

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

**Lucas José Dantas Alcântara**

**Coletores Não Lineares de Energia Piezoelétrica para  
Chaveamento de Temperatura: Uma Abordagem Analítica,  
Multifísica e Experimental**

**São Carlos**

**2024**



**Lucas José Dantas Alcântara**

**Coletores Não Lineares de Energia Piezoelétrica para  
Chaveamento de Temperatura: Uma Abordagem Analítica,  
Multifísica e Experimental**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Mecatrônica, da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Mecatrônico.

Orientador: Prof. Dr. Paulo S. Varoto

**São Carlos  
2024**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da  
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

A347c Alcântara, Lucas José Dantas  
Coletores não lineares de energia piezoelétrica  
para chaveamento de temperatura: uma abordagem  
analítica, multifísica e experimental / Lucas José  
Dantas Alcântara; orientador Paulo Sérgio Varoto. São  
Carlos, 2024.

Monografia (Graduação em Engenharia Mecatrônica)  
-- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade  
de São Paulo, 2024.

1. Colheita de energia piezoelétrica. 2.  
Chaveamento de temperatura. 3. Osciladores não  
lineares. 4. Modelagem analítica. 5. Modelagem  
multifísica. 6. Ensaios experimentais. I. Título.

## FOLHA DE AVALIAÇÃO

**Candidato:** Lucas José Dantas Alcântara

**Título:** Coletores Não Lineares de Energia Piezoelétrica para Chaveamento de Temperatura: Uma Abordagem Analítica, Multifísica e Experimental

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Escola de Engenharia de São Carlos da  
Universidade de São Paulo  
Curso de Engenharia Mecatrônica.

### BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Paulo S. Varoto  
(Orientador)

Nota atribuída: 10,0 (DEZ)

Prof. Dr. Rafael de Oliveira Telor

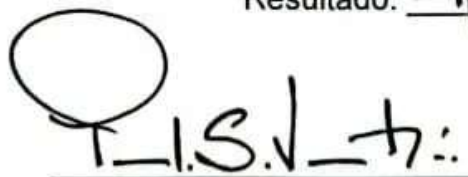
Nota atribuída: 10,0 (DEZ)

Prof. Dr. Leopoldo P. R. Oliveira

Nota atribuída: 10,0 (DEZ)

Média: 10,0 (DEZ)

Resultado: APROVADO



Data: 28/11/2024

Assinatura do Presidente da Banca

Este trabalho tem condições de ser hospedado no Portal Digital da Biblioteca da EESC

SIM ☒ NÃO ☐ Visto do orientador: pl:



*Dedico este trabalho com todo amor e gratidão a meus pais, Alexandre, Fábio e Karina,  
cujo incentivo me deu a coragem de me afastar de casa em busca dos meus sonhos,  
sempre com a certeza de que tenho em vocês o meu porto seguro.*





## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais - Alexandre, Fábio e Karina - pelo amor e apoio incondicional que recebi toda minha vida.

Às minhas avós - Fátima, Lenora e Jó - e aos meus avôs - Geraldo, João e Ney - por todo carinho e cuidado.

Aos meus irmãos - Arthur, Gabriel, Laura e Luisa - pela parceria, risadas e por me motivarem constantemente a ser um exemplo para eles.

À minha família, por sempre torcer muito por mim.

À minha namorada, Rebeca, pela companhia, paciência e apoio.

Aos meus colegas e amigos, pelos momentos de descontração e companheirismo, em especial a: Augusto, Caio, Lorena e Lucas, pelo convívio diário durante meus anos de graduação.

À Escola de Engenharia de São Carlos (EESC-USP), pelo ensino de qualidade.

Ao meu orientador, Dr. Paulo Sérgio Varoto, pela orientação e ensinamentos.

Ao Eng. M.Sc. Arthur Barbosa, estudante de doutorado junto ao FEMTO-ST pela orientação, amizade e inestimável auxílio durante a etapa experimental deste trabalho.

Ao LabDin, Laboratório de Dinâmica da EESC pela infraestrutura e apoio técnico através de seus competentes técnicos de laboratório.

A parte experimental do presente trabalho foi realizada no âmbito da EIPHI Graduate School (Contrato nº ANR-17-EURE-0002) e apoiada pela região de Bourgogne-Franche-Comté. Os dados experimentais aqui apresentados foram obtidos a partir de ensaios realizados junto ao Departamento de Mecânica Aplicada, FEMTO-ST Institute, Besançon, França. O autor e seu supervisor da EESC-USP expressam sua gratidão ao FEMTO-ST pela oportunidade de interação bem como utilização dos dados experimentais, que contribuíram de maneira muito significativa para a realização do trabalho.



*“A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.”*

*Albert Einstein*



## RESUMO

ALCÂNTARA, L. **Coletores Não Lineares de Energia Piezoelétrica para Chaveamento de Temperatura: Uma Abordagem Analítica, Multifísica e Experimental.** 2024. 80 p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

Este trabalho investiga o comportamento dinâmico de um coletor de energia piezoelétrico submetido a variações de temperatura, com foco na aplicação de bifurcações para monitoramento térmico. O sistema analisado consiste em um oscilador eletromecânico não linear, cuja resposta é estudada por meio de modelos analíticos, simulações em um software multifísico e experimentos. As análises incluem a busca pela resistência elétrica ótima para maximizar a potência e a tensão geradas, além de explorar o comportamento do sistema sob condições de variação brusca e gradual de temperatura. Observa-se que o aumento da temperatura faz com que o sistema dilate, resultando em cargas axiais devido à restrição dos engastes e em uma redução do amortecimento causada pela força exercida nos parafusos. Essas cargas deslocam a resposta em frequência do sistema e, consequentemente, a frequência de salto, refletida pelo aumento na saída de tensão elétrica, o que permite que o sistema seja utilizado como chave térmica. Os resultados mostram que o desempenho do coletor é influenciado pela taxa de aquecimento, sendo mais eficaz sob variações térmicas lentas. Este estudo contribui para o desenvolvimento de sistemas de monitoramento térmico, propondo uma aplicação de coletores de energia piezoelétrica para o chaveamento de sistemas em condições de temperatura variável.

**Palavras-chave:** Colheita de energia piezoelétrica. Chaveamento de temperatura. Osciladores não lineares. Modelagem analítica. Modelagem multifísica. Ensaios experimentais.



## ABSTRACT

ALCÂNTARA, L. **Nonlinear Piezoelectric Energy Harvesters for Temperature Switching: An Analytical, Multiphysical, and Experimental Approach.** 2024. 80 p. Monograph (Conclusion Course Paper) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

This work investigates the dynamic behavior of a piezoelectric energy harvester subjected to temperature variations, focusing on the application of bifurcations for thermal monitoring. The analyzed system consists of a nonlinear electromechanical oscillator, whose response is studied through analytical models, multiphysics simulations, and experiments. The analyses include identifying the optimal electrical resistance to maximize the generated power and voltage, as well as exploring the system's behavior under abrupt and gradual temperature variations. It is observed that an increase in temperature causes the system to expand, resulting in axial loads due to clamping restrictions and reduced damping caused by the forces exerted on the screws. These loads shift the system's frequency response and, consequently, the jump frequency, reflected in the increase of the electrical voltage output, enabling the system to function as a thermal switch. The results show that the harvester's performance is influenced by the heating rate, being more effective under slow thermal variations. This study contributes to the development of thermal monitoring systems by proposing an application of piezoelectric energy harvesters for switching systems under variable temperature conditions.

**Keywords:** Piezoelectric energy harvesting. Temperature switching. Nonlinear oscillators. Analytical modeling. Multiphysics modeling. Experimental studies.





## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Representação esquemática do sistema: a) vista tridimensional destacando as dimensões dos componentes, b) representação das posições em  $x$  ao longo do comprimento da viga, c) curvatura da viga sob deformação indicando deslocamento transversal relativo  $w_{rel}$ , d) Seção transversal da viga, mostrando a linha neutra e posições em relação à linha neutra da superfície inferior da viga, da superfície inferior da camada piezoelétrica e da posição da superfície superior da camada piezoelétrica,  $h_a$ ,  $h_b$  e  $h_c$ , respectivamente. . . . . 39
- Figura 2 – Representação de um elemento infinitesimal de uma viga e seu diagrama de corpo livre. Em (a), temos posição inicial e deslocamento de um elemento da viga sob deformação. A posição antes da deformação é  $(x, 0)$  e após a deformação,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ . A inclinação local é representada por  $\theta = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}$ . Em (b), temos o diagrama de corpo livre do elemento deformado. O momento  $M$  (verde), a força cortante  $V$  (laranja), a força axial  $N$  (azul) e o ângulo  $\theta$  variam ao longo do comprimento da viga, com incrementos diferenciais  $dM$ ,  $dV$ ,  $dN$  e  $d\theta$ , respectivamente. A força distribuída  $F(x, t)$  atua transversalmente ao longo do elemento. . . . . 43
- Figura 3 – Sistema equivalente das Eqs. (3.63) e (3.64), o elemento inercial  $m$  do sistema mecânico é unitário nas equações encontradas, devido a normalização dos modos, descrita na Eq. (3.52). Em a) está mostrado o sistema mecânico e em b) o sistema elétrico. . . . . 54
- Figura 4 – Vista explodida do sistema . . . . . 60
- Figura 5 – Visão geral do sistema experimental utilizado no estudo, com destaque para os principais componentes. . . . . 61
- Figura 6 – Imagem térmica do sistema ao ser montado, com contorno e indicações do shaker, estrutura e viga. O retângulo branco mostra a área onde o cálculo da temperatura média (valor no canto superior direito) é feito. . . . . 62
- Figura 7 – Aparato experimental utilizado para os experimentos, com destaque para os principais componentes. . . . . 62
- Figura 8 – Diagrama do aparato experimental. As cores das setas representam sinais de diferentes domínios físicos, em verde os sinais referentes a grandezas mecânicas, em azul, grandezas elétricas e em laranja, grandezas térmicas . . . . . 63
- Figura 9 – Estudo paramétrico da variação da frequência natural obtido a partir da equação dos modos. . . . . 65

Figura 10 – Amplitudes experimentais de tensão elétrica para diferentes resistências. As cores escuras são curvas de <i>sweep up</i> , enquanto as de cores claras são curvas de <i>sweep down</i> . Os dados foram obtidos para $T = 23.5^{\circ}\text{C}$ e $F = 0.05\text{g}$ . . . . .	66
Figura 11 – Curvas de Tensão e Potência Elétrica em função da Resistência de carga obtidas no software COMSOL. . . . .	67
Figura 12 – Curva experimental da Potência Elétrica em função da Resistência de carga. As curvas foram medidas para $T=27.5^{\circ}\text{C}$ , $F = 0.1\text{g}$ e $\omega = 175\text{ Hz}$ . 67	
Figura 13 – Curva experimental da Potência Elétrica em função da Resistência de carga com destaque para o intervalo de valores de resistência ótima encontrados pelos diferentes métodos. As curvas foram medidas para $T=27.5^{\circ}\text{C}$ , $F = 0.1\text{g}$ e $\omega = 175\text{ Hz}$ . . . . .	68
Figura 14 – Curvas de Frequência natural pela temperatura obtidas no COMSOL para o sistema em diferentes combinações de presença do ímã e da chapa de aço. (■) Sem ímã e com chapa, (■) Sem ímã e sem chapa, (■) Com ímã e com chapa, (■) Com ímã e sem chapa . . . . .	69
Figura 15 – Curvas experimentais(em tons de amarelo) sobrepostas com curvas obtidas a partir do modelo analítico(em tons de roxo) para diferentes temperaturas. . . . .	70
Figura 16 – Gráfico dos parâmetros do sistema variando com a temperatura, com uma curva polinomial ajustada aos dados. Em a) $c \times T$ e em b) $\omega_n \times T$ 71	
Figura 17 – Gráfico das frequências de salto variando com a temperatura, com uma curva polinomial ajustada aos dados. Em (a) Jump up e em (b) Jump down. . . . .	71
Figura 18 – Evolução da tensão elétrica e temperatura do sistema com frequência constante de 190 Hz. . . . .	72
Figura 19 – Deslocamento da curva de resposta com o aumento da temperatura. Condição de operação: $F = 0.02\text{g}$ . . . . .	73

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros físicos do protótipo . . . . .	65
Tabela 2 – Parâmetros do sistema que não variam com a temperatura . . . . .	70
Tabela 3 – Parâmetros do sistema que variam com a temperatura . . . . .	70



## LISTA DE QUADROS



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAD	<i>Computer Aided Design</i>
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
FEM	Método de Elementos Finitos
FRF	Função de Resposta em Frequência
MFC	<i>Macro Fiber Composite</i>
MEMS	Sistemas Microeletromecânicos





## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	Área da seção transversal da viga
$A_p$	Área do eletrodo
$C$	Parâmetro auxiliar
$C_p$	Capacitância equivalente
$D$	Parâmetro auxiliar
$D$	Discriminante
$\mathbf{D}$	Vetor de deslocamento elétrico na camada piezoelétrica
$D_3$	Deslocamento elétrico
$EI_p$	Rigidez à flexão da camada piezoelétrica
$EI_s$	Rigidez à flexão da viga
$E_3$	Componente do campo elétrico na direção $y$
$F$	Amplitude da aceleração de base
$F(x, t)$	Força distribuída
$H(x - d)$	Função de Heaviside no ponto $d$
$I$	Momento de inércia
$L$	Comprimento da viga
$\mathcal{L}$	Transformada de Laplace
$L_p$	Espessura da camada piezoelétrica
$L_{pi}$	Posição de início da camada piezoelétrica
$L_{pf}$	Posição de fim da camada piezoelétrica
$M(x, t)$	Momento fletor interno
$M_{conc}$	Massa concentrada
$N$	Força axial
$N_{adm}$	Força axial modificada

$P$	Potência elétrica
$R_l$	Resistência de carga
$S_1^p$	Deformação axial específica no material piezoelétrico
$S_1^s$	Deformação axial específica na viga
$T$	Temperatura
$T_1^p$	Tensão axial na camada piezoelétrica
$T_1^s$	Tensão axial na viga
$V$	Amplitude adimensional da resposta elétrica
$V$	Força cortante
$Y$	Amplitude adimensional da resposta mecânica
$Y_p$	Módulo de Young da camada piezoelétrica a campo elétrico constante
$Y_s$	Módulo de Young da viga
$a$	Parâmetro auxiliar
$b$	Largura da viga e do elemento piezoelétrico
$b$	Parâmetro auxiliar
$c$	Amortecimento equivalente
$c$	Parâmetro auxiliar
$c_a$	Coeficiente de amortecimento viscoso do ar
$c_s$	Coeficiente de amortecimento interno
$c_1(t)$	Função arbitrária de integração
$c_2(t)$	Função arbitrária de integração
$d$	Parâmetro auxiliar
$d_{31}$	Constante piezoelétrica
$\frac{d^2 B(t)}{dt^2}$	Aceleração de base
$\bar{e}_{31}$	Constante da tensão piezoelétrica
$h_a$	Posição da superfície inferior da viga em relação à linha neutra

$h_b$	Posição da superfície inferior da camada piezoelétrica em relação à linha neutra
$h_c$	Posição da superfície superior da camada piezoelétrica em relação à linha neutra
$h_p$	Espessura da camada piezoelétrica
$h_{pc}$	Distância do centro da camada piezoelétrica até a linha neutra
$k$	Número de onda
$k_{lin}$	Rigidez equivalente linear
$k_{nl}$	Rigidez equivalente não linear
$m(x)$	Massa por unidade de comprimento
$\mathbf{n}$	Vetor unitário normal
$p$	Parâmetro auxiliar
$p_0$	Ponto de medição
$q$	Parâmetro auxiliar
$t$	Tempo
$u$	Deslocamento longitudinal
$v(t)$	Tensão elétrica
$w_b(x, t)$	Deslocamento da base
$w_{rel}(x, t)$	Deslocamento transversal da viga
$\tilde{x}$	Coordenada x da posição deslocada do segmento de viga
$y$	Deslocamento transversal adimensional
$\tilde{y}$	Coordenada y da posição deslocada do segmento de viga
$z_0$	Deslocamento estático
$\alpha$	Rigidez não linear adimensional
$\beta$	Impedância adimensional
$\chi$	Acoplamento eletromecânico na equação mecânica
$\delta(x - d)$	Função delta de Dirac no ponto d

$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\gamma$	Parâmetro da aceleração
$\varepsilon$	Deformação axial específica
$\bar{\varepsilon}_{33}^s$	Componente da permissividade à deformação constante
$\bar{\varepsilon}_{33}^T$	Componente da permissividade à tensão constante
$\eta(t)$	Coordenada modal
$\eta_r(t)$	Coordenada modal referente à r-ésima frequência natural
$\kappa^2$	Acoplamento eletromecânico adimensional
$\mu$	Massa concentrada adimensional
$\omega$	Frequência
$\omega_n$	Frequência natural
$\omega_{down}$	Frequência de <i>jump down</i>
$\omega_{up}$	Frequência de <i>jump up</i>
$\Omega$	Frequência adimensional
$\phi(x)$	Modo de vibrar
$\phi_r(x)$	Modo de vibrar da r-ésima frequência natural
$\varphi_x$	Fase da resposta mecânica
$\varphi_v$	Fase da resposta elétrica
$\rho$	Densidade da viga
$\tau$	Tempo adimensional
$\theta$	Inclinação local do elemento da viga sob deformação
$\theta$	Acoplamento eletromecânico na equação elétrica
$\vartheta$	Termo de acoplamento
$v$	Tensão elétrica adimensional
$\zeta$	Razão de amortecimento

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>1.2</b>	<b>Estrutura da monografia . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>2.1</b>	<b>Aplicações e Tecnologias em Coletores de Energia Piezoelétrica . .</b>	<b>33</b>
<b>2.2</b>	<b>Modelagem Dinâmica de Osciladores Piezoelétricos Lineares e Não Lineares . . . . .</b>	<b>34</b>
<b>2.3</b>	<b>Efeitos de Cargas Axiais e Variações de Temperatura na Dinâmica de Osciladores . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>2.4</b>	<b>Sensoriamento Baseado em Osciladores Não Lineares . . . . .</b>	<b>36</b>
<b>2.5</b>	<b>Estratégias de Gerenciamento Térmico para Segurança e Eficiência de Sistemas . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>3</b>	<b>MODELO MATEMÁTICO ELETROMECHANICO . . . . .</b>	<b>39</b>
<b>3.1</b>	<b>Descrição do sistema . . . . .</b>	<b>39</b>
<b>3.2</b>	<b>Dedução do modelo . . . . .</b>	<b>40</b>
3.2.1	Equação mecânica . . . . .	41
3.2.2	<i>Midplane stretching</i> e carga axial . . . . .	42
3.2.3	Equação elétrica . . . . .	46
3.2.4	Modos de vibrar . . . . .	47
3.2.5	Solução das equações . . . . .	50
3.2.6	Balanço harmônico . . . . .	54
3.2.7	Resistência ótima . . . . .	57
<b>4</b>	<b>MODELO MULTIFÍSICO . . . . .</b>	<b>59</b>
<b>5</b>	<b>PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL . . . . .</b>	<b>61</b>
<b>6</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>6.1</b>	<b>Estudo paramétrico da variação da frequência natural . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>6.2</b>	<b>Resistência ótima . . . . .</b>	<b>66</b>
<b>6.3</b>	<b>Amplitude x Frequência . . . . .</b>	<b>68</b>
<b>6.4</b>	<b>Aumento da temperatura com frequência constante . . . . .</b>	<b>72</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>75</b>

**REFERÊNCIAS . . . . . 77**

## 1 INTRODUÇÃO

Osciladores, tanto em regime de excitação linear quanto não linear, têm despertado interesse crescente nas pesquisas da última década (Daqaq *et al.*, 2014), (Li *et al.*, 2020), (Hossain *et al.*, 2023). Em particular, o uso de não linearidades no modelo de osciladores surge como uma solução para ampliar a largura de banda da resposta em frequência (Daqaq *et al.*, 2014). Ademais, essa propriedade pode ter origem física natural, a partir de relações geométricas e propriedades dos materiais que compõem o sistema (Li *et al.*, 2020), ou ser induzida, como na adição intencional de uma força restauradora magnética (Norenberg *et al.*, 2023). Em decorrência da presença das não linearidades, bifurcações, movimentos caóticos e multiestabilidade podem ser observados.

Nesse contexto, osciladores apresentam-se como uma alternativa interessante para a colheita de energia, especialmente quando combinados com materiais piezoelétricos. Coletores piezoelétricos de energia apresentam maior variedade de níveis de tensão elétrica e densidade de potência quando comparados a outras fontes de coleta (Pradeesh *et al.*, 2022). Devido a essa vantagem, coletores piezoelétricos têm demonstrado grande potencial em várias áreas, como em sistemas biomédicos (Latif *et al.*, 2021), na captação de energia eólica (Ali *et al.*, 2024) e em sistemas microeletromecânicos (MEMS) (Hossain *et al.*, 2023). As estruturas reportadas, por meio do efeito piezoelétrico direto, geram cargas elétricas proporcionais à força externa aplicada (Preumont *et al.*, 2006). Entre os materiais piezoelétricos mais utilizados estão as cerâmicas, que apresentam alta rigidez em comparação aos *Macro Fiber Composites* (MFCs). Os MFCs, por sua vez, são mais flexíveis, o que os torna mais adequados para aplicações em superfícies curvas e cargas de flexão, como na robótica flexível (Barbosa; Silva, 2023).

De maneira correlata à coleta de energia, osciladores não lineares têm atraído atenção por suas aplicações no campo do sensoriamento. Estudos mostram que osciladores têm sido utilizados para diversas finalidades de sensoriamento, como na medição de propriedades de fluidos (viscosidade, densidade) (Waugh; Gallacher; Burdess, 2011) e no monitoramento de adição de massa (Azizi *et al.*, 2023). Nessas aplicações, a dinâmica não linear foi explorada para aumentar a sensibilidade e a precisão dos sistemas propostos. No campo do sensoriamento térmico, aplicações em sistemas eletrônicos (Dhumal; Kul-karni; Ambhore, 2023) e em baterias de íon-lítio (Hao *et al.*, 2021) também se mostram promissoras, em que o controle da temperatura é essencial para garantir a segurança e a durabilidade dos componentes. Sistemas com restrições de temperatura podem, assim, se beneficiar de sensores baseados em osciladores.

Nesse contexto, este trabalho propõe uma abordagem para proteger sistemas contra superaquecimento utilizando um coletor de energia piezoelétrica não linear. A proteção

ocorre por meio da observação do fenômeno de bifurcação, que está relacionado à temperatura do sistema. Essa relação é estabelecida pela alteração na resposta em frequência do oscilador em função das variações de temperatura, que, por sua vez, são refletidas na energia coletada pelo sistema piezoelétrico. Para investigar esse comportamento, são adotadas três abordagens complementares: o desenvolvimento de um modelo analítico do sistema, a criação de um modelo multifísico no software COMSOL e a construção de um protótipo físico para experimentação.

Primeiro, a dedução de uma formulação analítica permite compreender, sob uma perspectiva física, características fundamentais do sistema, como seus modos de vibração, frequência natural e resposta no domínio da frequência. Através do modelo, análises acerca de possíveis bifurcações, bem como das frequências em que ocorrem, podem ser realizadas e posteriormente validadas experimentalmente. Em seguida, o modelo multifísico no COMSOL oferece uma visão mais detalhada, aplicando o método de elementos finitos para resolver o comportamento dinâmico e observar a influência da temperatura no sistema eletromecânico. Por fim, o protótipo físico valida os modelos teóricos, garantindo que os fenômenos estudados se manifestem em condições experimentais. Assim, as propriedades dinâmicas dos osciladores não lineares são utilizadas para desenvolver um método de chaveamento térmico, acionado pelos sinais elétricos gerados pelo próprio coletor de energia.

## **1.1 Objetivos**

Os objetivos do trabalho podem ser resumidos nos seguintes tópicos:

- O desenvolvimento de um modelo analítico de um coletor de energia piezoelétrica não linear;
- A dedução de uma equação que relacione a amplitude de oscilação do sistema com a frequência de excitação e, a partir dela, determinar as frequências onde ocorrem as bifurcações;
- O desenvolvimento de um modelo multifísico no COMSOL para analisar a influência da temperatura no sistema;
- A validação do modelo teórico por meio de experimentos;
- A prova conceitual da possibilidade de utilizar esse sistema para chaveamento térmico.

## **1.2 Estrutura da monografia**

A presente monografia é dividida em 7 capítulos, que explicam todo o desenvolvimento do sistema e apresentam os resultados e conclusões.



- O Capítulo 1 apresenta uma introdução ao que é desenvolvido nos outros capítulos;
- No Capítulo 2, é feita uma revisão de literatura acerca de assuntos pertinentes ao trabalho;
- No Capítulo 3, é apresentado o sistema de estudo e realizada toda a dedução de seu modelo analítico;
- No Capítulo 4, é explicada a construção do modelo multifísico;
- No Capítulo 5, é apresentado o protótipo físico construído e os experimentos realizados;
- No Capítulo 6, são apresentados os resultados dos modelos desenvolvidos e dos experimentos realizados;
- Por fim, no Capítulo 7, são apresentadas as conclusões e considerações finais do trabalho.



## 2 REVISÃO DE LITERATURA

### 2.1 Aplicações e Tecnologias em Coletores de Energia Piezoelétrica

Coletores de energia são dispositivos projetados para converter diversas fontes de energia, como vibrações mecânicas, calor e radiação solar, em energia elétrica utilizável. Eles apresentam grande potencial em várias aplicações tecnológicas e sustentáveis (Latif *et al.*, 2021), (Ali *et al.*, 2024), (Hossain *et al.*, 2023). Entre essas tecnologias, os coletores piezoelétricos têm ganhado destaque. Uma revisão sobre a aplicação desses coletores foi apresentada em (Pradeesh *et al.*, 2022), abordando o efeito piezoelétrico, os principais materiais utilizados (cerâmicas e MFCs) e as geometrias mais comuns desses dispositivos.

No que se refere aos materiais utilizados, os coletores de energia piezoelétrica abrangem desde cerâmicas piezoelétricas até MFCs. As cerâmicas piezoelétricas são caracterizadas por sua elevada rigidez, embora sua fragilidade limite o uso em aplicações que envolvem flexão ou superfícies irregulares. Em contrapartida, os MFCs se destacam por sua flexibilidade, tornando-se ideais para situações em que o coletor precisa adaptar-se a superfícies curvas ou suportar maiores deformações mecânicas (Bakhtar; Abdoos; Rashidi, 2023). Essa adaptabilidade amplia as possibilidades de uso dos MFCs, cuja versatilidade foi comprovada em diversas áreas, como na robótica flexível, onde são utilizados para criar dispositivos mais adaptáveis e maleáveis (Barbosa; Silva, 2023). Além disso, os MFCs também têm sido explorados para a atenuação de vibrações em estruturas (Zhou *et al.*, 2022), o controle ativo de vibrações (Zhang *et al.*, 2023) e a coleta de energia subaquática (Huang *et al.*, 2024), destacando-se em aplicações variadas. Esses avanços ilustram o crescente uso das tecnologias piezoelétricas, evidenciando o papel dos MFCs na expansão das possibilidades de design e implementação de sistemas de conversão de energia.

Dentre as diversas áreas que se beneficiam dos avanços nas tecnologias piezoelétricas, destaca-se o setor biomédico. Em (Latif *et al.*, 2021), a aplicação dessa tecnologia em dispositivos auditivos demonstrou como a conversão de pequenas vibrações, como sons ou movimentos corporais, pode alimentar dispositivos de assistência auditiva, reduzindo ou até eliminando a necessidade de baterias externas. Coletores piezoelétricos também têm sido estudados para a captura de energia gerada pelo movimento humano. No estudo (Singh *et al.*, 2024), a implementação em calçados possibilitou que a energia gerada ao caminhar ou correr fosse convertida e armazenada para alimentar pequenos dispositivos, como sensores de saúde e rastreadores de atividade física. Essas aplicações revelam o potencial dos coletores piezoelétricos no desenvolvimento de dispositivos portáteis autossustentáveis.

Na área da sustentabilidade, os coletores piezoelétricos também apresentam aplicações promissoras. A coleta de energia eólica utilizando piezoelectricidade foi investigada

em (Ali *et al.*, 2024), com discussões sobre as formas de excitação geradas pelo vento e os aspectos de projeto necessários para otimizar o desempenho desses coletores. De maneira semelhante, sistemas híbridos que combinam energia solar e cinética foram explorados em (Huo *et al.*, 2023) para processos de purificação de água, evidenciando o potencial dessas tecnologias no enfrentamento de desafios ambientais.

Outra aplicação relevante dos coletores piezoelétricos está em dispositivos MEMS. A revisão apresentada em (Hossain *et al.*, 2023) discute como esses coletores podem ser integrados a MEMS, aprimorando a eficiência energética de sistemas amplamente utilizados em sensores, atuadores e sistemas de comunicação (Younis, 2011). Essa integração oferece uma fonte de energia para componentes em escala micro, atendendo à crescente demanda por dispositivos autossustentáveis.

Assim, os coletores piezoelétricos destacam-se como uma tecnologia versátil, com aplicações que vão desde dispositivos biomédicos e sustentáveis até a integração em sistemas MEMS. Esse amplo alcance evidencia seu potencial para atender a diferentes demandas tecnológicas, especialmente em um cenário que prioriza soluções autossustentáveis e ambientalmente responsáveis. Os avanços recentes discutidos demonstram como essa tecnologia pode contribuir de forma significativa para o desenvolvimento de sistemas inovadores e eficientes.

## **2.2 Modelagem Dinâmica de Osciladores Piezoelétricos Lineares e Não Lineares**

A modelagem de osciladores lineares e não lineares tem sido amplamente estudada, com foco na compreensão das propriedades dinâmicas e dos fenômenos característicos desses sistemas. Os trabalhos pioneiros de (Erturk; Inman, 2009) e (Inman, 2008) abordam a modelagem de osciladores piezoelétricos lineares, descrevendo o modelo de viga cantilever com acoplamento piezoelétrico em duas camadas, conhecido na literatura como *bimorph*. Esse modelo foi validado experimentalmente e demonstrou eficácia em sistemas operando próximo à frequência de ressonância, embora apresente limitações quanto à largura de banda.

Osciladores não lineares, em comparação com os lineares, apresentam maior largura de banda e desempenho aprimorado fora da frequência natural do sistema (Daqaq *et al.*, 2014). As não linearidades podem surgir de diferentes fontes, como o acoplamento piezoelétrico (Stanton *et al.*, 2010), a inserção de forças magnéticas (Norenberg *et al.*, 2023) ou características geométricas e propriedades dos materiais (Li *et al.*, 2020). Um exemplo amplamente utilizado na modelagem de sistemas não lineares é o oscilador de Duffing, caracterizado por uma rigidez cúbica.

Em (Mahmoudi; Kacem; Bouhaddi, 2014), foi desenvolvido um modelo híbrido piezoletromagnético, no qual o sistema, descrito pelo oscilador de Duffing, demonstrou

eficiência superior na coleta de energia em relação a sistemas magnéticos convencionais. De maneira semelhante, (von Wagner, 2004) propôs um modelo de vibração longitudinal em barras piezocerâmicas sob campos elétricos fracos, destacando o efeito de *softening*, com validação experimental. No estudo de (Xiao; Qie; Bowen, 2021), um coletor piezoelétrico otimizado para captação de energia hidráulica foi representado por um oscilador de Duffing com efeito de *hardening*, em que ajustes geométricos ampliaram significativamente a potência gerada.

Ademais, (Bayat; Pakar; Ziehl, 2021) utilizou o modelo de Duffing para descrever um sistema ferroviário, representado por uma viga de Euler-Bernoulli sobre uma fundação flexível, investigando sua resposta dinâmica sob carga axial. Em outro contexto, (Barbosa; Kacem; Bouhaddi, 2024) explorou a localização de energia vibracional em cadeias de osciladores não lineares acoplados, propondo uma metodologia para manipular modos localizados. Por fim, em (Tan *et al.*, 2017), o oscilador de Duffing foi usado na modelagem de um coletor piezoelétrico sujeito a excitações de *galloping*, analisando como parâmetros geométricos influenciam a potência gerada.

Esses estudos destacam a versatilidade do oscilador de Duffing na modelagem de sistemas não lineares. Sua aplicação em contextos diversos permite uma análise detalhada das dinâmicas envolvidas e contribui para a otimização do desempenho em projetos voltados para a coleta de energia.

### 2.3 Efeitos de Cargas Axiais e Variações de Temperatura na Dinâmica de Osciladores

A aplicação de cargas axiais em estruturas altera suas características dinâmicas, particularmente a rigidez e a frequência natural, como demonstrado em (Masana; Daqaq, 2010). Nesse estudo, um coletor piezoelétrico sob carga axial foi modelado como uma viga biengastada, onde a tensão axial ajusta a frequência natural para valores próximos à excitação. Além de ajustar a frequência, foi demonstrado que a carga axial aumenta a transferência de energia para a carga elétrica, amplifica a resposta a excitações externas e intensifica as não linearidades do sistema. Esses efeitos resultam em aumento de amplitude, potência de saída e faixa de operação.

Variações de temperatura podem gerar cargas axiais que alteram a dinâmica estrutural. À medida que a temperatura aumenta ou diminui, o material tende a se expandir ou contrair. No entanto, se a estrutura estiver restrita por um apoio ou engaste que limite essa variação de comprimento, surgem tensões axiais (Trinh *et al.*, 2016), (Li; Zhou, 2004). Em (Li; Zhou, 2004), vibrações de vigas de Euler-Bernoulli sujeitas a cargas axiais induzidas pela temperatura foram investigadas sob diferentes condições de contorno. Observou-se que, com o aumento da carga compressiva induzida pela temperatura, a rigidez da viga diminui até a ocorrência da flambagem, ponto em que a rigidez volta a crescer com o aumento da carga, alterando o estado de estabilidade do sistema.

Nos estudos de (Nayfeh; Emam, 2008) e (Emam; Nayfeh, 2004), a estabilidade dos modos de flambagem em vigas foi analisada considerando diferentes condições de contorno. Os autores concluíram que o primeiro modo de flambagem é estável em todas as condições de contorno investigadas, enquanto os modos superiores representam estados de equilíbrio instáveis. Esses resultados contribuem para a compreensão do impacto da flambagem no comportamento dinâmico e nas características vibracionais das vigas.

## **2.4 Sensoriamento Baseado em Osciladores Não Lineares**

A utilização de estratégias de sensoriamento baseadas em dinâmicas de oscilação não linear é uma área em expansão, na qual a dinâmica desses sistemas é explorada para desenvolver sensores com maior sensibilidade em comparação à sua contraparte linear. Em (Zhang *et al.*, 2022), foi estudado um sistema composto por duas vigas acopladas, modeladas como osciladores de Duffing, no qual se observou o fenômeno de localização de modos. Esse fenômeno possibilitou a identificação de um ponto de operação ótimo, resultando em uma melhora significativa na precisão e na sensibilidade do sensor. De forma semelhante, o estudo apresentado em (Waugh; Gallacher; Burdett, 2011) utilizou o fenômeno de bifurcação para medir a viscosidade e a densidade de fluidos, relacionando a distância entre os saltos do sistema com essas propriedades. Observou-se que a distância entre os saltos é influenciada não apenas pela viscosidade e pela densidade, mas também pelas dimensões da viga. Assim, embora dois fluidos diferentes pudessem apresentar a mesma distância entre saltos em uma viga específica, o uso de várias vigas com dimensões distintas permitiria a identificação única do fluido, aumentando a precisão do sensoriamento.

Em (Azizi *et al.*, 2023), foi desenvolvido um sistema para detectar a adição de massa por meio do deslocamento da resposta em frequência, que se ajusta até atingir o ponto de salto. Esse deslocamento funcionou como um limiar, permitindo medições precisas da massa adicionada com base na dinâmica do sistema. No estudo apresentado em (Potekin *et al.*, 2018), explorou-se o comportamento dos saltos dinâmicos, com o objetivo de evitar transições abruptas entre estados de amplitude, que poderiam comprometer a precisão das medições. Ao garantir que a amplitude de excitação fosse suficientemente alta para prevenir os saltos, tornou-se possível realizar medições de massa com maior estabilidade, aprimorando a precisão do sensor.

Os estudos apresentados evidenciam o potencial das dinâmicas não lineares para o desenvolvimento de sensores altamente precisos e sensíveis. Fenômenos como localização de modos, bifurcações e saltos dinâmicos são explorados para superar as limitações dos sistemas lineares, permitindo medições mais estáveis e confiáveis em diferentes contextos. Além disso, estratégias como o ajuste de parâmetros de excitação e o uso de múltiplas estruturas sensoriais demonstram a capacidade de aprimorar a identificação de propriedades específicas, como massa, viscosidade e densidade. Esses avanços reforçam a relevância do

uso de comportamentos não lineares como ferramenta promissora para ampliar a precisão no sensoriamento de diversas aplicações.

## 2.5 Estratégias de Gerenciamento Térmico para Segurança e Eficiência de Sistemas

Diversos sistemas requerem operação dentro de uma faixa de temperatura específica para garantir segurança e eficiência. Quando expostos a temperaturas fora desse intervalo, estão sujeitos a falhas, redução de desempenho ou até mesmo danos permanentes. No campo da eletrônica, o gerenciamento térmico desempenha um papel crucial. Em (Dhumal; Kulkarni; Ambhore, 2023), uma revisão sobre sistemas de gerenciamento térmico na eletrônica destacou a importância de manter os dispositivos dentro de uma faixa de temperatura ideal. Esse controle é essencial para prolongar a vida útil dos componentes, prevenir a degradação dos materiais e garantir o funcionamento adequado dos circuitos. Soluções como dissipadores de calor, materiais com alta condutividade térmica e sistemas de refrigeração, tanto ativos quanto passivos, foram abordadas como formas eficazes de assegurar o funcionamento contínuo e seguro desses dispositivos.

O gerenciamento térmico é igualmente crítico para baterias, especialmente as de íon-lítio, amplamente utilizadas em dispositivos móveis, veículos elétricos e sistemas de armazenamento de energia. Em (Hao *et al.*, 2021), foi desenvolvido um circuito para monitoramento em tempo real da tensão elétrica e temperatura de pacotes de baterias de íon-lítio. Esse sistema possibilita a identificação rápida de situações em que a temperatura excede o limite seguro, prevenindo sobreaquecimentos que poderiam causar falhas ou degradação das células. Dessa forma, garante-se que as baterias operem dentro de parâmetros seguros, aumentando a segurança e a durabilidade do sistema.

Ademais, o uso de materiais termo-responsivos tem emergido como uma solução promissora para a proteção térmica de baterias. Em (Zhang *et al.*, 2022), foi apresentado um cátodo fabricado com material termo-responsivo que, ao detectar altas temperaturas, interrompe as reações eletroquímicas no eletrodo. Quando a temperatura retorna a níveis seguros, as reações são retomadas automaticamente. Esse comportamento de chaveamento protege as baterias contra superaquecimentos de forma autônoma, oferecendo segurança adicional sem comprometer a eficiência energética ou o desempenho do sistema.





### 3 MODELO MATEMÁTICO ELETROMECHANICO

#### 3.1 Descrição do sistema

Na Fig. 1, é representado o sistema estudado neste trabalho, composto por uma viga biengastada com um ímã cúbico localizado no centro de seu comprimento, um MFC em uma das extremidades e uma chapa de aço de mesma medida do MFC na extremidade oposta. O ímã central reduz a frequência natural do sistema e possibilita, em trabalhos futuros, a coleta de energia por meio de bobinas. A chapa oposta ao MFC tem como função compensar a redução da frequência natural causada pelo ímã, reduzindo os efeitos da adição do ímã no centro da viga, efeito avaliado por meio das análises multifísicas. A Fig. 1 a) apresenta uma vista tridimensional do sistema, destacando as dimensões geométricas dos elementos. A Fig. 1 b) ilustra uma vista frontal, indicando a disposição e as posições dos componentes. Já a Fig. 1 c) exibe a viga em estado deformado, evidenciando o deslocamento transversal relativo ( $w_{rel}$ ). Por fim, a Fig. 1 d) mostra a seção transversal do sistema, destacando a posição das superfícies em relação à linha neutra. O sistema é submetido a variações de temperatura que promovem dilatação ou contração térmica da viga. No entanto, devido à restrição imposta pelos engastes, essas variações se traduzem em tensões axiais na estrutura, alterando a rigidez e o comportamento dinâmico do sistema (Li; Zhou, 2004).

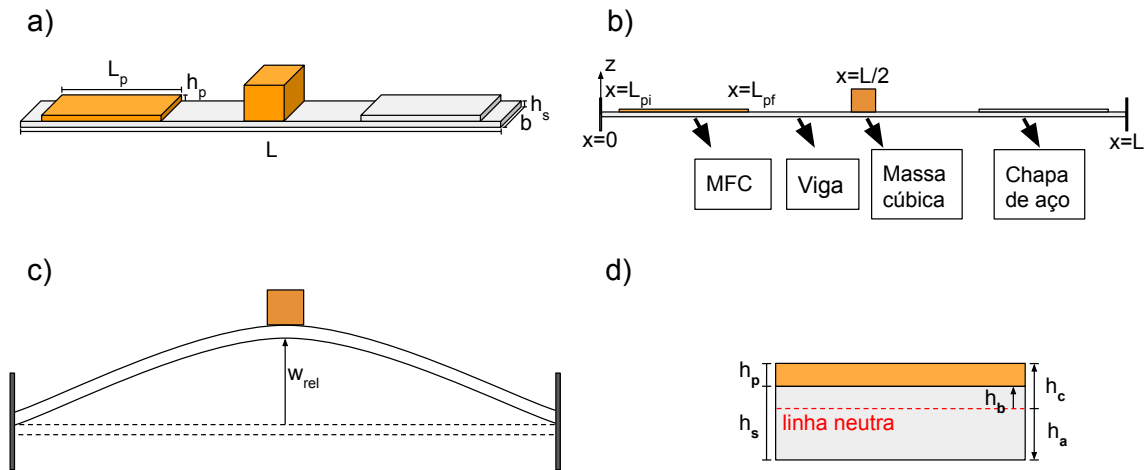


Figura 1 – Representação esquemática do sistema: a) vista tridimensional destacando as dimensões dos componentes, b) representação das posições em  $x$  ao longo do comprimento da viga, c) curvatura da viga sob deformação indicando deslocamento transversal relativo  $w_{rel}$ , d) Seção transversal da viga, mostrando a linha neutra e posições em relação à linha neutra da superfície inferior da viga, da superfície inferior da camada piezoelétrica e da posição da superfície superior da camada piezoelétrica,  $h_a$ ,  $h_b$  e  $h_c$ , respectivamente.

### 3.2 Dedução do modelo

Nesta seção é deduzido o modelo do sistema, assim, a equação de Euler-Bernoulli é utilizada para obter a equação mecânica do sistema, então o efeito do alongamento do plano central e de carga axial são adicionados, gerando as não linearidades do modelo. A equação elétrica é obtida a partir das relações da piezoelectricidade aplicadas na lei de Gauss. De posse das equações diferenciais parciais não lineares que descrevem ambos os domínios mecânico e elétrico, uma discriminação do sistema em bases modais é feita, chegando a uma equação de Duffing com acoplamento eletromecânico. Por fim, o método do balanço harmônico é utilizado para encontrar a resposta do sistema no domínio da frequência, encontrando também as frequências onde as bifurcações ocorrem e a resistência ótima para obter o máximo de potência gerada.

O artigo (Inman, 2008) é usado como alicerce teórico para a dedução das equações eletromecânicas do sistema. Nele foi desenvolvido um modelo de um coletor de energia composto por uma viga *cantilever* com uma camada de piezocerâmica. Entretanto, no modelo do atual projeto a condição de contorno do sistema é engastada-engastada, com uma massa de geometria cúbica em seu centro, que é modelada a partir da hipótese de massa pontual. Tais diferenças fazem com que os modos de vibrar dos sistemas sejam distintos, porém a dedução é análoga. Outra diferença entre os modelos é que o elemento piezoelétrico usado no projeto é um MFC e não ocupa todo o comprimento da viga. Ademais, as não linearidades geométricas surgem na equação que descreve o sistema a partir de um efeito chamado *midplane stretching* ou alongamento do plano central (Younis, 2011). A dedução das não linearidades é feita para uma viga sem acoplamento elétrico e os termos adicionais devido à carga axial e alongamento do plano central são adicionados à equação em um momento seguinte.

Em (Xiao; Qie; Bowen, 2021) foi deduzida uma expressão para a resposta do sistema no domínio da frequência por meio da utilização do método de balanço harmônico. Embora o sistema seja diferente do proposto neste projeto, serve de base para essa etapa da dedução, pois o sistema do artigo é também descrito por um oscilador de Duffing. No artigo também são encontradas as frequências onde ocorrem as bifurcações no sistema e a resistência ótima para maximizar a saída de potência.

Outro ponto a se considerar no desenvolvimento do modelo é que a modelagem do acoplamento eletromecânico de MFCs difere da abordagem tradicional usada para cerâmicas piezoelétricas. Em geral, as relações entre as grandezas físicas em piezocerâmicas são descritas por equações lineares, o que não é diretamente aplicável aos MFCs devido à sua estrutura composta de camadas alternadas de material piezoelétrico e epóxi, perpendiculares aos eletrodos (Shahab; Erturk, 2016). O MFC utilizado no trabalho é do tipo P2, cuja técnica de homogeneização pode ser encontrada no artigo (Deraemaeker *et al.*, 2009), onde os autores, através do somatório dos efeitos de unidades representativas de

volume, conseguiram identificar propriedades equivalentes, que permitem que o MFC do atual trabalho seja modelado de forma análoga a uma única cerâmica piezoelétrica.

### 3.2.1 Equação mecânica

A Equação Diferencial Parcial (EDP) que descreve o movimento da viga sujeita a excitação de base é dada pela equação a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + c_s I \frac{\partial^5 w_{rel}(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial w_{rel}(x, t)}{\partial t} + m(x) \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial t^2} \\ = -m(x) \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial t^2} - c_a \frac{\partial w_b(x, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde  $w_{rel}(x, t)$  é a deflexão da viga em relação à base na posição  $x$  e no tempo  $t$ ,  $w_b(x, t)$  é a deflexão da base,  $M(x, t)$  é o momento fletor interno,  $c_s$  é o coeficiente de amortecimento interno,  $c_a$  é o coeficiente de amortecimento viscoso do ar,  $I$  é o momento de inércia da seção transversal da viga,  $m(x) = \rho A + M_{conc} \delta(x - L/2)$  é a massa por unidade de comprimento da viga, sendo  $\rho$  a densidade da viga,  $A$  a área transversal da viga,  $M_{conc}$  a massa concentrada no meio da viga e  $L$  o comprimento da viga.

O momento fletor na Eq. (3.1) é descrito pela relação

$$M(x, t) = -b \left( [H(x - L_{pi}) - H(x - L_{pf})] \int_{h_b}^{h_c} T_1^p y dy + \int_{h_a}^{h_b} T_1^s y dy \right), \quad (3.2)$$

onde  $b$  é a largura da viga,  $H(x - d)$  é a função de Heaviside no ponto  $d$ ,  $h_a$ ,  $h_b$  e  $h_c$  são as posições da superfície inferior da viga em relação à linha neutra, da superfície inferior da camada piezoelétrica em relação à linha neutra, que coincide com a superfície superior da viga e a posição da superfície superior da camada piezoelétrica em relação à linha neutra (ver Fig. 1(d)), as expressões que as relacionam com aspectos geométricos e módulos de Young da viga e da camada piezoelétrica foram obtidas em (Inman, 2008)),  $L_{pi}$  e  $L_{pf}$  são as posições do início e fim da camada piezoelétrica.  $T_1^s$  e  $T_1^p$  são as tensões axiais na viga e na camada piezoelétrica, respectivamente, e são dadas pelas relações constitutivas:

$$T_1^s = Y_s S_1^s; \quad T_1^p = Y_p (S_1^p - d_{31} E_3), \quad (3.3)$$

onde  $Y_s$  é o módulo de Young da viga,  $Y_p$  é o módulo de Young da camada piezoelétrica a campo elétrico constante,  $d_{31}$  é a constante piezoelétrica e  $E_3$  é a componente do campo elétrico na direção de  $y$ , escrito em função da tensão elétrica  $v(t)$  e espessura da camada piezoelétrica  $h_p$  ( $E_3(t) = \frac{-v(t)}{h_p}$ ).  $S_1^p$  e  $S_1^s$  são os componentes de deformação axial específica no material piezoelétrico e na viga, respectivamente, dados pela equação a seguir:

$$S_1(x, y, t) = -y \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2}. \quad (3.4)$$

Substituindo as Eqs. (3.3) e (3.4) na Eq. (3.2), é obtida a relação entre o momento fletor, o deslocamento transversal e a tensão elétrica:

$$M(x, t) = (EI_s + EI_p[H(x - L_{pi}) - H(x - L_{pf})]) \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2} - \vartheta[H(x - L_{pi}) - H(x - L_{pf})]v(t), \quad (3.5)$$

onde  $EI_s$  é a rigidez à flexão da viga,  $EI_p$  é a rigidez à flexão da camada piezoeétrica e  $\vartheta$  é o termo de acoplamento, mostrados a seguir:

$$EI_s = \frac{bY_s(h_b^3 - h_a^3)}{3}; \quad EI_p = \frac{bY_p(h_c^3 - h_b^3)}{3}; \quad \vartheta = -\frac{bY_p d_{31}(h_c^2 - h_b^2)}{2h_p}. \quad (3.6)$$

Dessa forma, substituindo a Eq. (3.5) na Eq. (3.1), obtém-se a equação mecânica de movimento do sistema com acoplamento elétrico, mostrada a seguir:

$$\begin{aligned} & EI_s \frac{\partial^4 w_{rel}(x, t)}{\partial x^4} + EI_p[H(x - L_{pi}) - H(x - L_{pf})] \frac{\partial^4 w_{rel}(x, t)}{\partial x^4} \\ & + c_s I \frac{\partial^5 w_{rel}(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial w_{rel}(x, t)}{\partial t} + m(x) \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial t^2} \\ & + \vartheta v(t) \times \left[ \frac{d\delta(x - L_{pi})}{dx} - \frac{d\delta(x - L_{pf})}{dx} \right] = -m(x) \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial t^2} - c_a \frac{\partial w_b(x, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde  $\delta(x - d)$  é a função delta de Dirac no ponto  $d$ , que satisfaz a seguinte relação:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n \delta(x - x_0)}{dx^n} f(x) dx = (-1)^n \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}. \quad (3.8)$$

A Eq. (3.7) é linear, assim como o modelo obtido no artigo; entretanto, o sistema em questão neste trabalho apresenta grande influência de não linearidades geométricas, que são deduzidas na subseção seguinte.

### 3.2.2 *Midplane stretching* e carga axial

Para iniciar, são descritas as relações geométricas da viga, a Fig. 2(a) mostra um segmento da linha central da viga submetido a um deslocamento axial  $u$  e transversal  $w$ . A partir dela é encontrada a posição deslocada do segmento da viga, dada por:

$$\tilde{x} = x + u; \quad \tilde{y} = w. \quad (3.9)$$

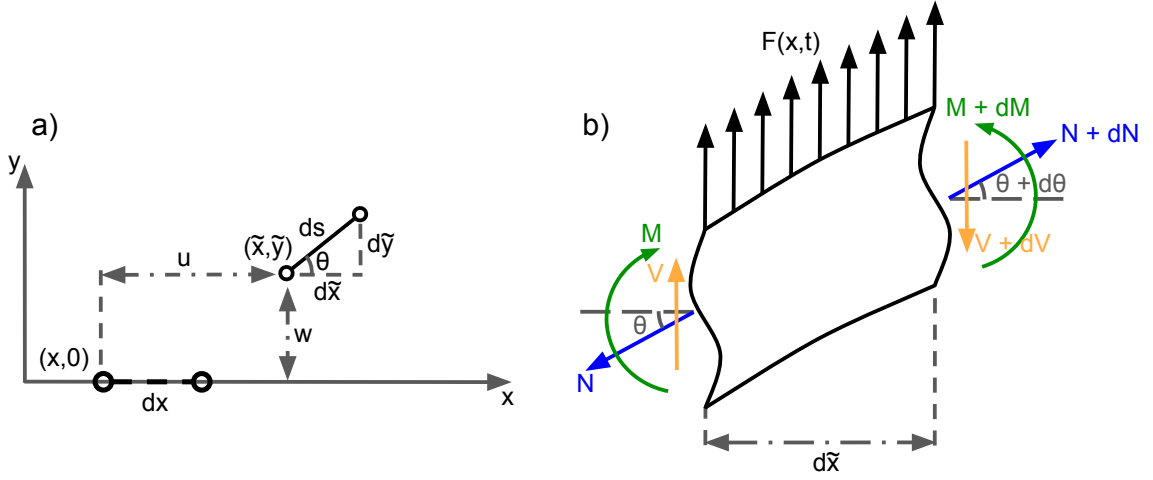


Figura 2 – Representação de um elemento infinitesimal de uma viga e seu diagrama de corpo livre. Em (a), temos posição inicial e deslocamento de um elemento da viga sob deformação. A posição antes da deformação é  $(x, 0)$  e após a deformação,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ . A inclinação local é representada por  $\theta = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}$ . Em (b), temos o diagrama de corpo livre do elemento deformado. O momento  $M$  (verde), a força cortante  $V$  (laranja), a força axial  $N$  (azul) e o ângulo  $\theta$  variam ao longo do comprimento da viga, com incrementos diferenciais  $dM$ ,  $dV$ ,  $dN$  e  $d\theta$ , respectivamente. A força distribuída  $F(x, t)$  atua transversalmente ao longo do elemento.

A variação da posição no elemento deformado é encontrada a partir da diferenciação das Eqs. (3.9):

$$d\tilde{x} = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx = (1 + u') dx; \quad d\tilde{y} = \frac{\partial w}{\partial x} dx = w' dx, \quad (3.10)$$

nas quais o apóstrofo representa diferenciação em relação a  $x$ . Assim, utilizando os diferenciais da Eq. (3.10) é encontrada a expressão para o diferencial  $ds$ :

$$ds = \sqrt{d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2} = \left( \sqrt{(1 + u')^2 + (w')^2} \right) dx. \quad (3.11)$$

A partir dos diferenciais das Eqs. (3.10) e (3.11), é encontrada a deformação axial específica, dada pela razão entre a diferença no comprimento da viga, pelo comprimento inicial:

$$\varepsilon = \frac{ds - dx}{dx} = \left( \sqrt{(1 + u')^2 + (w')^2} \right) - 1. \quad (3.12)$$

Aplicando a expansão em série de Taylor na Eq. (3.12) e mantendo termos até ordem cúbica em  $w'$ :

$$\varepsilon = u' + \frac{(w')^2}{2} + \dots \quad (3.13)$$

Ainda a partir da Fig. 2(a), são encontrados os seno e cosseno do ângulo de deformação  $\theta$ , dados a seguir:

$$\sin \theta = \frac{d\tilde{y}}{ds}; \quad \cos \theta = \frac{d\tilde{x}}{ds}. \quad (3.14)$$

Substituindo a Eq. (3.10) na Eq. (3.14):

$$\sin \theta = \frac{w'}{\sqrt{(1+u')^2 + (w')^2}}; \quad \cos \theta = \frac{1+u'}{\sqrt{(1+u')^2 + (w')^2}}. \quad (3.15)$$

Aplicando a expansão em série de Taylor na Eq. (3.15) e mantendo termos até ordem cúbica em  $w'$ :

$$\sin \theta = w' - u'w' - \frac{(w')^3}{3} + \dots; \quad \cos \theta = 1 - \frac{(w')^2}{2} + \dots \quad (3.16)$$

Considerando os seno e cosseno do ângulo na outra extremidade do elemento deformado:

$$\sin(\theta + \theta' d\tilde{x}) = \sin \theta + (\sin \theta)' d\tilde{x}; \quad \cos(\theta + \theta' d\tilde{x}) = \cos \theta + (\cos \theta)' d\tilde{x}. \quad (3.17)$$

A partir do diagrama de corpo livre na Fig. 2(b), é aplicada a segunda lei de Newton na direção horizontal, obtendo a equação:

$$(N + N' d\tilde{x}) \cos(\theta + \theta' d\tilde{x}) - N \cos \theta = \rho A d\tilde{x} \ddot{u}, \quad (3.18)$$

na qual pontos duplos representam derivada segunda em relação ao tempo. Substituindo a expressão para o cosseno da Eq. (3.17) e descartando termos de ordem superior em  $d\tilde{x}$ , é obtida a equação:

$$(N \cos \theta)' = \rho A \ddot{u}. \quad (3.19)$$

Aplicando a segunda lei de Newton na vertical:

$$V - (V + V' d\tilde{x}) + F d\tilde{x} - N \sin \theta + (N + N' d\tilde{x}) \sin(\theta + \theta' d\tilde{x}) = \rho A d\tilde{x} \ddot{v}, \quad (3.20)$$

substituindo a expressão para o seno da Eq. (3.17) e descartando termos de ordem superior em  $d\tilde{x}$ , é obtida a equação:

$$-V' + F + (N \sin \theta)' = \rho A \ddot{w}, \quad (3.21)$$

e a força axial se relaciona com a deformação axial pela equação:

$$N = EA\varepsilon = EA \left( u' + \frac{(w')^2}{2} + \dots \right). \quad (3.22)$$

Aplicando a segunda lei de Newton para a rotação na lateral do elemento:

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} d\tilde{x} - M - \left( V + \frac{\partial V}{\partial x} d\tilde{x} \right) d\tilde{x} + (F d\tilde{x}) \frac{d\tilde{x}}{2} = 0, \quad (3.23)$$

simplificando a Eq. (3.23) e descartando termos de ordem superior, é obtida a relação entre  $V$  e  $M$ :

$$V = \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (3.24)$$

O momento interno se relaciona com o deslocamento transversal pela teoria de vigas de Euler-Bernoulli, mostrada a seguir:

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (3.25)$$

substituindo a Eq. (3.22) na Eq. (3.19) e as Eqs. (3.24), (3.24) e (3.19) na Eq. 3.21 são obtidas as EDPs não lineares acopladas que governam a dinâmica de vigas com alongamento no plano central:

$$\rho A \ddot{u} - EA u'' = EA \left( \frac{(w')^2}{2} \right)'; \quad (3.26)$$

$$\rho A \ddot{w} + (EI w'')'' = EA \left( u' w' + \frac{(w')^3}{2} \right)' + F. \quad (3.27)$$

No presente projeto, o sistema é adotado como uma viga esbelta, dessa forma o termo inercial na Eq. (3.26) pode ser ignorado e com isso ela é reduzida para:

$$u'' = - \left( \frac{(w')^2}{2} \right)'. \quad (3.28)$$

Integrando a Eq. (3.28) duas vezes em função de  $x$ , é encontrada a expressão para o deslocamento axial da viga:

$$u = -\frac{1}{2} \int_0^x (w')^2 dx + c_1(t)x + c_2(t). \quad (3.29)$$

Assumindo que a viga está fixada axialmente em uma extremidade e na outra sofre uma força axial  $N$  constante, as condições de contorno são dadas a seguir:

$$u(0, t) = 0; \quad u(L, t) = \frac{NL}{EA}, \quad (3.30)$$

substituindo a Eq. (3.30) na Eq. (3.29) são encontrados os valores para funções arbitrárias obtidas na integração, o que permite substituir a Eq. (3.29) na Eq. (3.27) para encontrar a EDP não linear simplificada que descreve a vibração transversal de uma viga sujeita a carga axial  $N$ :

$$\rho A \ddot{w} + (EI w'')'' = w'' \left( N + \frac{EA}{2L} \int_0^L (w')^2 dx \right) + F. \quad (3.31)$$

É de interesse do estudo analisar a influência de cargas axiais geradas pela temperatura. Dessa forma,  $N$  é uma carga axial que surge no sistema a partir de variações na temperatura que dilatariam a viga, porém, devido às restrições, geram cargas axiais. Também destaca-se o efeito do elemento piezoelétrico na força axial observada na Eq. (3.22), de modo que o módulo de Young, assim como a área da seção transversal variam com a presença do elemento, além da tensão elétrica influenciar a tensão mecânica, contribuindo para a força axial. Nesta dedução é adotada a simplificação de desconsiderar esses efeitos.

### 3.2.3 Equação elétrica

Para a dedução da equação elétrica é considerada a relação constitutiva piezoelétrica:

$$D_3 = d_{31} T_1^p + \bar{\varepsilon}_{33}^T E_3, \quad (3.32)$$

onde  $D_3$  é a componente do deslocamento elétrico, e  $\bar{\varepsilon}_{33}^T$  é a componente da permissividade à tensão constante. Substituindo a Eq. (3.3) na Eq. (3.32) e escrevendo  $E_3$  em função da tensão elétrica  $v(t)$  a relação se torna:

$$D_3 = d_{31} Y_p S_1^p(x, t) - \bar{\varepsilon}_{33}^s \frac{v(t)}{h_p}, \quad (3.33)$$

onde  $\bar{\varepsilon}_{33}^s$  é a permissividade à deformação constante, dada por  $\bar{\varepsilon}_{33}^s = \bar{\varepsilon}_{33}^T - d_{31}^2 Y_p$ . Ademais, é adotada uma simplificação ao analisar a deformação axial  $S_1^p$ , na qual é considerada uma média de seu valor em função da distância  $h_{pc}$  do centro da camada piezoelétrica até a linha neutra, dessa forma a parcela não linear é desconsiderada na equação. A deformação axial na camada piezoelétrica escrita como uma média é:

$$S_1^p(x, t) = -h_{pc} \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.34)$$

dessa forma, a tensão de saída do circuito é obtida a partir da lei de Gauss:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{A_p} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA_p \right) = \frac{v(t)}{R_1}, \quad (3.35)$$



onde  $\mathbf{D}$  é o vetor deslocamento elétrico na camada piezoelétrica,  $R_l$  é a resistência de carga,  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal e a integração é feita sobre a área do eletrodo  $A_p$ . Substituindo as Eqs. (3.33) e (3.34) na Eq. (3.35) é obtida a equação elétrica do sistema:

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{33}^S b L_p}{h_p} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_l} = -\bar{e}_{31} h_{pc} b \int_0^{L_p} \frac{\partial^3 w_{\text{rel}}(x, t)}{\partial x^2 \partial t} dx, \quad (3.36)$$

onde  $b$ ,  $h_p$  e  $L_p$  são a largura, espessura e comprimento da camada piezoelétrica, respectivamente e  $\bar{e}_{31}$  é a constante da tensão piezoelétrica, dada pelo produto:  $\bar{e}_{31} = d_{31} Y_p$ .

### 3.2.4 Modos de vibrar

A expansão modal do sistema não linear ocorre a partir da base modal do problema linear, livre e não amortecido. Assim, é considerada a equação que descreve uma viga biengastada sujeita a tensões axiais com uma massa concentrada na metade de seu comprimento:

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + (\rho A + M_{\text{conc}} \delta(x - L/2)) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (3.37)$$

e suas condições de contorno definidas por:

$$\begin{aligned} w(0, t) = 0; \quad \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0; \\ w(L, t) = 0; \quad \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} &= 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Além das condições de contorno mostradas na Eq. (3.38), devido a massa concentrada no meio da viga é necessária uma condição de contorno a mais, mostrada a seguir:

$$w(L/2, t) = w(L/2, t). \quad (3.39)$$

Essa condição parece trivial, mas ela permite que seja encontrada a equação adicional necessária para solução da equação sem o surgimento de novos coeficientes desconhecidos. A solução da equação (3.37) é assumida da forma  $w(x, t) = \phi(x) [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$ , onde,  $\phi(x)$  é o modo de vibrar da estrutura e depende apenas da coordenada  $x$ . O que implica nas condições de contorno para o modo de vibrar:

$$\begin{aligned}\phi(0) = 0; \quad \left. \frac{d\phi(x)}{dx} \right|_{x=0} &= 0; \\ \phi(L) = 0; \quad \left. \frac{d\phi(x)}{dx} \right|_{x=L} &= 0;\end{aligned}\tag{3.40}$$

$$\phi(L/2, t) = \phi(L/2, t).$$

Assim, a Eq. (3.37) é transformada em uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) dos modos de vibrar para o problema linear, livre e não amortecido:

$$EI \frac{d^4 \phi}{dx^4} - N \frac{d^2 \phi}{dx^2} - \omega^2 (\rho A + M_{conc} \delta(x - L/2)) \phi = 0.\tag{3.41}$$

Para resolver a Eq. (3.41), são feitas simplificações adotando novos parâmetros,

$$k^4 = \frac{\omega^2 \rho A}{EI}; \quad N_{adm} = -\frac{N}{EI}; \quad \mu = \frac{M_{conc}}{\rho A},\tag{3.42}$$

assim, a partir dos parâmetros da Eq. (3.42), a Eq. (3.41) se torna:

$$\frac{d^4 \phi}{dx^4} + N_{adm} \frac{d^2 \phi}{dx^2} - k^4 (1 + \mu \delta(x - L/2)) \phi = 0,\tag{3.43}$$

utilizando a transformada de Laplace em ambos os lados da Eq. (3.41), a EDO em  $x$  é transformada numa equação algébrica em  $s$ :

$$\begin{aligned}N_{adm} s^2 \mathcal{L}_x [\phi(x)](s) - N_{adm} s \phi(0) - N_{adm} \left. \frac{d}{dx} \phi(x) \right|_{x=0} \\ - \mu k^4 \phi(L/2) e^{-sL/2} - k^4 \mathcal{L}_x [\phi(x)](s) + s^4 \mathcal{L}_x [\phi(x)](s) \\ - s^3 \phi(0) - s^2 \left. \frac{d}{dx} \phi(x) \right|_{x=0} - s \left. \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) \right|_{x=0} - \left. \frac{d^3}{dx^3} \phi(x) \right|_{x=0} = 0,\end{aligned}\tag{3.44}$$

aplicando as condições de contorno em  $x = 0$  e isolando  $\mathcal{L}_x [\phi(x)](s)$  na Eq. (3.44):

$$\mathcal{L}_x [\phi(x)](s) = \frac{\mu k^4 \phi(L/2) e^{-sL/2}}{s^4 + N_{adm} s^2 - k^4} + \frac{s \phi''(0)}{s^4 + N_{adm} s^2 - k^4} + \frac{\phi'''(0)}{s^4 + N_{adm} s^2 - k^4}.\tag{3.45}$$

Antes de utilizar a transformada inversa de Laplace, é conveniente reescrever a equação em um formato que permita sua conversão a partir de transformadas tabeladas, assim, são definidos os parâmetros auxiliares:

$$C = \left( -\frac{N_{adm}}{2} + \left( \frac{N_{adm}^2}{4} + k^4 \right)^{0.5} \right)^{0.5};$$

$$D = \left( \frac{N_{adm}}{2} + \left( \frac{N_{adm}^2}{4} + k^4 \right)^{0.5} \right)^{0.5},$$
(3.46)

a partir dos parâmetros auxiliares definidos na Eq. (3.46), a Eq. (3.45) se torna:

$$\mathcal{L}_x[\phi(x)](s) = \frac{\mu k^4 \phi(L/2) e^{-sL/2}}{(s^2 - C^2)(s^2 + D^2)} + \frac{s\phi''(0)}{(s^2 - C^2)(s^2 + D^2)} + \frac{\phi'''(0)}{(s^2 - C^2)(s^2 + D^2)}, \quad (3.47)$$

reescrevendo o denominador da Eq. (3.47) como:

$$\frac{1}{(s^2 - C^2)(s^2 + D^2)} = \frac{1}{(C^2 + D^2)} \left[ \frac{1}{(s^2 - C^2)} - \frac{1}{(s^2 + D^2)} \right], \quad (3.48)$$

para assim utilizar as seguintes expressões e propriedades tabeladas para a transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}_x^{-1} \left\{ s \left[ \frac{1}{(s^2 - C^2)} - \frac{1}{(s^2 + D^2)} \right] \right\} = \cosh(Cx) - \cos(Dx);$$

$$\mathcal{L}_x^{-1} \left\{ \left[ \frac{1}{(s^2 - C^2)} - \frac{1}{(s^2 + D^2)} \right] \right\} = \frac{1}{C} \sinh(Cx) - \frac{1}{D} \sin(Dx); \quad (3.49)$$

$$\mathcal{L}_x^{-1} \{ e^{-cs} F(s) \} = f(x - c) H(x - c),$$

a fim de obter a expressão para o modo de vibrar:

$$\phi(x) = \frac{\mu k^4 \phi(L/2) \left( -\frac{\sin(D(x-L/2))}{D} + \frac{\sinh(C(x-L/2))}{C} \right) H(x - L/2)}{C^2 + D^2}$$

$$+ \frac{\phi'''(0) \left( -\frac{\sin(Dx)}{D} + \frac{\sinh(Cx)}{C} \right)}{C^2 + D^2} + \frac{\phi''(0) (-\cos(Dx) + \cosh(Cx))}{C^2 + D^2}. \quad (3.50)$$

Substituindo as 3 outras condições de contorno mostradas na Eq. (3.40), é encontrada a matriz dos coeficientes das equações em  $\phi(L/2)$ ,  $\phi''(0)$  e  $\phi'''(0)$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\cos(DL/2) - \cosh(CL/2)}{C^2 + D^2} & \frac{\frac{\sin(DL/2)}{D} - \frac{\sinh(CL/2)}{C}}{C^2 + D^2} \\ \frac{\mu k^4 \left( \frac{\sin(DL/2)}{D} - \frac{\sinh(CL/2)}{C} \right)}{C^2 + D^2} & \frac{\cos(DL) - \cosh(CL)}{C^2 + D^2} & \frac{\frac{\sin(DL)}{D} - \frac{\sinh(CL)}{C}}{C^2 + D^2} \\ \frac{\mu k^4 (\cos(DL/2) - \cosh(CL/2))}{C^2 + D^2} & -\frac{C \sinh(CL) + D \sin(DL)}{C^2 + D^2} & \frac{\cos(DL) - \cosh(CL)}{C^2 + D^2} \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

a partir da qual são extraídas as frequências naturais do sistema, tomando seu determinante e igualando-o a zero. Como o determinante da matriz é nulo, o sistema possui infinitas soluções, dessa forma, para encontrar o valor do último coeficiente, as funções de modo são normalizadas a partir da massa do sistema, conforme a equação:

$$\frac{\int_0^L \phi_i(x) m(x) \phi_j(x) dx}{\phi_i(p_0) \phi_j(p_0)} = \delta_{ij}, \quad (3.52)$$

onde  $p_0$  é o ponto de medição do sistema e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, que vale 1 quando  $i = j$  e 0 caso contrário.

### 3.2.5 Solução das equações

Adicionando o termo proveniente da carga axial e do *midplane stretching* da Eq. (3.31) na Eq. (3.7) e agrupando com a Eq. (3.36), são apresentadas as EDP mecânica e elétrica acopladas que descrevem a oscilação transversal do coletor de energia:

$$\begin{aligned} & EI_s \frac{\partial^4 w_{rel}(x, t)}{\partial x^4} + EI_p [H(x - L_{pi}) - H(x - L_{pf})] \frac{\partial^4 w_{rel}(x, t)}{\partial x^4} + c_s I \frac{\partial^5 w_{rel}(x, t)}{\partial x^4 \partial t} \\ & + c_a \frac{\partial w_{rel}(x, t)}{\partial t} + m(x) \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial t^2} + \vartheta v(t) \times \left[ \frac{d\delta(x - L_{pi})}{dx} - \frac{d\delta(x - L_{pf})}{dx} \right] \\ & - \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2} \left( N + \frac{EA}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial w_{rel}(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx \right) = -m(x) \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial t^2} - c_a \frac{\partial w_b(x, t)}{\partial t}; \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{33}^S b L_p}{h_p} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_1} = -\bar{e}_{31} h_{pc} b \int_{L_{pi}}^{L_{pf}} \frac{\partial^3 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2 \partial t} dx. \quad (3.54)$$

A oscilação da viga pode ser representada pela série de bases e coordenadas modais a seguir:

$$w_{rel}(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \eta_r(t), \quad (3.55)$$

onde  $\phi_r(x)$  é o modo de vibrar da  $r$ -ésima frequência natural, sendo dependente apenas da coordenada  $x$  e  $\eta_r(t)$  é a coordenada modal referente à  $r$ -ésima frequência natural, dependente apenas do tempo  $t$ . Nesse estudo, é considerada apenas a primeira frequência natural, dessa forma, a solução é escrita como um produto do modo de vibrar pela coordenada modal:

$$w_{rel}(x, t) = \phi(x)\eta(t). \quad (3.56)$$

Substituindo a Eq. (3.56) nas Eqs. (3.53) e (3.54):

$$\begin{aligned} & EI_s \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} \eta(t) + EI_p [H(x - L_{pi}) - H(x - L_{pf})] \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} \eta(t) + c_s I \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} \frac{d\eta(t)}{dt} \\ & + c_a \phi(x) \frac{d\eta(t)}{dt} + m(x) \phi(x) \frac{d^2 \eta(t)}{dt^2} + \vartheta v(t) \times \left[ \frac{d\delta(x - L_{pi})}{dx} - \frac{d\delta(x - L_{pf})}{dx} \right] \\ & - \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \eta(t) \left( N + \frac{EA}{2L} \int_0^L \left( \frac{d\phi(x)}{dx} \eta(t) \right)^2 dx \right) = -m(x) \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial t^2} - c_a \frac{\partial w_b(x, t)}{\partial t}; \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{33}^S b L_p}{h_p} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_l} = -\bar{e}_{31} h_{pc} b \int_{L_{pi}}^{L_{pf}} \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \frac{d\eta(t)}{dt} dx. \quad (3.58)$$

Multiplicando ambos os lados da Eq. (3.57) por  $\phi(x)$  e integrando de 0 a  $L$ , é utilizada a propriedade de ortonormalidade das funções normais com  $p_0 = L/2$ , mostrada na Eq. (3.52), para simplificar a equação e assim obter um sistema equivalente em função da coordenada modal. Dessa forma, a Eq. (3.57) se torna:

$$\phi^2(L/2) \frac{d^2 \eta(t)}{dt^2} + c \frac{d\eta(t)}{dt} + k_{lin} \eta(t) + k_{nl} \eta^3(t) + \chi v(t) = \gamma \frac{d^2 B(t)}{dt^2}, \quad (3.59)$$

e a Eq. (3.58) se torna:

$$C_p \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_l} = \theta \frac{d\eta(t)}{dt}, \quad (3.60)$$

As Eqs. (3.59) e (3.60) que descrevem o movimento do sistema estão em coordenadas modais, para fazer a transformação de coordenadas modais para deslocamento transversal é assumida a posição no centro da viga e a partir da Eq. (3.56) é feita a mudança de coordenadas, com o modo  $\phi(x = L/2)$  e o deslocamento na metade do comprimento da viga  $w(x = L/2, t) = z(t)$ . Também, a aceleração da base é considerada como entrada harmônica  $\frac{d^2 B(t)}{dt^2} = F \cos(\omega t)$ , para obter a equação na coordenada espacial de deslocamento transversal:

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \frac{c}{\phi^2(L/2)} \frac{dz(t)}{dt} + \frac{k_{lin}}{\phi^2(L/2)} z(t) + \frac{k_{nl}}{\phi^4(L/2)} z^3(t) + \frac{\chi}{\phi(L/2)} v(t) = \frac{\gamma F}{\phi(L/2)} \cos(\omega t); \quad (3.61)$$

$$C_p \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_l} = \frac{\theta}{\phi(L/2)} \frac{dz(t)}{dt}, \quad (3.62)$$

nas Eqs. (3.61) e (3.62) as constantes são reescritas de modo a incorporar as mudanças geradas por mudar da coordenada modal para deslocamento  $z$  sem perda de generalidade. Assim, as EDOs acopladas para o sistema são dadas a seguir:

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + c \frac{dz(t)}{dt} + k_{lin} z(t) + k_{nl} z^3(t) + \chi v(t) = \gamma F \cos(\omega t); \quad (3.63)$$

$$C_p \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_l} = \theta \frac{dz(t)}{dt}, \quad (3.64)$$

nas quais o termo de deslocamento da base proveniente do amortecimento é desprezado e os coeficientes da equação são indicados abaixo:

$$\begin{aligned} k_{lin} &= \frac{1}{\phi^2(L/2)} \left( EI_s \left( \int_0^L \phi(x) \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} dx \right) - N \left( \int_0^L \phi(x) \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} dx \right) \right. \\ &\quad \left. + EI_p \left( \int_0^L [H(x - L_{pi}) - H(x - L_{pf})] \phi(x) \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} dx \right) \right); \\ c &= \frac{1}{\phi^2(L/2)} \left( c_s I \left( \int_0^L \phi(x) \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} dx \right) + c_a \left( \int_0^L \phi(x) \phi(x) dx \right) \right); \\ \chi &= \frac{1}{\phi(L/2)} \vartheta \left( \int_0^L \phi(x) \left[ \frac{d\delta(x - L_{pi})}{dx} - \frac{d\delta(x - L_{pf})}{dx} \right] dx \right); \\ k_{nl} &= -\frac{1}{\phi^4(L/2)} \left( \int_0^L \phi(x) \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} dx \right) \left( \frac{EA}{2L} \int_0^L \left( \frac{d\phi(x)}{dx} \right)^2 dx \right); \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\gamma = -\frac{1}{\phi(L/2)} \left( \int_0^L \phi(x) m(x) dx \right);$$

$$C_p = \frac{\bar{\varepsilon}_{33}^S b L_p}{h_p};$$

$$\theta = -\frac{\bar{e}_{31} h_{pc} b}{\phi(L/2)} \int_{L_{pi}}^{L_{pf}} \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} dx.$$

A expressão para  $k_{lin}$  descrita na Eq. (3.65) mostra o efeito da força axial e do elemento piezoelétrico na frequência natural do sistema. O termo  $\frac{EI_s}{\phi^2(L/2)} \left( \int_0^L \phi(x) \frac{d^4\phi(x)}{dx^4} \right)$  representa o quadrado da frequência natural da viga caso não houvesse carga axial e um material piezoelétrico acoplado, dessa forma, o deslocamento da resposta em frequência do sistema devido a cargas axiais é previsto pelo modelo. Ademais, as constantes de acoplamento eletromecânico  $\theta$  e  $\chi$  são iguais, o que é mostrado a seguir. A expressão de  $\theta$  pode ser simplificada para:

$$\theta = -\frac{\bar{e}_{31}h_{pc}b}{\phi(L/2)} \left( \left. \frac{d\phi(x)}{dx} \right|_{L_{pf}} - \left. \frac{d\phi(x)}{dx} \right|_{L_{pi}} \right), \quad (3.66)$$

enquanto a expressão de  $\chi$  a partir da Eq. (3.8) e do valor de  $\vartheta$  mostrado na Eq. (3.6) pode ser simplificada para:

$$\chi = -\frac{bY_p d_{31}(h_c^2 - h_b^2)}{2h_p\phi(L/2)} \left( \left. \frac{d\phi(x)}{dx} \right|_{L_{pf}} - \left. \frac{d\phi(x)}{dx} \right|_{L_{pi}} \right), \quad (3.67)$$

também, a partir das expressões para as posições das superfícies do sistema em relação à linha neutra, obtidas em (Inman, 2008), a seguinte relação é encontrada:

$$\frac{h_c^2 - h_b^2}{2h_p} = h_{pc}. \quad (3.68)$$

Assim, o parâmetro  $\chi$  pode ser reescrito como:

$$\chi = -\frac{Y_p d_{31} h_{pc} b}{\phi(L/2)} \left( \left. \frac{d\phi(x)}{dx} \right|_{L_{pf}} - \left. \frac{d\phi(x)}{dx} \right|_{L_{pi}} \right) = \theta. \quad (3.69)$$

Dessa forma, o acoplamento eletromecânico nas equações mecânica e elétrica são iguais e representados por  $\theta$ .

As Eqs. (3.63) e (3.64) representam um oscilador de Duffing com acoplamento eletromecânico, o sistema equivalente obtido é apresentado na Fig. 3. A seguir, as equações são adimensionalizadas de modo a simplificar o tratamento algébrico, procedimento adotado em (Xiao; Qie; Bowen, 2021). Definindo os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned} y = \frac{z}{z_0}, \quad z_0 = \frac{\gamma F}{k_{lin}}, \quad \omega_n = \sqrt{k_{lin}}, \quad \zeta = \frac{c}{2\omega_n}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_n}, \\ \tau = \omega_n t, \quad \alpha = \frac{k_{nl} z_0^2}{k_{lin}}, \quad v = \frac{C_p v}{\theta z_0}, \quad \beta = \frac{1}{R_i C_p \omega_n}, \quad \kappa^2 = \frac{\theta^2}{k_{lin} C_p}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

é possível reescrever as Eqs. (3.63) e (3.64) como:

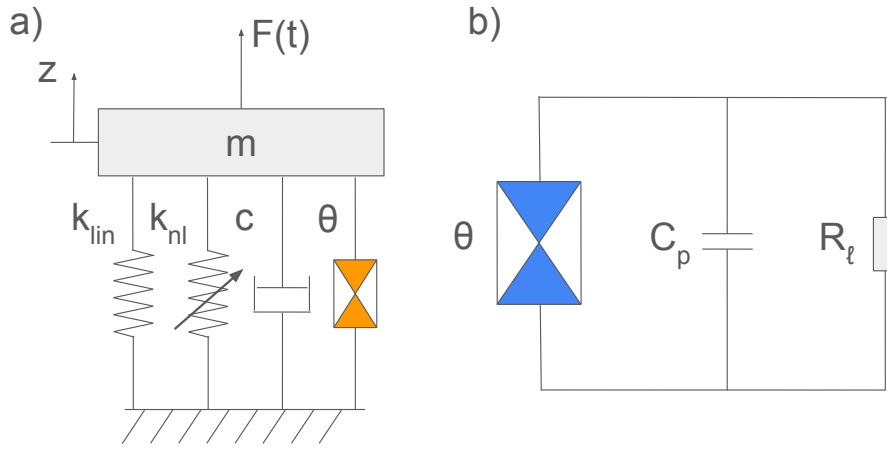


Figura 3 – Sistema equivalente das Eqs. (3.63) e (3.64), o elemento inercial  $m$  do sistema mecânico é unitário nas equações encontradas, devido a normalização dos modos, descrita na Eq. (3.52). Em a) está mostrado o sistema mecânico e em b) o sistema elétrico.

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2\zeta \frac{dy}{d\tau} + y + \alpha y^3 + \kappa^2 v = \cos(\Omega\tau); \quad (3.71)$$

$$\frac{dv}{d\tau} + \beta v = \frac{dy}{d\tau}. \quad (3.72)$$

### 3.2.6 Balanço harmônico

Para encontrar a resposta em frequência do sistema é utilizado o método do balanço harmônico (Peng *et al.*, 2008), assim, assume-se a solução das equações (3.71) e (3.72) como harmônica:

$$\begin{aligned} y &= Y \cos(\Omega\tau + \varphi_x); \\ v &= V \cos(\Omega\tau + \varphi_v), \end{aligned} \quad (3.73)$$

onde  $Y$  e  $V$  são as amplitudes das respostas mecânica e elétrica, respectivamente e  $\varphi_x$  e  $\varphi_v$  são as fases das respostas mecânica e elétrica, respectivamente. Substituindo a Eq. (3.73) na Eq. (3.71):



$$\begin{aligned}
& \left( -V\kappa^2 \sin(\varphi_v) - 2Y\Omega\zeta \cos(\varphi_x) + \left( -\frac{3Y^3\alpha}{4} + Y\Omega^2 - Y \right) \sin(\varphi_x) \right) \sin(\Omega\tau) \\
& + \left( V\kappa^2 \cos(\varphi_v) - 2Y\Omega\zeta \sin(\varphi_x) + \left( \frac{3Y^3\alpha}{4} - Y\Omega^2 + Y \right) \cos(\varphi_x) - 1 \right) \cos(\Omega\tau) \quad (3.74) \\
& + (\dots) \sin(3\Omega\tau) + (\dots) \cos(3\Omega\tau) = 0.
\end{aligned}$$

Ignorando termos harmônicos superiores e igualando os termos que multiplicam  $\sin(\Omega\tau)$  e  $\cos(\Omega\tau)$  a 0 na Eq. (3.74):

$$\begin{aligned}
V\kappa^2 \sin(\varphi_v) + 2Y\Omega\zeta \cos(\varphi_x) + \left( \frac{3Y^3\alpha}{4} - Y\Omega^2 + Y \right) \sin(\varphi_x) &= 0; \\
V\kappa^2 \cos(\varphi_v) - 2Y\Omega\zeta \sin(\varphi_x) + \left( \frac{3Y^3\alpha}{4} - Y\Omega^2 + Y \right) \cos(\varphi_x) &= 1.
\end{aligned} \quad (3.75)$$

Substituindo a Eq. (3.73) na Eq. (3.72):

$$\begin{aligned}
& (-V\Omega \cos(\varphi_v) - V\beta \sin(\varphi_v) + Y\Omega \cos(\varphi_x)) \sin(\Omega\tau) \\
& + (-V\Omega \sin(\varphi_v) + V\beta \cos(\varphi_v) + Y\Omega \sin(\varphi_x)) \cos(\Omega\tau) \quad (3.76) \\
& + (\dots) \sin(3\Omega\tau) + (\dots) \cos(3\Omega\tau) = 0,
\end{aligned}$$

ignorando termos harmônicos superiores e igualando os termos que multiplicam  $\sin(\Omega\tau)$  e  $\cos(\Omega\tau)$  a 0 na Eq. (3.76), são isolados  $\sin(\varphi_v)$  e  $\cos(\varphi_v)$ , chegando a:

$$\begin{aligned}
\cos(\varphi_v) &= \frac{Y\Omega (\Omega \cos(\varphi_x) - \beta \sin(\varphi_x))}{V (\Omega^2 + \beta^2)}; \\
\sin(\varphi_v) &= \frac{Y\Omega (\Omega \sin(\varphi_x) + \beta \cos(\varphi_x))}{V (\Omega^2 + \beta^2)}.
\end{aligned} \quad (3.77)$$

Aplicando a identidade trigonométrica fundamental para o ângulo  $\varphi_v$ , com as expressões para seno e cosseno dadas na Eq. (3.77) é encontrada a relação entre a amplitude elétrica  $V$  e a amplitude mecânica  $Y$ :

$$V^2 = \frac{Y^2 \Omega^2}{\Omega^2 + \beta^2}. \quad (3.78)$$

Substituindo as relações de seno e cosseno dadas na Eq. (3.77) na Eq. (3.75) e isolando  $\sin(\varphi_x)$  e  $\cos(\varphi_x)$ :

$$\cos(\varphi_x) = Y \left( \left( 1 - \Omega^2 + \frac{3Y^2\alpha}{4} \right) + \frac{\Omega^2\kappa^2}{\Omega^2 + \beta^2} \right); \quad (3.79)$$

$$\sin(\varphi_x) = Y \left( 2\zeta\Omega + \frac{\kappa^2\beta\Omega}{\Omega^2 + \beta^2} \right).$$

Aplicando a identidade trigonométrica fundamental para o ângulo  $\varphi_x$ , com as expressões para seno e cosseno dadas na Eq. (3.79) é encontrada a relação entre a amplitude mecânica  $Y$  e a frequência  $\Omega$ :

$$\left( Y \left( 1 - \Omega^2 + \frac{\Omega^2\kappa^2}{\Omega^2 + \beta^2} \right) + \frac{3Y^3\alpha}{4} \right)^2 + \left( 2Y\zeta\Omega + \frac{\kappa^2\beta Y\Omega}{\Omega^2 + \beta^2} \right)^2 = 1. \quad (3.80)$$

Expandindo a Eq. (3.80), é obtida uma equação polinomial do terceiro grau em  $Y^2$ :

$$\begin{aligned} & \frac{9\alpha^2}{16}Y^6 + \frac{3\alpha}{2} \left( 1 - \Omega^2 + \frac{\kappa^2\Omega^2}{\Omega^2 + \beta^2} \right) Y^4 \\ & + \left( \left( 1 - \Omega^2 \right)^2 + 4\zeta^2\Omega^2 + \frac{\Omega^2\kappa^2(2 - 2\Omega^2 + 4\zeta\beta + \kappa^2)}{\Omega^2 + \beta^2} \right) Y^2 - 1 = 0. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Escrevendo como um polinômio cúbico genérico, a Eq. (3.81) é da forma:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (3.82)$$

na qual,

$$\begin{aligned} a &= \frac{9\alpha^2}{16}; \quad b = \frac{3\alpha}{2} \left( 1 - \Omega^2 + \frac{\kappa^2\Omega^2}{\Omega^2 + \beta^2} \right); \\ c &= \left( \left( 1 - \Omega^2 \right)^2 + 4\zeta^2\Omega^2 + \frac{\Omega^2\kappa^2(2 - 2\Omega^2 + 4\zeta\beta + \kappa^2)}{\Omega^2 + \beta^2} \right); \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$d = -1.$$

Tomando a substituição  $y = x - \frac{b}{3a}$  na Eq. (3.82), o termo quadrático é eliminado e assim é encontrado o discriminante da equação, que permite determinar as frequências onde ocorrem as bifurcações. O polinômio simplificado é da forma:

$$y^3 + py + q = 0, \quad (3.84)$$

na qual,

$$\begin{aligned} p &= \frac{3ac - b^2}{3a^2}; \\ q &= \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{27a^3}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

e o discriminante  $D$  é dado por:

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3. \quad (3.86)$$

A partir do estudo do discriminante são encontradas as frequências de salto do oscilador. Caso  $D > 0$  há apenas uma solução para o sistema, já para  $D \leq 0$  há três soluções possíveis para o sistema, dessa forma, as bifurcações, e consequentemente os saltos, ocorrem quando  $D = 0$ .

### 3.2.7 Resistência ótima

Por fim, são utilizadas as expressões encontradas a partir do balanço harmônico para encontrar uma resistência ótima para o sistema, isto é, o valor de resistência que maximiza a potência de saída do sistema.

A potência elétrica é dada pela expressão:

$$P = \frac{v(t)^2}{R_l}. \quad (3.87)$$

Reescrevendo  $v(t)$  na Eq. (3.87) em função da tensão elétrica adimensional, dada na Eq. (3.70):

$$P = \frac{\left(\frac{v\theta z_0}{C_p}\right)^2}{R_l}. \quad (3.88)$$

Substituindo a Eq. (3.73) na Eq. (3.88):

$$P = \frac{\theta^2 z_0^2}{C_p^2 R_l} V^2 \cos(\Omega\tau + \varphi_v). \quad (3.89)$$

Substituindo a Eq. (3.78) na Eq. (3.89):

$$P = \frac{\theta^2 z_0^2}{C_p^2 R_l} \frac{Y^2 \Omega^2}{\Omega^2 + \beta^2} \cos(\Omega\tau + \varphi_v). \quad (3.90)$$

Reescrevendo  $\beta$  em função de  $R_l$  e reorganizando a Eq. (3.90):

$$P = \frac{(\theta^2 z_0^2 Y^2 \omega^2) R_l}{(R_l C_p \omega)^2 + 1} \cos(\Omega\tau + \varphi_v). \quad (3.91)$$

Derivando a amplitude da potência na Eq. (3.91) em relação a  $R_l$  e igualando a expressão encontrada a zero:

$$\frac{dP}{dR_l} = (\theta^2 z_0^2 Y^2 \omega^2) \left[ \frac{(R_l C_p \omega)^2 + 1 - 2(R_l C_p \omega)^2}{((R_l C_p \omega)^2 + 1)^2} \right] = 0. \quad (3.92)$$

Simplificando a equação (3.92), se obtém a expressão para resistência ótima:

$$R_{otm} = \frac{1}{C_p \omega}. \quad (3.93)$$

## 4 MODELO MULTIFÍSICO

Para o estudo do modelo multifísico é utilizado o software COMSOL Multiphysics. Este é um software de simulação multifísica que utiliza o método de elementos finitos (FEM) para discretizar e resolver as equações que governam o comportamento do sistema em estudo. O FEM, amplamente utilizado há décadas (Zienkiewicz; Taylor, 2005), (Chen, 2011), discretiza o sistema em pequenos elementos e resolve as equações para cada um deles, permitindo análises entre diferentes domínios físicos. Na Fig. 4 é mostrada uma vista explodida do desenho em *Computer Aided Design*(CAD), o qual é composto por uma viga de aço engastada em estruturas externas de alumínio, com uma massa em formato cúbico de neodímio no centro do comprimento, uma camada de MFC próxima a um dos engastes e uma chapa de aço próxima ao outro.

Esta análise visa estudar como a temperatura influencia o sistema, levando em conta as dilatações térmicas da viga e dos engastes. Devido aos diferentes coeficientes de dilatação térmica do alumínio e do aço, o engaste se expande mais que a viga, gerando cargas de tração que aumentam a frequência natural do sistema. A investigação abrange a variação da frequência natural com a temperatura, tanto na presença quanto na ausência da chapa de aço, destacando sua importância para ajustar a frequência natural a valores específicos. Além disso, a análise examina a potência e a tensão geradas pelo material piezoelétrico sob diferentes resistências elétricas, comparando os resultados com as análises analíticas e experimentais para encontrar um valor de resistência ótima para a operação do sistema.

Para realizar a análise, são utilizadas as interfaces de mecânica dos sólidos, eletrostática e circuito elétrico, bem como a interface multifísica de piezoelectricidade do software. Na interface de mecânica dos sólidos, são definidas as propriedades de expansão térmica com base em uma temperatura de referência, além da caracterização piezoelétrica do material piezoelétrico. Também são estabelecidas as condições de contorno do sistema, considerando as superfícies superior e inferior das estruturas de engaste como fixas. Na interface de eletrostática, especificam-se a conservação de carga do material piezoelétrico e as conexões de terminal e terra do circuito. Já na interface de circuito elétrico, é definido o circuito conectado ao elemento piezoelétrico, configurado como uma carga puramente resistiva. Por fim, a interface multifísica de piezoelectricidade é responsável por conectar os domínios mecânico e elétrico, integrando as diferentes áreas de análise.

A malha utilizada no estudo é tetraédrica, com tamanho de elemento definido como *finer*, resultando em 38.672 elementos. Para avaliar a variação da frequência com a temperatura, é realizada uma varredura paramétrica em um estudo estacionário, permitindo obter a condição inicial do sistema com as deformações térmicas. Em seguida, executa-se

um estudo das autofrequências do sistema para diferentes condições de temperatura. Ademais, para determinar a resistência ótima, é feita uma varredura paramétrica no domínio da frequência, assumindo uma frequência constante. Este procedimento fornece as respostas de tensão e potência elétrica do sistema para diferentes valores de resistência.

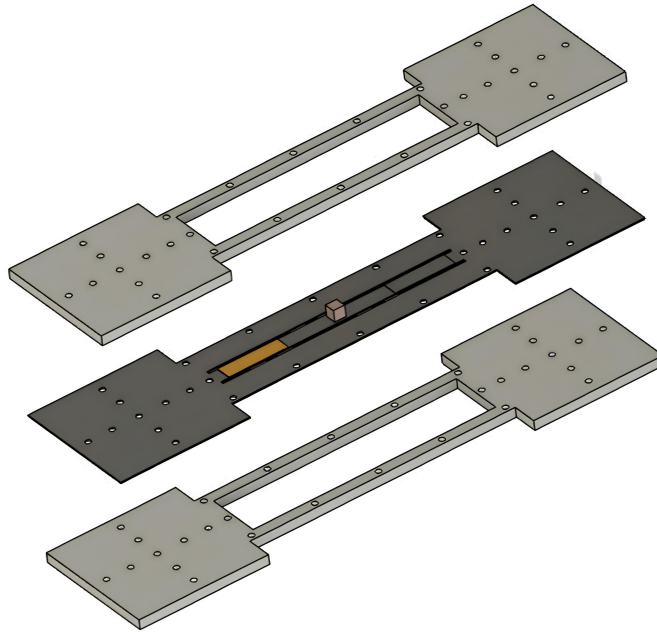


Figura 4 – Vista explodida do sistema

## 5 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Neste capítulo é descrito o protótipo físico construído, o aparato experimental utilizado e os experimentos realizados. A Fig. 5 mostra o sistema que foi ensaiado, composto de duas placas externas de alumínio que confinam uma placa central de aço onde se encontra a viga ( $150 \times 10 \times 0,8$  mm), a qual possui um ímã de neodímio (N42) na metade de seu comprimento, uma camada de MFC (M2807-P2) em uma de suas extremidades e uma chapa de aço na outra extremidade. Também, temos conectores de alumínio que sustentam a estrutura em sanduíche acima de uma estrutura base, também em alumínio, que é conectada a um excitador, de modo a obtermos excitação de base no sistema. Na Fig. 6 observamos a condição de temperatura na qual o sistema foi montado, essa temperatura serve como referência para o estudo, de modo que o sistema é considerado não deformado na temperatura de  $20.2^{\circ}\text{C}$ . Ademais, os parafusos usados para unir a estrutura de engaste na viga foram apertados até um torque de  $0,87$  Nm.

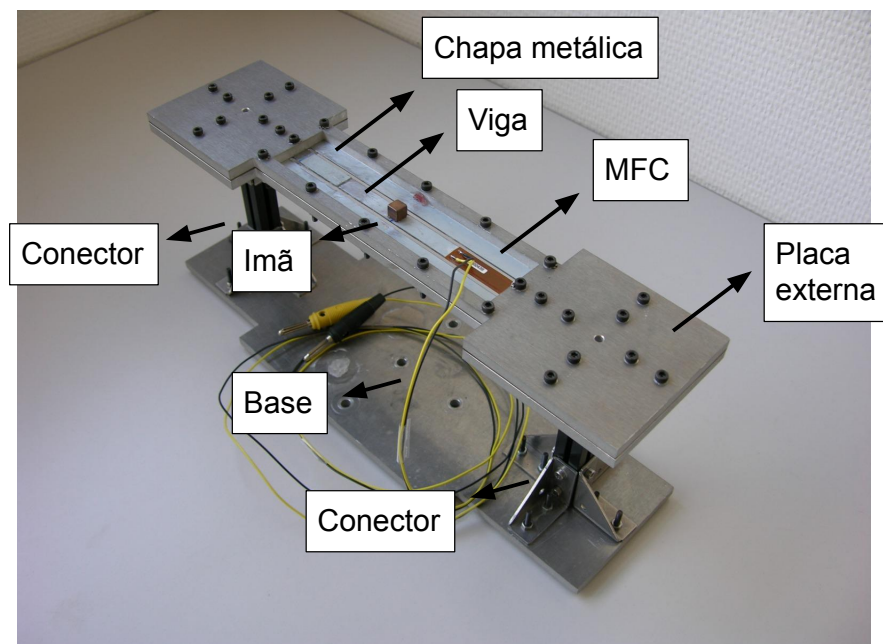


Figura 5 – Visão geral do sistema experimental utilizado no estudo, com destaque para os principais componentes.

Na Figura 7 é mostrado o aparato típico utilizado nos ensaios. O sistema é conectado à mesa vibratória de um excitador Data Physics V100, associado a um amplificador de potências modelo DSA5K-1. A aceleração de entrada no sistema é medida através de um acelerômetro DJB A/600, localizado na superfície plana da base. Os sinais de tensão elétrica do MFC, a temperatura do sistema e a velocidade de um ponto localizado na

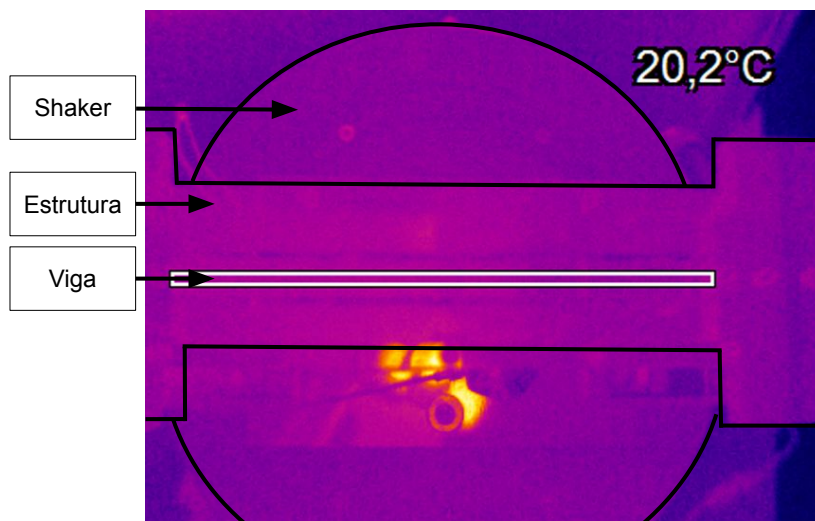


Figura 6 – Imagem térmica do sistema ao ser montado, com contorno e indicações do shaker, estrutura e viga. O retângulo branco mostra a área onde o cálculo da temperatura média (valor no canto superior direito) é feito.

superfície do ímã no centro da viga são medidos. Para a medição da velocidade, é usado um vibrômetro a laser Ometron VH300+ e para a temperatura é utilizada uma câmera térmica Optris XI400. Os sinais são coletados e processados por um analisador espectral VibPilotE da MP *international* e posteriormente armazenados num par de computadores para que possam ser analisados.

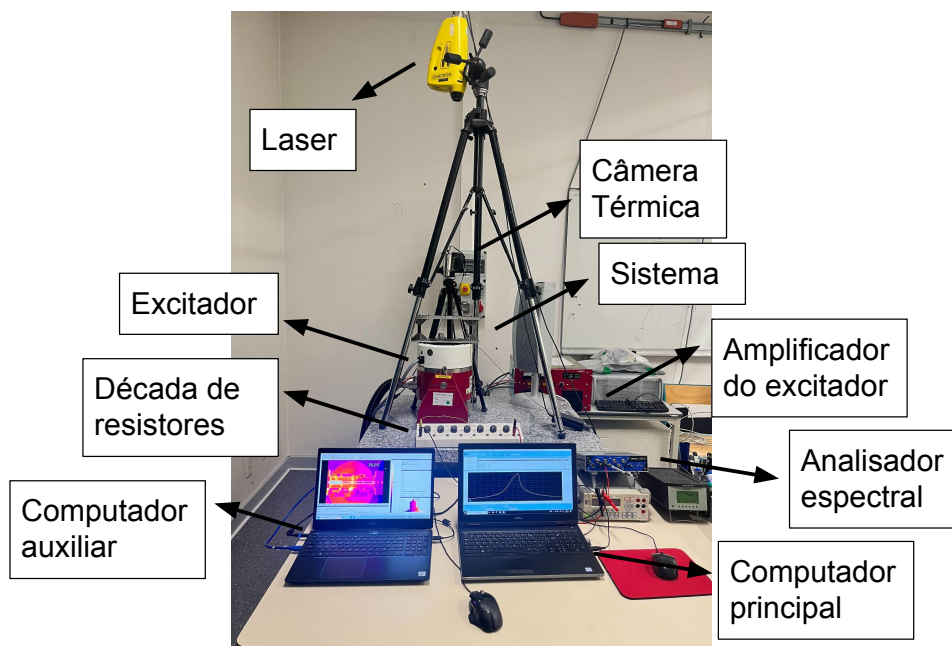


Figura 7 – Aparato experimental utilizado para os experimentos, com destaque para os principais componentes.



Conforme mostrado na Figura 8 as setas indicam o sentido do fluxo dos sinais elétricos. Inicialmente, o computador principal envia um sinal indicando em que condições o sinal de excitação deve ser gerado(1). Então o sinal de excitação é gerado pelo gerador de sinais do analisador espectral e enviado ao amplificador de potências (2). Este sinal, amplificado, é então enviado ao excitador (3) para, então, ser aplicado ao protótipo. O sinal de referência para fins de determinação das FRFs eletromecânicas é a aceleração da base do dispositivo de engaste que é medido pelo acelerômetro e enviado ao analisador espectral (4). O sinal da velocidade, tomado em um ponto localizado na superfície do ímã no centro da viga, é medido através do vibrômetro a laser (5) e enviado ao analisador espectral. De forma similar, o sinal de tensão do MFC é enviado à uma década resistiva (6), instrumento este que permite a variação da resistência de carga do resistor do circuito elétrico de acordo com uma grande faixa de variação de resistências ( $1\ \Omega$  a  $10\ M\Omega$ ). O sinal de tensão piezoelétrico resultante é então enviado ao analisador espectral. Por fim, a câmera térmica monitora a temperatura do sistema, enviando periodicamente imagens de infravermelho da viga para o computador auxiliar(7).

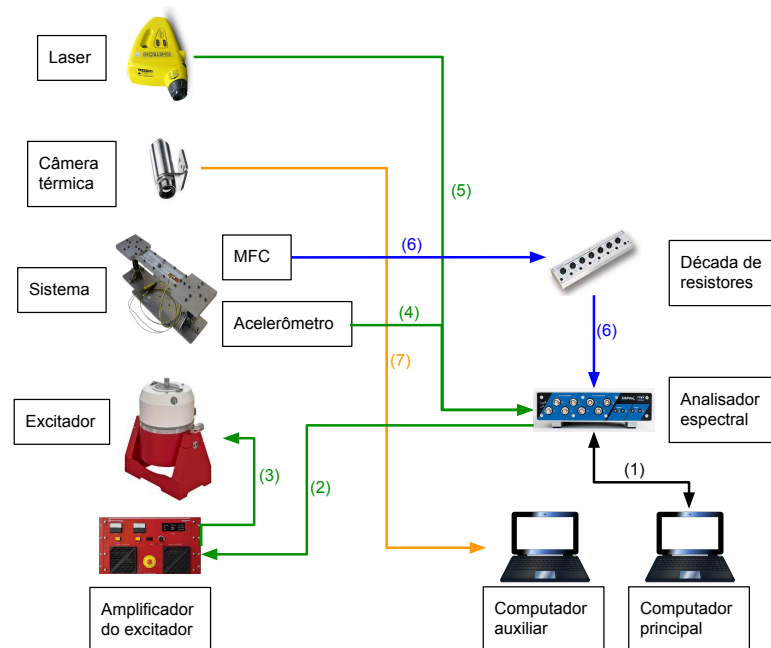


Figura 8 – Diagrama do aparato experimental. As cores das setas representam sinais de diferentes domínios físicos, em verde os sinais referentes a grandezas mecânicas, em azul, grandezas elétricas e em laranja, grandezas térmicas

Os ensaios experimentais são realizados inicialmente variando a resistência do circuito elétrico, de modo a encontrar a resistência ótima também experimentalmente e com isso encontrar o valor da resistência a ser usada nos ensaios de circuito fechado. A tensão obtida na medição pode ser aumentada com o aumento da resistência de carga, até o limite do circuito aberto, porém, com o aumento da resistência temos também uma

redução na corrente elétrica do circuito, o que gera uma redução na potência gerada a partir de um certo valor de resistência. Neste ponto máximo temos a geração máxima de potência, o valor de resistência para essa condição é a resistência ótima do sistema. Então são feitos ensaios para obter a resposta do sistema no domínio da frequência para diferentes temperaturas em circuito fechado com a resistência fixada, de modo a encontrar relações entre os parâmetros do sistema e a temperatura. Em seguida, o sistema é mantido oscilando a uma frequência constante e sua temperatura é aumentada utilizando um aquecedor, com o objetivo de observar a reação do sistema ao aumento da temperatura. Por fim, são feitos ensaios variando bruscamente a temperatura durante a realização das medições, além de considerar uma alta taxa de Hz/min no *sweep* de modo a observar efeitos transitórios e identificar se o sistema é capaz de responder a variações bruscas da temperatura.

## 6 RESULTADOS

### 6.1 Estudo paramétrico da variação da frequência natural

A partir da matriz mostrada na Eq. (3.51) obtida pela equação dos modos, é encontrada a frequência natural do sistema tomando seu determinante. Então, são inseridos os valores para os parâmetros físicos do sistema, mostrados na Tabela 1, o que permite relacionar a frequência natural com a carga axial. Na Fig. 9 é observada a relação entre a frequência natural e a carga axial imposta no sistema.

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Modulo de Young	$E$	200	GPa
Densidade	$\rho$	7850	kg/m <sup>3</sup>
Comprimento	$L$	150	mm
Segundo momento de área	$I$	0.43	mm <sup>4</sup>
Massa concentrada	$M_{conc}$	2.52	g

Tabela 1 – Parâmetros físicos do protótipo

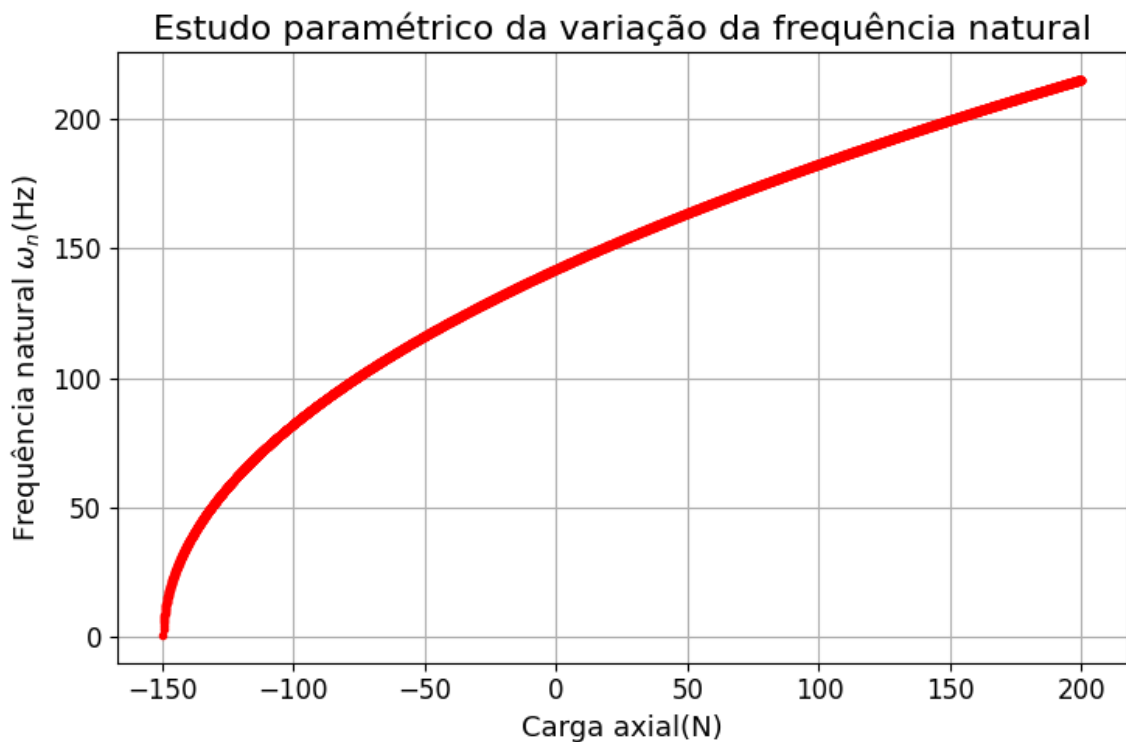


Figura 9 – Estudo paramétrico da variação da frequência natural obtido a partir da equação dos modos.

Conforme observado na Fig. 9, cargas axiais trativas (positivas) geram um aumento na frequência natural, enquanto cargas compressivas (negativas) geram uma redução na

frequência natural. Também é possível notar que o sistema possui uma carga crítica, que reduz a frequência natural para 0 Hz. Essa carga crítica é a carga crítica de flambagem, como observado nos artigos (Trinh *et al.*, 2016) e (Li; Zhou, 2004). A partir desse estudo, percebemos que a base modal encontrada descreve os fenômenos físicos esperados com a mudança da carga axial do sistema.

## 6.2 Resistência ótima

A Fig. 10 mostra a amplitude de resposta do sistema para diferentes resistências, a partir dela é possível notar que o aumento da resistência gera um aumento na tensão de saída.

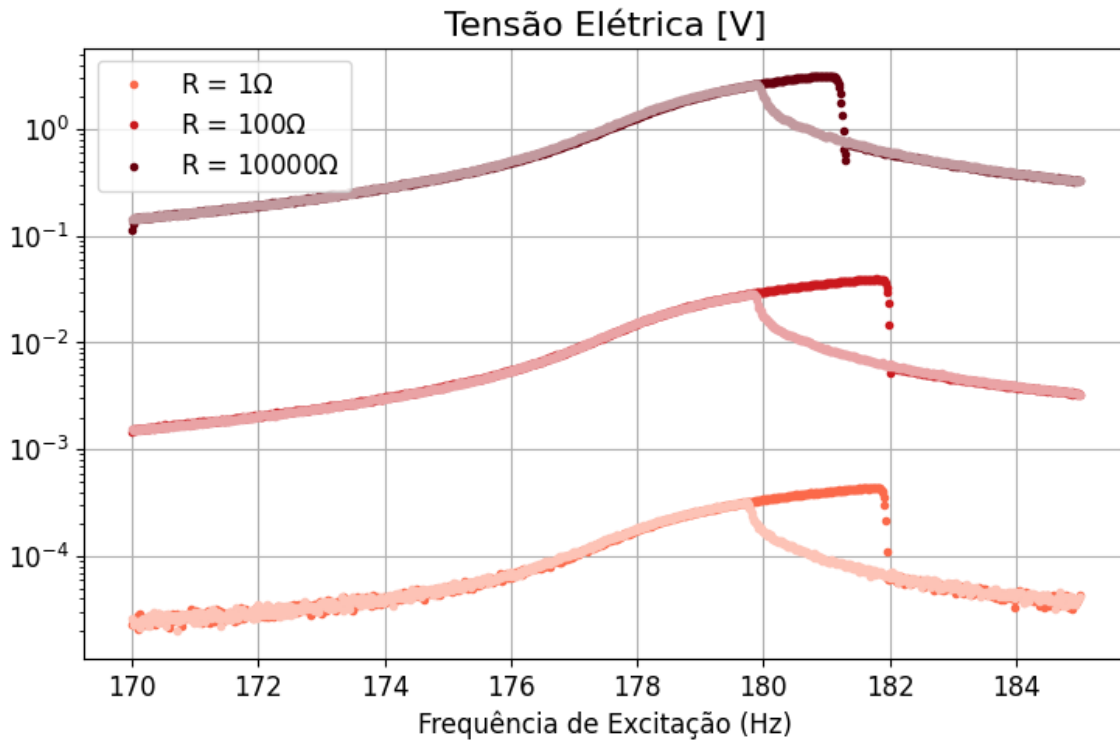


Figura 10 – Amplitudes experimentais de tensão elétrica para diferentes resistências. As cores escuras são curvas de *sweep up*, enquanto as de cores claras são curvas de *sweep down*. Os dados foram obtidos para  $T = 23.5^\circ\text{C}$  e  $F = 0.05\text{g}$ .

O valor da resistência ótima é encontrado a partir do modelo analítico, do modelo multifísico e dos experimentos realizados para uma frequência de 175 Hz. Para encontrar a resistência ótima a partir do modelo analítico, é utilizada a Eq. (3.93), de modo que o valor da resistência depende da capacitância equivalente e da frequência de operação. O valor de  $C_p$  do sistema encontrado experimentalmente é de 20 nF, dessa forma, a resistência ótima para essas condições é de  $R_l = 45.5\text{ k}\Omega$ .

Na Fig. 11 se observam as curvas de tensão e potência elétrica obtidas a partir do modelo multifísico, de maneira que se torna evidente o aumento de tensão elétrica com o

aumento da resistência e também a característica da potência elétrica de apresentar um ponto de máximo para a resistência ótima. Esse valor máximo da potência ocorre quando a resistência é  $R = 47.5 \text{ k}\Omega$ , sendo esse o valor ótimo obtido a partir do modelo multifísico.

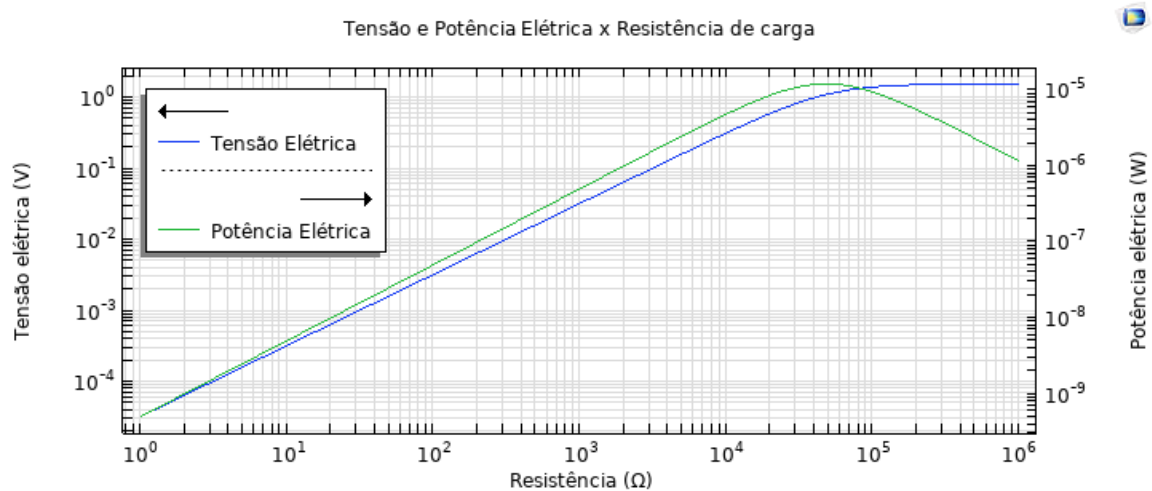


Figura 11 – Curvas de Tensão e Potência Elétrica em função da Resistência de carga obtidas no software COMSOL.

Na Fig. 12 são observadas as curvas experimentais de tensão elétrica e potência elétrica obtidas variando a resistência de carga, semelhante ao gráfico obtido para o modelo multifísico. O valor máximo encontrado para a potência ocorre na resistência de  $40 \text{ k}\Omega$ , sendo esse o valor ótimo obtido a partir dos experimentos.

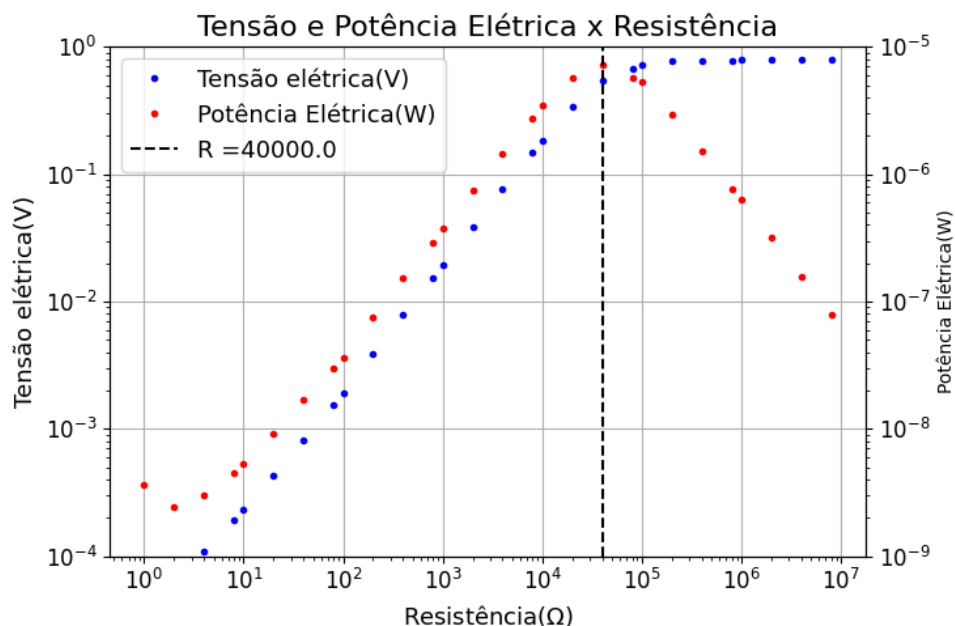


Figura 12 – Curva experimental da Potência Elétrica em função da Resistência de carga. As curvas foram medidas para  $T=27.5^\circ\text{C}$ ,  $F = 0.1\text{g}$  e  $\omega = 175 \text{ Hz}$ .

Os valores para resistência ótima encontrados com os três métodos são próximos, indicando consistência entre as análises. As diferenças encontradas entre os valores podem vir de diferentes fatores: o modelo analítico simplifica aspectos geométricos da estrutura e suas interações, enquanto o COMSOL incorpora maior detalhamento, e o experimento físico pode sofrer variações inerentes aos materiais e componentes. Entretanto, essas diferenças não impactam de forma significativa o resultado, pois os valores de saída de tensão e potência não apresentam variação significativa na faixa de resistência encontrada, como pode ser observado na Fig. 13. Ademais a resistência ótima depende da frequência de operação, observado na Eq. (3.93), de modo que seu valor não é constante durante a realização dos experimentos. Os valores encontrados, porém, determinam uma resistência que gera saídas de tensão e potência adequadas para a faixa de frequências que os experimentos são feitos.

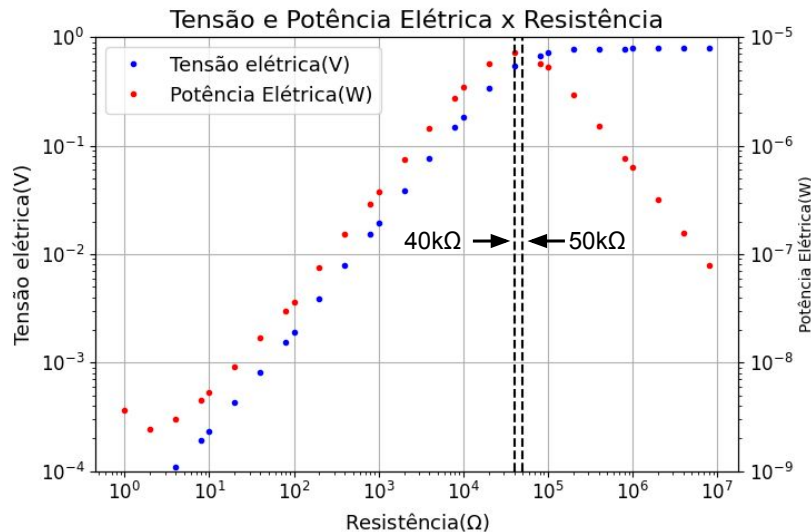


Figura 13 – Curva experimental da Potência Elétrica em função da Resistência de carga com destaque para o intervalo de valores de resistência ótima encontrados pelos diferentes métodos. As curvas foram medidas para  $T=27.5^{\circ}\text{C}$ ,  $F = 0.1\text{g}$  e  $\omega = 175\text{ Hz}$ .

### 6.3 Amplitude x Frequência

A Fig. 14 mostra a variação da frequência natural do sistema em função da temperatura, considerando a presença ou ausência do ímã no meio da viga e da chapa de aço na extremidade oposta ao MFC. A adição do ímã reduz a frequência natural, enquanto a chapa de aço a eleva, compensando o efeito do ímã e permitindo o ajuste da frequência natural conforme as especificações de projeto. A análise multifísica indica que nem o ímã nem a chapa alteram a sensibilidade do sistema à temperatura, possibilitando experimentos em outras frequências sem a presença desses componentes. O ímã acoplado à viga permite explorar estratégias de harvesting baseadas em bobinas, além de ajustar a frequência natural variando sua posição em relação ao engaste. Já a chapa de aço

contrabalança os efeitos do ímã, ampliando a flexibilidade no ajuste da frequência. Os experimentos realizados neste estudo integram pesquisas em dinâmica não linear conduzidas na *University of Franche-Comté, FEMTO-ST Institute, Department of Applied Mechanics, Besançon, França, 25000*. Por estratégia de projeto, optou-se pela utilização da massa e da chapa para adequação do setup experimental.

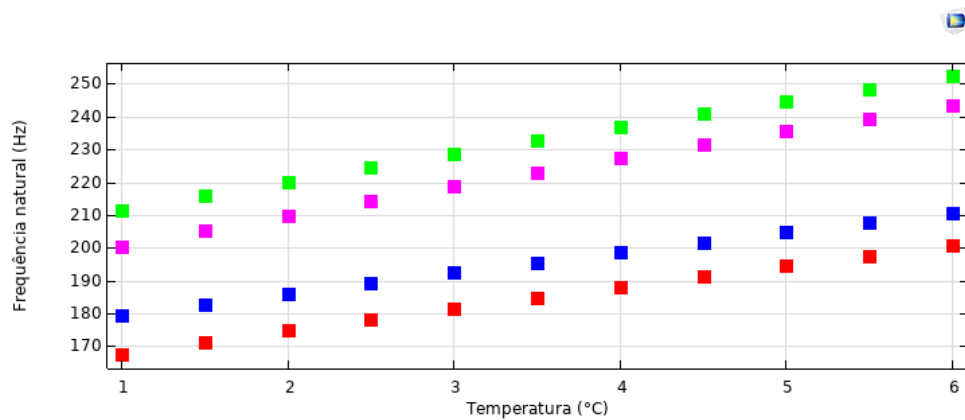


Figura 14 – Curvas de Frequência natural pela temperatura obtidas no COMSOL para o sistema em diferentes combinações de presença do ímã e da chapa de aço. (■) Sem ímã e com chapa, (■) Sem ímã e sem chapa, (■) Com ímã e com chapa, (■) Com ímã e sem chapa

A Fig. 15 mostra três curvas obtidas experimentalmente para diferentes temperaturas sobrepostas com as curvas obtidas a partir do modelo analítico e as imagens obtidas a partir da câmera térmica. Para cada experimento são feitas duas varreduras, uma crescente em frequência e uma decrescente, chamadas de *sweep up* e *sweep down*. Os dados experimentais obtidos são utilizados para fazer a calibração dos parâmetros do modelo de Duffing encontrado nas Eqs. (3.78) e (3.81). Para isso, é usado o método de algoritmos genéticos para otimizar os valores dos parâmetros e seguido de um ajuste manual da curva aos dados. Nas tabelas abaixo estão relacionados os parâmetros obtidos, na Tabela 2 estão os parâmetros que não variam com a temperatura e na Tabela 3 estão os parâmetros que variam.

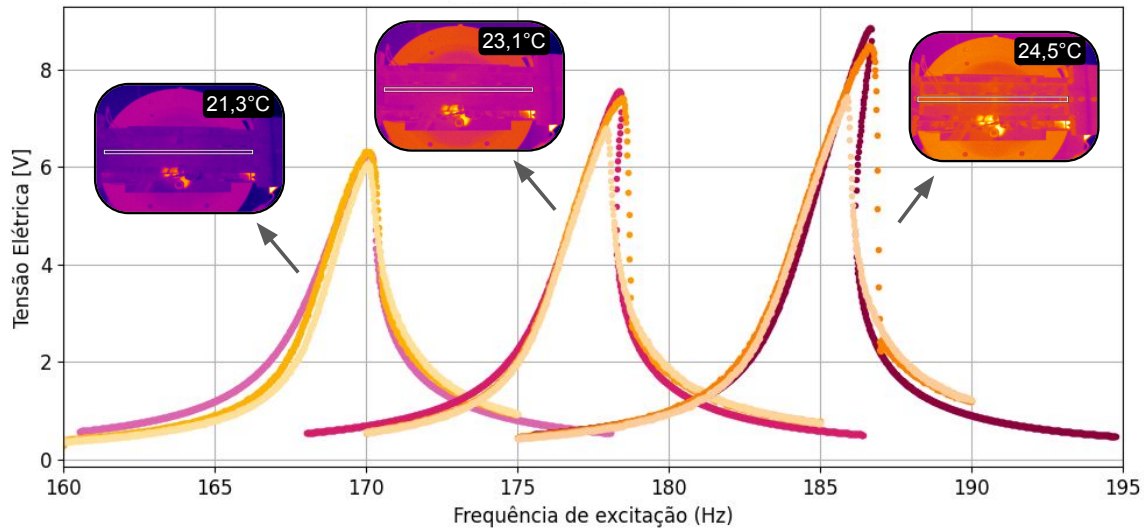


Figura 15 – Curvas experimentais(em tons de amarelo) sobrepostas com curvas obtidas a partir do modelo analítico(em tons de roxo) para diferentes temperaturas.

Tabela 2 – Parâmetros do sistema que não variam com a temperatura

Parâmetro	Valor	Unidade
$k_{nl}$	4.5e11	N/m <sup>3</sup>
$\gamma$	4.5	Adimensional
$R_l$	40	k $\Omega$
$C_p$	20	nF
$\theta$	9.1e-4	N/V
$F$	0.05	g

Tabela 3 – Parâmetros do sistema que variam com a temperatura

$T(^{\circ}\text{C})$	$c(\text{Ns/m})$	$k_{lin}(\text{N/m})$	$T(^{\circ}\text{C})$	$c(\text{Ns/m})$	$k_{lin}(\text{N/m})$
20.85	10.2	1.099e6	22.90	8.22	1.218e6
21.20	9.9	1.114e6	22.90	7.9	1.232e6
21.45	9.7	1.127e6	23.10	7.9	1.235e6
21.70	9.6	1.142e6	23.15	7.8	1.240e6
21.75	9.3	1.154e6	23.20	7.8	1.244e6
22.00	9.1	1.168e6	23.25	7.5	1.267e6
22.25	8.8	1.179e6	23.55	7.5	1.269e6
22.40	8.65	1.197e6	23.75	7.45	1.272e6
22.45	8.65	1.190e6	23.90	7.3	1.281e6
22.50	8.4	1.205e6	24.55	6.6	1.348e6
22.70	8.3	1.212e6	25.05	5.8	1.407e6
22.85	8.0	1.228e6	26.00	5.0	1.515e6
22.85	8.2	1.222e6			



A partir dos parâmetros são encontradas características do sistema, como a frequência natural e a Eq. (3.86) é utilizada para encontrar as frequências onde ocorrem os saltos e observar tendências nos dados com a variação da temperatura. Na Fig. 16, estão relacionados os parâmetros obtidos e a temperatura[(a)  $c$  e (b)  $\omega_n$ ], sendo também mostrado um ajuste polinomial para observar a tendência dos dados com a variação da temperatura e a raiz quadrada do erro médio (*Root Mean Squared Error*) do ajuste. Na Fig. 17 estão relacionados a frequência em que ocorrem os saltos com a temperatura[(a) *jump up*, (b) *jump down*].

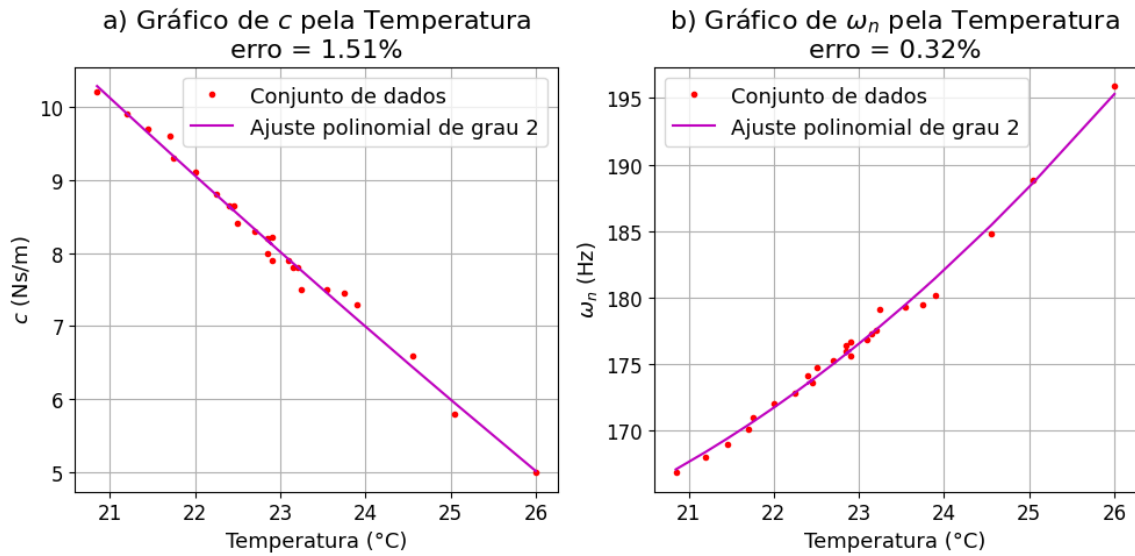


Figura 16 – Gráfico dos parâmetros do sistema variando com a temperatura, com uma curva polinomial ajustada aos dados. Em a)  $c \times T$  e em b)  $\omega_n \times T$

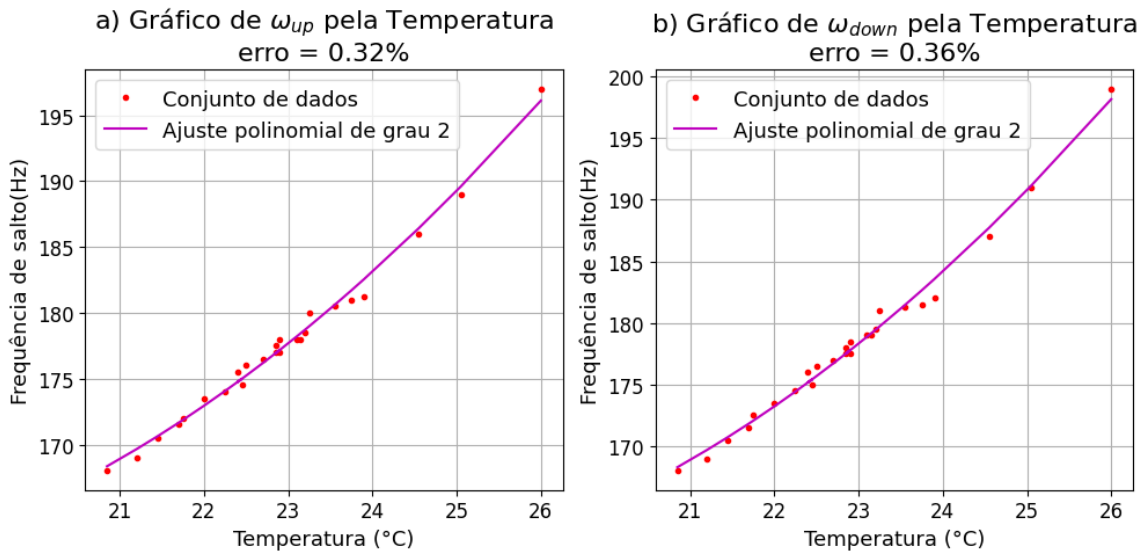


Figura 17 – Gráfico das frequências de salto variando com a temperatura, com uma curva polinomial ajustada aos dados. Em (a) Jump up e em (b) Jump down.

Conforme observado na Fig. 16(b), o aumento da temperatura gera um aumento na frequência natural do sistema, o que indica que a viga está sendo tracionada. Esse resultado destoa do que é observado na literatura, onde o aumento na temperatura gera cargas compressivas na estrutura. Essa diferença é explicada pela interação entre a estrutura de engaste com a viga, as placas externas são feitas de alumínio, enquanto a viga é feita de aço e assim possuem diferentes coeficientes de dilatação térmica,  $23 \times 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$  e  $12.3 \times 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ , respectivamente, de modo que o alumínio se dilata mais que o aço, gerando cargas trativas.

Conforme observado na Fig. 16(a), a constante de amortecimento do modelo diminui com o aumento da temperatura. Um efeito semelhante foi observado em (Teloli *et al.*, 2022), onde os autores observaram uma diminuição do amortecimento do sistema com o aumento da pré-carga aplicada nos parafusos de fixação do sistema. Dessa forma, o aumento da temperatura dilata todo o sistema, o que intensifica as forças de contato entre os elementos da estrutura, esse aumento na força de contato nos parafusos causa a redução do amortecimento mecânico do sistema.

#### 6.4 Aumento da temperatura com frequência constante

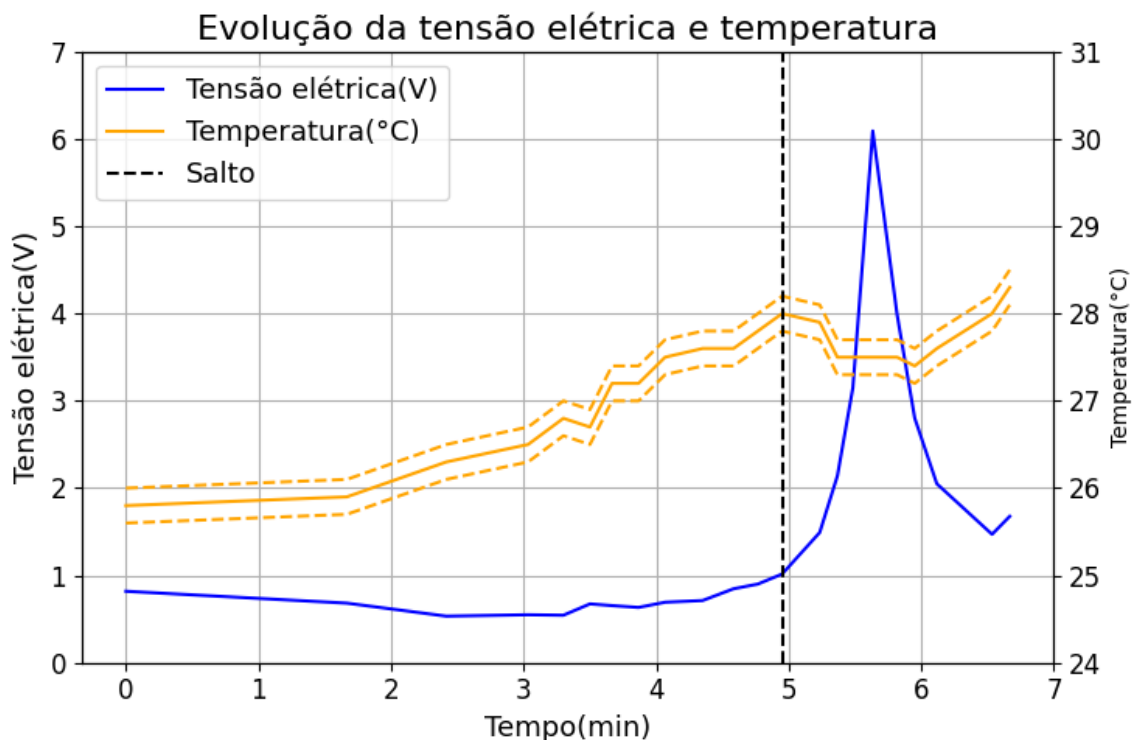


Figura 18 – Evolução da tensão elétrica e temperatura do sistema com frequência constante de 190 Hz.

Na Fig. 18 é mostrada a evolução da temperatura e da resposta elétrica do sistema no tempo, simulando assim uma condição de operação, na qual o sistema não pode

operar acima de  $28^{\circ}\text{C}$  e ao ultrapassar essa temperatura se observa um aumento elevado da tensão elétrica medida. Conforme a temperatura se aproxima de um valor crítico, ocorre o deslocamento da resposta em frequência do sistema, até atingir o ponto onde a bifurcação do sistema coincide com a frequência especificada e resultando no salto de amplitude da tensão elétrica. Também se observa que o sistema não reage imediatamente ao aumento na temperatura, o que sugere uma inércia térmica do sistema, de modo que a mudança no domínio térmico não é observada simultaneamente nos domínios mecânico e elétrico. Essa latência na resposta do sistema indica que a detecção das bifurcações e consequentemente os saltos de amplitude são mais eficientes quanto menor for a taxa de variação da temperatura, de modo que em uma aplicação prática, a sensibilidade do sistema às mudanças de temperatura pode ser explorada para projetar dispositivos que respondam de forma mais precisa em condições de aquecimento lento.

Na Fig. 19 são dadas as respostas do sistema sujeito a variações bruscas de temperatura com varreduras feitas a uma taxa alta de  $40\text{ Hz/min}$ . Devido a alta taxa de variação da temperatura as curvas obtidas no *sweep down* e no *sweep up* estão descompassadas, essa diferença mostra a sensibilidade do sistema à temperatura e indica que o sistema é melhor descrito pelo modelo quão mais lenta for a variação da temperatura, reforçando que em aplicações práticas o sistema é mais preciso em condições de aquecimento lento.

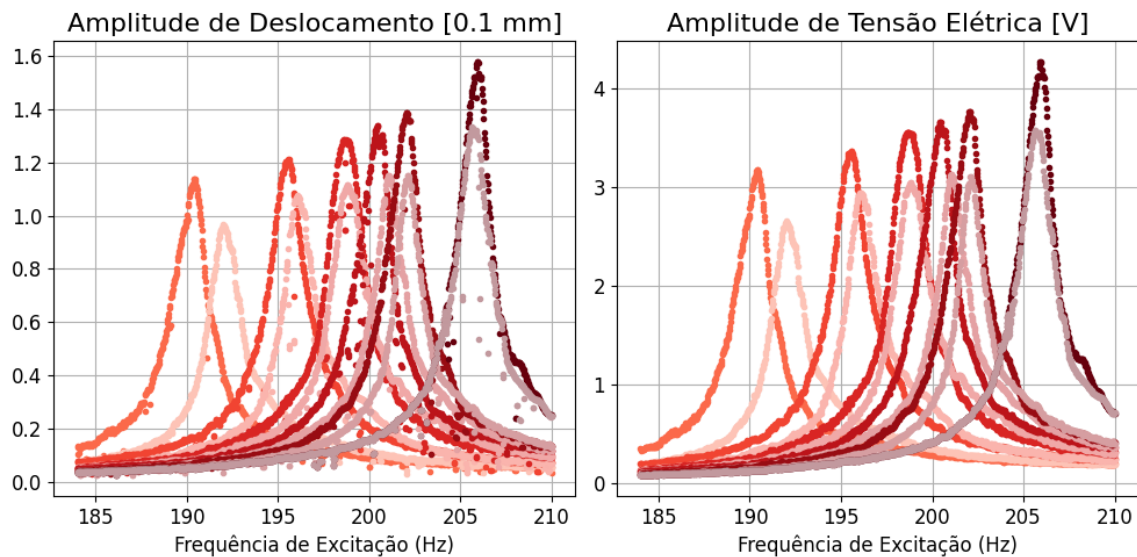


Figura 19 – Deslocamento da curva de resposta com o aumento da temperatura. Condição de operação:  $F = 0.02g$



## 7 CONCLUSÃO

O desenvolvimento e a validação experimental do coletor não linear de energia piezoelétrica utilizando uma viga biengastada demonstram a possibilidade de utilizar o sistema como forma de chaveamento de temperatura. O modelo analítico mostra-se eficaz em reproduzir o comportamento dinâmico do sistema, descrito por um oscilador de Duffing com efeito de *hardening*. A simulação multifísica mostra a possibilidade de ajustar a frequência natural a partir da adição de uma chapa de aço sem alterar a sensibilidade do sistema à temperatura. Os experimentos realizados confirmam o modelo teórico e possibilitam observar os efeitos da mudança de temperatura nos parâmetros do sistema.

O aumento da temperatura gera um aumento na rigidez linear  $k_{lin}$  e redução no amortecimento  $c$  do sistema. Com o aumento da temperatura o sistema expande, porém, devido às restrições de engaste a viga sofre cargas axiais. Essas cargas são tratativas, pois a diferença nos coeficientes de dilatação térmica mostra que os engastes de alumínio vão dilatar mais que a viga de aço. A expansão do sistema também aumenta a força de contato nos parafusos, o que reduz o amortecimento mecânico do sistema.

Os resultados obtidos indicam que o sistema é sensível à temperatura e apresenta aumento na sua resposta de tensão elétrica ao atingir a temperatura limite, comprovando seu funcionamento como chave de temperatura. Entretanto, o modelo desenvolvido apresenta uma inércia térmica, demonstrada na latência entre o aumento da temperatura e o aumento da tensão elétrica, sendo assim mais adequado para aplicações onde a taxa de variação de temperatura é baixa.

Assim, este trabalho contribui para o campo de coleta de energia e sensoriamento, mostrando uma aplicação de coletores de energia para o monitoramento de grandezas físicas, por meio de sua dinâmica não linear e materiais piezoelétricos. Espera-se que os conhecimentos desenvolvidos possam ser utilizados como base para pesquisas futuras e para o desenvolvimento de dispositivos capazes de fazer o monitoramento térmico de sistemas em condições variadas.



## REFERÊNCIAS

- ALI, A. *et al.* Advancements in piezoelectric wind energy harvesting: A review. **Results in Engineering**, v. 21, p. 101777, 2024. ISSN 2590-1230. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2590123024000306>.
- AZIZI, S. *et al.* On the nonlinear dynamics of a piezoresistive based mass switch based on catastrophic bifurcation. **International Journal of Mechanics and Materials in Design**, v. 19, n. 3, p. 521–535, 2023. ISSN 1573-8841. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10999-023-09650-z>.
- BAKHITAR, L. J.; ABDOOS, H.; RASHIDI, S. A review on fabrication and in vivo applications of piezoelectric nanocomposites for energy harvesting. **Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers**, v. 148, p. 104651, 2023. ISSN 1876-1070. Optimisation in Energy and Process Engineering. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1876107022004473>.
- BARBOSA, A.; KACEM, N.; BOUHADDI, N. A design methodology for nonlinear oscillator chains enabling energy localization tuning and soliton stability enhancement with optimal damping. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 213, p. 111358, 2024. ISSN 0888-3270. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327024002565>.
- BARBOSA, A. S.; SILVA, M. M. da. Macro fiber composite-actuated soft robotic fish: A gray box model-predictive motion planning strategy under limited actuation. **Soft Robotics**, v. 10, n. 5, p. 948–958, 2023. PMID: 36951661. Disponível em: <https://doi.org/10.1089/soro.2022.0061>.
- BAYAT, M.; PAKAR, I.; ZIEHL, P. Nonlinear vibration of axially loaded railway track systems using analytical approach. **Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control**, v. 40, n. 4, p. 1896–1906, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1177/14613484211004190>.
- CHEN, Z. **The finite element method: its fundamentals and applications in engineering**. [S.l.: s.n.]: World Scientific, 2011.
- DAQAQ, M. F. *et al.* On the Role of Nonlinearities in Vibratory Energy Harvesting: A Critical Review and Discussion. **Applied Mechanics Reviews**, v. 66, n. 4, p. 040801, 05 2014. ISSN 0003-6900. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.4026278>.
- DERAEMAERKER, A. *et al.* Mixing rules for the piezoelectric properties of macro fiber composites. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures - J INTEL MAT SYST STRUCT**, v. 20, p. 1475–1482, 07 2009.
- DHUMAL, A. R.; KULKARNI, A. P.; AMBHORE, N. H. A comprehensive review on thermal management of electronic devices. **Journal of Engineering and Applied Science**, v. 70, n. 1, p. 140, 2023. ISSN 2536-9512. Disponível em: <https://doi.org/10.1186/s44147-023-00309-2>.

EMAM, S. A.; NAYFEH, A. H. On the nonlinear dynamics of a buckled beam subjected to a primary-resonance excitation. **Nonlinear Dynamics**, v. 35, n. 1, p. 1–17, 2004. ISSN 1573-269X. Disponível em: <https://doi.org/10.1023/B:NODY.0000017466.71383.d5>.

ERTURK, A.; INMAN, D. J. An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations. **Smart materials and structures**, IOP Publishing, v. 18, n. 2, p. 025009, 2009.

HAO, Y. *et al.* A power management ic used for monitoring and protection of li-ion battery packs. **Journal of Sensors**, v. 2021, n. 1, p. 6611648, 2021. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1155/2021/6611648>.

HOSSAIN, M. I. *et al.* Mems-based energy harvesting devices for low-power applications – a review. **Results in Engineering**, v. 19, p. 101264, 2023. ISSN 2590-1230. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2590123023003912>.

HUANG, R. *et al.* Research and design of energy-harvesting system based on macro fiber composite cantilever beam applied in low-frequency and low-speed water flow. **Materials**, v. 17, n. 12, 2024. ISSN 1996-1944. Disponível em: <https://www.mdpi.com/1996-1944/17/12/3033>.

HUO, Z. *et al.* Hybrid energy harvesting systems for self-powered sustainable water purification by harnessing ambient energy. **Frontiers of Environmental Science & Engineering**, v. 17, n. 10, p. 118, 2023. ISSN 2095-221X. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11783-023-1718-9>.

INMAN, D. A distributed parameter electromechanical model for cantilevered piezoelectric energy harvesters. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 130, 08 2008.

LATIF, R. *et al.* Mechanical energy sensing and harvesting in micromachined polymer-based piezoelectric transducers for fully implanted hearing systems: A review. **Polymers**, v. 13, n. 14, 2021. ISSN 2073-4360. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2073-4360/13/14/2276>.

LI, J. *et al.* A consistent geometrically nonlinear model of cantilevered piezoelectric vibration energy harvesters. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 486, p. 115614, 2020.

LI, Z.-C. T. S.-R.; ZHOU, Y.-H. Free vibration of heated euler–bernoulli beams with thermal postbuckling deformations. **Journal of Thermal Stresses**, Taylor & Francis, v. 27, n. 9, p. 843–856, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/01495730490486352>.

MAHMOUDI, S.; KACEM, N.; BOUHADDI, N. Enhancement of the performance of a hybrid nonlinear vibration energy harvester based on piezoelectric and electromagnetic transductions. **Smart Materials and Structures**, IOP Publishing, v. 23, n. 7, p. 075024, jun 2014. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/0964-1726/23/7/075024>.

MASANA, R.; DAQAQ, M. F. Electromechanical Modeling and Nonlinear Analysis of Axially Loaded Energy Harvesters. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 133, n. 1, p. 011007, 12 2010. ISSN 1048-9002. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.4002786>.

NAYFEH, A. H.; EMAM, S. A. Exact solution and stability of postbuckling configurations of beams. **Nonlinear Dynamics**, v. 54, n. 4, p. 395–408, 2008. ISSN 1573-269X. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11071-008-9338-2>.



NORENBERG, J. P. *et al.* Nonlinear dynamics of asymmetric bistable energy harvesters. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 257, p. 108542, 2023. ISSN 0020-7403. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740323004447>.

PENG, Z. *et al.* Comparisons between harmonic balance and nonlinear output frequency response function in nonlinear system analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 311, n. 1, p. 56–73, 2008. ISSN 0022-460X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X07006864>.

POTEKIN, R. *et al.* A micromechanical mass sensing method based on amplitude tracking within an ultra-wide broadband resonance. **Nonlinear Dynamics**, v. 92, n. 2, p. 287–304, 2018.

PRADEESH, E. L. *et al.* A review on piezoelectric energy harvesting. **Microsystem Technologies**, v. 28, n. 8, p. 1797–1830, 2022. ISSN 1432-1858. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00542-022-05334-4>.

PREUMONT, A. *et al.* **Dynamics of electromechanical and piezoelectric systems**. [S.l.: s.n.]: Springer, 2006.

SHAHAB, S.; ERTURK, A. Electrohydroelastic euler–bernoulli–morison model for underwater resonant actuation of macro-fiber composite piezoelectric cantilevers. **Smart Materials and Structures**, IOP Publishing, v. 25, n. 10, p. 105007, sep 2016. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/0964-1726/25/10/105007>.

SINGH, G. *et al.* Footwear for piezoelectric energy harvesting: A comprehensive review on prototypes development, applications and future prospects. **Current Opinion in Solid State and Materials Science**, v. 28, p. 101134, 2024. ISSN 1359-0286. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359028623000797>.

STANTON, S. C. *et al.* Nonlinear piezoelectricity in electroelastic energy harvesters: modeling and experimental identification. **Journal of Applied Physics**, AIP Publishing, v. 108, n. 7, 2010.

TAN, T. *et al.* Geometric nonlinear distributed parameter model for cantilever-beam piezoelectric energy harvesters and structural dimension analysis for galloping mode. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 28, n. 20, p. 3066–3078, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1177/1045389X17704922>.

TELOLI, R. de O. *et al.* Good practices for designing and experimental testing of dynamically excited jointed structures: The orion beam. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 163, p. 108172, 2022. ISSN 0888-3270. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327021005495>.

TRINH, L. C. *et al.* An analytical method for the vibration and buckling of functionally graded beams under mechanical and thermal loads. **Composites Part B: Engineering**, v. 100, p. 152–163, 2016. ISSN 1359-8368. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359836816302980>.

von Wagner, U. Non-linear longitudinal vibrations of non-slender piezoceramic rods. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 39, n. 4, p. 673–688, 2004. ISSN 0020-7462. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020746203001082>.

WAUGH, W. H.; GALLACHER, B. J.; BURDESS, J. S. A high-sensitivity resonant sensor realized through the exploitation of nonlinear dynamic behaviour. **Measurement Science and Technology**, v. 22, n. 10, p. 105202, aug 2011. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/0957-0233/22/10/105202>.

XIAO, H.; QIE, H.; BOWEN, C. R. Modelling of the circular edge-clamped interface of a hydraulic pressure energy harvester to determine power, efficiency and bandwidth. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 146, p. 107013, 2021. ISSN 0888-3270. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S088832702030399X>.

YOUNIS, M. I. **MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics**. 1. ed. Springer New York, NY, 2011. XVI, 456 p. (Microsystems). ISSN 1389-2134. ISBN 978-1-4419-6019-1. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6020-7>.

ZHANG, H. *et al.* Mode-localized accelerometer in the nonlinear duffing regime with 75 ng bias instability and 95 ng/hz noise floor. **Microsystems & Nanoengineering**, v. 8, n. 1, p. 17, 2022. ISSN 2055-7434. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/s41378-021-00340-4>.

ZHANG, H. *et al.* Modeling and active control of geometrically nonlinear vibration of composite laminates with macro fiber composite. **Composite Structures**, v. 321, p. 117292, 2023. ISSN 0263-8223. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822323006384>.

ZHANG, X. *et al.* Reversible temperature-responsive cathode for thermal protection of lithium-ion batteries. **ACS Applied Energy Materials**, American Chemical Society, v. 5, n. 4, p. 5236–5244, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1021/acsaem.2c00617>.

ZHOU, J. *et al.* Macro fiber composite-based active and efficient suppression of low-frequency vibration of thin-walled composite beam. **Composite Structures**, v. 299, p. 116019, 2022. ISSN 0263-8223. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S026382232200770X>.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method set**. [*S.l.: s.n.*]: Elsevier, 2005.