA DE TRÊS MEMBROS COMO EXEMPLO.



OS ELEMENTOS 1 E 3 MEDEM L , ENQUANTO O ELEMENTO 2 MEDE $L_2 \leq \sqrt{2} \cdot L$. PARA SIMPLIFICAR OS CÁLCULOS, O ELEMENTO 2 POSSUI UM MÓDULO DE YOUNG DE $E_2 = \sqrt{2} \cdot E$ ENQUANTO OS ELEMENTOS 1 E 3 TÊM UM MÓDULO DE YOUNG E .



FORÇAS APLICADAS E REAÇÕES ATUANTES NA TRELIÇA.

ESTAS FORÇAS SÃO APLICADAS EXTERNAMENTE. AS FORÇAS $\{F\}_i$ QUE CALCULAMOS PARA A MATRIZ DE DUREZA DOS ELEMENTOS SÃO AS FORÇAS NODAIS CAUSADAS PELO DESLOCAMENTO DOS ELEMENTOS. PARA EQUILÍBRIO, A SOMA DAS FORÇAS APLICADAS E AS FORÇAS NODAIS DEVEM SER ZERO. CALCULA-SE A MATRIZ DE DUREZA PARA CADA ELEMENTO.

PARA O ELEMENTO 1,

$$\begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

PARA O ELEMENTO 2,

O ÂNGULO ENTRE O EIXO X E O ELEMENTO É MEDIDO NO SENTIDO HORÁRIO. A MATRIZ DE DUREZA PARA O ELEMENTO 2 fica:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \frac{AE_2}{2L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

PARA O ELEMENTO 3,

A MATRIZ DE DUREZA SE REDUZ A:

$$\begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

PODEMOS AGORA GERAR UM CONJUNTO DE EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA CADA NÓ. AS FORÇAS NODAIS RESULTANTES DO DESLOCAMENTO DE ELEMENTOS SÃO IQUAIS E OPOSTAS ÀS FORÇAS APLICADAS EXTERNAMENTE A CADA NÓ. AS FORÇAS R2 E R1 SÃO FORÇAS EXTERNAS ATUANDO NO NÓ 1. AS FORÇAS DOS ELEMENTOS SÃO EXPRESSAS NA MATRIZ DE DUREZA CALCULADAS PARA CADA MEMBRO. PARA O EQUILÍBRIO DO NÓ 1, AS SEQUINTE EQUAÇÕES DEVEM SER RESOLVIDAS.

$$\text{DIREÇÃO Y: } R_2 - F_2(\text{ELEMENTO 3}) - F_2(\text{ELEMENTO 2}) = 0$$

$$\text{DIREÇÃO X: } R_1 - F_1(\text{ELEMENTO 3}) - F_1(\text{ELEMENTO 2}) = 0$$

AS FORÇAS F2 E F1 SÃO ENCONTRADAS NAS MATRIZES DE DUREZA DOS ELEMENTOS. NOTE O SINAL DE MENOS NAS FORÇAS DOS ELEMENTOS. RESOLVEMOS PARA AS FORÇAS ATUANDO NOS PINOS. AS FORÇAS DOS ELEMENTOS NA MATRIZ DE DUREZA ESTÃO ATUANDO NO ELEMENTO. RESOLVENDO PARA R2, MOSTRA QUE F2 PARA ELEMENTO 3 É 0, CHAMANDO E2/L2=E/L:

$$\begin{aligned}
 R_2 &= F_{2(\text{elemento2})} \\
 &= \frac{AE}{L} \cdot \left(\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2} + \frac{u_5}{2} - \frac{u_6}{6} \right)
 \end{aligned}$$

RESOLVENDO A EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO NA DIREÇÃO X:

$$R_1 = \frac{AE}{L} \cdot \left[\left(\frac{3}{2} \right) u_1 - \frac{u_2}{2} - u_3 - \frac{u_5}{2} + \frac{u_6}{2} \right]$$

AS EQUAÇÕES SÃO EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA O NÓ 1.

PROCEDENDO SIMILARMENTE PARA OS NÓS 2 E 3, OBTAMOS AS SEQUÍNTES EQUAÇÕES:

Nó 2:

$$\text{DIREÇÃO Y: } R_4 = \frac{AE}{L} \cdot (u_4 - u_6)$$

$$\text{DIREÇÃO X: } R_3 = \frac{AE}{L} \cdot (-u_1 + u_3)$$

Nó 3:

$$\text{DIREÇÃO Y: } R_6 = \frac{AE}{L} \cdot \left[\frac{u_1}{2} - \frac{u_2}{2} - u_4 - \frac{u_5}{2} + \left(\frac{3}{2} \right) u_6 \right]$$

$$\text{DIREÇÃO X: } R_5 = \frac{AE}{L} \cdot \left(\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2} + \frac{u_5}{2} - \frac{u_6}{2} \right)$$

TEMOS, ENTÃO, EXPRESSÕES PARA AS FORÇAS EXTERNAS NO PROBLEMA. OBTAMOS, ENTÃO, A MATRIZ DE DUREZA GLOBAL E VETORES DE CARREGAMENTOS E DESLOCAMENTOS:

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

A EQUAÇÃO REPRESENTA O CONJUNTO DE EQUAÇÕES LINEARES ALGÉBRICAS A SEREM RESOLVIDAS PARA DESLOCAMENTOS DESCONHECIDOS. COMO HÁ 3 NÓS, TEMOS 6 G.L. NO PROBLEMA E 6 EQUAÇÕES LINEARES. O CONJUNTO DE FORÇAS R_i SÃO AS FORÇAS EXTERNAS INCLUINDO AS REAÇÕES DE SUPORTE. NESTE PROBLEMA, EXISTEM TRÊS REAÇÕES DESCONHECIDAS: R_3 , R_4 , E R_5 . A FORÇA R_2 É A FORÇA EXTERNA $-P$ (A FORÇA É NEGATIVA DEVIDO À CONVENÇÃO DE SINAIS). AS FORÇAS R_1 E R_6 SÃO 0.

NESTE PONTO, AS CONDIÇÕES DE CONTORNO DEVEM SE APLICADAS AO PROBLEMA. ALGUNS GRAUS DE LIBERDADE DA ESTRUTURA DEVEM SER 0. POR OUTRO LADO, A ESTRUTURA INTEIRA PODERIA MOVER COMO U CORPO RÍGIDO E NÃO HAVERIA UMA ÚNICA SOLUÇÃO. A TRELIÇA É PRESA AO SUPORTE NO NÓ 2. PORTANTO, $u_3=u_4=0$. A TRELIÇA É SUPORTADA POR UMA RODINHA NO NÓ 3 DE FORMA QUE $u_5=0$. SUBSTITUINDO ESTES VALORES E REARRANJANDO k E u , OBTEMOS A SEQUINTE EQUAÇÃO:

$$\begin{Bmatrix} R_1 = 0 \\ R_2 = -P \\ R_6 = 0 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{2L} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

AS PRIMEIRAS TRÊS EQUAÇÕES LINEARES ENVOLVENDO u_1, u_2 , E u_6 PODEM SER RESOLVIDAS USANDO ELIMINAÇÃO GAUSSIANA OU REGRA DE CRAMER.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{2L} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

RESOLVENDO A EQUAÇÃO:

$$u_1 = -\frac{PL}{AE}$$
$$u_2 = -\frac{4PL}{AE}$$
$$u_6 = -\frac{PL}{AE}$$

ESTA EQUAÇÃO É CHAMADA DE MATRIZ DE DUREZA REDUZIDA. A TÉCNICA DE REORDENAÇÃO DA MATRIZ DE DUREZA GLOBAL E ELIMINAÇÃO DE REAÇÕES DAS EQUAÇÕES RESULTANTES É COMUM À MAIORIA DOS PROGRAMAS DE ELEMENTOS FINITOS PARA REDUZIR A QUANTIDADE DE CÁLCULOS. AS REAÇÕES PODEM SER RESOLVIDAS POR SUBSTITUIÇÃO OU EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO. A PRECISÃO DOS VALORES DOS DESLOCAMENTOS PODEM SER CALCULADOS SUBSTITUINDO ESTES VALORES NAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO E VERIFICANDO SE A SOMA DAS FORÇAS DÁ 0.

VII - O SOFTWARE - ALGOR

O SOFTWARE PODE SER ENCONTRADO EM QUATRO VERSÕES:

- **STANDARD Dos(-s)** - RODA EM COMPUTADORES COMPATÍVEIS COM O IBM/PC USANDO DOS. NECESSITA-SE DE UM MÍNIMO DE 40 MB DE ESPAÇO DE DISCO RÍGIDO DISPONÍVEL E UM CO-PROCESSADOR.
- **Hyper - 386/486(-3 H)** - UTILIZA MEMÓRIA EXTENDIDA. NECESSITA-SE DE UM MÍNIMO DE 2 MB DE MEMÓRIA RAM E 80 MB DE ESPAÇO DISPONÍVEL NO DISCO RÍGIDO.
- **Weitek - 386/486 (-3w)** - PROPORCIONA AS MESMAS VANTAGENS DO ALGOR Hyper - 386 USANDO O CO-PROCESSADOR WEITEK. REQUER 2 MB DE RAM E 80 MB DE DISCO RÍGIDO.
- **SPARCSTATION (-x)** - RODA NO SUNOS 4.0.3 OU SUPERIOR.

VIII MÓDULOS DO ALGOR

1. Superdraw II - Computer Aided Design

Superdraw II difere dos sistemas de CAD pela inclusão de muitas funções de engenharia. Por exemplo, construindo-se a seção de um sólido, o sólido irá calcular propriedades como área, perímetro e momento de inércia.

2. Vizicad - Modeling and Design Visualization

Vizicad adiciona a capacidade de visualização ao SuperView para projetar e modelar funções do SuperdrawII. Esta visualização avançada deixa mais fácil verificar seu projeto e se certificar que o modelo foi apropriadamente construído.

3. Linear Stress Analysis

Oferece uma ferramenta para análise de estrutura de projetos mecânicos. O pacote inclui processadores para análise de peso e centro de gravidade, massa e momento de inércia.

O processador converte um modelo num sistema de equações internas. Resolvidas, as equações proporcionam informações críticas que auxiliam o entendimento do projeto sob condições de carregamentos reais. O processador de peso e centro de gravidade possibilita o cálculo preciso de quanto o projeto final irá pesar tornando possível uma análise do ponto de vista do material/preço. O processador também calcula o centro de gravidade e momento de inércia para cálculos de dinâmica.

4. STRESS, VIBRATION AND MODE SHAPE ANALYSIS

ANALISA PROJETOS MECÂNICOS SOB DIFERENTES TIPOS DE CARREGAMENTOS. O PACOTE INCLUI PROCESSADORES PARA ANÁLISE MODAL, ANÁLISE NO TEMPO USANDO SUPERPOSIÇÃO MODAL, ANÁLISE DO ESPECTRO DE RESPOSTA USANDO SUPERPOSIÇÃO MODAL E VIBRAÇÕES.

O PROCESSADOR ANALISA SITUAÇÕES DE CARREGAMENTO ESTÁTICO E DINÂMICO.

5. Steady - STATE HEAT TRANSFER Analysis

ANALISA PROJETOS MECÂNICOS SUJEITOS À TEMPERATURA E EFEITOS DO FLUXO DE CALOR. O PROCESSADOR ANALISA MODELOS BI-DIMENSIONAIS E TRI-DIMENSIONAIS EM UMA GRANDE VARIEDADE DE CONDIÇÕES TÉRMICAS.

IX - PISTÕES PARA MOTORES DE COMBUSTÃO INTERNA

Os projetos de motores de combustão interna, principalmente para aplicações em veículos pesados, têm sido continuamente aprimorados no sentido de atender as exigências presentes e futuras estabelecidas pelo mercado e pelos órgãos governamentais de proteção ao meio ambiente. Tendências observadas no desenvolvimento destes motores apontam fatores como aumento de potência e eficiência, associados à redução substancial dos níveis de emissões de poluentes produzidos pela combustão.

Muitas modificações têm sido realizadas no projeto destes equipamentos visando atender às exigências do mercado, resultando em uma sobrecarga incidente em muitos componentes do motor.

Notadamente, os pistões são os componentes mais afetados por esta sobrecarga uma vez que recebem a influência direta das altas temperaturas e pressões decorrentes da queima e expansão dos gases da combustão.

Muitas das principais características de operação de um motor estão fortemente relacionadas ao projeto do pistão que, portanto, deve ser conduzido cuidadosamente para que a máxima eficiência e desempenho do conjunto sejam atingidos.

Segue em anexo o modelamento 3D do pistão e a seqüência de passos para análise pelo software Algor.

Design and Modeling

Engineering Analysis
(FEA)

Design Optimization

CAD Integration

Kinematic and Rigid
Body Analysis

Piping System
Design and Analysis

Visualization and
Presentation Utilities

Help

Enter
Model Name

Current Model Name

Exit
Roadmaps

Command
Shell

ALGOR

Design and Modeling

Feature Line
Solid Design

Feature Line
Surface Design

Beam Design

Classical Meshing



Help

Enter
Model Name

Current Model Name

Previous
Menu

Command
Shell

ALGOR

Linear Natural
Frequency Analysis

Buckling Analysis
for Beams and Shells

Nonlinear Transient
Stress Analysis

Engineering Analysis
(FEA)

Composite Natural
Frequency Analysis

Random Vibration
Analysis

Steady-State Heat
Transfer Analysis

Time History Analysis

Linear Natural
Frequency with
Load Stiffening

Transient Heat
Transfer Analysis

Linear Stress Analysis

Response Spectrum
Analysis

Linear Natural Frequency
with Load Stiffening for
Beams and Shells

Electrostatic Analysis

Composite Stress
Analysis

Linear Transient
Stress Analysis

Mass Properties
Analysis

2-D Steady-State Fluid
Flow Analysis

Gap/Cable Stress
Analysis

Frequency Response
Analysis

Nonlinear Stress
Analysis

3-D Steady-State Fluid
Flow Analysis

Thermal Stress
Analysis

Buckling Analysis

Nonlinear Natural
Frequency Analysis

2-D Transient Fluid
Flow Analysis

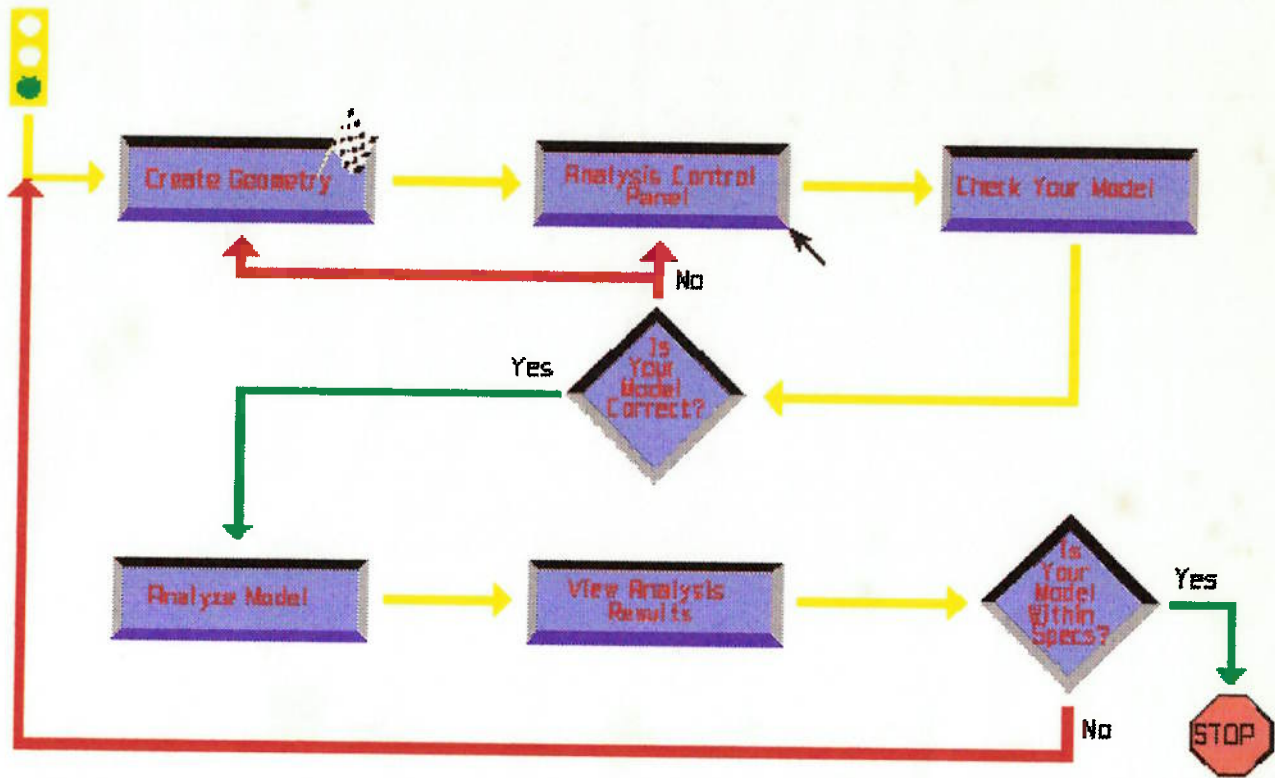
Help

Enter
Model Name

Current Model Name

Previous
Menu

Command
Shell



Help

Enter Model Name

Current Model Name

Previous Menu

Command Shell

ALGOR+D

MAIN MENU

Add

Modify

Construct

Files

Inquire

Settings

Script

Auto mesh

Transfer

Render

Quit

[Esc]

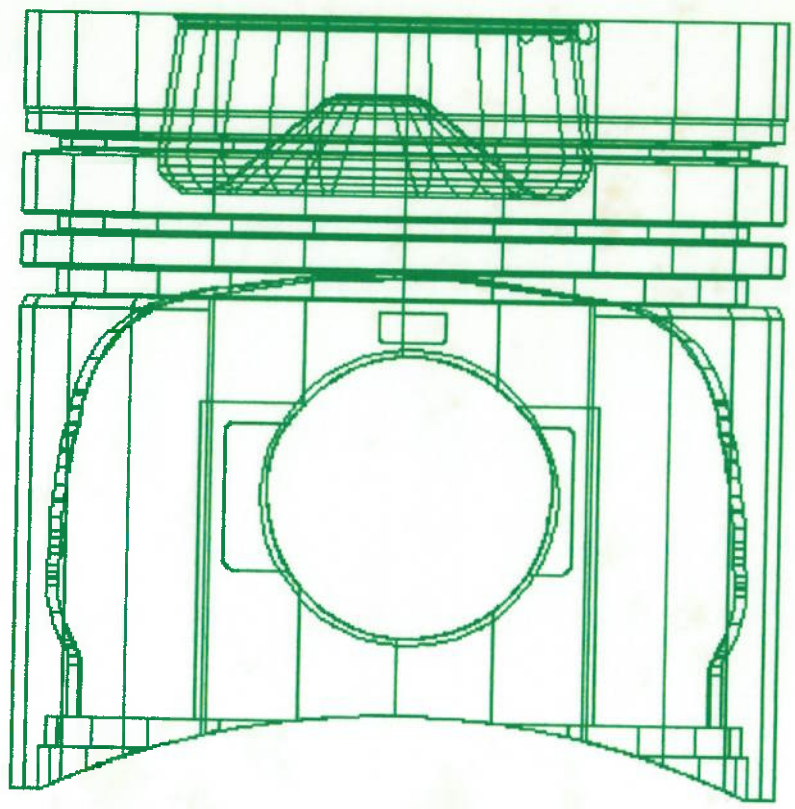
Help 2 Undo

Inp 4 Snap

Cur 6 Swtc

Big 8 Menu

Top 0 Draw



Data loaded from file: PISTAD.esd

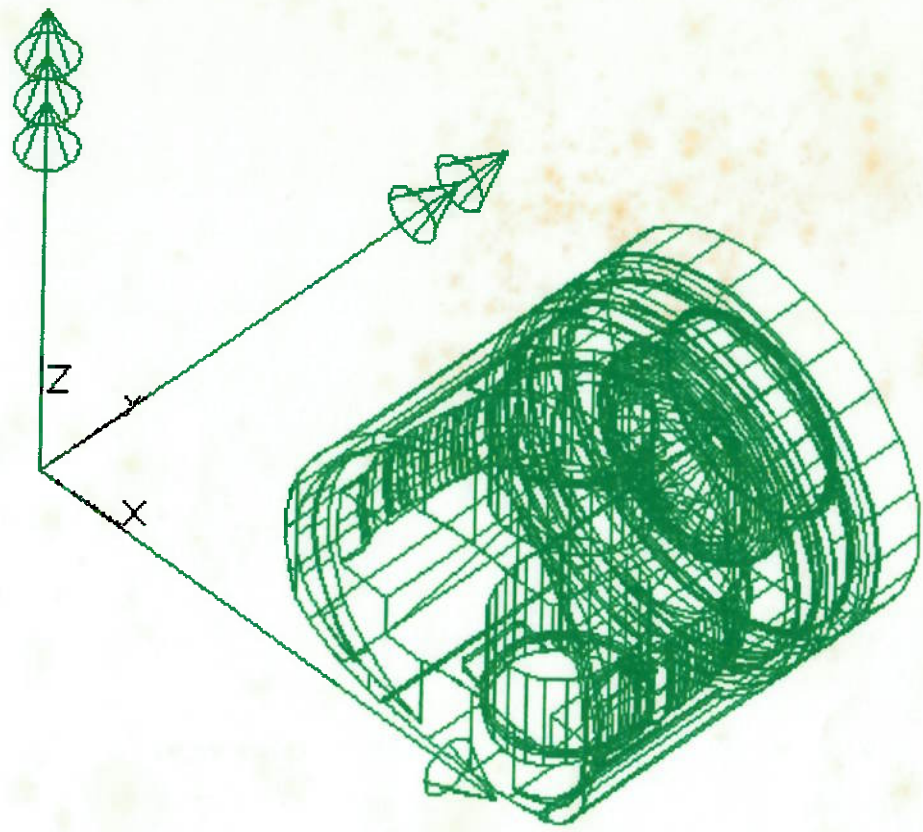
Z=* S=N C= 1 VU= 1 L= 0 G= 1 C X=190.223 Y=128.050 Z=0.00000

ALGOR+D

DRAW
Redraw
Pan
Zoom In
Zoom Out
Last zm
Enclose
Set w----
View
User view
perspec
define vu
setview
ast yu

[Esc]

Help 2 Undo
Inp 4 Snap
Cur 6 Swtc
Big 8 Menu
Top 0 Draw



2=* S=N C= 1 VU= 7 L= 0 G= 1 C X=119.829 Y=221.482 Z=71.8795

X - CONCLUSÃO

DE UMA MANEIRA GERAL, OS COMPONENTES PRESENTES EM UM MOTOR DE COMBUSTÃO INTERNA POSSUEM REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA TRIDIMENSIONAL E ESTÃO SUJEITOS A ESFORÇOS DE ORIGEM TÉRMICA, MECÂNICA E INERCIAL, OS QUAIS POR SUA VEZ SÃO DE DIFÍCIL DETERMINAÇÃO. AS DIFICULDADES INICIAM-SE NO PRÓPRIO PROCESSO DE DISCRETIZAÇÃO DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS ONDE, DEPENDENDO DA COMPLEXIDADE GEOMÉTRICA DO COMPONENTE, QUASE SEMPRE TRIDIMENSIONAL, E DO NÍVEL DE DETALHAMENTO DESEJADO PARA A ANÁLISE, O TRABALHO DE GERAÇÃO DA MALHA PODE ESTENDER-SE POR MESES ATÉ QUE A GEOMETRIA DISCRETIZADA COMPLETA DO MODELO SEJA OBTIDA. NESTE CASO, UMA CONSEQÜÊNCIA IMEDIATA RELACIONADA AO USO DE MODELOS 3D É QUE, EM GERAL, ESTES APRESENTAM NÚMERO MAIOR DE NÓS E GRAUS DE LIBERDADE, RESULTANDO EM UM MAIOR ESFORÇO COMPUTACIONAL PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA. O TAMANHO DO PROBLEMA É FUNÇÃO DIRETA DO TIPO DE ELEMENTO ADOTADO, SEU NÚMERO DE NÓS E RESPECTIVOS GRAUS DE LIBERDADE.

CONSIDERAÇÕES SOBRE O TIPO DE ANÁLISE, PODEM TAMBÉM AUMENTAR PROIBITIVAMENTE O TEMPO DE PROCESSAMENTO E O ESPAÇO NECESSÁRIO PARA ARMAZENAMENTO DE DADOS, PRINCIPALMENTE SE COMPORTAMENTOS NÃO-LINEARES E/OU DINÂMICOS FOREM ASSOCIADOS AO MODELO. O USO DE MODELOS 3D GERALMENTE ESTÁ RESTRITO NO MÁXIMO, A ANÁLISES DO TIPO ESTÁTICA NÃO-LINEAR E DISTRIBUIÇÕES DE TEMPERATURA EM REGIME ESTACIONÁRIO. PARA ANÁLISES MAIS COMPLEXAS, SOLUÇÕES EM TEMPO HÁBIL, SÃO SOMENTE POSSÍVEIS ATRAVÉS DO USO DE COMPUTADORES MUITO VELOZES E COM GRANDES MEMÓRIAS DE PROCESSAMENTO E ARMAZENAMENTO. EQUIPAMENTOS COM TAIS CARACTERÍSTICAS REPRESENTAM INVESTIMENTOS DA ORDEM DE CENTENAS DE MILHARES DE DÓLARES, ESTANDO FORA DO ALCANCE DE GRANDE PARTE DAS EMPRESAS E INSTITUIÇÕES DE ENSINO E PESQUISA, PELO MENOS NO CONTEXTO BRASILEIRO ATUAL.

XI - BIBLIOGRAFIA

1. BATHE, K. -J, AND E.L.WILSON: NUMERICAL METHODS IN FINITE ELEMENT ANALYSIS, PRENTICE-HALL, ENGLEWOOD CLIFFS, N.J., 1976.
2. BARAN, NICHOLAS M.: FINITE ELEMENT ANALYSIS ON MICROCOMPUTERS, MCGRAW-HILL BOOK COMPANY.

