

**William Park Lee**

**Estimando a Estrutura a Termo usando o Modelo de  
Diebold e Li**

Dissertação apresentada ao  
Curso de Pós-Graduação *Lato  
Sensu* em Engenharia  
Financeira da Universidade de  
São Paulo para a obtenção do  
título de Especialista em  
Engenharia Financeira.

**Área de Concentração:**  
*Engenharia Financeira*

**Orientador:** *Doutor  
Rodrigo de Barros Nabholz*

São Paulo

2014

MBA-EF  
2014  
L-5162

582



Escola Politécnica - EPEL



31500023582

M2014AU+

[0716612]

## **RESUMO**

Este trabalho tem como objetivo aplicar o modelo de Diebold & Li que é um modelo dinâmico de três fatores para estimar e prever a estrutura a termo da taxa de juros usando taxas zero cupom. Primeiro estimo os três fatores que são interpretados como nível, inclinação, e curvatura. Depois gero previsões através de um processo autoregressivo de primeira ordem em cima dos fatores estimados.

**PALAVRAS-CHAVE:** Estrutura a Termo, Curve Fitting, Diebold & Li, Dynamic Nelson Siegel, Processo AutoRegressivo, Previsão da Curva de Juros

**ABSTRACT**

The objective of this paper is to apply Diebold & Li's three factor dynamic model to estimate and forecast the term structure using zero coupon rates. This is done by estimating the three factors which are interpreted as level, slope, and curvature. The forecast is then made by using a first order auto regressive model on the estimated factors.

**KEYWORDS:** Term Structure, Curve Fitting, Diebold & Li, Dynamic Nelson Siegel, Auto Regressive Process, Yield Curve Forecast

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Pesos para os Fatores com fator de tempo de .07.....	18
Figura 2 – Estrutura a Termo 2008-01 a 2012-12.....	23
Figura 3 – Mediana vs percentil 25 e 75.....	23
Figura 4 - Curva Média vs Curva Implícita usando a Média dos Betas.....	25
Figura 5 – Ajuste da Curva em dias específicos .....	25
Figura 6 – Estrutura a Termo dos Resíduos.....	26
Figura 7 – Beta1-Nível vs Beta1 Implícito.....	27
Figura 8 – Beta2-Inclinação vs Beta2 Implícito.....	28
Figura 9 – Beta3-Curvatura vs Beta3 Implícito.....	28
Figura 10 – Autocorrelação do Beta 1 com defasagem de 24 meses.....	29
Figura 11 – Autocorrelação do Beta 2 com defasagem de 24 meses.....	30
Figura 12 – Autocorrelação do Beta 3 com defasagem de 24 meses.....	30
Figura 13 – Autocorrelação dos Resíduos de B1 ao ajuste do modelo AR(1).....	30
Figura 14 – Autocorrelação dos Resíduos de B2 ao ajuste do modelo AR(1).....	31
Figura 15 – Autocorrelação dos Resíduos de B3 ao ajuste do modelo AR(1) Lag....	31
Figura 16 – Previsão da Curva de Juros 1 mês a frente.....	33
Figura 17 – Previsão da Curva de Juros 3 mês a frente.....	33
Figura 18 – Previsão da Curva de Juros 6 mês a frente.....	33

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 – Características dos Títulos Públicos Federais Prefixados.....	21
Tabela 2 – Estatísticas Descritivas das Curvas de Juros.....	22
Tabela 3 – Estatísticas Descritivas dos Resíduos das Curvas de Juros.....	27
Tabela 4 – Estatísticas dos Betas Implícitos.....	23
Tabela 5 – Estatísticas das Previsões Usando Modelo AR1 Lag 1.....	28
Tabela 6 – Estatísticas das Previsões Usando Modelo AR1 Lag 3.....	32

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>7</b>
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>9</b>
<b>2.1 Modelos de Equilíbrio.....</b>	<b>9</b>
<b>2.2 Modelo de Vasicek.....</b>	<b>9</b>
<b>2.3 Modelo de Cox, Ingersol, e Ross.....</b>	<b>11</b>
<b>2.4 Modelos de Não Arbitragem.....</b>	<b>12</b>
<b>2.5 Modelo de Ho e Lee.....</b>	<b>13</b>
<b>2.6 Modelo de Hull e White.....</b>	<b>14</b>
<b>3. MÉTODO DA MODELAGEM E PREVISÃO DA ETTJ</b>	
<b>3.1 Construção das taxas.....</b>	<b>16</b>
<b>3.2 Modelando as taxas: A curva de juros de Nelson Siegel.....</b>	<b>17</b>
<b>3.3 Fatos estilizados da curva de juros.....</b>	<b>19</b>
<b>4. DADOS EMPÍRICOS DA MODELAGEM E PREVISÃO DA ETTJ</b>	
<b>4.1 Os dados.....</b>	<b>21</b>
<b>4.2 Ajuste da curva de juros.....</b>	<b>24</b>
<b>4.3 Modelagem e previsão dos três fatores.....</b>	<b>29</b>
<b>4.4 Dados empíricos da previsão do modelo (fora da amostragem).....</b>	<b>31</b>
<b>5. CONCLUSÃO .....</b>	<b>34</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>35</b>
<b>APÊNDICE A.....</b>	<b>37</b>
<b>APÊNDICE B.....</b>	<b>38</b>
<b>APÊNDICE C.....</b>	<b>39</b>

## 1. INTRODUÇÃO

A estrutura a termo é de grande importância a todos os participantes do mercado (instituições financeiras, empresas, e banco central) pois influi nas decisões de cada participante. As informações contidas na curva de juros determinam os derivativos de taxas de juros, a precificação de títulos, a gestão de carteiras e a alocação de ativos afetando todos os players do mercado. Por isso há um grande interesse por parte dos participantes em entender a dinâmica da estrutura a termo para poder prever a curva de juros.

Nos últimos 30 anos a modelagem da estrutura a termo evoluiu e os dois modelos mais conhecidos são os modelos de não arbitragem e modelos de equilíbrio. Os modelos de não arbitragem tem como objetivo ajustar a estrutura a termo para assegurar que não haja oportunidades de arbitragem. Os modelos de equilíbrio tem como objetivo modelar a dinâmica da taxa curta (short rate) usando modelos afins (affine models). Hull e White (1990) e Heath et al. (1992) são conhecidos por desenvolver os modelos de não arbitragem enquanto Vasicek (1977), e Cox(1985) são conhecidos por desenvolver os modelos de equilíbrio.

Diebold e Li(2006) argumentam que apesar dos modelos citados acima contribuírem para o desenvolvimentos na modelagem da ETTJ, pouca atenção foi dada à previsão da estrutura a termo dos juros. A literatura dos modelos de não arbitragem se concentram em ajustar a ETTJ em um dado ponto no tempo e tem muito pouco a dizer sobre a previsão fora da amostragem. A literatura dos modelos de equilíbrio tem como foco a dinâmica da taxa curta, o que pode ser visto como uma ponte para gerar previsões, porém as pesquisas usando esse tipo de modelo tem resultados pobres. Exemplos de estudos nessa área são De Jong (2000) e Dai e Singleton (2000) que usam a amostragem para gerar a previsão em vez de usar dados fora da amostragem. Adicionalmente há estudos ex: Duffee (2002) que usam dados fora da amostragem para gerar previsões porém os resultados são pobres.

Esse estudo tem como objetivo usar o modelo de Diebold e Li para gerar previsões para dados fora da amostragem. Para concretizar isso mostrarei o método do modelo, os dados empíricos do modelo e finalmente a performance das

previsões usando o modelo de Diebold e Li.

O modelo de Diebold e Li (2006) é uma reinterpretação do modelo estatístico de Nelson e Siegel (1987) como um modelo dinâmico de três fatores. Os três fatores são estimados e usados para gerar a curva de juros ao longo do tempo. O modelo de Diebold e Li mostra que os três parâmetros variantes no tempo podem ser interpretados como fatores. Além disso os três fatores podem ser interpretados como nível, inclinação, e curvatura de forma consistente a interpretação obtida em Litterman and Scheinkman(1991). O modelo de Diebold e Li é um modelo de dois passos. O primeiro passo envolve estimar os três fatores através de uma regressão. O segundo passo envolve gerar previsões da curva de juros através das previsões dos fatores.

Trabalhos relacionados ao modelo de Diebold e Li que usam fatores para explicar a dinâmica da curva são os modelos de Bliss(1997), Dai e Singleton(2000), e Duffee (2002). Trabalhos mais próximos ao de Diebold e Li são os modelos de três fatores de Balduzzi et all (1996) e em particular Andersen e Lund (1997) cujo três fatores são interpretados em termos de nível, inclinação, e curvatura.

A seguir darei uma breve revisão bibliográfica dos modelos tradicionais existentes usados para modelar a ETTJ, após isso darei uma descrição mais detalhada do modelo de Diebold e Li descrevendo o método de Diebold e Li. Na próxima seção farei uma análise empírica, descrevendo os dados, e a estimação do modelo através do método dos mínimos quadrados. Após isso examinarei a performance dos modelo para prever dados fora da amostragem. Na última seção concluirei interpretando os resultados.

## 2. MODELOS DE EQUILÍBRIO

A taxa curta,  $t_{xc}$ , no tempo  $t$  é uma taxa que se aplica a um período muito pequeno de  $t$ . Os preços dos títulos de renda fixa, e outros derivativos dependem somente no processo que segue a  $t_{xc}$  em um mundo neutro ao risco. Em um mundo neutro ao risco um investidor ganha em média  $t_{xc}(t)\Delta t$  dentro de um período muito pequeno entre  $t$  e  $t+\Delta t$ .

Modelos de equilíbrio normalmente começam com suposições sobre variáveis econômicas e derivam um processo para a taxa curta,  $t_{xc}$ . Após isso eles exploram o que o processo da taxa curta implica sobre os preços dos títulos de renda fixa e opções.

Em um modelo de equilíbrio de um fator o processo para taxa curta envolve somente uma fonte de incerteza. Normalmente o processo neutro ao risco para a taxa curta é descrito pelo processo de Ito através da forma

$$dt_{xc} = m(t_{xc})dt + s(t_{xc})dz \quad 1.1$$

O drift instantâneo,  $m$ , e desvio padrão,  $s$ , são supostamente funções da taxa curta, porém independentes do tempo. A suposição de somente um fator não é tão restritivo quanto pode parecer. Um modelo de um fator implica que todas as taxas movem se na mesma direção sobre um curto intervalo de tempo, mas não que todas elas se movem pela mesma quantidade. A seguir seguem dois modelos de equilíbrio de um fator que serão consideradas.

$$m(t_{xc}) = \alpha(b-t_{xc}) ; s(t_{xc}) = \text{sigma} \text{ (Vasicek)} \quad 1.2$$

$$m(t_{xc}) = \alpha(b-t_{xc}); s(t_{xc}) = \text{sigma} * \sqrt{(t_{xc})} \text{ (CIR)} \quad 1.3$$

### 2.1 MODELO DE VASICEK

No modelo de Vasicek o processo neutro ao risco para taxa curta  $t_{xc}$  é

$$dt_{xc} = \alpha*(b-t_{xc})*dt + \text{sigma}*dz \quad 1.4$$

Onde  $\alpha$ ,  $b$ , e  $\sigma$  são constantes e  $dz$  é o movimento Browniano. O parâmetro  $b$  se refere a média do nível ao longo termo, O parâmetro  $\alpha$  se refere a velocidade da reversão e  $\sigma$  a volatilidade estocástica.

Este modelo incorpora reversão a média que é um processo de Orstein-Uhlenbeck. Este processo é um processo de Markov com incrementos normalmente distribuídos. A puxada ou tendencia instantânea  $\alpha(b - t_{xc})$  representa a força que reverte a sua taxa de longo prazo  $b$  com magnitude proporcional ao desvio em relação a média do processo. O elemento estocástico, que possui uma variância constante  $\sigma^2$ , faz com que o processo oscile ao redor do nível  $\alpha$  de uma forma contínua.

A taxa curta tem uma distribuição normal, portanto as medidas de média e variância são respectivamente:

$$E\{t_{xc}\} = b + (t_{xc} - b)e^{-\alpha(T-t)} \quad 1.5$$

$$\text{Var}\{t_{xc}\} = \sigma^2/2\alpha(1 - e^{-2\alpha(T-t)}) \quad 1.6$$

Isso implica que, para cada tempo  $t$ , a taxa  $t_{xc}(t)$  pode ser negativa com probabilidade negativa.

Vasicek demonstrou que dentro do mundo neutro ao risco onde  $P(t,T)$  = título de desconto e  $\hat{E}$  = valor esperado em um mundo neutro ao risco e  $\tilde{t}_{xc}$  = valor médio da taxa curta no intervalo de tempo entre  $t$  e  $T$ .

$$P(t,T) = \hat{E}(e^{-\tilde{t}_{xc}(T-t)}) \quad 1.7$$

A equação para obter o preço de um título zero cupom que paga \$ 1 no tempo  $t$  é

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)t_{xc}(t)} \quad 1.8$$

Nessa equação  $t_{xc}(t)$  é o valor da  $t_{xc}$  no tempo  $t$ .

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} \quad 1.9$$

e

$$A(t,T) = \exp\left[\frac{(B(t,T)-T+t)(\alpha^2 b - \frac{\sigma^2}{2})}{\alpha^2} - \frac{\sigma^2 B(t,T)^2}{4\alpha}\right] \quad 1.10$$

Quando  $\alpha = 0$ ,  $B(t,T) = T-t$  e  $A(t,T) = \exp(\sigma^2(T-t)^3/6)$

Se  $R(t,T)$  é a taxa de juros continuamente composta no tempo  $t$  para um termo de  $T-t$  então

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \quad 1.11$$

Resolvendo a equação para obter  $R(t,T)$

$$R(t,T) = -\frac{1}{(T-t)} \ln P(t,T) \quad 1.12$$

Portanto,

$$R(t,T) = -\frac{1}{(T-t)} \ln A(t,T) + \frac{1}{(T-t)} \ln B(t,T) txc(t) \quad 1.13$$

A equação acima mostra que a ETTJ pode ser determinada como uma função da taxa curta uma vez que as variáveis  $\alpha, b$ , e  $\sigma$  são escolhidas.

## 2.2 MODELO DE CIR COX INGERSOLL E ROSS

No modelo de Vasicek a taxa curta,  $txc$ , pode ser negativa o que não é muito provável de acontecer na vida real. Cox Ingersoll e Ross propuseram um modelo alternativo onde as taxas fossem sempre positivas. O processo neutro ao risco para  $txc$  no modelo deles segue abaixo

$$dtxc = \alpha(b-txc)dt + \sigma\sqrt{txc} dz \quad 1.14$$

Este modelo contém a mesma reversão a média presente no modelo de Vasicek, porém o desvio padrão da mudança na taxa curta em um curto período de tempo é proporcional a raiz quadrada da  $txc$ . Isso implica que um aumento na  $txc$  também aumenta o desvio padrão.

Cox Ingersoll e Ross mostram que o modelo deles tem a mesma forma geral que o modelo de Vasicek.

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)txc} \quad 1.15$$

mas as funções  $B(t,T)$  e  $A(t,T)$  são diferentes,

$$B(t,T) = \frac{2*(e^{-\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+\alpha)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma} \quad 1.16$$

e

$$A(t,T) = \exp\left[\frac{2\gamma*(e^{-\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+\alpha)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right]^{2\alpha b/\sigma^2} \quad 1.17$$

Com  $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + 2 * \sigma^2}$ . Os tipos de curvas possíveis são variadas ex inclinação positiva ou negativa, e curva invertida. Como no caso de Vasicek a taxa de longo prazo  $R(t,T)$ , é linearmente dependente da taxa curta  $txc(t)$ . Isso significa que o valor da  $txc(t)$  determina o nível da ETTJ no tempo  $t$ . O formato geral da ETTJ no tempo  $t$  é independente da  $txc(t)$ , mas depende do tempo  $t$ .

### 2.3 MODELOS DE NÃO ARBITRAGEM

As desvantagens dos modelos de equilíbrio apresentados são que eles não se ajustam automaticamente a ETTJ de hoje. Os modelos de não arbitragem requerem a escolha arbitrária dos parâmetros, e as escolhas dos mesmos pode aproximar o ajuste da ETTJ a muitas curvas encontradas em prática. Porém o ajuste não é normalmente algo exato, em alguns casos não há um ajuste que se encaixe aos dados reais.

Um modelo de não arbitragem é um modelo feito para ser consistente com a ETTJ de hoje. A diferença entre um modelo de equilíbrio e um modelo de não arbitragem é que em um modelo de equilíbrio a ETTJ é uma saída de uma função, enquanto que em um modelo de equilíbrio a ETTJ é uma entrada de uma função.

Em um modelo de equilíbrio, o drift da taxa curta (ex, o coeficiente de  $dt$ ) não é normalmente uma função do tempo. Em um modelo de não arbitragem, o drift é, em

geral, dependente do tempo. O drift é dependente do tempo porque o formato inicial da curva zero cupom determina a trajetória média percorrida pela taxa curta no futuro. Se a curva zero tiver inclinação positiva acentuada para os vencimentos entre  $t_1$  e  $t_2$ , então a taxa curta tem um drift positivo entre esse intervalo; se tiver inclinação negativa acentuada para os vencimentos, então a taxa curta tem um drift negativo entre esse intervalo.

## 2.4 MODELO DE HO-LEE

Ho e Lee foram os primeiros a desenvolverem um modelo de não arbitragem. Eles apresentaram o modelo através de uma árvore binominal para preços de títulos(bonds) com dois parâmetros. O modelo segue abaixo

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dz \quad 1.18$$

Onde  $\sigma$  é o desvio padrão da taxa curta, e  $\theta(t)$  é uma função do tempo escolhida para garantir que o modelo se ajuste a ETTJ inicial. A  $\theta(t)$  define a direção média que a taxa curta segue no tempo  $t$ . Ela independe do nível da taxa curta.

A variável  $\theta(t)$  pode ser calculada analiticamente e resulta em

$$\theta(t) = \frac{\partial F(0,t)}{\partial t} + \sigma^2 t \quad 1.19$$

onde a função  $F_t(0,t)$  é a taxa a termo instantânea para o vencimento  $t$  determinada no instante  $t = 0$ .

O termo  $\sigma^2 t$  é pequeno e aproximando  $\theta(t) \sim \frac{\partial F(0,t)}{\partial t}$ , indica que o valor médio que a taxa de curto prazo seguirá é aproximadamente igual a inclinação da curva de taxas a termo observadas.

No modelo de Ho e Lee os preços dos títulos zero cupom e as opções européias sobre os títulos zero cupons europeus podem ser calculadas analiticamente. Eles chegaram a equação abaixo para o preço de um título zero cupom no instante  $t$

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-\int_t^T r_c(s)ds} \quad 1.20$$

$$\text{onde, } \ln A(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - (T-t) \frac{\partial \ln P(0, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 t (T-t)^2 \quad 1.21$$

Nessas equações, o tempo zero é hoje. Os tempos  $t$  e  $T$  são normalmente tempos no futuro com  $T \geq t$ . Portanto as equações definem o preço de um título zero cupom em um tempo futuro  $t$  em termos da taxa curta no tempo  $t$  e os preços dos títulos hoje.

## 2.5 MODELO DE HULL E WHITE

Os modelos de Hull e White exploraram várias extensões do modelo de Vasicek para obter um ajuste exato da ETTJ inicial. A versão principal segue abaixo

$$dtxc_t = [\theta(t) - a*txc_t]*dt + \sigma*dz_t \quad 1.22$$

Analogamente ao modelo de Ho e Lee, a componente  $\theta(t)$  é uma função do tempo, permitindo o ajuste da taxa do modelo para as taxas observadas no mercado. No entanto, analogamente ao modelo de Vasicek, a componente  $\theta(t) - a*txc_t$  é responsável pela reversão à média, não permitindo o comportamento explosivo da variância.

A função  $\theta(t)$  pode ser obtida de forma analítica

$$\theta(t) = \frac{\partial F(0, T)}{\partial t} + a*F(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-2at}) \quad 1.22$$

Se considerarmos o último termo pequeno  $\frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-2at})$ , a parte da tendência da taxa de curto prazo fica  $[\theta(t) - a*txc_t] \sim \frac{\partial F(0, T)}{\partial t} + a[F(0, t) - txc]$ . Isso implica que, na média, a  $txc$  segue a inclinação da curva a termo. Quando  $txc$  desvia dessa curva a termo observada, o processo é revertido de volta pelo parâmetro  $a$ . Como  $txc_t$  tem distribuição normal, os valores taxas de juros podem ser negativos.

A equação do preço de um título no instante  $t$  é

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)rx(t)} \quad 1.23$$

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} \quad 1.24$$

$$\ln A(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - B(t, T) \frac{\partial \ln P(0, t)}{\partial t} - \frac{1}{4\alpha^3} \sigma^2 t (e^{-\alpha T} - e^{-\alpha t})^2 (e^{-2\alpha T} - 1) \quad 1.25$$

As equações acima definem os preços de um título zero cupom em um instante futuro  $t$  em termos da taxa curta no instante  $t$  e os preços dos títulos hoje. Para calcular os preços dos títulos hoje precisamos da ETTJ de hoje.

Os modelos de não arbitragem e de equilíbrio são os modelos mais conhecidos para modelar a ETTJ, porém temos mais uma classe de modelo conhecido como paramétrico. O modelo paramétrico mais conhecido é o modelo de Nelson Siegel(1987) e na próxima seção introduzirei o modelo de Nelson Siegel(1987) pois ele é a base do modelo de Diebold e Li.

### 3. MÉTODO DA MODELAGEM E PREVISÃO DA ETTJ

Nessa seção introduzirei os conceitos que Diebold e Li usou para fazer o ajuste (fit) do modelo e a previsão da curva de juros. Primeiro mostrarei alguns métodos usados para construção da taxa de juros. Em seguida apresentarei o modelo de Diebold e Li que é uma curva de Nelson e Siegel (1987) modificada para modelar e gerar as previsões da ETTJ. Os três coeficientes da curva de Nelson e Siegel podem ser interpretadas como fatores latentes de nível, inclinação, e curvatura. Na parte final dessa seção mostrarei que a natureza dos fatores e dos pesos dos fatores implícitos no modelo de Nelson e Siegel são consistentes com várias propriedades empíricas da curva de juros.

#### 3.1 Construção das taxas

A ETTJ pode ser descrita por uma curva de desconto  $P_t(\tau)$ , uma curva de taxas a termo  $F_t(\tau)$  ou uma curva de taxas a vista  $Y_t(\tau)$ , todas relacionadas entre si, de tal forma que obtendo-se uma delas, facilmente calcula-se as outras. As identidades abaixo mostram como as funções de desconto, taxa a termo (forward), e taxa de juros a vista em tempo contínuo se relacionam entre si.

$$P_t(\tau) = e^{(-\tau * Y_t(\tau))} = e^{(\int_0^{\tau} F_t(u) du)} \quad 2.1$$

$$F_t(\tau) = -\frac{1}{P_t(\tau)} * P'_t(\tau) = Y_t(\tau) + Y'_t(\tau) \quad 2.2$$

$$Y_t(\tau) = \frac{1}{\tau} * \int_0^{\tau} F_t(u) du = -\frac{1}{\tau} * \ln P_t(\tau) \quad 2.3$$

Em prática a curva de juros, curva de desconto, e curva a termo não são observadas. Essas curvas precisam ser estimadas através dos preços dos títulos públicos de curto e longo prazo. A seguir apresentarei três métodos conhecidos para construção das taxas de juros. O primeiro método foi desenvolvida por McCulloch (1975) e envolve modelar uma curva de desconto com uma spline cúbica. Porém os resultados não foram satisfatórios pois a curva ajustada não

convergia a zero prejudicando o ajuste (fit) das curvas de juros com inclinação próxima de zero (flat).

O segundo método de construir taxas através da curva de desconto foi desenvolvida por Vasicek e Fong (1982), que ajustou uma spline exponencial a uma curva de desconto, usando uma transformação negativa do vencimento em vez do vencimento. Essa transformação assegurava que as taxas a termo e zero cupom convergissem a um limite fixo.

Um terceiro método de construir taxas e sugerido por Diebold é o método desenvolvido por Fama e Bliss (1987), que constrói taxas a partir de taxas a termo estimadas em vez de construir taxas através de uma curva de desconto estimada. Fama e Bliss constroem as taxas em duas etapas. Primeiro eles derivam as taxas a termo a partir dos títulos públicos com prazo menor que 1 ano. A segunda etapa envolve construir as taxas a vista através das taxas a termo calculadas anteriormente. Esse é um método de bootstrapping porém envolve adicionar alguns filtros. Importante destacar que na minha modelagem não usarei o método de Fama e Bliss, mas usarei curvas zero cupons que foram construídas através do método convencional de bootstrapping<sup>1</sup>.

### 3.2 Modelando as taxas: A curva de juros de Nelson Siegel

O modelo de Nelson Siegel é um modelo de três fatores que procura aproximar a curva de taxas a termo através de uma função de aproximação. A forma funcional proposta é uma função de Laguerre, à qual consiste do produto entre um polinômio e um termo de decaimento exponencial. A curva de taxas a termo resultante é assumida como solução de uma equação diferencial de segunda ordem com raízes iguais para a taxa de juros à vista

$$Ft(\tau) = \beta_1 t + \beta_2 t * e^{(\lambda \tau)} + \beta_3 t * \lambda \tau e^{-(\lambda \tau)} \quad 2.4$$

---

<sup>1</sup> O Apêndice A contem um exemplo de como calcular a taxa spot teórica (zero cupom) usando o método convencional de bootstrap.

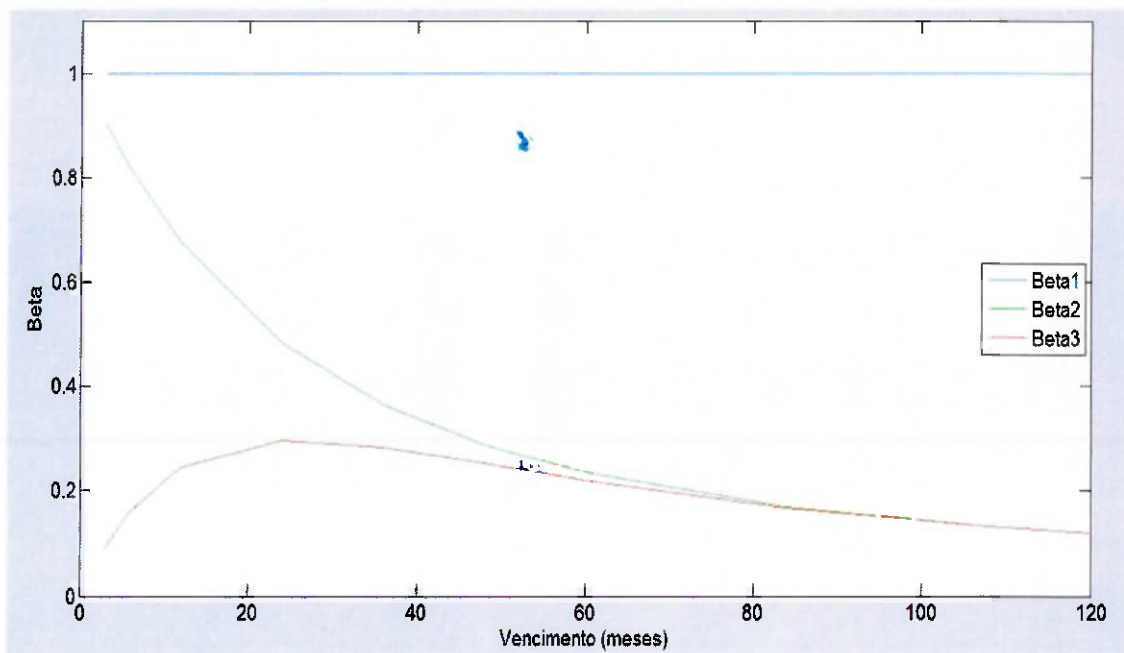
Os parâmetros  $\beta_{1t}, \beta_{2t},$  e  $\beta_{3t}$  são determinados pelas condições iniciais e  $\lambda\tau$  é uma constante associada com a equação. Diebold e Li(2006) reinterpretaram o modelo exponencial de Nelson e Siegel(1987), considerando uma forma paramétrica para a evolução da ETTJ ao longo do tempo em que os coeficientes são tratados como nível, inclinação, e curvatura. A curva de juros correspondente é

$$y(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} * \{(1 - e^{-\lambda\tau}) / \lambda\} + \beta_{3t} * \{((1 - e^{-\lambda\tau}) / \lambda) - e^{-\lambda\tau}\} \quad 2.5$$

De acordo com Diebold e Li (2006) o parâmetro  $\lambda\tau$  pode ser interpretado como o nível de decaimento da curva; onde pequenos valores de  $\lambda\tau$  produz um decaimento lento e um melhor ajuste da curva nos vencimentos mais longos. Por outro lado altos valores de decaimento causam um rápido decaimento e um melhor ajuste da curva em vencimentos mais curtos. Importante notar que  $\lambda\tau$  controla os pesos em que  $\beta_{3t}$  atinge o seu máximo.

Os outros parâmetros  $\beta_{1t}, \beta_{2t},$  e  $\beta_{3t}$  são os fatores latentes dinâmicos. O peso em  $\beta_{1t}$  é 1, e se mantém constante não decaindo a zero. O peso em  $\beta_{2t}$  é uma função que começa em 1 porém decai rapidamente a 0; portanto pode ser visto como um fator de curto prazo. O peso em  $\beta_{3t}$  começa em zero, aumenta, e depois decai a zero; portanto pode ser visto como um fator de médio prazo. A seguir segue a figura 1 com os pesos para cada fator.

Figura 1 Pesos para os Fatores com fator de .07



Fonte: Autor

Os três fatores descritos acima podem ser interpretados em termos de nível, inclinação, e curvatura. O fator de longo prazo  $\beta_{1t}$  controla o nível da curva. Pode se facilmente verificar que  $y(\infty) = \beta_{1t}$ . Alternativamente um aumento em  $\beta_{1t}$  aumenta as taxas igualmente já que o peso de  $\beta_{1t}$  é constante.

O fator de curto prazo  $\beta_{2t}$  está relacionado com a inclinação da curva. Diebold e Li (2006) definem a inclinação como a diferença entre a taxa de juros do papel de 10 anos e taxa de juros do papel de 3 meses portanto  $y(120) - y(3)$ . Um aumento em  $\beta_{2t}$  aumenta as taxas curtas mais que as taxas longas, devido ao maior peso de  $\beta_{2t}$  o que acaba mudando a inclinação da curva de juros.

O fator de médio prazo está relacionado a curvatura da curva de juros. Diebold e Li (2006) definem a curvatura como duas vezes a taxa de juros de 2 anos menos a soma da taxa de juros do papel de 10 anos e taxa de juros do papel de 3 meses portanto  $2*y(24) - y(3) - y(120)$ . Um aumento em  $\beta_{3t}$  tem um efeito pequeno nas taxas de curto e longo prazo, porém às taxas de médio prazo são afetadas já que os pesos carregam influencia no  $\beta_{3t}$  afetando a curvatura da curva de juros.

### 3.3 Fatos estilizados da curva de juros

Um bom modelo que replica a dinâmica da curva de juros deve reproduzir os fatos estilizados históricos referentes ao formato médio da curva de juros, os diferentes formatos da curva em diferentes períodos, e a forte persistência das taxas. A seguir seguem os fatos estilizados expostos por Diebold e Li (2006).

- A curva média de juros é côncava e positiva. No modelo de Diebold e Li a curva média de juros é gerada com os valores médios dos parâmetros estimados  $\beta_{1t}$ ,  $\beta_{2t}$ , e  $\beta_{3t}$ .
- A curva de juros mostra uma variedade de formatos no tempo que podem incluir inclinação positiva, inclinação negativa, e curva invertida.
- A dinâmica das taxas são persistentes e a dinâmica dos spreads são menos persistentes. Persistência nos valores de  $\beta_{1t}$ , e  $\beta_{2t}$  indicam a persistência na dinâmica das taxas.
- Os vencimentos mais curtos da curva de juros mostram maior volatilidade do que os vencimentos mais longos. No modelo de Diebold e Li isso é refletido nos pesos dos fatores. Os vencimentos mais curtos dependem positivamente de  $\beta_{1t}$ , e  $\beta_{2t}$ , enquanto os vencimentos mais longos dependem somente do  $\beta_{1t}$ .
- As taxas de longo prazo são mais persistentes que as taxas de curto prazo. No modelo de Diebold e Li, as taxas longas dependem somente do  $\beta_{1t}$ . Se  $\beta_{1t}$  for o fator mais persistente então as taxas longas serão mais persistentes que as taxas curtas.

Os fatos estilizados por Diebold e Li também se confirmaram nos meus resultados. A curva de juros no período observado é positiva e côncava. A curva de juros mostrou diferentes formatos, inclinação positiva, e inversão. Podemos verificar autocorrelação nos Betas 1 e 2 o que indica persistência na dinâmica da taxas. As taxas mais curtas apresentaram desvios padrões mais altos que as taxas longas o que indica que elas são mais voláteis. E por último as autocorrelações das taxas de longo prazo foram mais persistentes que as taxas de curto prazo. Esses resultados serão demonstrados na próxima seção através das tabelas descritivas na seção 4.2.

#### 4. Dados empíricos da modelagem e previsão da ETTJ

Nessa seção, irei estimar e avaliar o ajuste do modelo de três fatores em uma série temporal. Após verificar o bom ajuste do modelo aos dados empíricos gerarei previsões dos componentes nível, inclinação, e curvatura que foram extraídos através do modelo.

##### 4.1 Os Dados

Primeiramente gostaria de destacar que a maioria dos estudos que modelam a estrutura a termo no Brasil usam o contrato DI futuro. Esses contratos exibem boa liquidez nos contratos de vencimento curto, porém contém informação limitada sobre os riscos das taxas dos títulos públicos. Em vez de usar os DIs os títulos públicos federais prefixados são usados para gerar os dados. Os títulos escolhidos são as LTNs e NTNFs. Abaixo segue uma tabela descritiva dos títulos em questão.

Tabela 1 Características Gerais dos Títulos Públicos Prefixados

Título	Índice	Cupom de Juros	Vencimento mais longo	Tipo	Valor de Face no Vencimento
LTN (Letra do Tesouro Nacional)	-	-	Aprox. 24 meses	Prefixado	R\$ 1.000,00
NTN-F (Nota do Tesouro Nacional - Série F)	-	10% a.a pago semestralmente	Aprox. 120 meses		

Fonte: Autor

A minha análise empírica usa dados de final de mês dos títulos públicos prefixados em vencimentos fixos para construir uma curva zero cupom. Esses dados foram obtidos através da Bloomberg que calcula a curva zero cupom de cada vencimento através do método convencional de bootstrap. Um total de 10 vencimentos foram escolhidos para construção da curva. Os vencimentos são

listados a seguir em meses: 3 6 12 24 36 48 60 84 108 120. O período da amostragem começa em Janeiro de 2008 e termina em Dezembro de 2012.

A figura 2 mostra um gráfico<sup>2</sup> tri dimensional da ETTJ gerada com os dados acima. Pode se notar uma variação temporal no nível. A tabela 2 contém estatísticas descritivas das taxas. Baseado nas estatísticas podemos tirar algumas conclusões sobre a curva de juros. Primeiro a inclinação é positiva. Segundo a volatilidade das taxas longas são menores que as taxas curtas. Terceiro a persistência das taxas longas é mais forte que as taxas curtas. Entre os fatores o nível tem a persistência mais forte e a curvatura a mais fraca. A figura 3 contém a curva mediana feita com os dados médios de cada vencimento contra os percentis 75% e 25%. Baseado nesse gráfico podemos verificar que a distribuição das taxas ao redor das médias tendem a ser assimétricas, a cauda a direita é alongada. A assimetria indica que as taxas longas são menos voláteis que as taxas curtas.

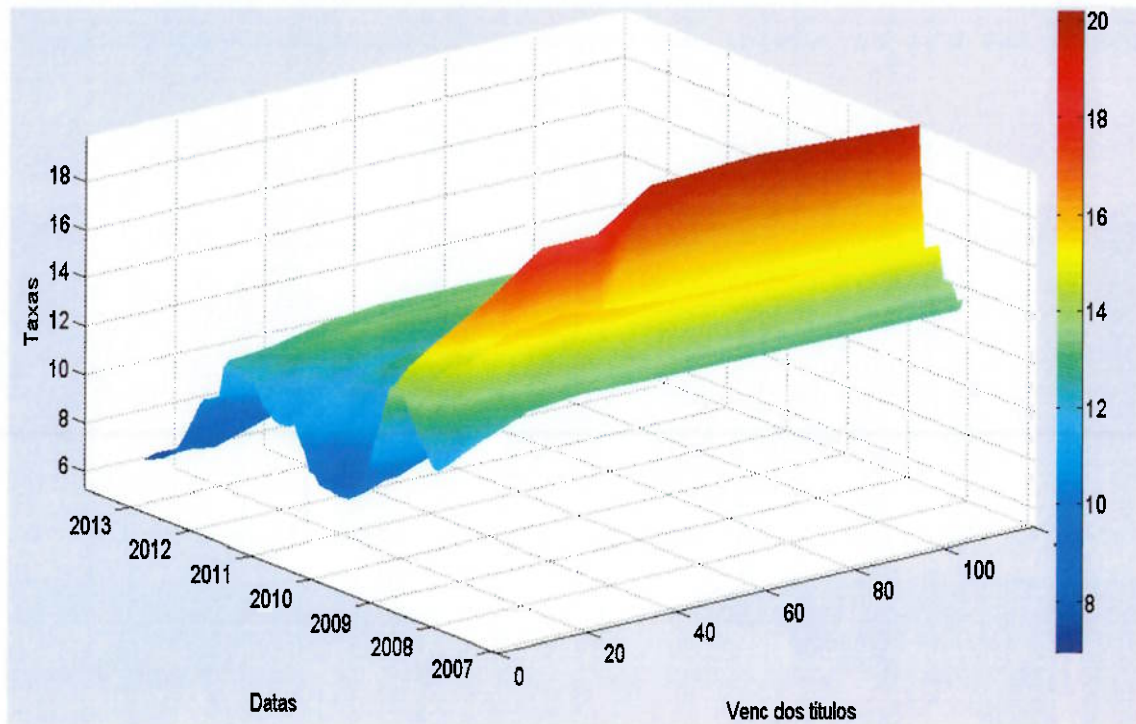
Tabela 2 Estatísticas Descritivas das Curvas de Juros

Venc	Media	DesvPad	Max	Min	ACF1	ACF12
3	10,4683	1,8946	14,1179	6,9900	0,9452	-0,3755
6	10,6615	1,9427	14,7437	7,1741	0,9435	-0,3500
12	11,0084	2,0858	15,4922	7,1715	0,9333	-0,2448
24	11,8477	2,0401	16,7774	7,7915	0,9066	-0,0933
36	12,3409	2,0076	18,4274	8,1947	0,8767	0,0457
48	12,5345	1,8918	18,4618	8,6144	0,8597	0,1133
60	12,6908	1,9154	19,9707	8,8054	0,8218	0,1394
84	12,7542	1,8825	20,1939	9,0073	0,8076	0,1612
108	12,8651	1,7827	19,9925	9,4225	0,7938	0,1923
120 (Nível)	12,8993	1,7029	19,8717	9,4002	0,7784	0,1960
Inclinação	2,4310	1,4865	5,7538	-0,1652	0,7654	-0,1916
Curvatura	0,3277	1,5655	3,4518	-2,6679	0,9136	-0,2959

Fonte: Autor

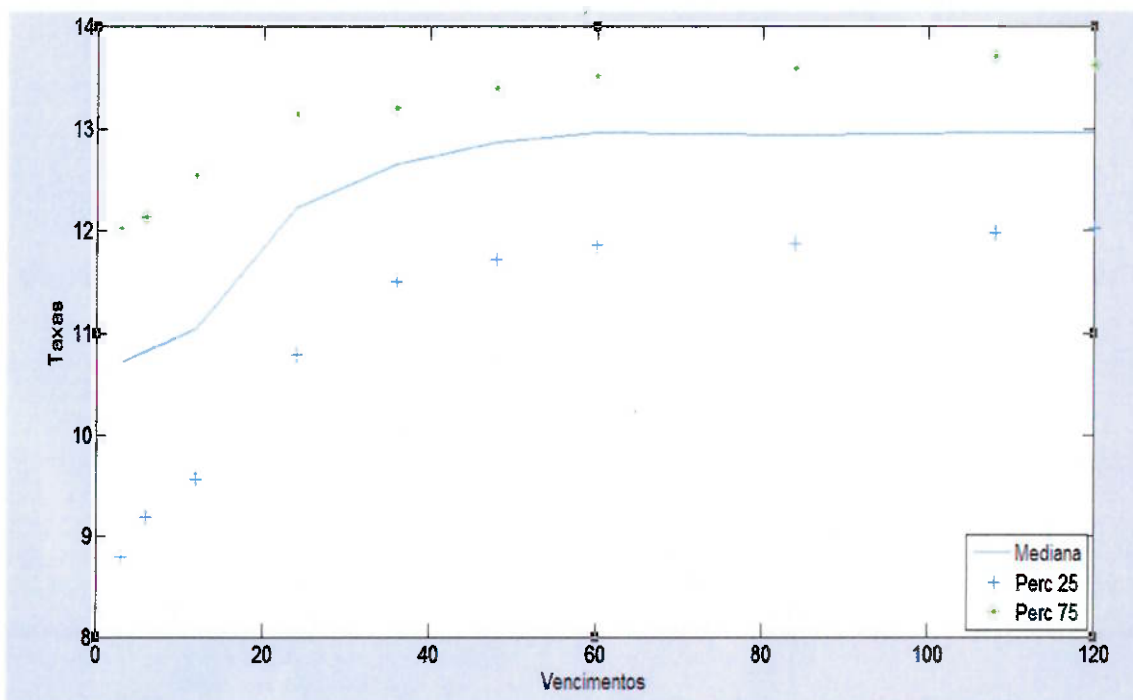
<sup>2</sup> Apêndice B contém um gráfico do tipo meshgrid da ETTJ

Figura 2 Estrutura a termo 01-2008 a 12-2012



Fonte: Autor

Figura 3 Mediana vs percentil 25 e 75



Fonte: Autor

## 4.2 Ajuste da curva de juros

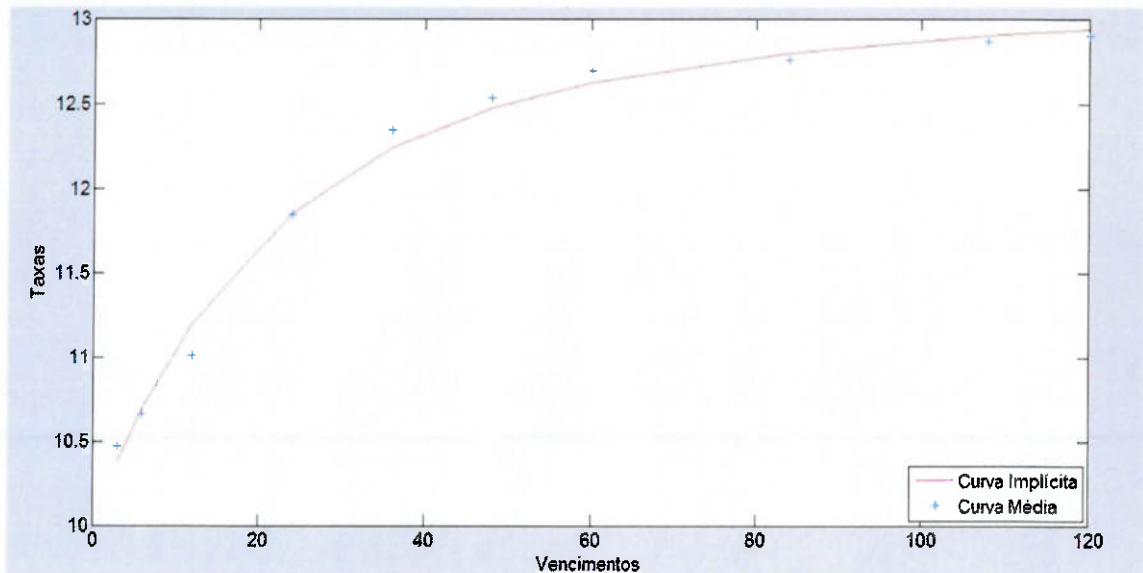
O ajuste da curva é feita através do modelo de três fatores descrito acima através da fórmula 2.5. O modelo de Diebold e Li(2006) difere do modelo de Nelson Siegel(1987) porque o  $\lambda t$  é fixado em um valor específico possibilitando uma regressão linear para estimação dos coeficientes (fatores) para cada fim de mês  $t$ . A escolha do  $\lambda t$  é muito importante para o melhor ajuste da curva. Lembre que o  $\lambda t$  determina o vencimento no qual a curvatura ou fator  $\beta_{3t}$  atinge o seu máximo. Diebold e Li(2006) definem esse vencimento como 30 meses. Nos EUA o valor de  $\lambda t$  que maximiza o peso no fator de médio prazo é ,0609. Baseado na minha simulação o valor de  $\lambda t$  é ,07<sup>3</sup> e o vencimento correspondente é de 24 meses.

Uma série temporal com estimativas para os coeficientes e outras estatísticas como resíduos, são geradas após usar regressões sobre os dados para cada final de mês. Baseado nas estatísticas gerei algumas figuras que indicam a qualidade do ajuste do modelo aos dados reais. A figura 4 contém dados da curva média contra a curva implícita. Note que as duas curvas quase se sobrepõem. curva média foi gerada com os valores médios de cada vencimento. A curva implícita foi gerada com as médias dos betas. Adicionalmente gerei a figura 5 que representa a curva de juros em datas específicas contra curva de juros ajustada através do modelo de três fatores. Perceba que o modelo consegue replicar diferentes tipos de curvas; invertida, e inclinação positiva.

---

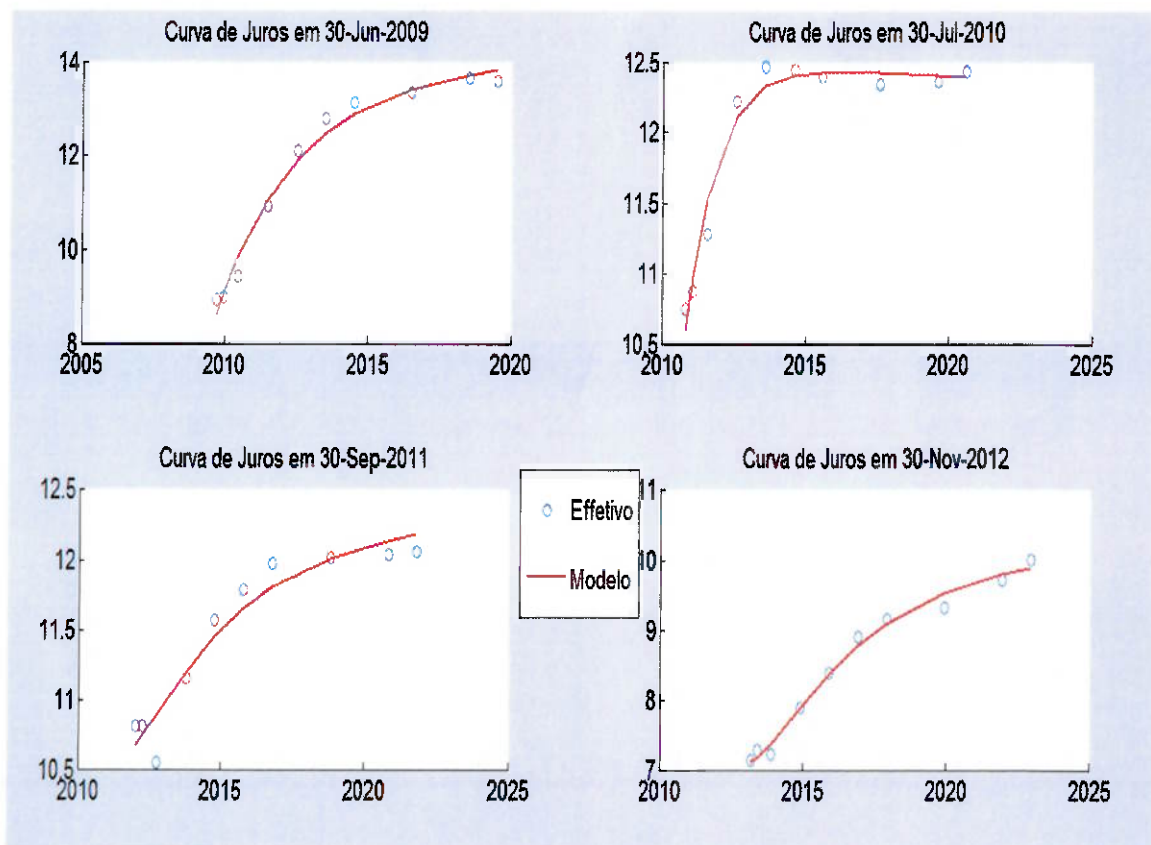
<sup>3</sup> O Apêndice C contém uma tabela com o resultado da minha simulação. A simulação consiste em variar o  $\lambda$  e maximizar o  $\beta_3$

Figura 4 Curva Média vs Curva Implícita usando a Média dos Betas



Fonte: Autor.

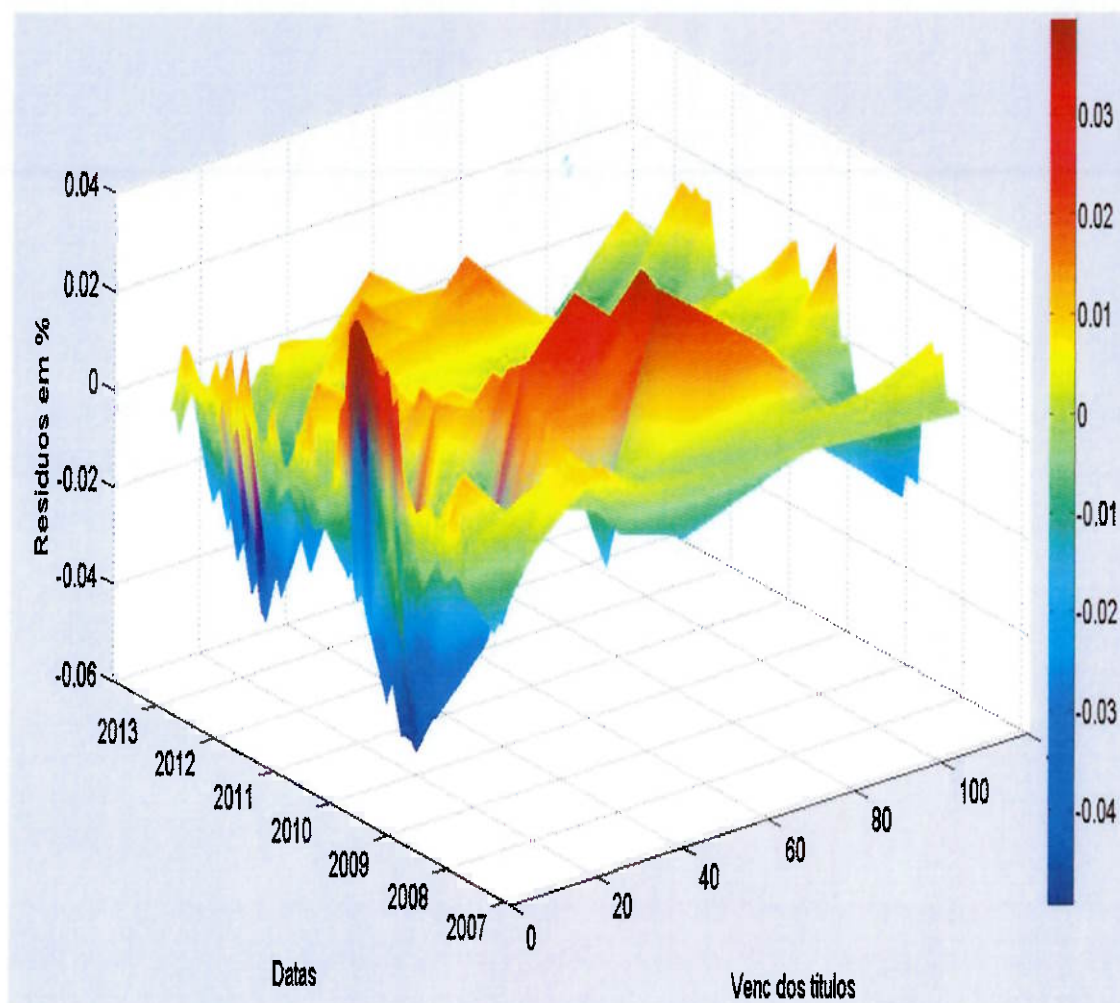
Figura 5 Ajuste da Curva em dias específicos



Fonte: Autor

A figura 6<sup>4</sup> contém dados dos resíduos e indica que as diferenças de preços são estáveis e próximas de zero. A tabela 3 contém estatísticas que descrevem o ajuste aos dados da amostragem. Pode-se verificar que as autocorrelações indicam persistência nos erros de preço.

Figura 6 Estrutura a Termo dos Resíduos



Fonte: Autor

<sup>4</sup> Gráfico do tipo meshgrid disponível no apêndice D

Tabela 3 Estatísticas Descritivas dos Resíduos das Curvas de Juros

Venc	Media	DesvPad	Max	Min	MAE	RMSE	ACF1	ACF12
3	-0,1077	0,1262	0,1248	-0,3749	0,1069	0,1630	0,8258	-0,2739
6	0,0207	0,0858	0,2141	-0,1961	0,0226	0,0903	0,8128	0,1034
12	0,1867	0,1706	0,4679	-0,1932	0,1877	0,2539	0,7657	-0,5244
24	0,0094	0,1503	0,3762	-0,2376	0,0103	0,1509	0,8788	-0,2509
36	-0,1032	0,0888	0,0715	-0,2957	0,1018	0,1347	0,7160	-0,1163
48	-0,0639	0,1477	0,3269	-0,4194	0,0625	0,1602	0,7235	-0,4469
60	-0,0692	0,1813	0,1902	-0,7187	0,0678	0,1924	0,7805	-0,3798
84	0,0464	0,0834	0,1939	-0,3523	0,0469	0,0956	0,6324	-0,1563
108	0,0352	0,0684	0,2173	-0,0906	0,0354	0,0774	0,7277	-0,2960
120	0,0357	0,1514	0,4373	-0,2377	0,0360	0,1556	0,8191	-0,3195

Fonte: Autor

A seguir apresento as figuras 7 a 9 que mostram os Betas Implícitos  $\beta_{1t}$ ,  $\beta_{2t}$ , e  $\beta_{3t}$  acompanhado dos dados empíricos definidos anteriormente nível, inclinação, e curvatura. Baseado nos gráficos o  $\beta_{1t}$  teve o melhor desempenho acompanhando de perto o nível. O  $\beta_{2t}$  teve o segundo melhor desempenho acompanhando a inclinação com uma distancia maior em algumas datas. O  $\beta_{3t}$  teve uma diferença maior entre os 3 fatores. As correlações entre os fatores estimados e os dados empíricos nível, inclinação e curvatura são ,9376, -,9833, e ,9930 respectivamente o que indica um bom ajuste do modelo .

Figura 7 Beta1 - Nível vs Beta1 Implícito

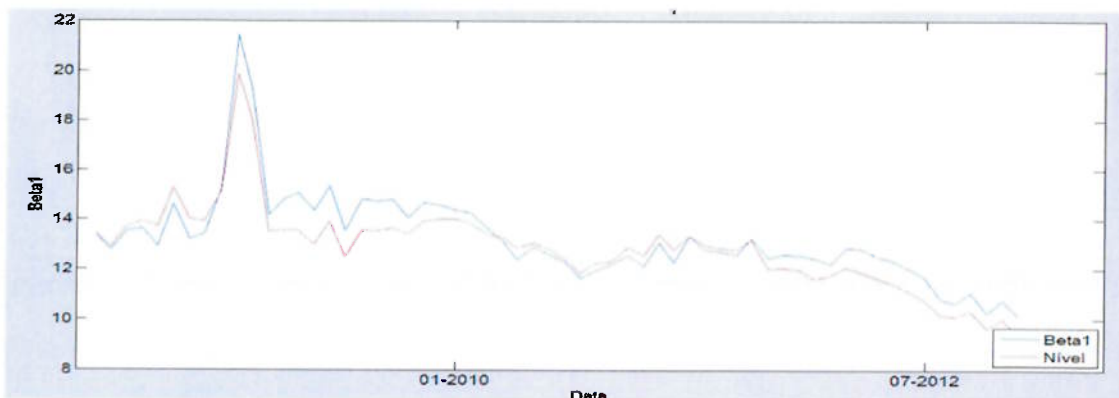
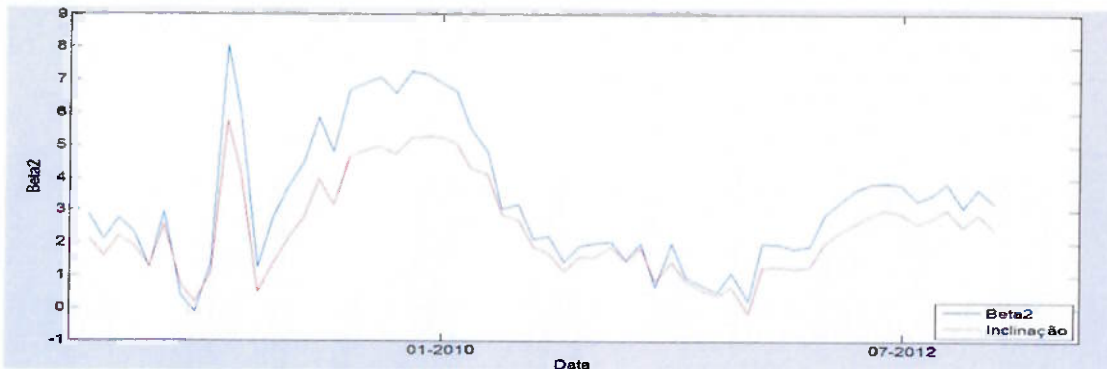
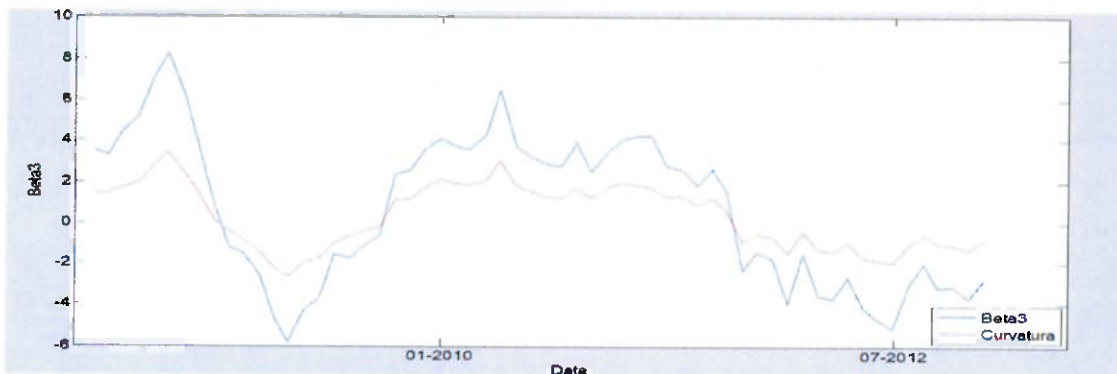


Figura 8 Beta2 - Inclinação vs Beta2 Implícito



Fonte: Autor

Figura 9 Beta3 - Curvatura vs Beta3 Implícito



Fonte: Autor

As estatísticas descritivas para os fatores estimados seguem abaixo na tabela 4. Perceba que dentre as autocorrelações dos três fatores o primeiro fator é o mais persistente seguido do segundo fator. Lembre que o quinto ponto dos fatos estilizados afirmava que se o Beta 1 fosse o fator mais persistente as taxas longas seriam mais persistentes o que se confirmou na tabela 2.

Tabela 4 Estatísticas dos Betas Implícitos

Betas	Média	DesvPad	Max	Min	ACF1	ACF6	ACF12
Beta1	13,2466	1,8303	21,4121	10,1356	0,7516	0,3553	0,3960
Beta2	-3,2562	2,0840	0,1268	-8,0654	0,7741	0,3588	-0,2210
Beta3	0,6331	3,6644	8,2337	-5,8359	0,9235	0,3031	-0,3283

Fonte: Autor

### 4.3 Modelagem e previsão dos três fatores

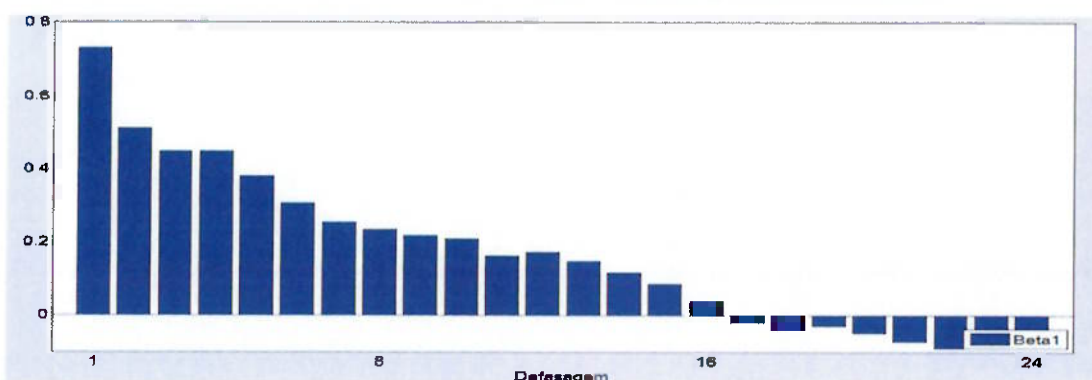
No modelo de Diebold e Li (2006) os fatores são modelados e previstos através de processos autoregressivos de primeira ordem AR(1). O processo começa com a estimação dos fatores através de uma regressão. Esse processo já foi feito anteriormente através da regressão sobre os dados o que resulta no betas  $\beta_{1t}$ ,  $\beta_{2t}$ , e  $\beta_{3t}$ . Para prever os Betas uma outra regressão é feita em cima dos betas atribuindo um período de defasagem. O período de defasagem indica o horizonte da previsão. As previsões das taxas são geradas através da equação 5 que segue abaixo.

$$yF_{t+z}(t) = {}^h\beta_{1\ t+z;t} + {}^h\beta_{2\ t+z;t} * \{(1 - e^{-\lambda t\tau}) / \lambda\tau\} + {}^h\beta_{3\ t+z;t} * \{((1 - e^{-\lambda t\tau}) / \lambda\tau) - e^{-\lambda t\tau}\} \quad (3)$$

onde,  $yF$  = previsão da taxa e  $z$  = períodos a frente. A previsão do beta  ${}^h\beta_{1\ t+z;t}$  é feita através de uma regressão  $C_g + y_g * \beta_{gt}$ ,  $g = 1, 2, 3$  em cima dos betas estimados. Os parâmetros  $C_g + y_g$  são gerados através de uma regressão nos fatores  $\beta_{gt}$  defasados  $z$  períodos  $\beta_{g\ t-z}$  e um intercepto.

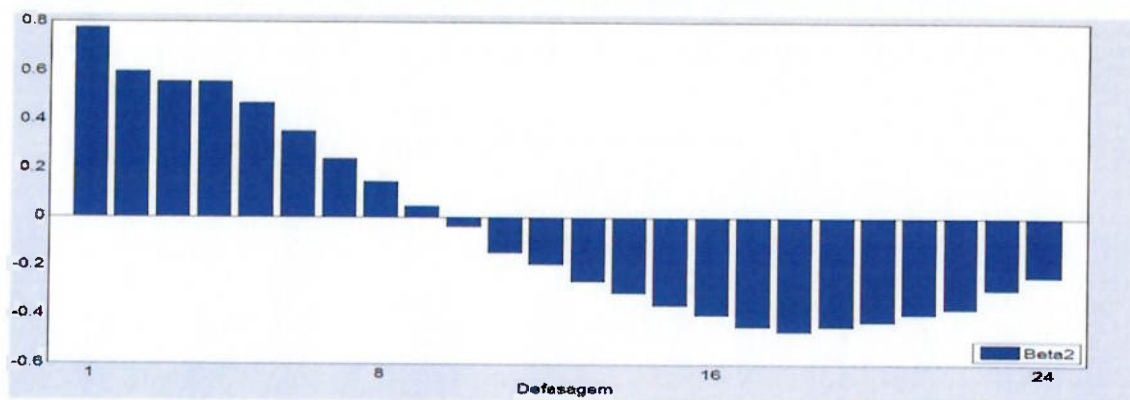
Diebold e Li (2006) também geram previsões usando o processo VAR. Porém esse estudo se concentra em gerar as previsões usando o modelo AR(1). Na figura 10 a 15 apresento a autocorrelação dos betas estimados e os resíduos dos fatores estimados usando dados da amostragem. A autocorrelação dos fatores mostrou uma queda geométrica indicando estabilidade. A autocorrelação dos resíduos ficaram próximos de zero o que indica um bom ajuste ao modelo AR(1).

Figura 10 Autocorrelação do Beta 1 com defasagem de 24 meses



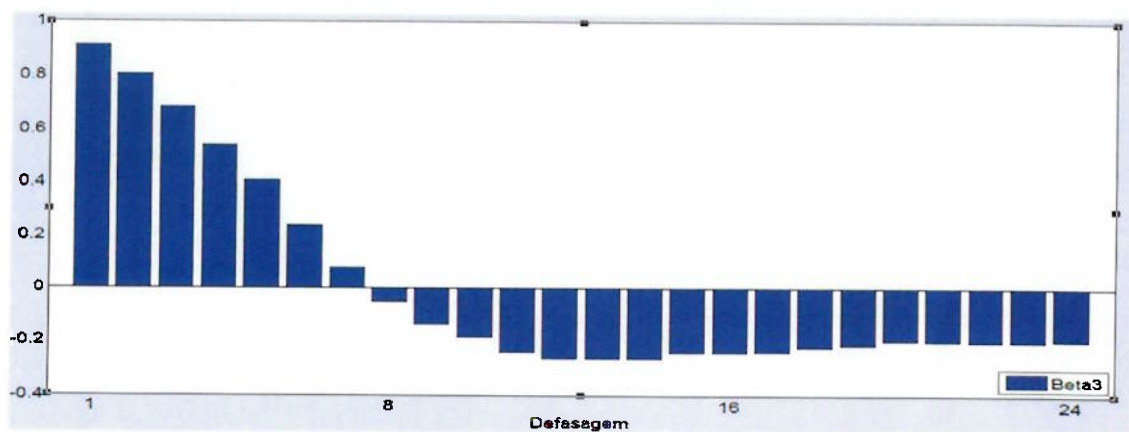
Fonte: Autor

Figura 11 – Autocorrelação do Beta 2 com defasagem de 24 meses



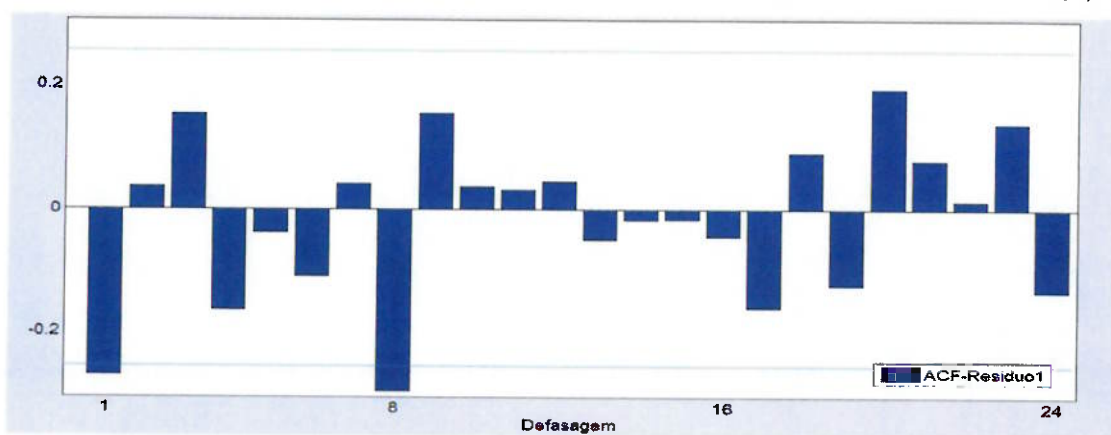
Fonte: Autor

Figura 12 – Autocorrelação do Beta 3 com defasagem de 24 meses



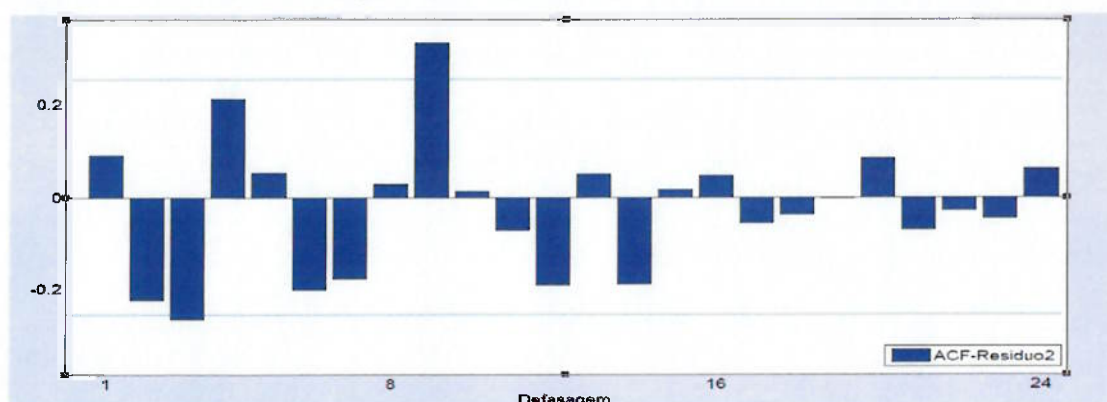
Fonte: Autor

Figura 13 – Autocorrelação dos Resíduos de B1 ao ajuste do modelo AR(1)



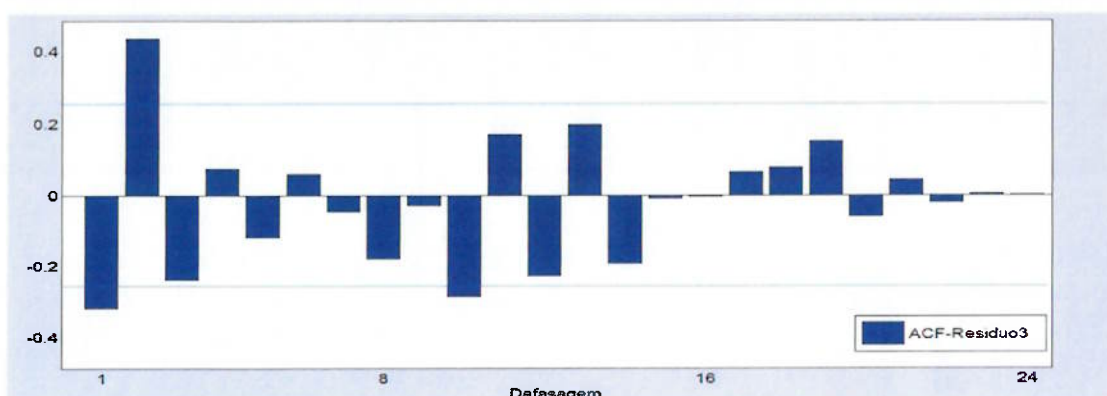
Fonte: Autor

Figura 14 – Autocorrelação dos Resíduos de B2 ao fit do modelo AR(1)



Fonte: Autor

Figura 15 – Autocorrelação dos Resíduos de B3 ao ajuste do modelo AR(1)



Fonte: Autor

#### 4.4 Dados empíricos da previsão do modelo (fora da amostragem)

Após estimar os meus parâmetros e apresentar os resultados do meu ajuste (fit) usando dados da amostragem estou pronto para apresentar as minhas previsões com dados fora da amostragem. No modelo de Diebold e Li (2006) a curva de juros só depende dos parâmetros estimados, portanto prever a curva de juros equivale a prever os betas. O período das minhas estimativas foram de Jan de 2008 a Dez de 2012 e o período das minhas previsões foram de Jan 2013 a Set de 2014. Nas tabelas 5 e 6 apresento estatísticas referente aos erros das minhas previsões com defasagens de um e três meses para os vencimentos 3, 12, 24, 48, 84, 120.

Tabela 5 Estatísticas dos Erros das Previsões Usando Modelo AR1

Venc	Média	DesvPad	REQM	ACF1	ACF3
3	0,9116	1,2560	1,5276	0,3327	-0,1341
12	0,5749	0,8512	1,0102	-0,1281	-0,3027
24	0,5655	0,8414	0,9970	-0,2913	-0,0147
48	0,5479	0,8929	1,0293	-0,0923	0,1812
84	0,4357	0,9018	0,9821	-0,3465	0,0459
120	0,6469	1,0684	1,2271	-0,3095	0,1201

Fonte: Autor

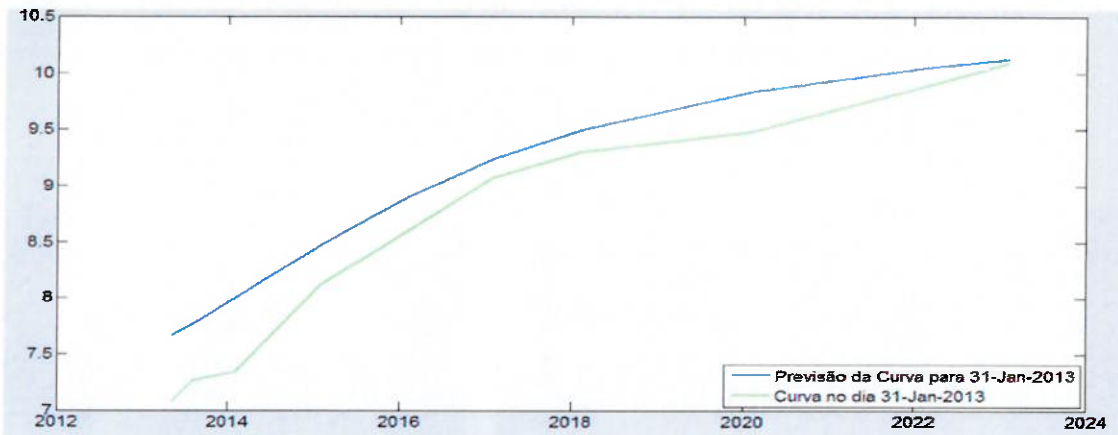
Tabela 6 Estatísticas dos Erros das Previsões AR1 Defasagem 3 Meses

Venc	Média	DesvPad	REQM	ACF3	ACF6
3	-1,3290	2,2255	1,1506	-0,2589	0,0478
12	-1,4476	2,0435	1,0702	-0,0959	-0,3936
24	-1,2247	1,9206	0,9403	0,0605	0,0546
48	-0,6997	1,7886	0,5676	-0,2051	0,0379
84	-0,5631	1,6658	0,7045	-0,0536	-0,2560
120	-0,3086	1,5160	0,6204	-0,2822	-0,3268

Fonte: Autor

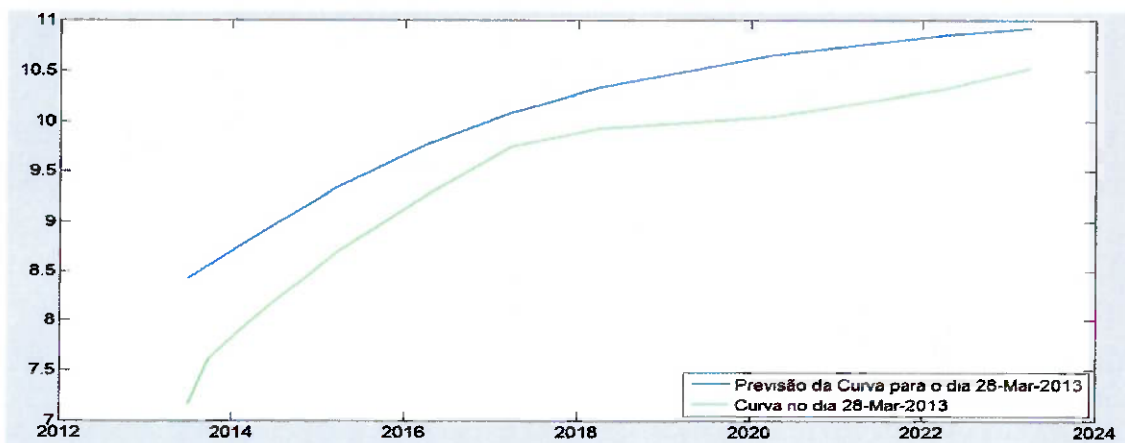
Baseado nas tabelas é possível ver que as previsões melhoram ao aumentar o período de defasagem. Comparando a Raiz do Erro Quadrático Médio (REQM) de um e três meses pode-se notar que o REQM das previsões com defasagem de três meses são menores que as previsões de um mês. Isso indica que o modelo tem melhor predição ao aumentar o horizonte de previsão. Diebold e Li (2006) também reportam que as previsões deles melhoravam ao aumentar o horizonte da previsão. Também é possível verificar correlação serial nos erros através das autocorrelações. Nas figuras 16 a 18 apresento as previsões em datas específicas com defasagens de 1, 3, e 6 meses. A figura 18 contém cenários adicionais. Esses cenários foram construídos com os intervalos de confiança gerados através das regressões.

Figura 16 – Previsão da Curva de Juros 1 mês a frente



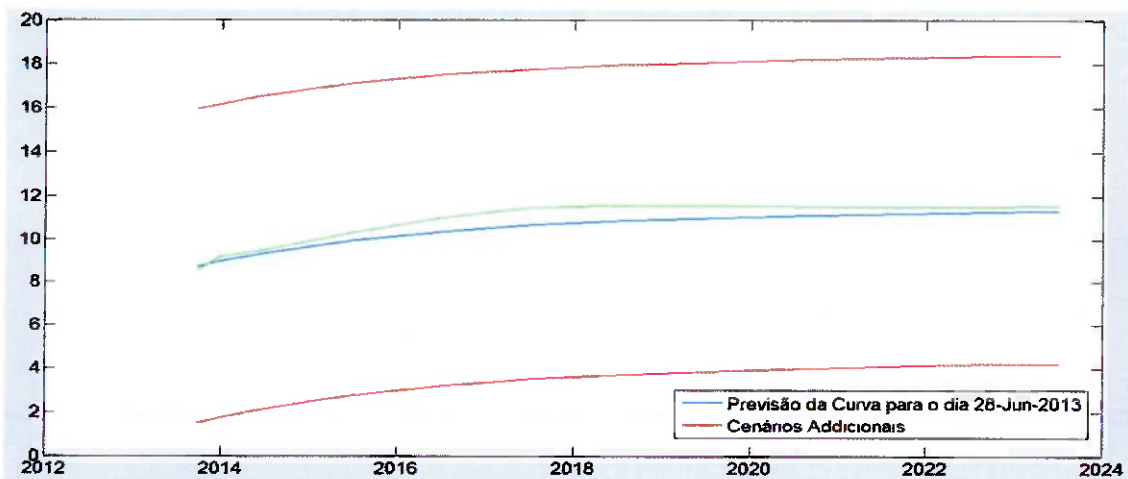
Fonte: Autor

Figura 17 – Previsão da Curva de Juros 3 meses a frente



Fonte: Autor

Figura 18 – Previsão da Curva de Juros 6 meses a frente



Fonte: Autor

## 5. CONCLUSÃO

Nesse estudo usei o modelo de Diebold e Li(2006) para estimar a estrutura a termo. Através de uma regressão linear nas taxas zero cupom das LTNs e NTNFS estimei os parâmetros que se referem ao nível, inclinação, e curvatura. Os resultados das minha estimações foram boas com correlações entre dados empíricos e dados estimados de ,9376, -,9833, e ,9930, e erros de preço próximos de zero. Dado o bom ajuste segui adiante para modelar e prever as taxas.

No modelo de Diebold e Li(2006) as previsões das taxas são geradas prevendo os betas estimados através de um processo AR(1). Antes de prever os dados com dados fora da amostragem um teste foi feito na seção 4.3 usando os dados da amostragem. O teste indicou um bom ajuste dos dados estimados pois as autocorrelações dos fatores foram estáveis e as autocorrelações dos resíduos da previsões foram baixas. Após verificar o bom ajuste do modelo aos dados da amostragem segui para prever os betas usando os dados fora da amostragem.

Os resultados das previsões para os dados fora da amostragem indicam bom encaixe se olharmos aos gráficos. O formato das curvas preditivas foram bem próximas das curvas efetivas porém os resultados em geral foram modestos com REQM acima de ,5 e existência de correlação serial. A presença de autocorrelação indica que o modelo pode ser melhorado talvez atribuindo ordens maiores ao processo autoregressivo ou até mesmo usando um processo autoregressivo vetorial (VAR).

## REFERÊNCIAS

- Anderson, T.G., Lund (1997). Stochastic volatility and mean drift in the short term interest rate diffusion source of steepness, level and curvature in the yield curve. Working Paper 214, Department of Finance, Kellogg School, Northwestern University
- Balduzzi, P.m Das, S.R., Foresi, S., Sundaram, R.,1996. A simple approach to the three factor affine term structure models. *Journal of Fixed Income* 6, 43-53.
- Bjork, T. and B.J Christensen (1999), Interest rate dynamics and consistent forward rate curves. *Mathematical Finance*, 323-348.
- Bliss, R., 1997a. Movements in the term structure of interest rates. *Economic Review Federal Reserve Bank of Atlanta*
- Bliss, R., 1997b. Testing term structure estimation methods. *Advances in Futures and Options Research* 9, 97-231
- Brigo D. and F. Mercurio (2006). *Interest rate Models – Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit*. Springer.
- Caldeira, J.F.G.V. Moura and M.S Portugal(2009, August). Efficient interest rate curve estimation and forecasting in Brazil. *PPGE Textos para Discussão 2009-08 – UFRGS*
- Cox, J.C.J. Ingersoll, Jonathan E. and S.A Ross (1985, March). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica* 53(2), 385-407.
- Dai Q. and K.J. Singleton (2000). Specification analysis of affine term structure models *Journal of Finance* 1943-1978
- De Jong F 2000 Time series and cross section information in affine term structure models. *Journal of Business and Economics Statistics* 18, 300-314
- Diebold F.X. and C. Li (2006, February). Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of Econometrics* 130(2), 337-364.
- Duffee, G., 2002. Term premia and interest rate forecast in affine models. *Journal of Finance* 57, 405-443

- Duffie D. and R. Kan (1996). A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance* 6(4), 379-406.
- Fabozzi, Frank, J., 2000. *Mercados, Análise e Estratégias de Bônus*, 3 edição, Qualitymark Ed, pg 125-129.
- Fama, E., Bliss, R., 1987. The information in long maturity forward rates. *American Economic Review* 77, 680-692
- Heath, D., Jarrow, R, Morton, A., 1992, Bond pricing and the term structure of interest rates a new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica* 60, 77-105
- Hull, J., White A., 1990. Pricing interest rate derivative securities. *Review of Financial Studies* 3, 573-592
- Hull, J., 2009. *Options, Futures, and Other Derivatives* 7<sup>th</sup> edition, Pearson Education, 673-681.
- Litterman R., Scheinkman, J., 1994. Common factors affecting bond returns. *Journal of Fixed Income* 1, 54-61
- L. Alves, R.Cabral, R.Munclinger, M.Rodriguez. 2012. On Brazils Term Structure: Stylized Facts and Analysis of Macroeconomic Interactions. *Textos para Discussão*
- McCulloch, 1975, Tax Adjusted Yield Curve 93-6, *Journal of Finance* 30, 811-830
- McCulloch, J.H., Kwon, H., 1993 U.S. term structure data, 1947-1991. Working Paper 93-6, Ohio State University
- Nelson, C.R., Siegel, A.F., 1987 Parsimonious modelling of yield curve. *Journal of Business* 60, 473-489.
- Vasicek O., 1977. An equilibrium characterization of term structure. *Journal of Financial Economics* 5 177-188.
- Vasicek O.A., Fong, H.G., 1982. Term structure modelling using exponential splines. *Journal of Finance* 37, 339-34

## APÊNDICE A

Tabela 1 Vencimento e Retorno até o Vencimento de 4 Títulos		
Período	Prazo	Retorno até o Vencimento em %
1	0,5	0,0600
2	1	0,0700
3	1,5	0,0800
4	2	0,0900

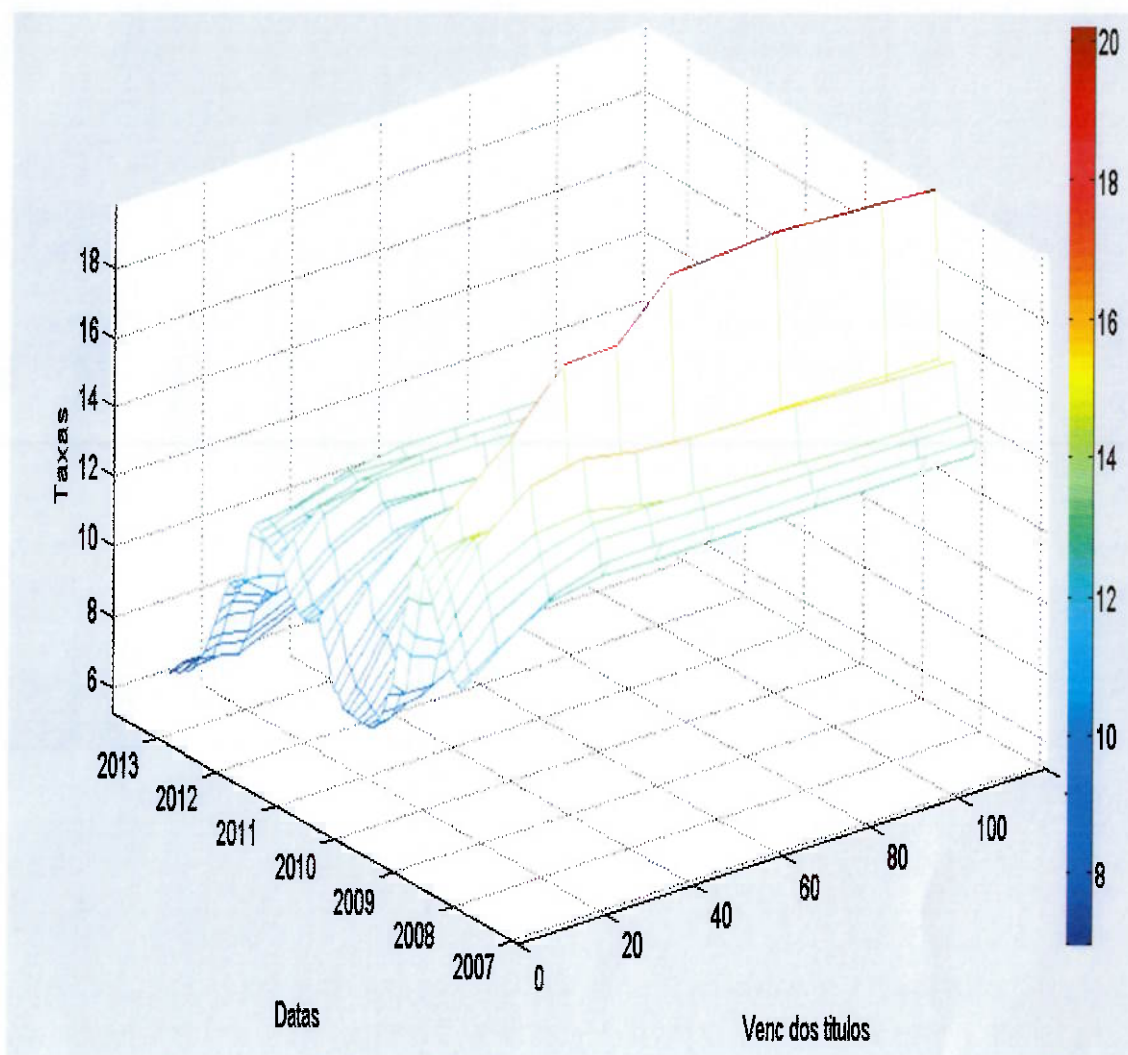
Obs: Dado que os retornos do período 1 e 2 são taxas zero cupons as taxas spots teóricas para esses dois períodos não precisam ser calculados. Portanto calculou se as taxas spots teóricas (zero cupom) para os títulos com prazo de 1,5 e 2. A primeira tabela contém a taxa zero cupom para o título com vencimento em 1,5 e a segunda tabela contém a taxa zero cupom para o título com vencimento em 2 anos.

Coupons	4	4	104
Tx de Desconto	1,03	1,035	tx spot teo
VP	$100 = (4/(1,03) + 4/(1,035)^2 + 104 / (tx\ spt\ teo)^{(1/3)})$		
Achar Tx Spot Teo	92,38246	$100 - (4/(1,03) + 4/(1,035)^2)$	
Tx Spot Teo	0,040274	$(104/92,3824)^{(1/3)} - 1$	
Tx Spot Teo a.a	0,080549		

Coupons	4,5	4,5	4,5	104,5
Tx de Desconto	1,03	1,035	1,040274459	tx spot teo
VP	$100 = (4,5/(1,03) + 4/(1,035)^2 + (4,5/(1,0402)^3 + 104,5 / (tx\ spt\ teo)^{(1/4)})$			
Achar Tx Spt Teo	87,43295	$100 - (4,5/1,03) + (4,5/1,035)^2 + (4,5/1,0402)^3$		
Tx Spot Teo	0,045587	$(104,5 / 87,4329)^{(1/4)} - 1$		
Tx Spot Teo a.a	0,091175			

Tabela 2 Taxa Spot Teóricas		
Período	Anos	Retorno até o Vencimento em %
1	0,5	0,0600
2	1	0,0700
3	1,5	0,0805
4	2	0,0912

### APÊNDICE B



**APÊNDICE C**

Lambda	Beta1	Beta2	Beta3
0,01	-0,5161	-0,5549	0,5311
0,02	0,0313	0,2298	0,7004
0,03	0,6116	0,7171	0,8336
0,04	0,8102	0,8752	0,9204
0,05	0,8825	0,9376	0,9678
0,06	0,9172	0,9678	0,9884
0,07	0,9376	0,9833	0,9930
0,08	0,9511	0,9899	0,9883
0,09	0,9608	0,9900	0,9785
0,1	0,9682	0,9846	0,9659
0,11	0,9739	0,9745	0,9518
0,12	0,9785	0,9600	0,9370
0,13	0,9822	0,9417	0,9218
0,14	0,9852	0,9197	0,9065
0,15	0,9876	0,8945	0,8913
0,16	0,9895	0,8662	0,8763
0,17	0,9911	0,8351	0,8616
0,18	0,9924	0,8014	0,8471
0,19	0,9935	0,7652	0,8330
0,2	0,9943	0,7268	0,8192

## APÊNDICE D

