

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – ESCOLA POLITÉCNICA

RAFAEL MINAS KOLANIAN GOUVEIA

O estudo das gregas de Black & Scholes e suas funcionalidades para o
mercado financeiro atual

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título
de Pós Graduação

Área de concentração:
Engenharia Financeira

Orientador: Prof. Oswaldo Luiz do Valle Costa

São Paulo
2015

MBA/EP
2015
G-7462



Escola Politécnica - EPEL



31500009591

Catálogo-na-publicação

M2015D

Gouveia, Rafael

O estudo das gregas de Black & Scholes e suas funcionalidades para o mercado financeiro atual / R. Gouveia -- São Paulo, 2015.
36 p.

Monografia (MBA em Engenharia Financeira) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. PECE – Programa de Educação Continuada em Engenharia.

1. Modelo Black & Scholes I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. PECE – Programa de Educação Continuada em Engenharia II.t.

[2752192]

Dedico este trabalho para minha família e a todos que de certa forma contribuíram para que fosse possível realizar os estudos e finalizar a monografia.

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos vão para todas as pessoas envolvidas na possível realização desse trabalho, a cada um dos professores que tivemos durante o período de aulas na USP e aos meus colegas de trabalho que tiveram uma paciência nesse meu processo de finalização do curso, e em especial a minha família e meus amigos que sempre contribuíram de alguma forma para minha educação e na formação da pessoa que sou hoje.

As pequenas oportunidades são, frequentemente,
o início de grandes empreendimentos
(Demóstenes)

RESUMO

Atualmente no mercado financeiro negociam-se inúmeros contratos de derivativos sobre ações de empresas de capital aberto, tanto para especulação quanto para fazer uma proteção de uma carteira de ações. Porém muitas pessoas questionam qual seria o preço justo de um derivativo antes dele expirar, como as instituições financeiras na qual operam esse mercado fazem para se proteger de forma que não fiquem expostas a direção aleatória que o valor de uma empresa pode tomar.

Vamos mostrar qual método de precificação que o mercado utiliza para saber o valor de uma opção antes de vencer, como as pessoas que operam esse mercado fazem para se proteger operando opções sobre empresas listadas na bolsa e quais as suas dificuldades.

Assim a partir desse modelo que o mercado mais utiliza para apreçar esse derivativo, o de Black & Scholes, vamos identificar o preço de uma opção e verificar qual a função de cada grega para o hedge das operações, qual o grau de importância de cada uma e como ela varia com a mudança de algum parâmetro utilizado.

Em seguida veremos os fatores que deixam esse mercado imperfeito e acabam atrapalhando diariamente nos negócios. Utilizaremos exemplos reais e atuais para mensurar as diferenças entre o modelo apresentado para um mercado perfeito e o que o mercado realizou.

ABSTRACT

Now a days, finance market trades a lot of derivatives contracts about stocks of public companies. This is can be for speculating and hedge on a stock portfolio. But many people have doubts about the fair price of these derivatives before it expires and about how finance institutions protect themselves to don't stay expose to random direction that the value of a company can take.

We will show which method of pricing market uses to know the value of option before expire. We will shows how people, who trade this market, do to protect themselves trading options of public companies and what are their difficulties.

Before that, we will study the model that the market uses to price options, The Black& Scholes. In addiction of identify the option's price, we will recognize which Greek function to hedge trades. What is the importance of each Greek function and how the option's price change with changing a parameter used.

To conclude, we will see what make the Market imperfect and cause trouble to trades. We will use real and actual examples to measure the differences between the official model, Black & Scholes, and what really happened on real market.

SUMÁRIO

1	Introdução.....	8
2	O valor de uma opção.....	10
2.1	Tipo das opções.....	10
2.2	Payoff das opções	10
2.3	Os fatores que afetam o preço das opções.....	10
2.4	O valor da opção antes de expirar.....	11
3	O modelo de Black & Scholes.....	12
3.1	Histórico	12
3.2	Suposições	12
3.3	Estrutura da fórmula.....	13
4	As gregas de Black & Scholes.....	17
4.1	Definição.....	17
4.2	Delta	17
4.3	Gamma.....	18
4.4	Theta	18
4.5	Vega	19
4.6	Rho	19
4.7	Sigma	20
5	Imperfeições do mercado.....	21
5.1	Problemas no delta hedge	21
5.2	Margem de garantia	21
5.3	Custos Operacionais	22
5.4	Necessidade no aluguel de ações.....	22
6	Operacionalizando o modelo	23
6.1	Observando a mudança de Delta.....	23
6.2	Observando o preço de uma opção ao decorrer do tempo	24
6.3	Observando o preço de uma opção em decorrer da volatilidade.....	25
6.4	Observando o preço de uma opção de acordo com os Juros.....	26
7	Verificando o modelo para exemplos reais	28
8	Conclusão.....	33
	Referências bibliográficas.....	35

1 Introdução

Teremos como objetivo desse trabalho explicar o método de Black & Scholes para precificação de opções, identificar as gregas utilizadas na estratégia e analisar uma a uma sua funcionalidade e verificar o grau de importância de cada uma para o mercado acionário brasileiro.

Aplicaremos sua funcionalidade com um exemplo atual já ocorrido ou uma hipótese de um provável evento e verificaremos qual seria o prejuízo ou ganho com a ocorrência.

Para analisar e realizar as operações no mercado é necessário verificar não só uma única variável do modelo, mas também os riscos envolvidos no negócio ao longo do período, como os saltos de um dia para o outro, mudança nas taxas de juros, mudança na volatilidade do ativo e etc. Dessa forma o trabalho visa esclarecer a partir desse estudo as consequências para as operações que ocorrem no mercado diariamente.

Para todas as análises feitas no estudo tentaremos utilizar exemplos atuais que ocorreram de fato no mercado ou então hipóteses, assim manteremos o trabalho mais próximo da realidade para uma possível utilização de qualquer interessado no assunto.

O trabalho está dividido em 7 capítulos, onde começamos explicando no próximo capítulo os tipos de opções, quais suas diferenças e qual o payoff de cada uma, além dos fatores que alteram o preço de uma opção.

No capítulo 3 contaremos a história do modelo de Black & Scholes, como surgiu e como foi desenvolvido, dessa forma explicaremos a equação passo a passo.

Seguindo a ordem dos processos, no capítulo 4 vamos estudar as gregas, o que significa cada uma, qual sua utilidade e qual sua importância para quem opera nesse mercado.

No capítulo 5 veremos que existem alguns empecilhos que não deixam o mercado perfeito e acabam dificultando nas operações diárias realizadas e também gerando imprecisões no resultado da operação.

No capítulo 6 faremos uma análise de como funcionam e se movimentam as gregas para algumas possíveis situações que ocorrem no dia a dia no mercado.

No capítulo 7 mostraremos exemplos reais das operações que acontecem no mercado e qual a diferença entre o resultado financeiro das operações pelo modelo de Black & Scholes idealizado pelos criadores e o resultado real de uma ocorrência.

Concluiremos o trabalho no capítulo 8 com as informações importantes que observarmos nos casos estudados.

2 O valor de uma opção

Para começarmos a entender o comportamento de uma opção e seu preço, inicialmente temos que entender o porquê do valor de uma opção e quais características de cada opção. Mais para frente veremos que o preço de uma opção para quem faz hedge, não é a expectativa de a ação subir ou cair, e que isso é irrelevante para quem precifica opções, mas sim o como a ação em questão se movimenta até chegar o dia de expiração da opção.

2.1 Tipos de opções

No mercado brasileiro e nos demais mercados os tipos de opções negociadas são as de tipo “call” e “put”.

As opções denominadas “call” são as que o titular tem o direito de comprar certo ativo ao preço de exercício.

As opções denominadas “put” são as que o titular tem o direito de vender certo ativo ao preço de exercício.

2.2 Payoff das opções

Para calcular o preço de uma opção sempre temos que pensar em seu payoff, onde significa qual o valor que será recebido ou pago no dia do exercício de acordo com o preço atual do ativo relacionado.

2.3 Os fatores que afetam o preço das opções

Ao pensarmos que opção é um derivativo que tem como base um ativo que será ou não comprado ou vendido em uma data futura por preço já pré-estabelecido, podemos listar quais são as variáveis que se alteradas, também alteram o preço do

derivativo: Como o preço do ativo, o preço de exercício, o tempo até o vencimento, o juro até o vencimento e a volatilidade, que iremos analisar mais a frente.

2.4 O valor da opção antes de expirar

Qual seria o valor justo de uma opção antes da data de expiração pré-estabelecida? Essa é sempre uma pergunta que muitas pessoas não sabem responder. Existem alguns métodos que nos ajudam a chegar nesse valor, entre eles o mais utilizado hoje é o método de Black & Scholes, que aprofundaremos a frente.

3 O modelo de Black & Scholes

3.1 Histórico

A equação de Black & Scholes foi primeiramente escrita em 1969 e pouco tempo depois, em 1973, Fischer Black e Myron Scholes justificaram, testaram o modelo e apresentaram o artigo "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", onde mostravam as pesquisas e estudos da fórmula para precificações de opções.

Com certeza é o modelo mais usado na história dos derivativos, desde que veio a público transformou-se na base teórica e prática de precificação de opções, dado a simplicidade de suas suposições e fácil utilização.

3.2 Suposições

Para entendermos o modelo, partimos dos seguintes princípios:

- O preço do ativo subjacente segue um movimento browniano geométrico.

Não é totalmente necessário, mas para acharmos uma solução numérica explícita, veremos a necessidade do termo randômico na equação diferencial estocástica que represente e seja proporcional aos movimentos da ação em questão.

- A taxa livre de risco segue uma função constante e não depende do tempo.

Essa suposição serve apenas para facilitar a achar uma solução explícita e que também a taxa de empréstimo seja a mesma taxa de aplicação. Com a taxa livre de risco constante seria mais fácil, mas sabemos que a taxa também depende do tempo.

- O ativo não terá pagamento de dividendos no período.

Assumiremos também que não haverá pagamentos de dividendos no período.

- O delta hedge da operação deve ser ajustado continuamente.

Sabemos que não existe possibilidade disso acontecer, que o hedge de uma operação sempre é feito em um tempo discreto e que a frequência de ajustes vai depender do valor do custo de transação, quanto menor o custo, mais frequente se ajusta o hedge.

- A princípio a operação não tem nenhum custo de transação.

Como citei no item anterior o custo da transação as vezes em alguns mercados cria uma barreira para as precificações e as vezes não, por isso não contabilizaremos isso no momento.

- Não terá nenhuma oportunidade de arbitragem no mercado.

Isso sim seria um mercado completo e perfeito, mas a princípio vamos considerar que esse mercado existe, porque primeiro é necessário criar um modelo perfeito como se não houvesse arbitragens no mercado para depois verificar se esse é o modelo que poderá ser utilizado para fazer possíveis arbitragens.

Existem outras suposições, mas deixaremos essas citadas como as principais e mais importantes.

3.3 Estrutura da Fórmula

Como vimos anteriormente, o preço de uma opção depende de alguns fatores como:

- O preço da ação objeto (S)
- O preço de exercício da opção (k)
- O tempo até o vencimento da opção (t)
- A taxa livre de risco (r)
- A volatilidade esperada do ativo (σ)

Para chegarmos à equação diferencial parcial de Black & Scholes trataremos o preço da ação como uma variável que segue um movimento browniano geométrico, ou seja,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW$$

sendo o termo dW que representa toda a incerteza no preço da ação.

Também sabemos qual o valor de uma opção call na data de vencimento,

$$V(S, T) = \max(S - k, 0)$$

ou seja, seu payoff, mas como esse preço se comporta ao longo do tempo até seu vencimento, segundo o lema de Itô segue a expressão

$$dV = (\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW.$$

Veremos a frente que para fazer o hedge de uma opção, é necessário vender ou comprar certa quantidade de ações, operação denominada delta hedge ($\frac{\partial V}{\partial S}$), e que o valor de uma carteira no tempo é expressa por

$$\Pi = V - S \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Conforme o tempo evolui esse valor da carteira se modifica e vai mudando o preço da opção e o preço da ação envolvida, assim o valor dessa variação é expresso por

$$d\Pi = dV - dS \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Substituindo com as equações acima chegamos à expressão

$$d\Pi = (\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}) dt,$$

onde, como podemos perceber não aparece o termo de incerteza dW .

Outra questão fundamental para Black & Scholes para que não ocorram arbitragens é que a taxa de retorno desse portfólio deve ser igual ao mesmo de um instrumento sem risco, em outras palavras, para quem carrega essa posição em sua carteira, se vê necessário que ela ao longo do tempo seja remunerada igualmente a um título ou outro instrumento de livre risco. Então

$$d\Pi = r\Pi dt = (\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}) dt.$$

Com essas conclusões chegamos à famosa equação diferencial parcial de Black & Scholes, substituindo o valor da carteira Π e dividindo por dt :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Essa equação como podemos ver só é válida quando a função que expressa o preço da opção pode ser derivada duas vezes pelo preço da ação e uma vez em relação ao tempo.

Dando continuidade na fórmula de Black & Scholes, conhecemos então a EDP, que retorna o valor da opção em um período anterior ao exercício, conhecemos também o valor da opção no dia do vencimento como $V(S, T) = \max(S - k, 0)$, assim o valor da opção antes do vencimento pode ser escrito como valor esperado: $E[\max(S - k, 0)]$. A EDP, assim como algumas equações financeiras são parábolas, significando que estão sempre relacionadas à equação da difusão, e uma coisa boa disso é que são relativamente fáceis de resolver numericamente, assim se faz necessário transformá-la em uma equação da difusão, então vamos utilizar as seguintes notações:

$\tau = T - t$ como o período do instante t que se deseja saber o preço até seu vencimento

$$u = Ve^{r\tau}$$

$$x = \ln(S - k) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau$$

Dessa forma a equação diferencial parcial pode ser escrita como:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

E a condição do preço no dia do exercício

$$V(S, T) = \max(S - k, 0)$$

vira uma condição inicial

$$u(x, 0) = u_0(x) = k \max(e^x - 1, 0)$$

Assim, da mesma forma vamos utilizar o método de solução da equação de difusão, onde:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}} dy$$

Resolvendo assim e chegando em:

$$u(x, \tau) = ke^{x + \sigma^2 \tau / 2} N(d_1) - kN(d_2), \text{ onde:}$$

$$d_1 = \frac{x + \sigma^2 \tau}{\sigma \sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = \frac{x}{\sigma \sqrt{\tau}}$$

Substituindo os valores de u, x e τ tem-se para os valores de uma call pelo método de Black & Scholes

$$V(S, t) = SN(d_1) - ke^{-r(T-t)} N(d_2), \text{ onde:}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/k) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}$$

Dessa forma com a paridade call e put a fórmula que resulta no preço de uma opção de put fica:

$$V(S, t) = -SN(-d_1) + ke^{-r(T-t)} N(-d_2)$$

4 As gregas de Black & Scholes

4.1 Definição

As gregas são definidas como as derivadas ou sensibilidade do valor da opção em relação a uma variável ou parâmetro. São muito importantes no hedge das operações e na gestão de risco para quem participa diariamente nesse mercado, por isso vamos ver cada uma a fundo a seguir.

4.2 Delta

O delta de uma opção talvez seja a grega mais conhecida e uma das mais importantes de todas, ela que discrimina a quantidade de ações necessárias para fazer um hedge perfeito e assim eliminar o risco do movimento aleatório da ação envolvida. Essa quantidade significa a proporção em que o preço da opção se altera em relação ao preço da ação, por exemplo, se o delta de uma opção de tipo call for de 50% e a ação subir 10 centavos, a opção elevará seu preço em 5 centavos.

Dessa forma representamos o delta como

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Para um hedge perfeito, sempre devemos pensar que na medida em que o delta de uma operação vai se alterando, o operador ou gestor desse portfólio ou operação também deve ajustar sua posição conforme necessário, e a isso chamamos de ajustes de delta hedge ou então re-balanceamento de posição.

Numericamente representamos o delta de uma opção de compra como sendo $N(d_1)$ e para uma opção de venda $N(d_1) - 1$.

4.3 Gamma

O gamma de uma opção é a grega que mede a sensibilidade do delta da opção em relação ao preço do ativo objeto, ou seja, mostra com qual frequência e quanto uma posição de hedge deve ser reajustada para se manter com uma posição de delta neutro. Por exemplo, se o gamma de uma opção é alto, significa que uma pequena variação no preço da ação, resultaria em uma grande mudança de delta, assim como na quantidade de ações para continuar com o hedge da operação. O gamma de uma opção então nada mais é que a primeira derivada do delta, ou então, a segunda derivada da opção em relação ao preço da ação.

Dessa forma representamos o gamma como

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

Em uma posição de delta neutro, o gamma é parcialmente responsável por fazer o retorno de um portfólio ou posição igual à de uma taxa livre de risco em um mercado completo e contínuo. Em uma operação que o detentor da posição esteja comprado em gamma, ou seja $\Gamma > 0$, ganha-se dinheiro com grandes movimentações na ação e se perde dinheiro caso contrário, e assim o resultado final desse resultado seria o equivalente ao retorno de uma taxa livre de risco.

Numericamente representamos o gamma de uma opção de compra e de venda como sendo:

$$\frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

4.4 Theta

O theta de uma opção é a grega que mostra a sensibilidade da opção em relação ao tempo, ou seja, a taxa de mudança do preço da opção ao passar do tempo. Dessa forma seria o quanto a opção perde valor ao passar os dias até chegar à data de vencimento.

Desta forma representamos o theta como:

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Em uma posição ou portfólio de delta hedge neutro, o theta contribui para que esse portfólio ou posição seja remunerada à taxa livre de risco de forma certa, e não como o gamma que contribui como a média dos resultados de ajustes.

Numericamente representamos o theta de uma opção de compra como

$$-\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

e para uma opção de venda como

$$-\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rke^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

4.5 Vega

O vega de uma opção é a grega que mostra a sensibilidade do preço da opção em relação à volatilidade, ou seja, mostra como se comporta o preço da opção, caso a volatilidade mude.

Dessa forma representamos o

$$Vega = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

Esse é um indicador totalmente diferente das outras gregas, na verdade não é considerada uma grega, já que sua derivada não é relativa à uma variável e sim a um parâmetro.

Podemos representar numericamente o Vega de uma opção de compra ou venda pela seguinte fórmula

$$SN'(d_1)\sqrt{T-t}$$

4.6 Rho

O rho de uma opção é a grega que mede a sensibilidade do valor da opção em relação a uma variação de juros usado no modelo de Black & Scholes. No mercado é a grega que menos se preocupa quando é precificada uma opção, pois não são

frequentes as mudanças de taxas de juros de grande amplitude ao longo da vida de uma opção em nosso mercado.

Além disso, na prática, a taxa de juros utilizada para chegar ao preço da opção é dependente do tempo até sua expiração, dessa forma rho significa a sensibilidade a mudanças na taxa de juros dessa curva naquele momento.

Representamos o rho como:

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$$

Podemos representar numericamente o rho de uma opção de compra pela seguinte fórmula:

$$k(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$$

e de uma opção de venda como

$$-k(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

4.7 Sigma, ou melhor, Volatilidade

O sigma é uma grega definida como um parâmetro do modelo, a volatilidade. É o desvio padrão dos retornos de um ativo e normalmente é demonstrada anualizada. É considerada como o parâmetro mais importante no mundo dos derivativos, também conhecido como o medidor dos passos aleatórios.

5 Imperfeições do mercado

5.1 Problemas no delta hedge

Ao colocar em prática o modelo, conseguimos observar que não é muito simples verificar as hipóteses do modelo para fazer o delta hedge de uma operação já que teoricamente deve ser feito de modo contínuo e isso seria uma das impossibilidades para ficarmos isentos ao risco de aleatoriedade do preço de uma ação. Além disso, temos outros empecilhos como os custos envolvidos para realizar a operação e consequentemente os ajustes do delta hedge. Nos mercados onde a liquidez do ativo é alta, facilita o ajuste, pois o delta depende do tempo e do preço do papel e dessa forma consegue se ajustar o delta mais precisamente e frequentemente, já em mercados menos líquidos se tem um problema, costuma-se fazer com menos frequência os ajustes de delta e dependendo do tamanho da posição de opções e do ajuste pode causar um impacto grande no valor do próprio ativo objeto, dessa forma às vezes inviabiliza a operação e tem-se um spread de preços muito largo entre o comprador e o vendedor. Outra questão fundamental é o número de ações que existem no mercado, caso o delta da operação fique maior que esse número, seria impossível no dia do exercício a realização do negócio.

5.2 Margem de garantia

Como é de praxe no mercado, ao se vender uma opção, seja ela uma call ou put, a Bolsa exige do lançador um depósito chamado de margem de garantia, que é um valor estipulado pela própria Bolsa dependendo da ação e opção envolvida que serve como o próprio nome diz, uma garantia para a liquidação da operação no caso de exercício. Primeiramente a Bolsa exige uma garantia inicial e conforme vai passando os dias ela vai ou exigindo mais ou devolvendo parte do valor conforme o preço da opção e ação envolvida vão se alterando.

Esse é mais um fator que dificulta as operações de hedge, pois acaba envolvendo uma alocação de recurso que não é trivial, ou seja, não é igual para todas as opções e ações, assim dificultando as precificações das opções.

5.3 Custos Operacionais

Outro fator que deve ser considerado nas precificações de opções e já comentado anteriormente é o custo envolvido ao realizar uma operação. No Brasil os custos não são baixos e acabam sendo fator relevante em operações de hedge.

5.4 Necessidade no aluguel de ações

O aluguel de ações também pode ser um outro problema se montar um hedge envolvendo opções. Atualmente para entrar vendido em uma ação, ou seja, vender uma ação que você não tenha, a Bolsa exige que a pessoa que queira fazer esse tipo de operação alugue a ação de uma pessoa que a possua, e isso exige o pagamento de uma taxa pré-estipulada entre as partes envolvidas. Essa taxa pré-fixada pode variar de ação para ação de acordo com a demanda nesse mercado, ou seja, o aluguel da ação da empresa Petrobras negocia a uma taxa média de 2% ao ano, porém a taxa da companhia Embraer negocia a uma taxa média de 0,5% ao ano.

Dessa forma isso acaba resultando em um outro custo que deve ser considerado ao realizar uma operação onde para fazer o hedge da opção seja necessário entrar vendendo uma certa quantidade de ações da empresa. Além do que essa taxa pode variar ao longo do período atual até a expiração da opção e se necessário vender mais para ajustar o hedge da operação.

6 Operacionalizando o modelo

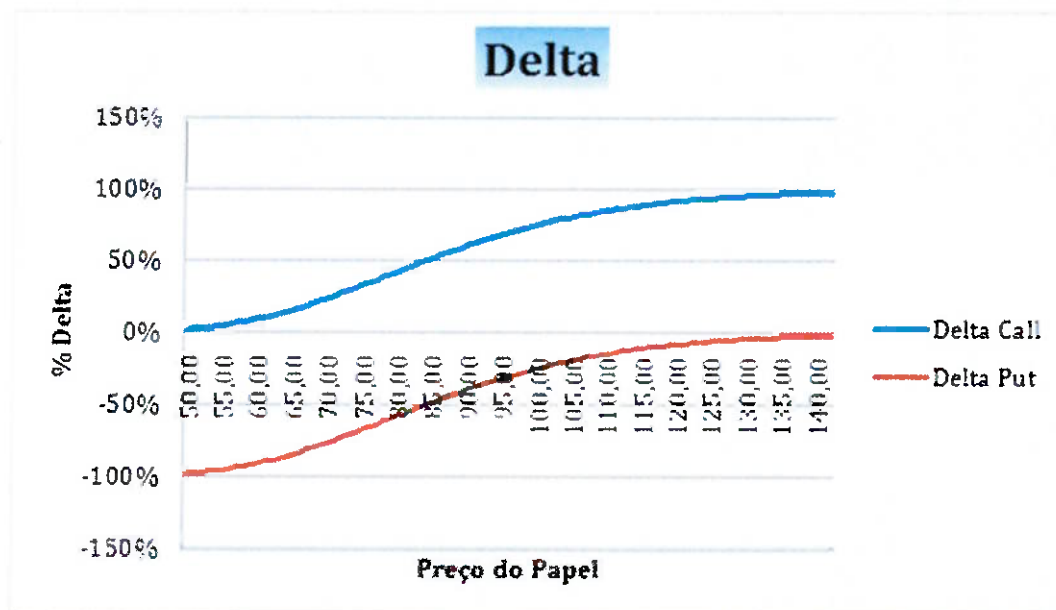
6.1 Observando a mudança de delta

Como vimos nos capítulos anteriores o delta de uma opção varia conforme os parâmetros do modelo, para poder visualizar melhor essa variação fizemos duas simulações.

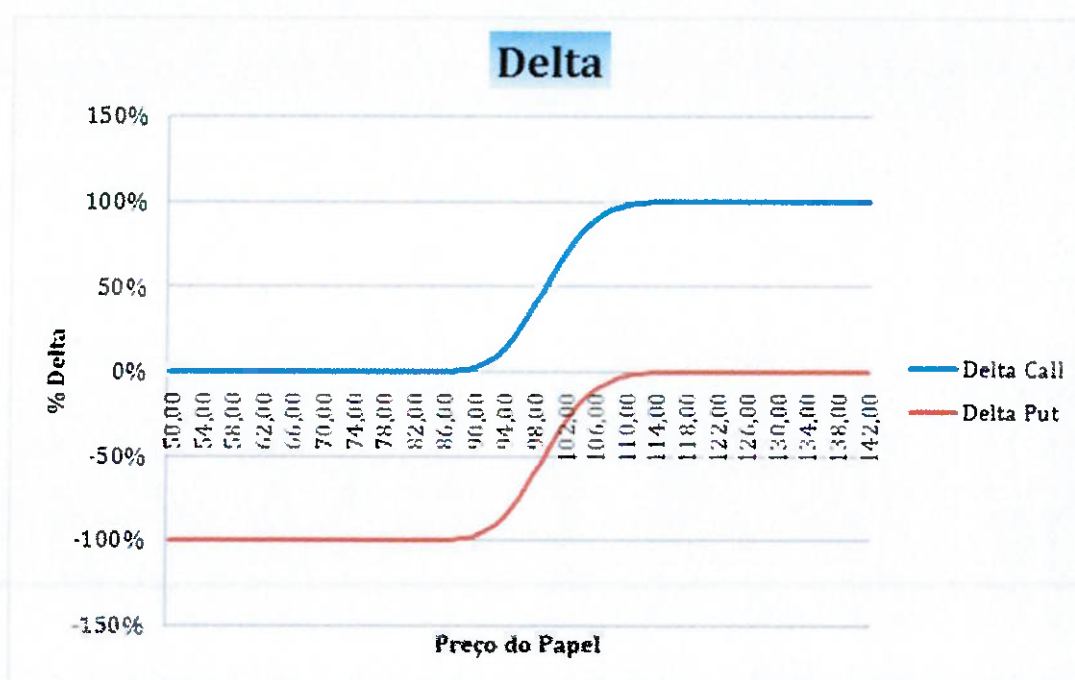
Vamos supor que uma opção tenha os seguintes parâmetros:

- Preço de Exercício: 100
- Volatilidade (Sigma): 25,50% a.a.
- Taxa de Juros: 14,25% a.a.
- Dias úteis até o vencimento: 252

O delta dessa opção seguiria a função do gráfico abaixo conforme o preço do ativo:



Uma segunda situação com os mesmos parâmetros da anterior exceto o número de dias úteis para o vencimento que alteramos para 10 dias, a função fica da seguinte forma:

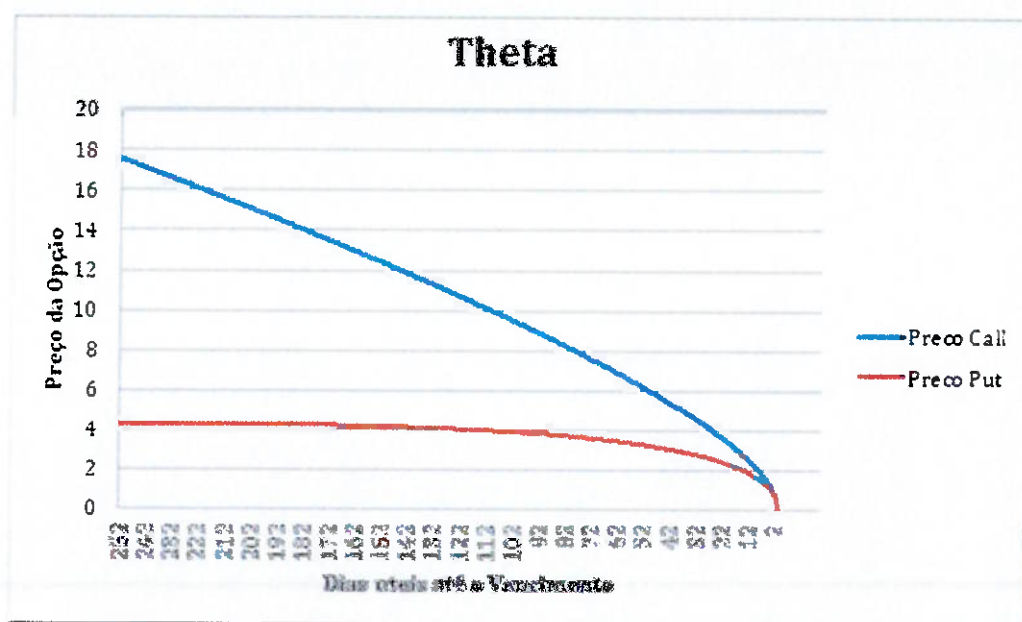


Dessa forma como podemos comparar os gráficos, quanto mais próximo do vencimento da opção maior a inclinação da curva de ajuste de delta, ou seja, o gamma da opção é maior.

6.2 Observando o preço de uma opção ao decorrer do tempo

Como vimos no capítulo 4, o preço de uma opção ao longo do tempo vai perdendo valor até seu vencimento. Para observarmos esse efeito melhor, vamos analisar simulando uma opção com os seguintes parâmetros:

- Preço de Exercício: 100
- Preço da Ação Atual: 100
- Volatilidade (Sigma): 25,50% a.a.
- Taxa de Juros: 14,25% a.a.



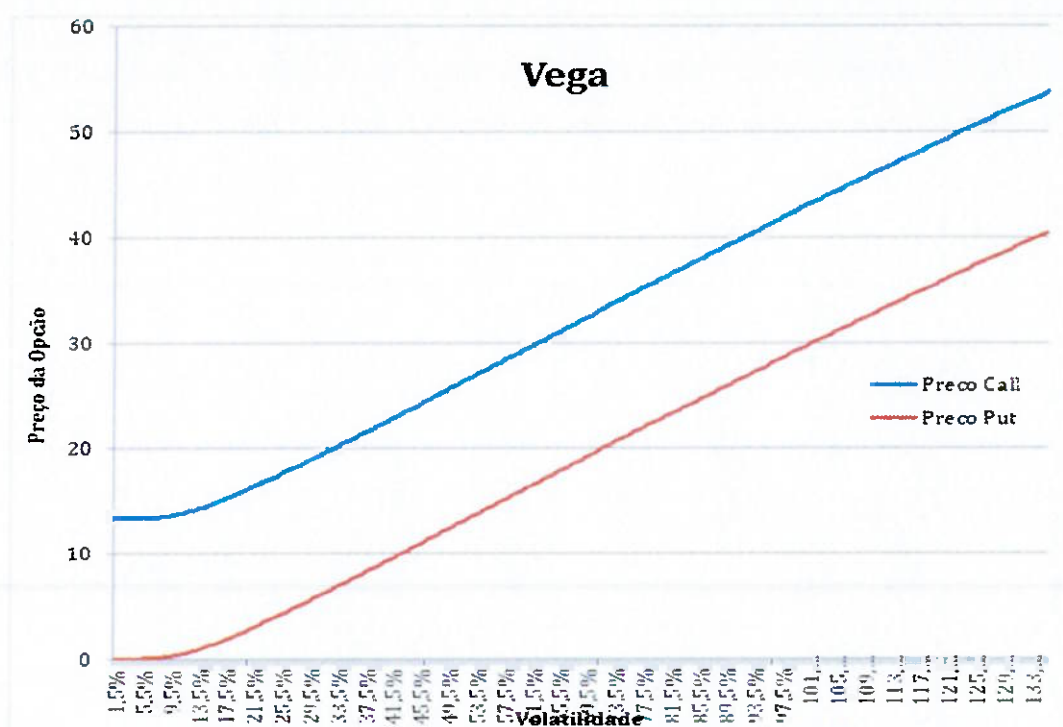
6.3 Observando o preço de uma opção de acordo com a volatilidade

Como vimos no capítulo 4, o preço de uma opção varia de acordo com a volatilidade estabelecida no modelo. Para observarmos como esse efeito resulta no preço da opção vamos analisar pela simulação feita a seguir.

Supondo que os parâmetros sejam:

- Preço de Exercício: 100
- Preço da Ação Atual: 100
- Dias úteis até o vencimento: 252
- Taxa de Juros: 14,25% a.a.

Alterando a volatilidade (sigma) do modelo, podemos verificar que a curva do preço da opção segue a função:



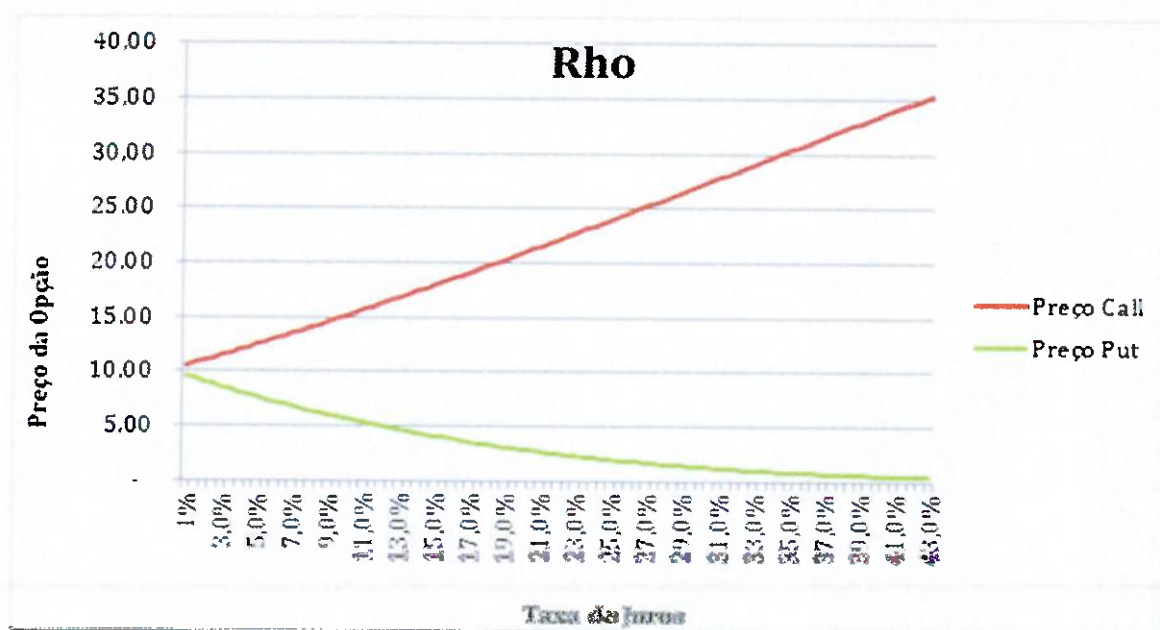
6.4 Observando o preço de uma opção de acordo com os juros

Como vimos no capítulo 4, o preço de uma opção também varia de acordo com a taxa livre de risco, ou seja, os juros utilizado no modelo. Dessa forma para verificarmos essa questão vamos analisar essa mudança fazendo uma simulação a seguir.

Supondo que os parâmetros do modelo sejam:

- Preço de Exercício: 100
- Preço da Ação Atual: 100
- Dias úteis até o vencimento: 252
- Volatilidade (Sigma): 25,50% a.a.

A função que representaria essa mudança do preço da opção em relação aos juros seria:



7 Verificando o modelo para exemplos reais

No capítulo anterior vimos alguns fatores que atrapalham na execução do modelo, como a forma de fazer o delta hedge no papel de forma não existir a possibilidade de executar continuamente. Por isso, vamos verificar com dados reais qual a diferença entre o resultado realizado e o resultado ideal do modelo.

Extraímos o preço da opção e do ativo na abertura do mercado e no fechamento do mercado. Fizemos três análises das diferenças entre o resultado ocorrido e o modelo para cada dia (ou seja, com retorno esperado sendo o valor financeiro da operação aplicado a taxa livre de risco para o período de um dia). A primeira análise abrindo a posição no dia e zerando-a no dia seguinte pelos preços de abertura realizados, a segunda análise zerando a operação pelos preços de fechamento e a terceira análise zerando a operação pelos preços de fechamento do dia seguinte, porém fazendo um ajuste de delta hedge em relação ao preço de abertura do ativo e da opção.

Para melhor entender, um exemplo de como faremos isso:

No primeiro dia o preço de uma ação abriu a 15,04 e a opção do tipo “call” de exercício 14,99 ao preço de 1,20. Consideramos que abriremos uma posição vendida na opção e, portanto comprada na ação na proporção do delta, nesse caso 60,45%. Dessa forma o fluxo financeiro aplicado nesse dia para uma quantidade de 100.000 opções fica:

$$100.000 \times 1,20 - 60.450 \times 15,04 = -789.168$$

Assim, para o dia seguinte segundo o modelo essa carteira deve ser remunerada pela taxa livre de risco, que no caso, utilizamos a taxa Selic atual, 14,25%. Portanto, o fluxo financeiro que deveríamos resgatar no dia seguinte ficaria:

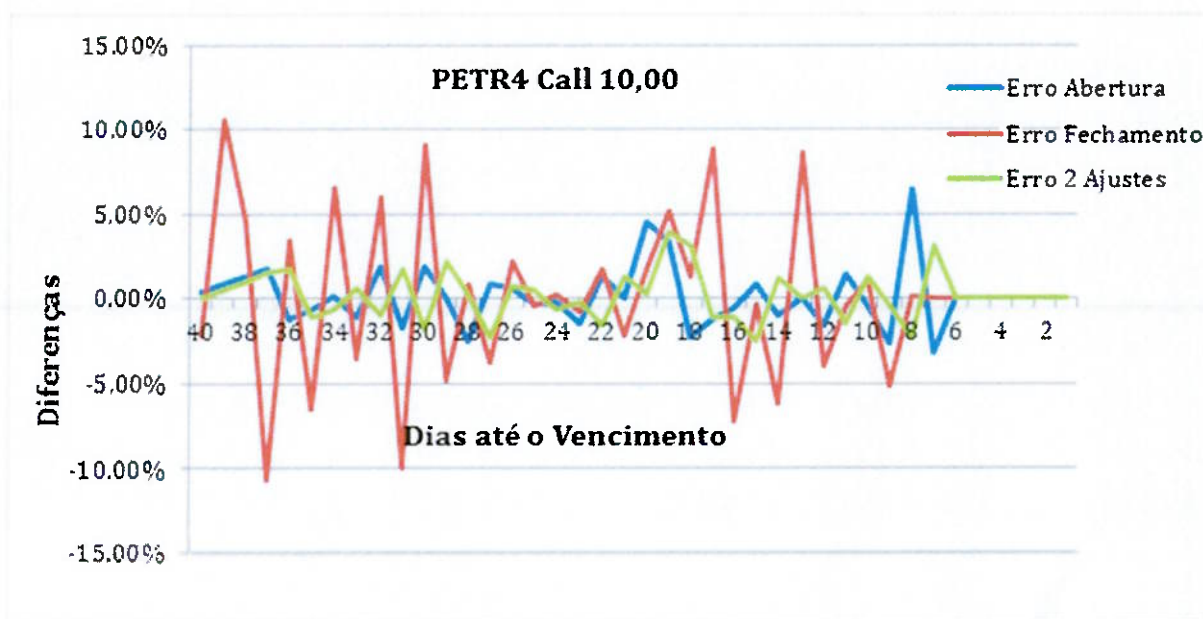
$$789.168 \times (1 + 14,25\%)^{(1/252)} = 789.585,30$$

Então, teoricamente a carteira deveria ser remunerada em um montante de 417,30 reais nesse dia.

Compararemos esse valor que seria o ideal para o modelo com o fluxo do que realmente aconteceu, assim analisaremos percentualmente essa diferença.

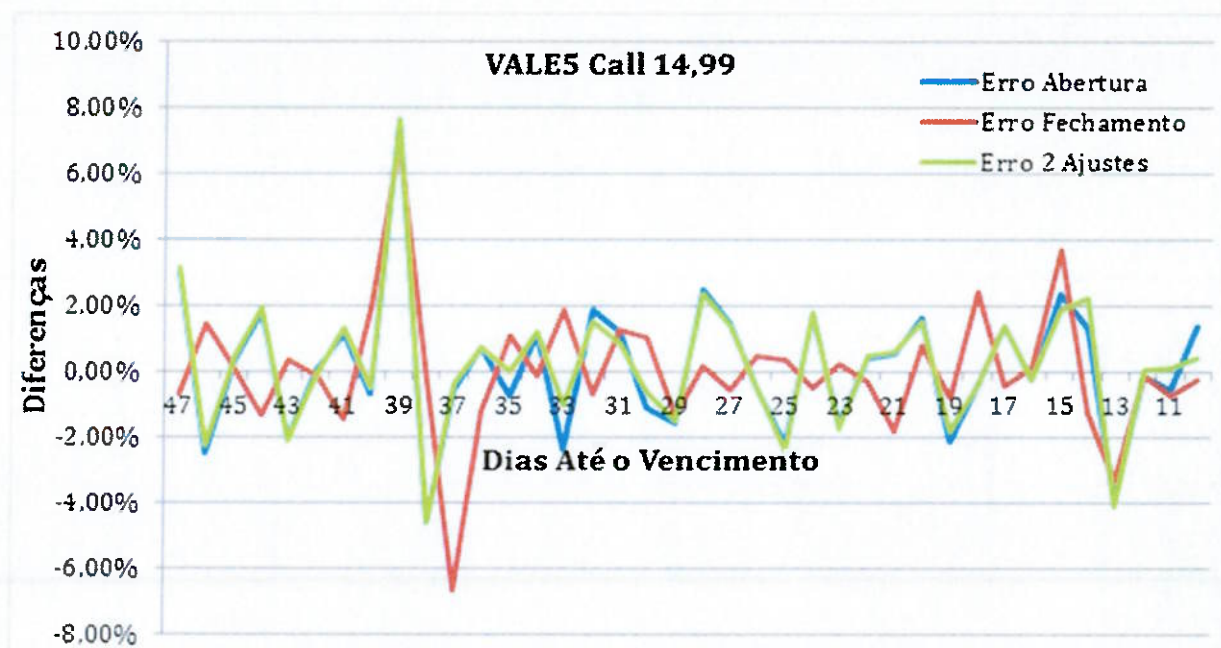
No primeiro estudo de caso veremos o ocorrido com PETR4, Petrobras PN, analisamos o preço de uma call de preço de exercício 10,00 desde o dia 24/07/2015 até o vencimento no dia 21/09/2015, verificando diariamente a volatilidade implícita

realizada na abertura e no fechamento com os preços apurados, taxa de juros de mercado desses dias e dessa forma podemos observar percentualmente as seguintes diferenças nos resultados apurados em comparação ao resultado que deveria ser segundo o modelo:



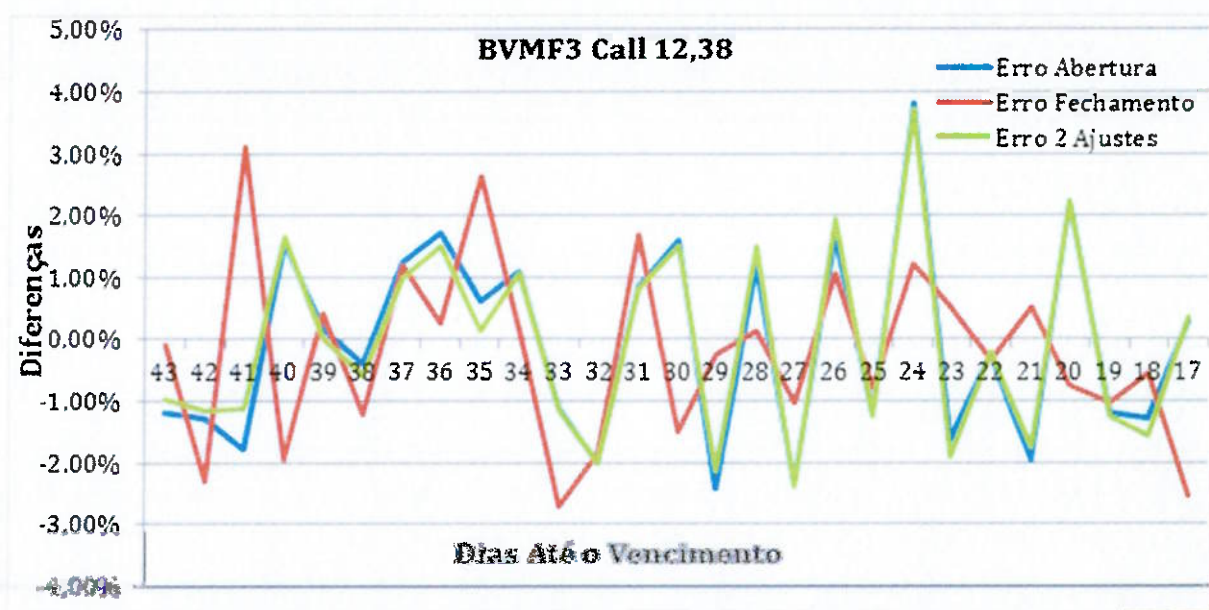
Visualmente vemos que o erro iniciando a operação em um dia e zerando-a no dia seguinte apenas pelos preços de fechamento é maior que as outras duas opções, seu desvio padrão ficou em 4,94%, enquanto o desvio padrão zerando a operação pelos preços de abertura 1,84% e fazendo o ajuste de delta aos preços de abertura e zerando pelo preço de fechamento ficou em 1,47%. A volatilidade implícita anualizada média nesse período foi de 56,30%.

O segundo caso que veremos será o ocorrido com VALE5, Companhia Vale do Rio Doce PN, analisamos o preço de uma call de preço de exercício 14,99 e vencimento 19/10/2015, desde o dia 11/08/2015 até o dia 05/10/2015, verificando diariamente a volatilidade implícita realizada na abertura e no fechamento com os preços apurados, taxa de juros de mercado desses dias e dessa forma podemos observar percentualmente as seguintes diferenças de resultado executado com o resultado de um modelo ideal:



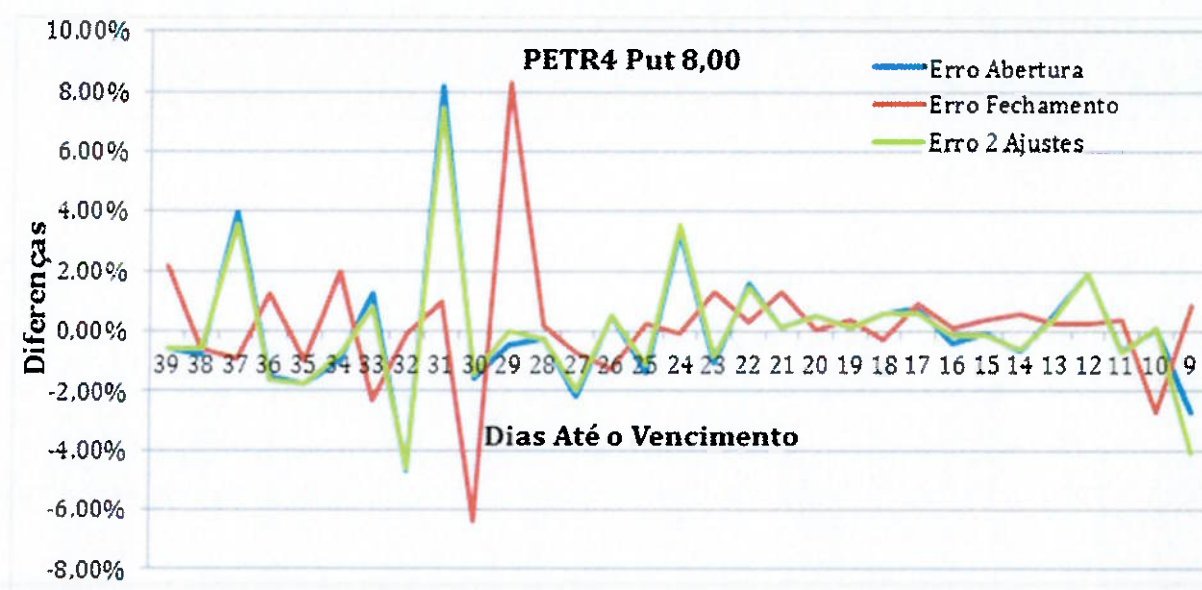
Nesse caso temos erros bem parecidos para os três tipos de análise, o caso que teve o maior desvio padrão foi a operação onde a comparação foi pelo preço de abertura do ativo e da opção, com 2,15%. A que teve o desempenho mediano foi a operação na qual o delta foi ajustado pelos preços de abertura e a operação foi comparada pelos preços de fechamento, com 2,09% de desvio padrão. Já a que teve o melhor desempenho foi a operação que foi comparada apenas pelos preços de fechamento, sem o ajuste de delta pelos preços de abertura, com o desvio padrão de 2,01%. A volatilidade implícita anualizada média nesse período foi de 48,01%.

O terceiro caso que veremos será o ocorrido com BVMF3, BM&FBovespa ON, analisamos o preço de uma call de preço de exercício 12,38 e vencimento 16/11/2015, desde o dia 14/09/2015 até o dia 22/10/2015, verificando diariamente a volatilidade implícita realizada na abertura e no fechamento com os preços apurados, taxa de juros de mercado desses dias e dessa forma podemos observar percentualmente as seguintes diferenças de resultado do executado com o resultado de um modelo ideal:



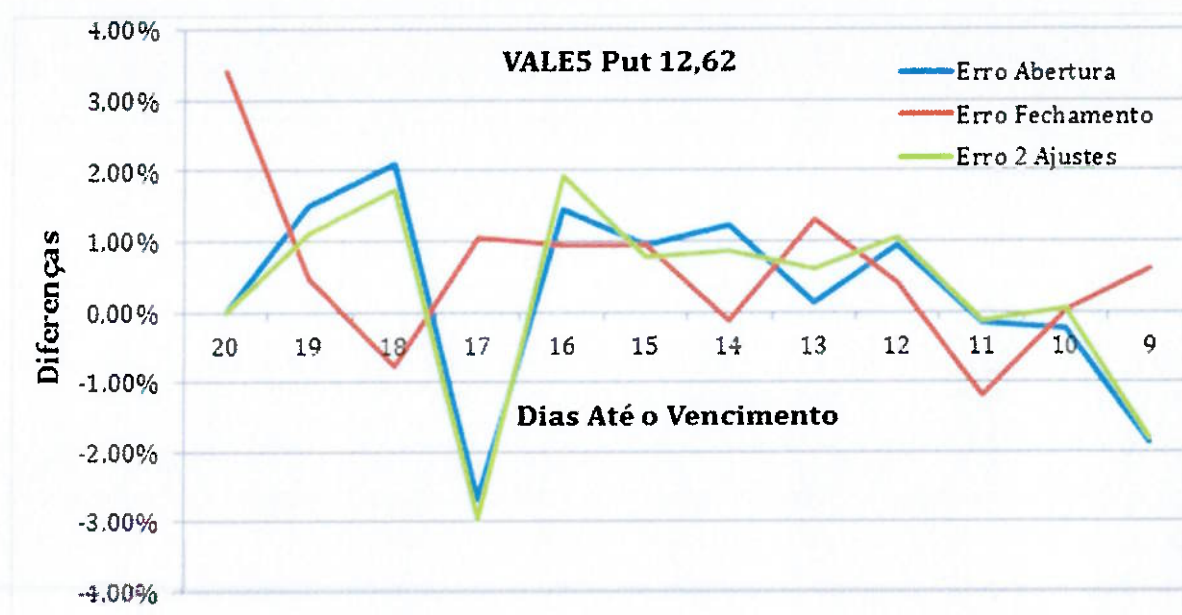
Nesse caso também temos erros bem parecidos para os três tipos de análise, o caso que teve o maior desvio padrão foi a operação onde a comparação foi pelo preço de abertura do ativo e da opção, com 1,61%. A que teve o desempenho mediano foi a operação na qual o delta foi ajustado pelos preços de abertura e a operação foi comparada pelos preços de fechamento, com 1,57% de desvio padrão. Já a que teve o melhor desempenho foi a operação que foi comparada apenas pelos preços de fechamento, sem o ajuste de delta pelos preços de abertura, com o desvio padrão de 1,45%. A volatilidade anualizada implícita média nesse período foi de 39,91%.

No quarto estudo de caso veremos o ocorrido com PETR4, Petrobras PN, analisamos o preço de uma put de preço de exercício 8,00 desde o dia 18/09/2015 até o dia 04/11/2015, verificando diariamente a volatilidade implícita realizada na abertura e no fechamento com os preços apurados, taxa de juros de mercado desses dias e dessa forma podemos observar percentualmente as seguintes diferenças nos resultados apurados em comparação ao resultado que deveria ser no modelo ideal:



Nesse caso, diferentemente do que observamos com as diferenças no primeiro caso, o modelo de uma call de PETR4, não tem um dos erros muito diferentes dos outros, e sim bem parecidos entre eles, o maior desvio padrão foi a operação onde a comparação foi pelo preço de abertura do ativo e da opção, com 2,21%. A que teve o desempenho mediano foi a operação na qual o delta e o preço da opção foi comparado aos preços de fechamento, com 2,15% de desvio padrão. Já a que teve o melhor desempenho foi a operação na qual o delta foi ajustado pelos preços de abertura e a operação foi comparada pelos preços de fechamento, com 2,14% de desvio padrão, muito próximo ao erro da intermediária. A volatilidade implícita anualizada média nesse período foi de 67,08%.

No quinto estudo de caso veremos o ocorrido com VALE5, Companhia Vale do Rio Doce PN, analisamos o preço de uma put de preço de exercício 12,62 desde o dia 16/10/2015 até o dia 04/11/2015, verificando diariamente a volatilidade implícita realizada na abertura e no fechamento com os preços apurados, taxa de juros de mercado desses dias e dessa forma podemos observar percentualmente as seguintes diferenças nos resultados apurados em comparação ao resultado que deveria ser no modelo ideal:



Nesse caso também temos erros bem parecidos, o de pior resultado foi a de iniciar a operação em um dia e finalizando-a no dia seguinte fazendo o delta hedge nos preços de abertura e zerando pelos preços de fechamento é maior que as outras duas opções, seu desvio padrão ficou em 1,36%, enquanto o desvio padrão da operação que inicia no dia e encerra no dia seguinte pelo preço de abertura ficou bem parecido, com 1,35% de desvio padrão. O menor erro foi encerrando a operação iniciada em um dia e encerrada no dia seguinte pelo preço de fechamento ficou em 1,12%. A volatilidade implícita anualizada média nesse período foi de 55,78%.

8 Conclusão

Podemos concluir que o modelo de Black & Scholes funciona independentemente de uma expectativa para que o ativo suba ou caia e isso não afeta o valor da opção, a partir do momento que se faz o hedge de opção, estamos retirando a exposição ao movimento aleatório da ação, independente do rumo que a mesma siga.

Vimos também que no mercado real existem algumas características que o modelo não consegue mensurar, como a impossibilidade de um ajuste de hedge contínuo, os custos envolvidos na operação e aluguel da ação, quando necessário podem influenciar fortemente no resultado da operação. Assim como analisamos no capítulo anterior, podemos ver que no caso da Petrobrás, onde a volatilidade implícita é maior, os saltos de um dia para o outro e a execução dos ajustes de delta influenciam também na operação, gerando uma diferença muito grande entre os resultados esperados se o modelo fosse perfeito em relação ao que pode ser na prática realizado pelo mercado.

Outra conclusão que podemos chegar com os estudos feitos com os casos reais é que quanto maior a volatilidade implícita observada, maior a distorção dos erros do modelo observado para o modelo de Black & Scholes, isso ocorre por motivos da não possibilidade de ajuste de delta hedge contínuo e da exposição ao gamma da operação.

Para uma maior clareza das análises que fizemos dos modelos reais obtivemos os seguintes resultados:

Modelo	Desvio Padrão			Vol. Media
	Abertura	Fechamento	2 Ajustes	
Call PETR4	1,84%	4,94%	1,47%	57,10%
Call VALE5	2,15%	2,01%	2,09%	48,01%
Call BVMF3	1,61%	1,45%	1,57%	39,91%
Put PETR4	2,21%	2,15%	2,14%	67,08%
Put VALE5	1,35%	1,12%	1,36%	55,78%

Com exceção na call de PETR4 que teve um erro muito discrepante e na put que teve um erro praticamente igual, o modelo onde se inicia a operação em um dia e encerra no dia seguinte pelos preços de fechamento, sem fazer nenhum ajuste de

delta nesse meio tempo obteve o menor desvio padrão no erro comparado ao modelo de Black & Scholes.

Consequentemente, o principal fator que na hora de realizar uma operação no mercado de ações e opções os operadores devem verificar, pois pode afetar facilmente no resultado final é a volatilidade realizada do papel, verificando qual o desvio padrão dos últimos dias ou mês, pois quanto maior a volatilidade, normalmente maiores ajustes de delta serão necessários, assim maior exposição ao gamma. Também devemos observar a liquidez do ativo em questão para que seja possível realizar os ajustes de delta hedge tranquilamente e se necessário, a taxa de aluguel desse ativo, pois em caso de não comprimento da liquidação de uma venda a descoberto do ativo a Bolsa chega a cobrar um valor de 10% de multa em relação ao financeiro da venda.

Referências bibliográficas

- WILMOTT, PAUL. Paul Wilmott INTRODUCES QUANTITATIVE FINANCE. 2 Edição. Canadá: WILEY, 2007. The Wiley Finance Series. 695p.
- HULL, JOHN. et al. Fundamentals of Futures and Options Market . 7 Edição. Austrália: Pearson Education, Inc, 2011. 566p.
- MCDONALD, ROBERT L. Derivatives Markets. 2 Edição. EUA: Pearson Education, Inc. 2006. 964p.
- DUFFIE, DARRELL. Dynamic Asset Pricing Theory. 3 Edição. UK: Princeton University Press, 2001. 465p.
- BLACK, FISCHER and SCHOLES, MYRON. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. The Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3 (May - Jun., 1973). EUA: The University of Chicago Press.