

RAPHAEL HALIM K. M. LIE

**OTIMIZAÇÃO E GESTÃO DE RISCO EM USINAS SUCRO
ALCOOLEIRAS**

Trabalho de Formatura apresentado à
Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo para a obtenção do Diploma
de Engenharia de Produção

SÃO PAULO

2008

RAPHAEL HALIM K. M. LIE

**OTIMIZAÇÃO E GESTÃO DE RISCO EM USINAS SUCRO
ALCOOLEIRAS**

Trabalho de Formatura apresentado à
Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo para a obtenção do Diploma
de Engenharia de Produção

Orientadora:
Prof^a Dr^a Celma de Oliveira Ribeiro

SÃO PAULO

2008

FICHA CATALOGRÁFICA

Lie, Raphael Halim K. M.

Otimização e gestão de risco em usinas sucro alcooleiras / R. H. K. M.

Lie – São Paulo, 2008.

115 p.

Trabalho de Formatura – Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo. Departamento de Engenharia de Produção.

1. Pesquisa Operacional 2. Modelos em Séries Temporais 3. Finanças I.
Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de
Produção II. t

Dedicatória

“Porque dele e por ele, para ele são todas as coisas”

Agradecimentos

À minha família, pelos anos de incentivo, apoio e conselhos durante todos esses anos.

À professora Dra. Celma de Oliveira Ribeiro, pela paciência, orientação, incentivo, encorajamento e conhecimentos compartilhados durante o desenvolvimento deste trabalho de formatura.

Aos professores do departamento de Engenharia de Produção, pelos conhecimentos transmitidos durante os anos de curso.

Aos amigos de faculdade, pelos inesquecíveis momentos de alegria e sofrimento vividos durante a Poli.

A todos da igreja Washington, pelo carinho durante estes anos e por serem a minha família nos momentos de alegria e nos momentos de dificuldade.

E ao meu único Deus, que é a razão do meu viver.

Resumo

A incerteza das oscilações de preços dos produtos agrícolas é um problema freqüentemente enfrentado pelos produtores de *commodities*, demandando o uso de ferramentas financeiras para a gestão de risco de suas estratégias. O objetivo deste trabalho é evidenciar que a utilização do mercado futuro como instrumento de *hedging* permite que um produtor sucro alcooleiro reduza uma medida de risco atrelada ao seu empreendimento, não comprometendo o seu retorno esperado. O modelo proposto utiliza o CVaR (*conditional value-at-risk*) como medida de risco, posicionando o agricultor ao menor nível de risco possível, para um dado nível de retorno mínimo esperado. Através de testes seqüenciais, foram obtidos resultados que mostraram a eficiência em se adotar o mercado futuro como um instrumento de *hedging*. Para isso, foi realizada uma análise do comportamento dos preços do açúcar por meio de um estudo da volatilidade, estimada através do modelo GARCH (*generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*). Foram simulados 500 cenários para os preços do açúcar à vista e futuro, de modo que o modelo de otimização evidenciasse os níveis ótimos para a venda no mercado à vista, compra e venda no mercado futuro e estocagem dos produtos produzidos.

Abstract

The uncertainty of the agricultural product price oscillations is a frequent issue faced by commodity producers, demanding the use of financial tools to manage the risk of their strategies. The goal of this work is to display that future market can be used as a hedging tool, allowing sugarcane producers to reduce a risk measure related to its entrepreneurship, not compromising its expected return. The proposed model uses CVaR (conditional value-at-risk) as a risk measure, generating a position where the producer would be exposed to the lowest level of risk, for a given level of expected minimum return. Results that display the efficiency in adopting future markets as a hedging tool were achieved through sequential tests. Thus, a behavior analysis of the sugar prices was developed through a volatility study, estimated by the GARCH (generalized autoregressive conditional heteroscedasticity) model. It was simulated 500 scenarios for the sugar spot price and for the sugar future price, allowing the optimization model to show the optimum levels for selling in the spot market, buying and selling in the future market and produced products storage.

Lista de Figuras

Figura 2.1 - Maiores produtores de açúcar (05/06) - FAO.....	22
Figura 2.2 - Maiores produtores de café (05/06) – FAO.....	22
Figura 2.3 - Maiores produtores de soja (05/06) – FAO.....	23
Figura 2.4 - Distribuição do agronegócio no PIB brasileiro - IPEA.....	24
Figura 2.5 - Crescimento da população mundial - Census.....	25
Figura 2.6 - Consumo mundial de alimentos per capita (kg) – FAO.....	26
Figura 2.7 - Sistema de transporte – Ministério dos Transportes.....	27
Figura 2.8 - Preço das terras (US\$/ha) - IBGE.....	28
Figura 2.9 - Maiores exportadores de açúcar – FAO.....	31
Figura 2.10 - Maiores produtores de açúcar – FAO.....	32
Figura 3.1 – Peso das observações para $\lambda = 0.98$	43
Figura 3.2 - Peso das observações para $\lambda = 0.90$	43
Figura 3.3 - Esquematização de VaR numa distribuição de probabilidade.....	46
Figura 3.4 – Esquematização de duas distribuições distintas com o mesmo VaR.....	47
Figura 3.5 - Comparação entre o VaR e CVaR de duas distribuições de probabilidades.....	49
Figura 3.6 – Risco-Retorno das carteiras.....	53
Figura 3.7 – Risco-Retorno com diferentes correlações.....	54
Figura 4.1 – Distribuição de probabilidade para processos estocásticos.....	56
Figura 4.2 – Exemplo de um processo descrito através de um modelo MA(1).....	59
Figura 4.3 – Exemplo de um processo descrito através de um modelo AR(1).....	61

Figura 4.4 – Exemplo de um processo descrito através de um modelo ARMA(1,1)	62
Figura 4.5 – Gráfico do preço do açúcar futuro	69
Figura 4.6 – Retorno logarítmico diário do açúcar futuro	69
Figura 4.7 – Gráfico da função autocorrelação da série de retorno	70
Figura 4.8 – Volatilidade do açúcar futuro modelado por GARCH	72
Figura 4.9 – Retorno logarítmico estimado pelo método GARCH.....	72
Figura 6.1 – Série histórica de preços utilizados para a simulação.....	88
Figura 6.2 – Cenários simulados para o preço do açúcar à vista	89
Figura 6.3 – Cenários simulados para o preço do açúcar futuro	89
Figura 6.4 – Fronteira eficiente com a estratégia de hedging	92
Figura 6.5 – Fronteira eficiente sem a estratégia de hedging.....	95
Figura 6.6 – Comparação entre as fronteiras eficientes geradas.....	98

Lista de Tabelas

Tabela 2.1 - Alocação das terras brasileiras.....	23
Tabela 2.2 - Exportação e produção brasileira por produto - Conab	25
Tabela 2.3 - PAC para a infra-estrutura de transporte – Ministério da Fazenda.....	27
Tabela 3.1 – Exemplo de dois ativos.....	52
Tabela 3.2 – Possíveis carteiras compostas pelos dois ativos	52
Tabela 4.1 – Parâmetros do modelo GARCH	71
Tabela 6.1 – Matriz resultante da fatoração de Cholesky	88
Tabela 6.2 – Componentes do custo de produção da cana-de-açúcar	90
Tabela 6.3 – Resultados da otimização do CVaR para a estratégia A1 em todo o período	93
Tabela 6.4 – Resultados da otimização do CVaR para a estratégia A1 em testes seqüenciais	94
Tabela 6.5 - Resultados da otimização do CVaR para a estratégia A2 em todo o período	94
Tabela 6.6 - Resultados da otimização do CVaR para a estratégia A2 em testes seqüenciais	95
Tabela 6.7 - Resultados da otimização do CVaR para a estratégia B1 em todo o período	96
Tabela 6.8 - Resultados da otimização do CVaR para a estratégia B2 em todo o período	97

Sumário

1. Introdução.....	15
1.1 Objetivo.....	15
1.2 Motivação.....	15
1.3 Organização do Trabalho	17
2. Contextualização do Mercado.....	21
2.1 Introdução	21
2.2 O Setor de Agronegócio no Brasil	21
2.3 O Setor em Números	24
2.4 Infra-Estrutura	26
2.5 Preço das Terras	27
2.6 Mercado Sucro Alcooleiro	29
2.7 Açúcar	30
2.8 Mercado Futuro	32
2.8.1 Introdução	33
2.8.2 Mercado Futuro do Açúcar	34
3. Conceitos	37
3.1 Introdução	37
3.2 Risco.....	37
3.3 Risco e Volatilidade	38
3.4 Suavização Exponencial	42
3.5 Homocedasticidade e Heteroscedasticidade	44
3.6 Variância Não Condicional e Condicional.....	44
3.7 Valor em Risco (VaR).....	45
3.8 Valor em Risco Condicional (CVaR)	48
3.9 Estudos de Portfólios e Modelos de Otimização	50
4. Modelo GARCH.....	55
4.1 Série Temporal	55
4.2 Ruído Branco	58
4.3 Modelos de Previsão	58
4.3.1 Modelo de Médias Móveis (MA).....	58
4.3.2 Modelo Autoregressivo (AR).....	60
4.3.3 Modelo Autoregressivo de Médias Móveis (ARMA).....	62
4.4 Processo Estacionário e Função Autocorrelação	63
4.5 Modelo ARCH	64
4.6 Modelo GARCH	66
4.7 Aplicação do Modelo GARCH	66
4.7.1 Ajuste da Série Temporal.....	68
4.7.2 Gráfico de Autocorrelação	70
4.7.3 Metodologia	71
4.8 Simulação de Preços	72

5.	Definição do Modelo.....	75
5.1	Introdução.....	75
5.2	Parâmetros do Modelo	75
5.5	Hipóteses Adotadas	79
5.6	Restrições do Modelo.....	81
5.7	Função Objetivo	84
5.7.1	Valor em Risco Condicional (CVaR).....	84
6.	Resultados e Análise de Sensibilidade	87
6.1	Introdução.....	87
6.2	Resultados da Simulação.....	87
6.2	Definição das Variáveis de Entrada do Modelo	90
6.4	Resultados do CVaR	91
6.5	Resultados Obtidos Excluindo o Hedging	95
6.6	Análise de Sensibilidade	97
7.	Conclusões.....	101
7.1	Conclusões	101
7.2	Comentários Finais e Recomendações para Trabalhos Futuros.....	102
8.	Referências Bibliográficas	105
9.	ANEXOS	109

1. Introdução

1.1 Objetivo

O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo de otimização voltado para o setor sucro alcooleiro que minimize uma medida de risco através da adoção de uma estratégia de *hedging* pelo usineiro. Para essa estratégia de *hedging*, foi considerada a possibilidade do agricultor negociar no mercado futuro, minimizando com isso uma medida de risco atrelada às suas estratégias de posicionamento, no caso o CVaR (*conditional value-at-risk*).

O presente trabalho é uma extensão do trabalho desenvolvido por Sosnosky e Ribeiro (2007), pois utiliza modelos heteroscedásticos para o retorno dos preços. Foi realizada uma extensa revisão teórica a respeito de processos estocásticos e de séries temporais. Além disso, o modelo de otimização proposto aborda a relação risco-retorno das estratégias adotadas pelo agricultor, sendo, portanto, uma análise na visão de gestor financeiro, que deseja gerenciar o risco de suas estratégias.

Em geral, os modelos encontrados na literatura são apresentados de forma independente, ou seja, ou envolvem os fatores produtivos do empreendimento ou os instrumentos do mercado de derivativos. Este trabalho segue a mesma linha iniciada por Sosnosky e Ribeiro, abordando as restrições do sistema produtivo juntamente com o mercado de derivativos em um único modelo de otimização.

1.2 Motivação

O trabalho foi desenvolvido paralelamente a um estágio em um banco de investimentos multinacional na área de mesa de operações. Em vista do grande número

de estratégias de *hedging* existentes no mercado de derivativos, foi escolhida uma dessas estratégias para a aplicação em uma usina sucro alcooleira.

Os motivos da escolha específica do setor sucro alcooleiro foram: (1) dar continuidade ao trabalho desenvolvido por Sosnosky e Ribeiro (2007) e, (2) a importância do complexo agroindustrial na economia brasileira nos últimos anos. A relevância desse setor tem crescido não apenas no Brasil, mas mundialmente, devido ao desenvolvimento de biocombustíveis. O álcool não foi considerado neste trabalho por sua pouca liquidez nas bolsas de mercados futuros, entretanto por quimicamente compor a cana de açúcar em cerca de 20% e visto que o açúcar é uma das *commodities* mais negociadas na bolsa de Nova Iorque (NYBOT) é bastante aceitável considerarmos somente o açúcar.

Os trabalhos relacionados à produção de cana-de-açúcar se destacaram na década de 70, quando o governo iniciou o programa Pró-Álcool. Desde de então, diversos trabalhos foram publicados, embora muitos deles tratem essencialmente do sistema produtivo.

O Brasil é destaque na produção mundial de açúcar, ocupando o primeiro lugar tanto na produção (31,5 mil toneladas anuais), como na exportação (19,8 mil toneladas anuais), segundo dados da FAO¹. Segundo dados do BNDES², o agronegócio sucro alcooleiro fatura diretamente e indiretamente cerca de R\$ 40 bilhões por ano, correspondendo a 2,35% do PIB nacional. É também um dos setores que mais empregam no país, mais de 3,6 milhões de trabalhadores, reunindo cerca de 72,000 agricultores.

A história da cana-de-açúcar no Brasil remonta da época do descobrimento, nos engenhos de São Vicente e Olinda. Por isso, o governo sempre incentivou a produção

¹ FAO: *Food and Agriculture Organization*

² BNDES: Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social

dessa *commodity* com a criação de órgãos específicos para o setor, projetos e implementando subsídios.

No final da década de 80, o governo deu uma maior liberdade para setor privado, permitindo o desenvolvimento do setor sucro alcooleiro no país. Anos depois, os preços do açúcar e do álcool começaram a ser tabelados, modificando a política de comercialização. Iniciava-se então, uma época de maior competitividade no setor.

Em vista disso, este trabalho de formatura tenta evidenciar que a adoção de uma estratégia de *hedging* no mercado futuro pelo usineiro pode tornar o seu negócio mais competitivo. Além disso, o trabalho aborda um estudo da série de preços futuros do açúcar, que muitas vezes são negociados por agentes financeiros que não estão interessados na mercadoria física, mas sim na obtenção de lucros através das negociações. Dessa forma, o trabalho tenta relacionar o preço à vista do açúcar com o preço negociado no mercado futuro, que muitas vezes tem atuado como um direcionador muito mais forte para o preço do produto.

Um modelo de otimização da relação risco-retorno do agricultor será apresentado, com testes sequenciais do modelo, cobrindo um horizonte de um ano. O modelo é uma ferramenta bastante útil para o usineiro, permitindo que ele gerencie o seu risco de acordo com as posições escolhidas numa dada estratégia.

1.3 Organização do Trabalho

O capítulo 1 apresenta o tema e os objetivos do trabalho, bem como as justificativas e a sua relevância na Engenharia de Produção.

O capítulo 2 contextualiza o mercado sucroalcooleiro dentro do setor de agronegócios, evidenciando alguns importantes indicadores para uma melhor

compreensão do cenário no país e no mundo. Em seguida, são apresentadas as características do mercado futuro voltado para as *commodities* agrícolas, para finalmente se fazer uma análise mais aprofundada dos mecanismos desse mercado para o açúcar.

O capítulo 3 faz uma revisão bibliográfica, apresentando os principais conceitos para uma melhor compreensão dos modelos propostos no trabalho. Inicialmente são mostradas as definições de retorno e risco, fundamentadas no trabalho desenvolvido por Markowitz (1952). Em seguida, relaciona-se a definição de risco com volatilidade, apresentando paralelamente o modelo de suavização exponencial. Neste capítulo, também são destacadas as propriedades da homocedasticidade e heteroscedasticidade, para uma melhor compreensão dos modelos de séries temporais descritas no capítulo 4. Por fim, as medidas de risco VaR (*value-at-risk*), CVaR (*conditional value-at-risk*) e da fronteira eficiente são descritas.

O capítulo 4 descreve os modelos de séries temporais. Inicialmente são definidos os processos estocásticos para então, serem apresentados os modelos de médias móveis (MA), o modelo autoregressivo (AR) e a combinação de ambos os modelos, ARMA. Também são apresentadas duas propriedades, a estacionariedade e a função autocorrelação, utilizadas na análise das séries temporais. Em seguida, é descrito o modelo ARCH (*autoregressive conditional heteroscedasticity*) desenvolvido por Engle (1982) para modelos heteroscedásticos. Esse modelo foi um grande avanço no estudo de séries temporais em finanças, pois contempla a variabilidade da variância da série de preços. Finalmente, o modelo GARCH (*generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*) desenvolvido por Bollerslev (1987) é apresentado, ampliando a aplicabilidade do modelo desenvolvido inicialmente por Engle. Após isso, são mostradas algumas aplicações do modelo GARCH no setor de *commodities* agrícolas, evidenciando a sua importância no setor. Por fim, é apresentada a metodologia utilizada na aplicação do modelo para a estimativa da volatilidade na série de preços do açúcar.

O capítulo 5 descreve o modelo de programação utilizado para minimizar a medida de risco, o CVaR, como forma de otimizar as estratégias adotadas pelo agricultor. O capítulo inicia fazendo uma breve descrição dos parâmetros utilizados na modelagem. Em seguida, são apresentadas as hipóteses adotadas e as restrições do modelo proposto. Finalmente, o modelo de minimização do CVaR é descrito no último sub-capítulo.

O capítulo 6 apresenta os principais resultados do modelo proposto para a minimização do CVaR nas estratégias adotadas em uma usina sucro alcooleira. O modelo possui um horizonte de 1 ano, mas foi também realizada uma análise de testes seqüenciais em intervalos de 60 dias corridos, até se completar o período de 1 ano. Ele é aplicado em duas situações distintas, a primeira considerando o *hedging* no mercado futuro, e a segunda impossibilitando o agricultor de utilizar essa ferramenta, permitindo analisar a eficiência do *hedging* para minimizar o risco. Para cada uma das situações foram construídas as fronteiras eficientes, formadas por 19 estratégias ótimas, permitindo que fossem feitas algumas análises de sensibilidade.

O capítulo 7 apresenta as conclusões deste trabalho através dos resultados obtidos e conclui com algumas recomendações para trabalhos futuros relacionados aos modelos propostos.

As referências bibliográficas e os anexos são encontrados no final deste trabalho.

2. Contextualização do Mercado

2.1 Introdução

Antes de analisar detalhadamente o problema de interesse é preciso contextualizar o mercado de açúcar no seu setor. Será apresentado inicialmente um panorama do setor de agronegócio e em seguida a história do mercado sucro alcooleiro no Brasil, para então se analisar o mercado de açúcar com mais detalhes.

2.2 O Setor de Agronegócio no Brasil

O setor de agronegócio vem se destacando no mercado mundial, principalmente devido ao crescimento da demanda dos produtos agrícolas. Esse crescimento da demanda global pode ser explicado principalmente pelo aumento da população mundial, pelo desenvolvimento de novas tecnologias e pelo fenômeno dos biocombustíveis.

O Brasil possui uma grande vantagem nesse setor em relação aos demais países devido ao grande potencial de expansão da produção com custos relativamente baixos. As principais dificuldades que outros países enfrentam em relação ao agronegócio são o aumento da urbanização, inibindo a expansão de áreas cultivadas, e as leis de proteção ao meio ambiente. No Brasil, a expansão de terras cultivadas vem ocorrendo principalmente na região do Centro-Oeste, no estado do Mato Grosso. Essa onda de expansão alcançou recentemente os estados do Pará, Tocantins e Maranhão. Uma característica peculiar dessas regiões é que elas são do tipo cerrado, um ambiente bastante similar às savanas com chuvas freqüentes.

Além disso, o Brasil também se beneficia do clima bastante favorável para produção, bom nível tecnológico, condições ambientais favoráveis, bom solo e

topografia. Apesar do Brasil já se destacar no mercado internacional de alimentos e biocombustíveis, acredita-se que esse diferencial, somado à grande disponibilidade de terras para produção, venha consolidar o país como uma das referências mundiais do agronegócio. De acordo com o *site* do Ministério da Agricultura, o Brasil se destaca como produtor e exportador mundial de café, açúcar, etanol e suco de laranja, além de ter uma posição relevante em produtos como soja, carne bovina, carne de frango e tabaco.

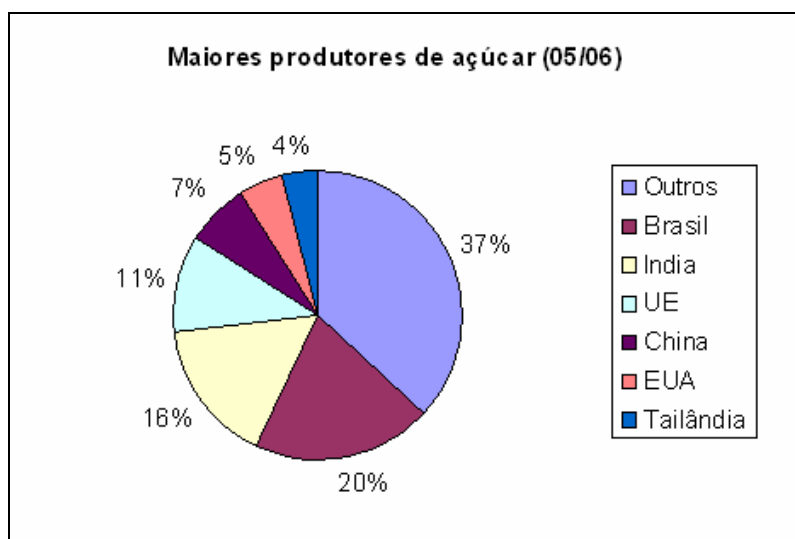


Figura 2.1 - Maiores produtores de açúcar (05/06) - FAO³

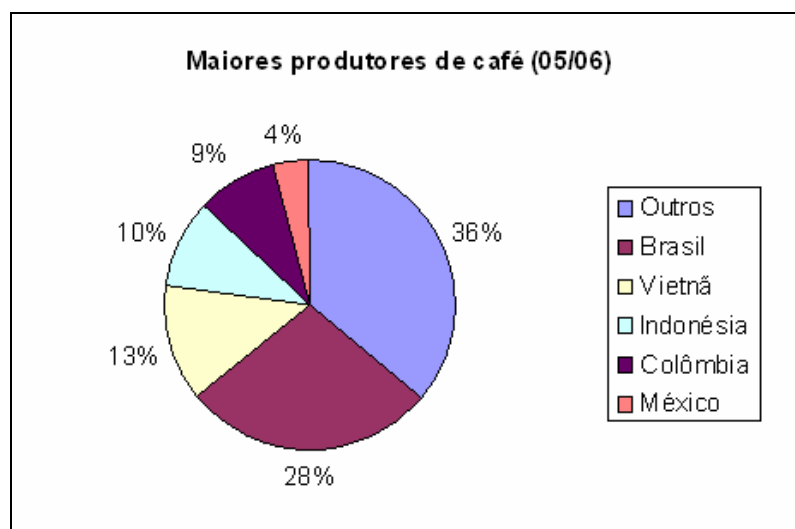


Figura 2.2 - Maiores produtores de café (05/06) – FAO

³ FAO – Food and Agriculture Organization

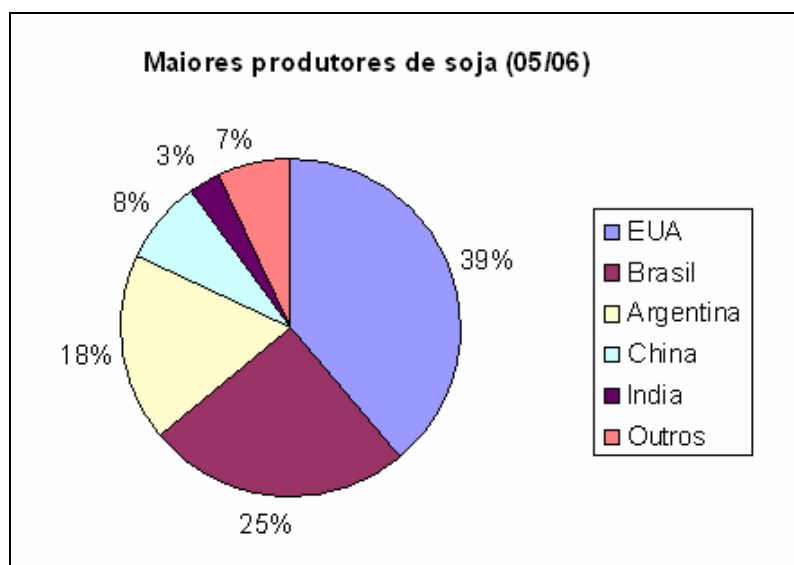


Figura 2.3 - Maiores produtores de soja (05/06) – FAO

De acordo com a Conab (Companhia Nacional de Abastecimento), cerca de 45,9 milhões de hectares são utilizados para o agronegócio no Brasil. O potencial da área que pode ser utilizada é cerca de 388 milhões de hectares, sendo que 106 milhões estão desocupados. Acredita-se que a maior parte dessas terras que podem ser utilizadas para o plantio venham das pastagens do gado. Como a tendência é que sejam desenvolvidos novos fertilizantes que aumentem a produtividade cabeça/ha, a terra excedente poderia ser usada para o cultivo de produtos como soja, milho, algodão e cana-de-açúcar.

Tabela 2.1 - Alocação das terras brasileiras

Alocação das terras brasileiras	milhões ha	%
Floresta Amazônica	350	41%
Pastos para gado	220	26%
Áreas protegidas	55	7%
Áreas cultivadas	47	6%
Áreas permanentes	15	2%
Áreas urbanizadas, estradas e pântanos	20	2%
Subtotal	707	83%
Outros usos	38	4%
Áreas inexploradas ainda disponíveis para a agricultura	106	13%
Total	850	100%

O aumento do nível de produção da safra é resultado da melhoria na produtividade. Melhores práticas de cultivo, aumento nas áreas fertilizadas e mecanização na colheita contribuíram para o aumento nas taxas de rendimento. Além disso, a expansão da área cultivada tem ocorrido em terras de alta qualidade, o que tende a aumentar o nível de produção e reduzir a oscilação de preços. Essa combinação de fatores deixa o país com uma posição destacada no mercado de agronegócio internacional.

2.3 O Setor em Números

Segundo os dados da Conab, o setor de agronegócio brasileiro contribuiu para a balança comercial do país em R\$ 534,7 bilhões em 2006, ou seja, 26,7% do PIB naquele ano. Por essa razão, o setor agrícola é considerado um dos principais empreendimentos para o desenvolvimento da economia no país.

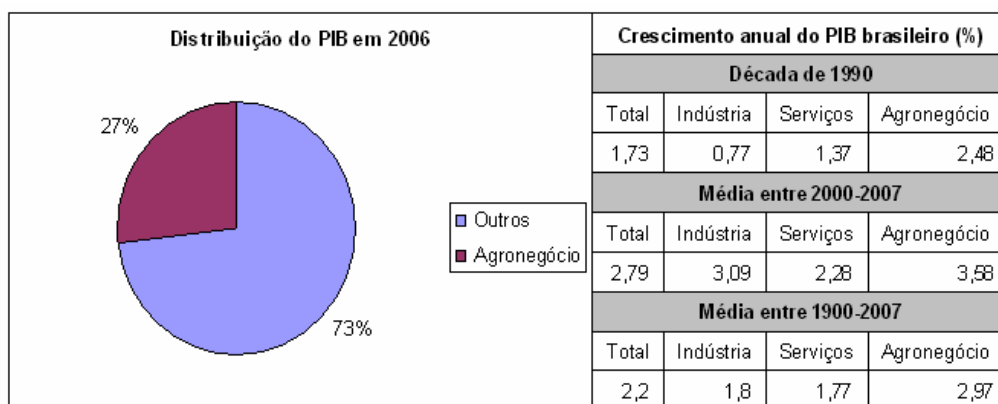


Figura 2.4 - Distribuição do agronegócio no PIB brasileiro - IPEA⁴

A figura 2.4 traz uma comparação entre os crescimentos dos diversos setores da economia brasileira. Ela mostra que o setor de agronegócio tem superado, em termos de taxa de crescimento, setores como o de serviços e indústria. Os dados foram obtidos pelo IPEA (Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada).

⁴ IPEA – Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada

Esse crescimento no setor agrícola, somado ao crescimento da população, favorece o aumento da demanda de alimentos, tornando o agronegócio bastante atraente no país, que leva uma grande vantagem por causa do potencial de crescimento de suas áreas cultivadas.

Um dos resultados mais expressivos do setor agrícola no Brasil vem das exportações. Desde o ano 2000, o país duplicou o volume de exportações no setor, atingindo US\$ 35 bilhões, o que representa 25% do volume total exportado. A tabela a seguir mostra as principais *commodities* produzidas e exportadas pelo Brasil.

Tabela 2.2 - Exportação e produção brasileira por produto - Conab

(%) Exportação				(%) Produção			
Produto	2004	2005	2006	Produto	2004	2005	2006
Açúcar	32,48	37,74	34,74	Açúcar	18,54	20,03	18,73
Cafê	27,39	30,62	28,11	Cafê	30,5	36,11	32,03
Suco de laranja	83,74	80,43	81,91	Suco de laranja	54,55	57,53	59,67
Soja	35,51	31,2	40,19	Soja	27,31	24,54	25,23
Algodão	2,9	4,45	4,41	Algodão	6,72	4,91	5,92
Milho	7,34	1,87	2,96	Milho	6,31	4,9	4,12
Arroz	0,14	0,94	0,89	Arroz	2,22	2,25	1,88

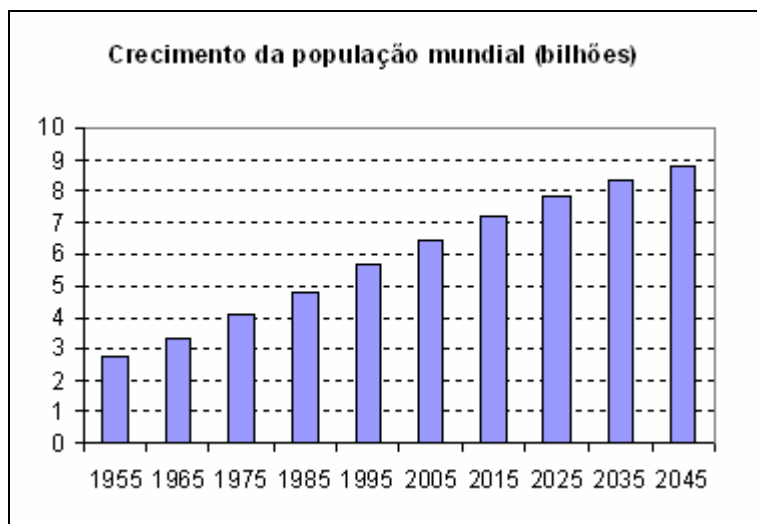


Figura 2.5 - Crescimento da população mundial - Censur

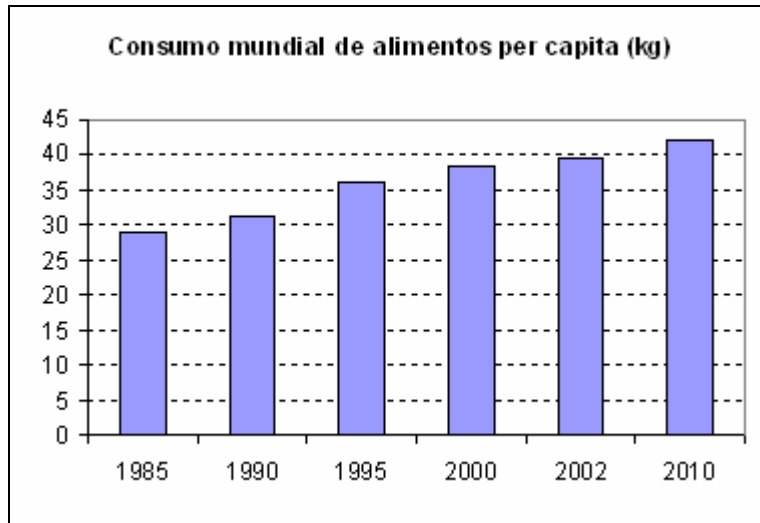


Figura 2.6 - Consumo mundial de alimentos per capita (kg) – FAO

2.4 Infra-Estrutura

Uma das grandes desvantagens para o desenvolvimento do setor agrícola no Brasil está relacionada à infra-estrutura e logística. As principais áreas de produção estão localizadas a aproximadamente 1.500 km dos transportes marítimos, sendo que as rodovias e estradas utilizadas não estão em boas condições. O país possui uma extensa costa litorânea com diversos portos, mas a maioria dos produtos é exportada por três principais portos: Santos, Paranaguá e Rio Grande.

A atual logística do país pode ser um empecilho para o crescimento do volume de exportação. O alto custo de transporte é consequência da falta de investimento público nos últimos anos e da grande concentração em rodovias e estradas quando comparado aos outros países.

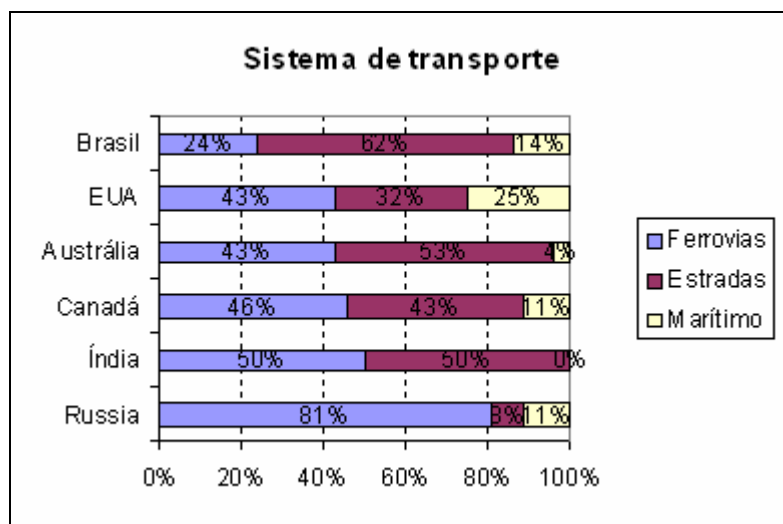


Figura 2.7 - Sistema de transporte – Ministério dos Transportes

O governo anunciou em 2007 o PAC (Plano de Aceleração de Crescimento), projeto que deverá investir R\$ 58 bilhões entre 2007 a 2010 na infra-estrutura de transporte, divididos da seguinte forma:

Tabela 2.3 - PAC para a infra-estrutura de transporte – Ministério da Fazenda

Investimento (R\$ bi)	
Estradas e rodovias	33.4
Ferrovias	7.9
Portos	2.7
Aeroportos	3
Marítimo	11.3
Total	58.3

2.5 Preço das Terras

Além do destaque que o agronegócio tem nas exportações do país, uma grande vantagem desse setor é o preço das terras, que são bem mais baixos quando comparados a países como EUA e Argentina. Isso coloca o país em um nível bastante competitivo nos preços, pois além do baixo custo das terras e da mão-de-obra, o país é bastante privilegiado pelo clima e solo.

Nos últimos 10 anos, o crescimento médio da área cultivada foi de 3,6%. Mesmo com essa grande expansão, o país ainda possui regiões com grande potencial de crescimento na atividade agrária. A região do Cerrado é a que possui a maior área disponível de terras para o desenvolvimento da agricultura. Além disso, espera-se que a região seja bastante beneficiada pelos investimentos anunciados pelo governo em termos de infra-estrutura.

A grande disponibilidade de terras para serem cultivadas no Brasil explica o fato do baixo preço das terras. Isso pode ser exemplificado comparando os preços de terra nos estados de Mato Grosso e Pará com regiões de cultivo dos EUA e Argentina, mostrados na tabela abaixo:

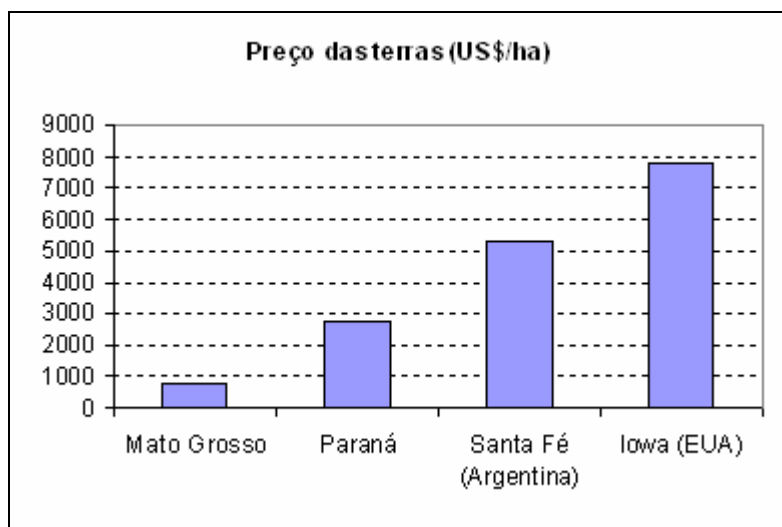


Figura 2.8 - Preço das terras (US\$/ha) - IBGE⁵

O preço médio das terras no Brasil é de aproximadamente US\$ 1.560/ha (IBGE). Além dos preços serem bastante baixos, quando comparados com os outros países, existe uma grande diferença entre os preços nas diversas regiões do Brasil. Segundo dados da FNP, os preços de terra nas regiões Sul e Sudeste estão 380% acima dos preços de terras na região do Cerrado.

⁵ IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

2.6 Mercado Sucro Alcooleiro

O setor sucro alcooleiro possui uma longa história no país. Logo após o descobrimento, o cultivo de cana-de-açúcar se iniciou em Pernambuco, sendo destinada principalmente à produção de açúcar. Até a Segunda Guerra Mundial, o setor canavieiro se concentrava na região Nordeste quando se transferiu para a região mais rica do país, o Centro-Sul, passando ser líder no mercado mundial em 1950. Em 1974, a exportação do açúcar no país já correspondia a 20% do total exportado, estimulando a criação do Proálcool em 1975, que visava incentivar o uso do álcool como combustível. Atualmente, segundo a ÚNICA (União da Indústria de Cana-de-Açúcar), o setor sucro alcooleiro corresponde a 2,5% do PIB e 3,5% das exportações nacionais.

A produção de cana-de-açúcar ocupa cerca de 7 milhões de hectares, ou seja, cerca de 2% do território cultivável do país. Seu ciclo de produção é de 5 a 7 anos, e dela se extrai a sacarose, principal produto para a fabricação do açúcar e do álcool. Cerca de 7 a 20% da cana é a sacarose e uma grande parte dela é composta de água (de 70 a 75%). A safra de 06/07 atingiu cerca de 515 milhões de toneladas, produzindo 19,5 milhões de toneladas de açúcar (56,4% do total das exportações mundiais).

Atualmente, a produção se concentra na região Centro-Sul com 85% e o restante na região Nordeste. Segundo a Conab (Companhia Nacional de Abastecimento), as projeções para a safra de 07/08 são de 525 milhões de toneladas, sendo 46% destinados à produção de açúcar e 54% à produção de etanol. Isso significa uma queda 1,9% na produção de açúcar e um aumento de 20% na produção do álcool.

O Brasil apresenta vantagens em relação aos outros países devido às condições favoráveis de solo e clima, proporcionando altos níveis de produtividade – cerca de 78 a 80 ton/ha na região Centro-Sul, com potencial para 85 ton/ha em algumas áreas. Essa característica, combinada com o conhecimento tecnológico, permite um ciclo de cinco a sete cortes, enquanto a média mundial é de três cortes.

Com o fim da regulamentação governamental, iniciou-se o regime de livre mercado, sem subsídios, com os preços do açúcar e do álcool passando a ser definidos conforme as oscilações da oferta e demanda. Assim, os preços da cana passaram a depender de sua qualidade e da sua participação porcentual nos produtos finais. Para gerenciar e equilibrar a produção com as demandas setoriais, instituições privadas tem procurado criar instrumentos de mercado, como operações futuras, desenvolvendo novas oportunidades para a negociação dos preços do açúcar e álcool.

2.7 Açúcar

Segundo a FAPRI (*Food and Agricultural Policy Research Institute*), a produção mundial de açúcar cresceu 7,0% na safra 06/07, enquanto o consumo mundial de açúcar subiu 2,5%, o que explica o baixo desempenho dos preços do açúcar nesse período. Os grandes exportadores, Brasil e Índia têm juntos cerca de 90% do mercado mundial e foram os principais responsáveis por este crescimento, capturando a maior parte do crescimento do comércio global de açúcar. O Brasil responde por 56,4% do comércio mundial da *commodity*.

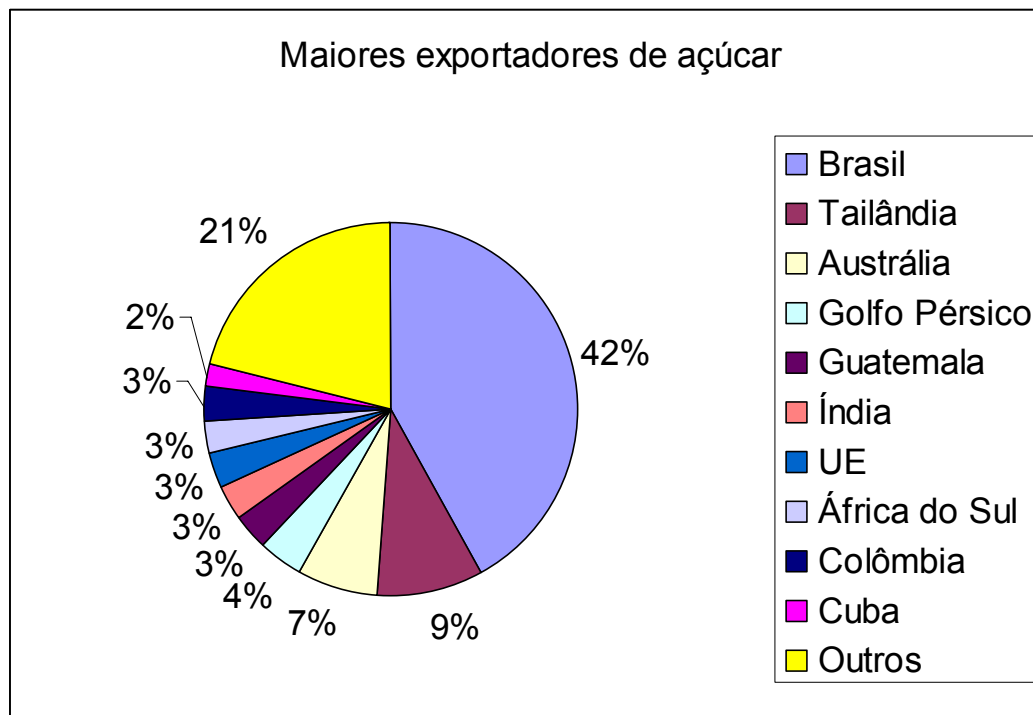


Figura 2.9 - Maiores exportadores de açúcar – FAO

Os altos valores dos preços observados em 05/06 provocaram um aumento na produção do açúcar, resultando em um alto nível de estoques. Isso fez com que o preço do açúcar se reduzisse em 25%. Os preços internacionais do açúcar estão sendo negociados em torno de US\$13 cents/lb, atingindo picos de US\$17 cents/lb (*LMC International*).

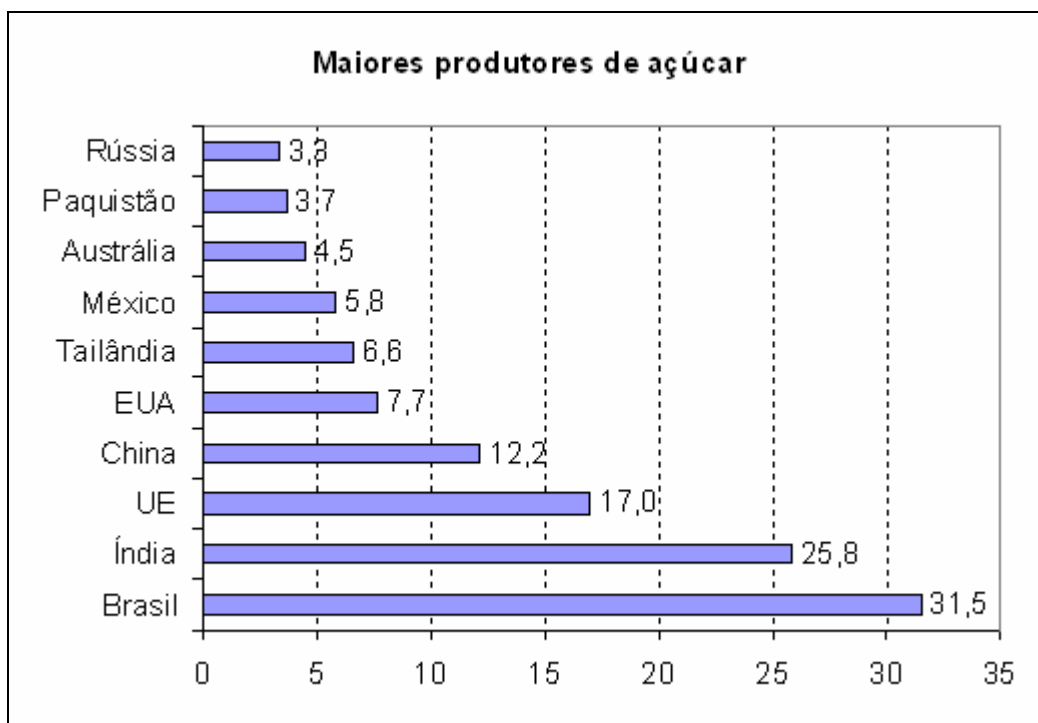


Figura 2.10 - Maiores produtores de açúcar – FAO

Durante o período de 1991 a 2005, os preços do açúcar se mantiveram estáveis, variando entre US\$8,00 e US\$10,00 cents/lb. Entretanto, houve uma redução na safra de 04/05, causados por problemas climáticos e reduções nas exportações da União Européia, provocando um aumento drástico no preço para US\$20,46 cents/lb em fevereiro de 2006. Outro fator que também favoreceu esse aumento foi a projeção de uma produção maior de etanol, reduzindo a produção nacional de açúcar.

Segundo a FAPRI, as projeções para as próximas décadas é que os estoques continuem próximos de 34 mil toneladas métricas (13% mais que os níveis de 05/06). Isso manteria os preços em torno dos US\$13 cents/lb atuais.

2.8 Mercado Futuro

2.8.1 Introdução

As negociações dos ativos financeiros podem ser divididas no mercado à vista e no mercado futuro.

O mercado à vista pode ser definido como o comércio tradicional do cotidiano. Quando se comercializa um determinado ativo ou produto no mercado à vista, a entrega é imediata, sendo os preços e as quantidades definidos na negociação entre o comprador e o vendedor.

Por outro lado, no mercado futuro, o preço e a quantidade do produto negociado são definidos antes da data efetiva de entrega. A negociação no mercado futuro é bastante útil para problemas de incerteza enfrentados por fazendeiros. Como a sua receita está vinculada ao preço de sua mercadoria no futuro, o seu resultado estará exposto à variação dos preços no futuro. Dessa forma, a negociação de um contrato futuro reduz essa incerteza, de modo que o fazendeiro consiga administrar os seus gastos, sabendo de antemão o preço pelo qual a sua mercadoria será negociada.

O mercado futuro segue padrões estabelecidos por contratos futuros, onde são especificados o tipo de produto, o tamanho do contrato e a data de entrega. Existem muitas bolsas que se especializaram nesses tipos de contratos, como a *Chicago Board of Trade* (CBOT), a *Chicago Mercantile Exchange* (CME), a *London International Financial Future and Options Exchange* (LIFFE) e a *Eurex*. Essa padronização e bolsas que atendem especificamente esses tipos de contrato garantem a liquidez desse mercado.

Como as negociações no mercado futuro não necessitam da entrega imediata do produto, é possível tomar uma posição comprada ou vendida do produto, de modo que tanto o comprador como o vendedor podem tomar vantagens sobre o preço negociado no mercado à vista. Por exemplo, se o preço do contrato futuro de um determinado ativo for

mais barato que o preço negociado à vista, um investidor pode obter lucro comprando esse produto no mercado futuro e vendendo no mercado à vista.

Hull (2002) destaca três tipos de agentes no mercado futuro: (1) os *hedgers*, que são investidores que querem evitar exposições à variação de preços, (2) os especuladores, que ao contrário dos *hedgers* tomam uma posição direcional, apostando na alta ou na queda de preços e (3) os arbitradores, que atuam nas ineficiências do mercado. Apesar da prática de arbitragem não se expor a grandes riscos, são poucas as oportunidades que o mercado oferece para realizar esse tipo de estratégia, uma vez que os momentos de ineficiência do mercado são de curta duração.

Portanto, ressalta-se a grande importância do mercado futuro, não apenas para as instituições financeiras, mas também para empresas, indústrias e agricultores, servindo como um instrumento para a gestão financeira e um facilitador para operações de fluxo de caixa.

2.8.2 Mercado Futuro do Açúcar

Os contratos futuros foram criados inicialmente como um instrumento de *hedge*, principalmente para commodities agrícolas. A produção agrícola pode ser dividida em dois períodos, (1) a safra, quando o agricultor realiza a colheita de seu produto e (2) a entressafra, que corresponde a todo o período de preparação, caracterizado pelas condições externas adversas, principalmente devido ao clima. É no período de entressafra que os investimentos realizados pelo agricultor são maiores. Para alocar esses investimentos de maneira adequada, a fim de evitar prejuízos e gastos excessivos, o agricultor pode realizar uma venda no mercado futuro, ou seja, mesmo sem ainda ter colhido o seu produto, ele estabelece um contrato com uma contraparte, definindo o preço e a quantidade a serem negociados antes da entrega da mercadoria. Dessa forma, o

agricultor possui uma maior facilidade para alocar os seus recursos e para planejar novos investimentos em seu empreendimento.

É importante ressaltar que em um contrato futuro, a data de entrega da mercadoria é definida no dia da negociação (também chamada de data de vencimento), e é dever da parte vendedora realizar a entrega do produto de acordo com os termos estabelecidos no contrato. Muitos fundos de investimento, entretanto, negociam as *commodities* no mercado futuro como parte de suas estratégias, fazendo uma rolagens de suas posições caso necessário, ou seja, caso um investidor tenha uma posição comprada de açúcar futuro com vencimento para início de fevereiro, no final de janeiro ele pode se desfazer dela vendendo o açúcar de fevereiro e comprando o açúcar de março.

À medida que o mês de entrega de um contrato futuro se aproxima, o preço futuro converge para o preço à vista do ativo subjacente. Quando o período de entrega é alcançado, os preços são iguais ou muito próximos do preço à vista (HULL, 2002).

Uma característica importante das *commodities* é o retorno de conveniência. Para muitos produtores, ter a *commodity* como um bem físico lhe garante benefícios que um contrato futuro não daria. Por exemplo, uma refinaria de petróleo provavelmente não considera o contrato futuro de petróleo a mesma coisa que ter o petróleo em estoque. Enquanto que o petróleo cru estocado pode ser utilizado no refino, não se pode fazer o mesmo com um contrato futuro. Portanto, a posse do ativo físico possibilita que a indústria mantenha o seu processo de produção funcionando e lhe dá a possibilidade de lucrar com uma eventual escassez do produto temporário. Esses benefícios de se manter o ativo físico é referido como o retorno de conveniência proporcionado pela *commodity*.

O retorno de conveniência reflete as expectativas do mercado em relação à disponibilidade futura da *commodity*. Quanto maior for a possibilidade de escassez, maior será o retorno de conveniência. Se os produtores da *commodity* possuem estoques muito elevados, havendo poucas chances de uma escassez no futuro próximo, o retorno

de conveniência será baixo. Por outro lado, estoques mais baixos tendem a aumentar o retorno de conveniência.

No caso do açúcar, o preço futuro delas tende a diminuir à medida que a maturidade do contrato é atingida. Esse padrão evidencia um padrão de retorno de conveniência alto para o açúcar, ou seja, existe uma expectativa de escassez do produto no mercado.

Em linhas gerais, o preço futuro de uma *commodity* pode ser calculado a partir do preço à vista, adicionando-se os custos de estoque, imposto, armazenagem e outros custos aplicáveis. Entretanto, o preço à vista pode ser superior ao preço futuro quando o retorno de conveniência for alto o suficiente para ser considerado como um prêmio sobre o preço futuro.

Portanto, espera-se que um usineiro utilize o mercado futuro como um instrumento de *hedging* para possíveis oscilações de preços no futuro. Apesar do álcool também ser negociado nesses mercados, esse ativo possui uma baixa liquidez, dificultando a análise estatística dos dados históricos. Em vista disso, neste trabalho será somente considerado o açúcar futuro como instrumento de *hedge* para o usineiro.

3. Conceitos

3.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados os conceitos mais importantes para a compreensão dos modelos utilizados tanto para a simulação como para a otimização. Além disso, os conceitos apresentados neste capítulo servirão também para um melhor entendimento na análise de portfólios.

3.2 Risco

Segundo Luenberger (1997), o retorno de um ativo R_t pode ser definido como a variação relativa do preço, ou o seu retorno líquido.

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (3.1)$$

Uma suposição geralmente utilizada é que a série logarítmica dos retornos logarítmicos é composta por variáveis independentes, que seguem uma distribuição normal. Por essa razão, é freqüente tratar o retorno como:

$$R_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (3.2)$$

A grande vantagem de se utilizar o retorno logarítmico é a simetria dos retornos compostos. Considere que o preço inicial de um ativo é R\$100. No caso de se utilizar o retorno líquido como base, um aumento de 50% seguido por uma queda de 50% irá

resultar em no preço final de R\$75, enquanto que para retornos logarítmicos, o preço final é o mesmo que o original de R\$100.

Em 1952, Harry Markowitz introduziu a Teoria Moderna sobre Carteiras, e utilizou a seguinte definição para o retorno esperado de uma carteira:

- Retorno esperado: é a expectativa de retorno do ativo no próximo período. É a média ponderada dos retornos esperados dos ativos que compõe a carteira.

$$E(p) = \bar{R}_p = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \bar{R}_i \quad (3.3)$$

onde:

R_p : é o retorno esperado do portfólio;

R_i : é o retorno esperado do ativo i ;

w_i : é o peso do ativo i no portfólio;

n : é o número total de ativos no portfólio

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

Por conveniência, $E(p)$ é usualmente denotado por \bar{p} . O termo média também é freqüentemente usado para o valor esperado. Portanto, diz-se que a variável p possui uma média \bar{p} .

3.3 Risco e Volatilidade

O trabalho realizado por Harry Markowitz em 1952, “*Portfolio Selection*”, fez uma grande contribuição para o conceito de risco, introduzindo a Teoria Moderna sobre

Carteiras. Nesse trabalho, Markowitz comprovou que é possível compor uma carteira de ativos onde, para um dado nível de retorno, o investidor estaria sujeito ao menor nível de risco. A teoria pode ser vista também do lado oposto, ou seja, para um dado nível de risco, é possível compor uma carteira que maximize o retorno para o investidor. Seu estudo mostrava também que o investidor estaria otimizando a relação risco-retorno de seu portfólio. quanto maior a diversificação da carteira do investidor, ou seja, quanto maior o número de ativos financeiros diferentes.

Existem várias definições para o termo risco no mercado financeiro. Guitman (1997) define risco como sendo “a possibilidade de prejuízos financeiros” para qualquer agente do mercado. Portanto, o termo risco pode ser visto como uma incerteza do mercado quando o definimos como a variabilidade de retornos de um dado ativo.

Um dos conceitos que é freqüentemente associado ao risco é a volatilidade. A volatilidade é uma forma de se mensurar o risco e ela pode ser calculada de várias formas. A mais usada é a variância ou desvio padrão da rentabilidade histórica do investimento, sendo, portanto, uma medida absoluta do risco, que depende do intervalo de tempo analisado. Uma importante característica da volatilidade é que ela é proporcional à raiz quadrada do tempo, ou seja, se um ativo possuir uma volatilidade de 30% ao ano, espera-se que a movimentação diária do ativo seja em torno de $\frac{30\%}{\sqrt{252}} = 1,89\%$.

Existem vários tipos de volatilidade no mercado. Neste trabalho, apenas duas fazem parte do escopo, a histórica e a futura. A volatilidade histórica se refere aos dados passados, ou seja, já é conhecida pelo mercado. Já a volatilidade futura não é conhecida pelo mercado, podendo apenas ser estimada.

Portanto, a volatilidade pode ser considerada como uma medida da intensidade das variações dos retornos de ativos financeiros. Essas variações são muito difíceis de

serem previstas. Por esse motivo, a volatilidade pode ser considerada como uma variável aleatória que depende das observações passadas. Os agentes financeiros tentam descrever o comportamento da volatilidade através de modelos matemáticos, utilizando-se de uma “seleção” das informações contidas nas séries históricas para que os modelos desenvolvidos possam estimar a volatilidade futura. Dessa forma, a volatilidade é comumente utilizada como um instrumento para análise do rendimento de ativos, como também para a gestão de risco, sendo um tema de estudo de diversas bibliografias.

Uma das formas de se quantificar a volatilidade é através do cálculo do desvio padrão de uma série de retornos de ativos. Entretanto, essa medida depende do período em que se encontra a série e esse cálculo quantifica apenas a volatilidade histórica. Os modelos de estimativa da volatilidade, que serão tratados no capítulo 5, tentam prever o comportamento da volatilidade no futuro, pois o que o investidor deseja é prever as possíveis oscilações do mercado. Para isso, ele utiliza um período de análise mais curto e considera que a volatilidade é dinâmica, ou seja, nesses modelos a volatilidade não é tratada como uma constante.

O modelo desenvolvido por Markowitz utiliza três parâmetros estatísticos para a análise de risco-retorno: a média, a variância (ou desvio padrão) e as covariâncias. Nesse método, a variância de uma carteira de ativos é a soma das variâncias individuais e as covariâncias entre os pares de ações da carteira, de acordo com o peso de cada uma delas. Segundo Markowitz existe uma carteira de ativos que maximiza o retorno esperado e minimiza a variância. Esta é a composição que deve ser buscada pelos investidores.

Além da definição do retorno esperado, o modelo de Markowitz utiliza as seguintes definições:

- Variância: assumindo que a variável aleatória estudada segue uma distribuição normal, a variância (risco) é dada por:

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot p(x_i), \text{ se } X \text{ é uma variável discreta.} \quad (3.4a)$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 \cdot f(x) dx, \text{ se } X \text{ é uma variável contínua.} \quad (3.4b)$$

Onde:

$p(x)$: é a probabilidade de x

$f(x)$: é a função densidade de probabilidade de x

- Covariância: a covariância entre dois ativos é dada por:

$$\text{cov}(x, y) = \sigma_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) \quad (3.5)$$

Uma notação bastante utilizada é a matriz de covariância Σ , que é dada por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

- Coeficiente de correlação:

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} \quad (3.7)$$

3.4 Suavização Exponencial

Os modelos de suavização exponencial tentam prever o comportamento das séries temporais através das observações passadas. Esse tipo de técnica assume que os valores extremos das séries temporais representam a aleatoriedade (que será definida no capítulo 4), e por meio da suavização desses extremos, é possível identificar um padrão básico para a série (Morettin e Toloi, 2004).

Um modelo bastante utilizado no mercado financeiro é o EWMA (*exponentially weighted moving average*), que trata uma série temporal como uma média ponderada, dando pesos maiores às observações mais recentes. Esse modelo pode ser empregado para descrever o comportamento do desvio padrão de um ativo, ou seja, uma medida da volatilidade. Ele é representado pela seguinte fórmula:

$$\sigma = \sqrt{(1 - \lambda) \cdot \sum_{t=1}^T \lambda^{t-1} \cdot (r_t - \bar{r})^2} \quad (3.8)$$

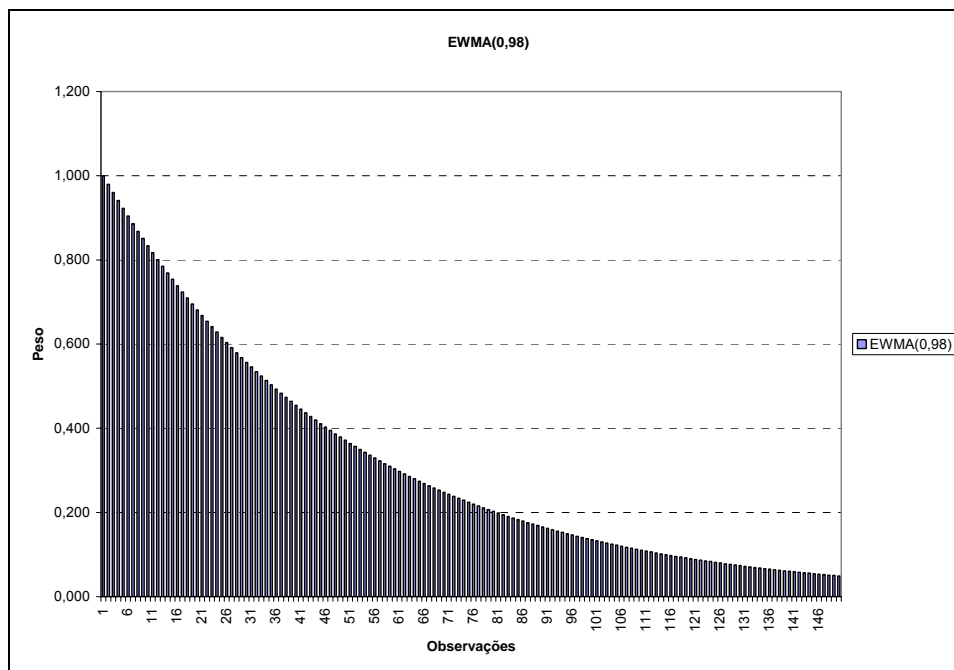
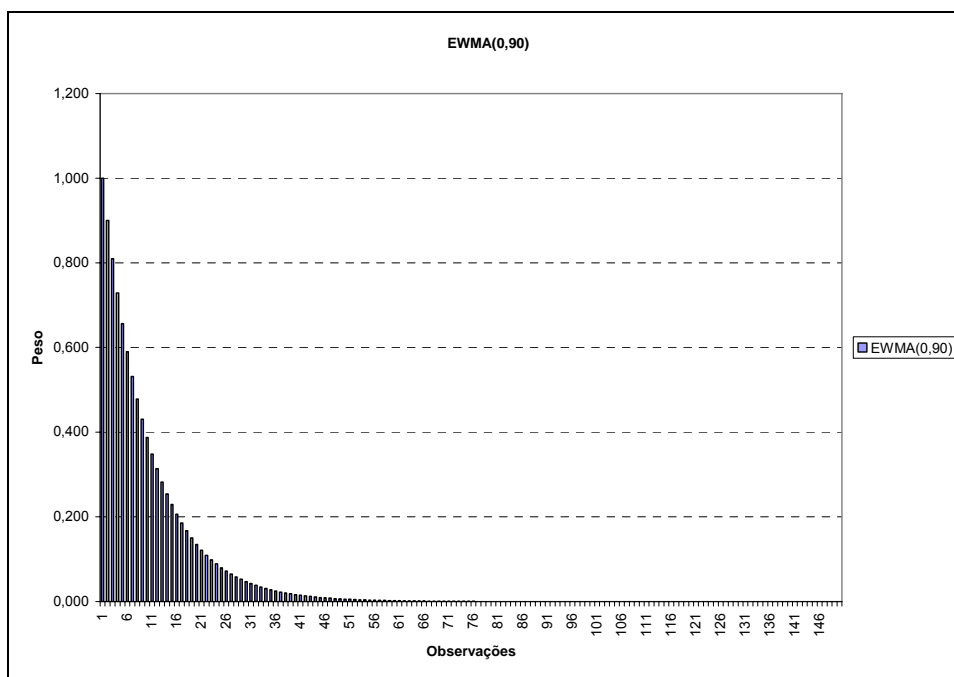
onde:

λ é o fator de decaimento, $\in]0,1]$.

$t \in T$, onde T é o período da série histórica

r é o retorno do ativo

Como o fator de decaimento pode variar entre $]0,1]$, a distribuição dos pesos das observações varia de acordo com o fator de decaimento utilizado. Veja as figuras a seguir:

**Figura 3.1 – Peso das observações para $\lambda = 0.98$** **Figura 3.2 - Peso das observações para $\lambda = 0.90$**

Através das figuras 3.2 e 3.3, observa-se que quanto maior o fator de decaimento adotado, maior o número de observações consideradas representativas no modelo. Outra

característica que pode ser observada, mais claramente para baixos valores do fator de decaimento, é que o peso das observações decresce exponencialmente do valor mais recente para o mais antigo, o que já é esperado pela formulação matemática do modelo.

3.5 Homocedasticidade e Heteroscedasticidade

Se uma seqüência de variáveis aleatórias possui a mesma variância ela é denominada homocedástica. Matematicamente, é quando os erros u_i de uma série histórica possuem a mesma variância σ^2 :

$$\begin{aligned} E(u_i^2) &= \sigma^2 \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{3.9}$$

Por outro lado, se os erros u_i de uma seqüência de variáveis aleatórias não possuem a mesma variância para os diferentes valores de i ela é denominada heteroscedástica. Quando uma série é heteroscedástica, a sua matriz de covariância apresenta a seguinte característica:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Isso porque as variáveis não apresentam correlações entre elas, tornando a matriz de covariância diagonal.

3.6 Variância Não Condicional e Condicional

Engle fez a seguinte afirmação: “A variância de um período depende das variáveis conhecidas do período anterior, incluindo os eventos aleatórios, destacando-se que o modelo explicitamente reconhece a diferença entre a variância condicionada e não condicionada, isto é, a variância condicional pode depender de variáveis aleatórias sob um conjunto de variáveis passadas condicionadas, tais como os distúrbios aleatórios, enquanto que a variância não condicionada seria constante, como tradicionalmente assumida”.

A variância não condicionada é a variância calculada através da estatística básica, que é assumida uma variância constante para uma série de dados, seja ela discreta ou contínua. Entretanto, em alguns modelos de séries temporais, é possível descrever a variância de um período através das variáveis do período anterior. Esse tipo de variância é denominado variância condicional, pois ela recorre às informações dos períodos passados.

A definição da variância condicional é importante para um melhor entendimento dos modelos heteroscedásticos que serão apresentados no capítulo 4.

3.7 Valor em Risco (VaR)

Segundo Hull, o VaR de uma carteira é a perda máxima que essa carteira pode sofrer, em um determinado horizonte, com um nível de confiança $\alpha\%$. Portanto, ele é um percentil da distribuição do retorno da carteira.

Se considerarmos $\{X\}$ o conjunto de variáveis aleatórias que representam os possíveis retornos de uma carteira, então o VaR pode ser equacionado da seguinte forma:

$$VaR(X, \alpha) = \{x \in \mathbb{R} \mid \int_x^{\infty} f(x) dx = \alpha\} \quad (3.11)$$

Onde α é o nível de confiança e $f(x)$, a função densidade de probabilidade de x , conforme apresentado na figura abaixo:

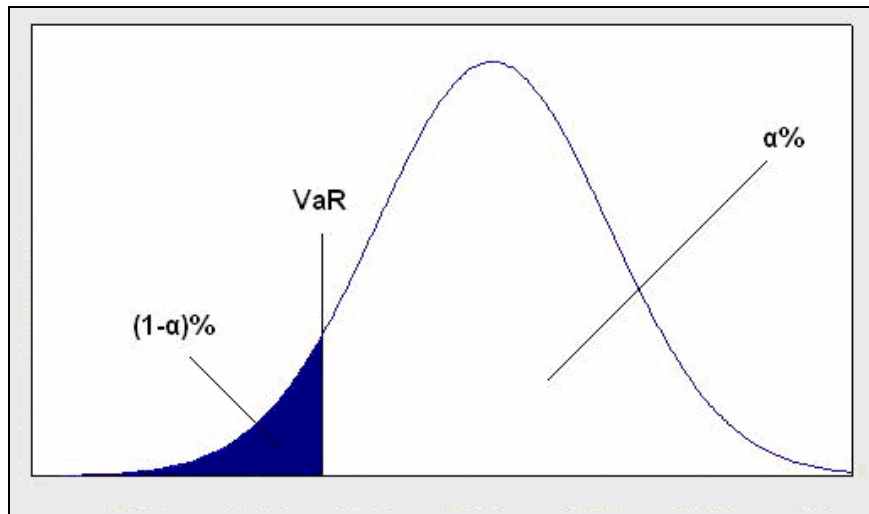


Figura 3.3 - Esquematização de VaR numa distribuição de probabilidade

O VaR de uma carteira pode ser calculado de diversas maneiras. As mais utilizadas partem ou do método paramétrico, ou da série histórica.

No método paramétrico, adota-se a hipótese que o retorno dos ativos segue uma distribuição normal. Logo, a combinação desses ativos na carteira também se comportará como uma distribuição normal. Nesse caso, o VaR pode ser calculado da seguinte forma:

$$VaR(X, \alpha) = \mu_x - z_\alpha \cdot \sigma_x \quad (3.12)$$

$$F(z_\alpha) = 1 - \alpha \quad (3.13)$$

onde:

μ_x é a média de X ;

z_α é um valor padronizado para a transformação linear da distribuição da v.a. X em uma normal;

σ_x é o desvio padrão de X .

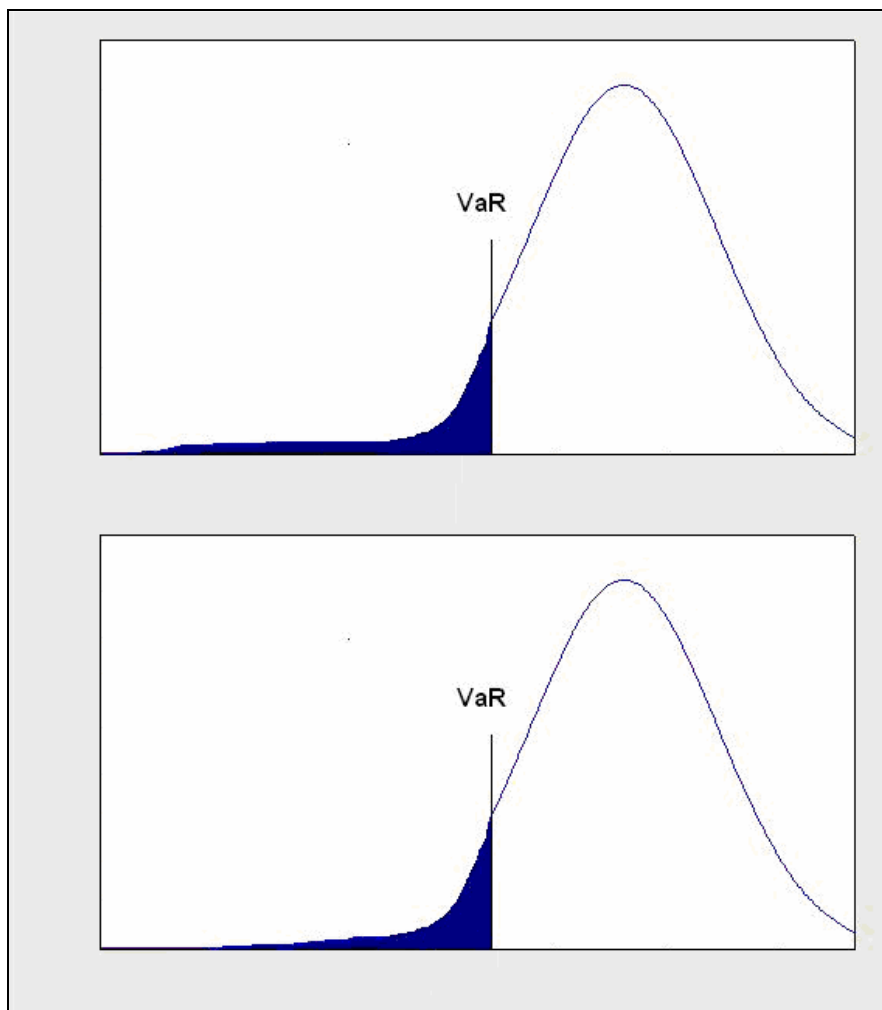


Figura 3.4 – Esquematização de duas distribuições distintas com o mesmo VaR

Entretanto, a hipótese de que os retornos seguem uma distribuição normal é muito restritiva e inadequada, quando carteiras com ativos financeiros, como opções, são consideradas, pois nestes casos a distribuição dos retornos é assimétrica.

No método da série histórica, a hipótese de normalidade na distribuição de probabilidades do retorno histórico não é adotada, ou seja, o VaR é calculado diretamente em percentil da série de retornos. Dessa forma, os retornos são ordenados de forma crescente, e para uma série de retornos com N elementos, o VaR será o $(\alpha.N)$ -ésimo elemento da distribuição.

Embora o VaR seja um instrumento adequado para análise de uma carteira com derivativos, ela falha no fornecimento de informações em relação à extensão da cauda de distribuição, pois uma série pode ter o mesmo VaR, mas com distribuição de probabilidade diferentes, como mostrado na figura 3.4:

A figura que apresenta uma cauda mais pesada tem perdas potenciais muito maiores do que a outra, apesar de terem o mesmo VaR. Uma medida de risco que leva em consideração esse tipo de problema é o Valor em Risco Condicional (CVaR).

3.8 Valor em Risco Condicional (CVaR)

O CVaR é uma medida de risco que pode ser definida como a expectativa de perda excedente ao VaR para um dado nível de confiança $\alpha\%$. Ou seja, enquanto o VaR indica que, com uma probabilidade $\alpha\%$ de perdas da carteira, ela não excederá uma quantia $\text{VaR}(X, \alpha)$, o CVaR indica que, considerando o pior evento, cuja a probabilidade de acontecer é $(1-\alpha)\%$, a perda média esperada da carteira é o $\text{CVaR}(X, \alpha)$.

Uma das formas do cálculo do CVaR é através da série histórica, onde se ordenam os valores do retorno da carteira e calcula-se a média entre os valores contidos do menor elemento até o $(\alpha.N)$ -ésimo elemento, ou o VaR. Portanto, o CVaR é a média dos retornos da carteira contidos no $(1-\alpha)\%$.

Em outras palavras, o CVaR é uma medida de risco que analisa o retorno de uma carteira através do comportamento da cauda da distribuição de retornos, levando em consideração possíveis assimetrias e/ou curtoses.

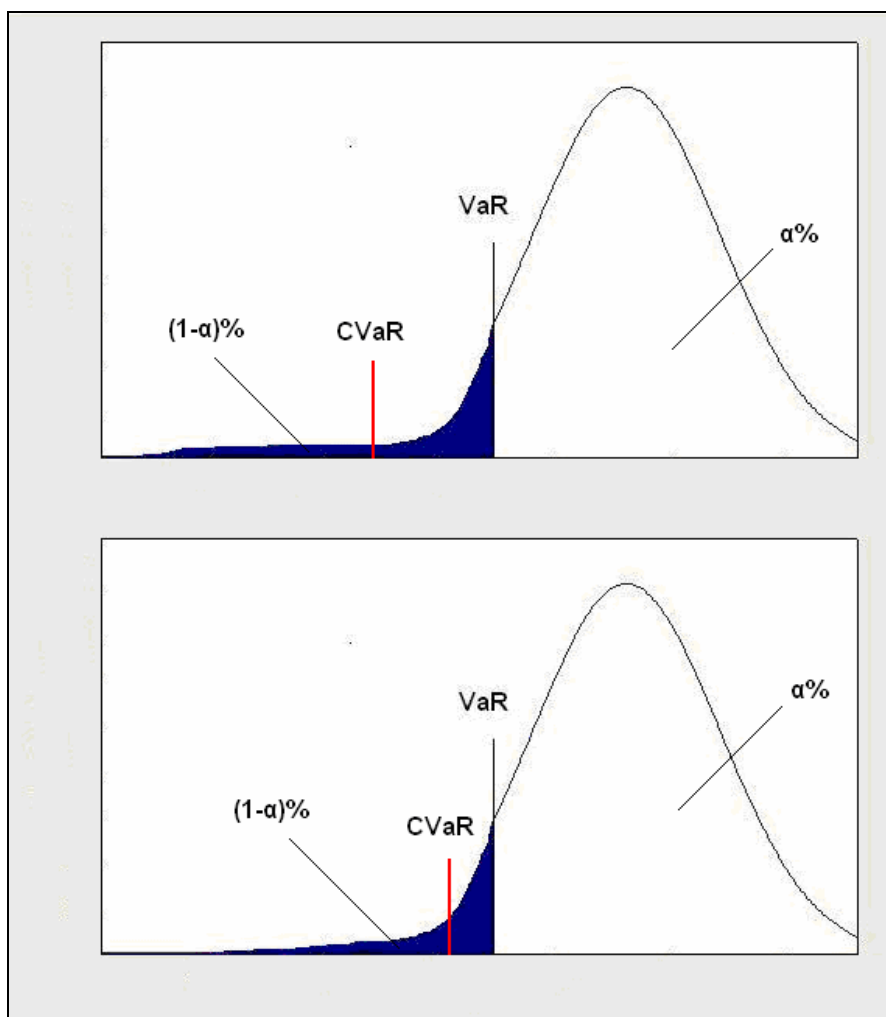


Figura 3.5 - Comparação entre o VaR e CVaR de duas distribuições de probabilidades

O CVaR pode ser calculado como a perda média dos valores que excederam o VaR para um dado nível de confiança $\alpha\%$, dado como:

$$CVaR(x, \alpha) = E[L_s \mid L_s \geq VaR(x, \alpha)] \quad (3.14)$$

onde

L_s é a função perda

Os trabalhos de Rockafellar e Uryasev (2000) demonstram que é possível equacionar o CVaR da seguinte forma:

$$CVaR(x, \alpha) = \eta + \frac{1}{S \cdot (1 - \alpha)} \cdot \sum_s y_s \quad (3.15)$$

onde

η é o VaR(x, α)

y_s é uma variável auxiliar, tal que $y_s = \max\{0, L_s - \eta\}$

3.9 Estudos de Portfólios e Modelos de Otimização

Os modelos de otimização de portfólios geralmente recorrem a modelos de programação linear, que podem ser encontrados na literatura de pesquisa operacional. Para um melhor entendimento de como os portfólios podem ser tratados é necessário apresentar a definição de um modelo de programação linear, e como este pode ser estruturado.

Winston (2004) define um problema de programação linear (LP) como sendo um problema com as seguintes características:

- Existe um objetivo de se maximizar ou minimizar uma função linear formada por variáveis de decisão. A essa função dá-se o nome de função objetivo.

- Os valores das variáveis de decisão devem satisfazer um conjunto de restrições do modelo. Cada uma dessas restrições deve ser equações lineares ou inequações lineares.
- Uma restrição de sinal é associada para cada variável.

Uma função $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é definido como uma função linear se e somente se para um conjunto de constantes c_1, c_2, \dots, c_n , $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n$. Por exemplo, $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ é uma função linear, mas $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2$ não é considerada uma função linear.

Para qualquer função linear $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e um dado número b , $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b$ ou $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b$ são consideradas inequações lineares.

Dessa forma, é possível generalizar um problema de programação linear como:

Função objetivo	min	f(x)			
sujeito à:					
restrições de igualdade	Ax	=	b		
restrições de desigualdade	Cx	≤	d		
limites superiores e inferiores	lb	≤	x	≤	ub

Como os portfólios representam uma combinação de ativos, eles devem ser tratados em conjunto, e não isoladamente. Dessa forma, muitas vezes problemas que envolvem a otimização de uma carteira são retratadas através de modelos de programação linear.

Problemas envolvendo o sistema produtivo de uma indústria também podem recair nesse tipo de programação, onde a função objetivo visa maximizar os ganhos (ou

reduzir as perdas), com restrições envolvendo a demanda, custos, capacidade produtiva, etc.

Um importante conceito que envolve a otimização apresentada por Markowitz (1952) é o conceito de fronteira eficiente. Como já foi apresentado no início do capítulo, Markowitz desenvolveu um estudo onde ele prova que é possível compor uma carteira que otimize a relação risco-retorno. Essa otimização pode ser representada graficamente por uma curva, denominada fronteira eficiente, onde se relacionam os níveis ótimos de risco e retorno.

Considere que um investidor deseja criar uma carteira composta por dois ativos, A1 e A2, que apresentam as seguintes características:

Tabela 3.1 – Exemplo de dois ativos

Ativo	Retorno	Desvio Padrão
A1	30%	23%
A2	10%	8%

A partir desses dados são propostas nove carteiras com diferentes composições dos ativos e foram calculados o retorno e o risco, medido em desvio padrão. Foi considerada uma correlação de 0,5 entre os ativos. Os resultados obtidos são mostrados na tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Possíveis carteiras compostas pelos dois ativos

Carteira	Peso A1	Peso A2	Retorno	Desvio Padrão
C1	90%	10%	28%	21%
C2	80%	20%	26%	19%
C3	70%	30%	24%	17%
C4	60%	40%	22%	26%
C5	50%	50%	20%	14%
C6	40%	60%	18%	12%
C7	30%	70%	16%	11%
C8	20%	80%	14%	10%
C9	10%	90%	12%	9%

Com esses resultados é possível esboçar um gráfico para uma melhor visualização da relação entre o risco e o retorno (fig 3.6). Os pontos em rosa representam os ativos individuais, e os pontos em verde representam carteiras formadas por outros ativos. Percebe-se que existe uma curva, representada pela linha azul contínua, onde o investidor consegue um menor nível de risco para um dado retorno. Analogamente, ele também consegue escolher uma carteira que tenha um maior retorno para um dado nível de risco. Só faz sentido então, o investidor escolher carteiras que estejam acima dessa linha. Essa fronteira é denominada fronteira eficiente, que é formada por todas as carteiras ótimas.

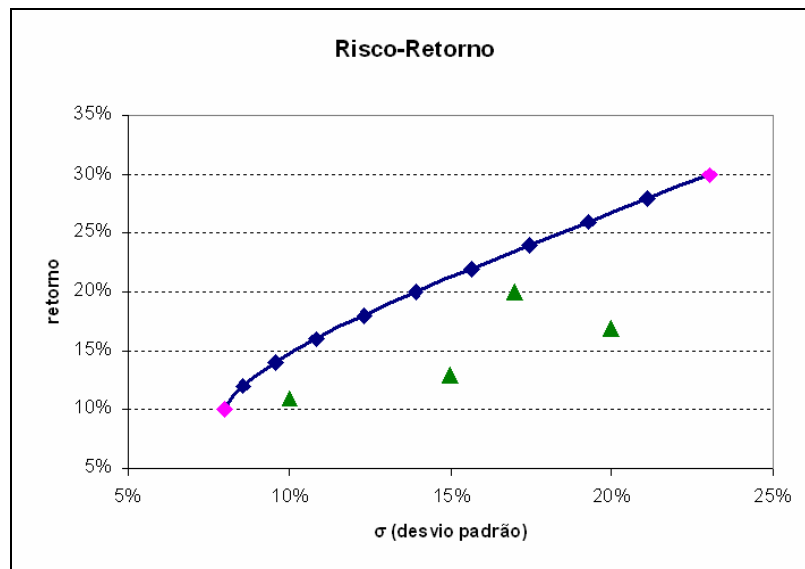


Figura 3.6 – Risco-Retorno das carteiras

Markowitz também mostrou que quanto mais diversificada for a carteira de um investidor, melhor a relação risco-retorno de sua carteira. Esse fenômeno é ilustrado na figura 3.7. Quanto maior for o número de ativos, menor será a correlação entre eles, resultando num menor valor do risco da carteira.

Percebe-se também, que em um caso extremo onde a correlação é perfeitamente negativa (-1,0), é possível compor uma carteira com um retorno positivo e risco nulo.

Entretanto, é praticamente impossível encontrar no mercado ativos com alta correlação negativa.

O modelo de Markowitz procura definir qual deve ser a composição de uma carteira para que ela possua o menor nível de variância, ou seja, o ponto mais à esquerda da fronteira eficiente. Seu modelo, entretanto não pode ser reduzido a um conjunto de equações lineares.

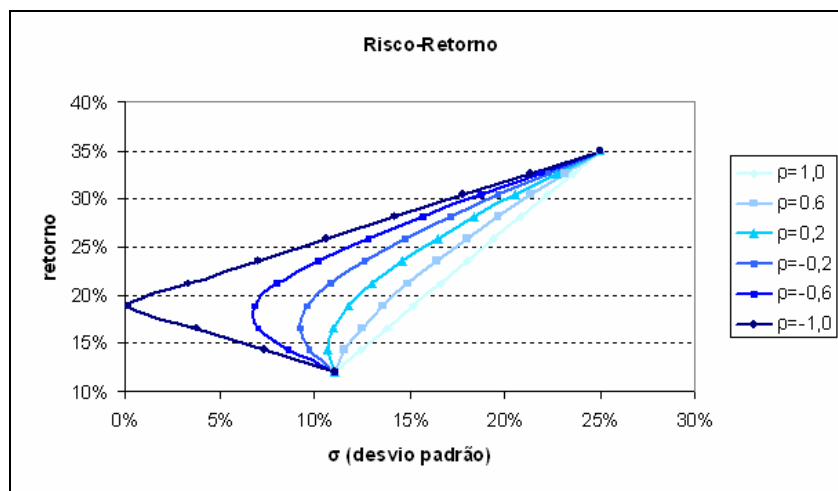


Figura 3.7 – Risco-Retorno com diferentes correlações

A formulação do modelo não é um dos escopos deste trabalho, mas ele pode ser encontrado nos Anexos.

O modelo de programação linear apresentado neste capítulo será novamente tratado no capítulo 6, onde será apresentado o modelo de otimização que envolverá o CVaR.

4. Modelo GARCH

4.1 Série Temporal

Uma possível definição de série temporal é todo o conjunto passível de ser ordenado cronologicamente (Cardoso, M, et al 2005 apud Milone e Angelini, 1995). O estudo das séries temporais engloba os dados no passado e no presente, para se ter uma idéia das possíveis variações no futuro. A previsão através de modelos matemáticos é o principal objetivo da aplicação das séries temporais.

Segundo Morettin e Toloí (2004), uma série temporal é um conjunto de observações de uma variável distribuídas de forma equidistantes ao longo do tempo e que possuem um comportamento de dependência entre elas.

Para entender melhor o conceito por trás dos modelos de previsão é necessário definir o processo estocástico. Suponha um conjunto $Z = \{Z(t), t \in T\}$, onde $Z(t)$ é uma variável aleatória. Nesse caso, a função densidade de probabilidade no instante t_i pode ser diferente no instante t_{i+1} . Além disso, a variável aleatória é definida para um mesmo espaço amostral Ω , ou seja, a função possui na realidade dois argumentos, $Z(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$. Obtém-se assim, para cada ω , uma função de t que define a trajetória do processo, que consiste na série temporal propriamente dita.

Existem duas classificações para os processos estocásticos ao longo do tempo, o contínuo e o discreto. Num processo contínuo, o valor da variável aleatória pode variar em qualquer instante dentro de um intervalo de tempo, enquanto que num processo discreto existem certos pontos fixos em que a variável pode mudar. Nota-se que o fato do tempo ser discreto não implica na variável também ser discreta.

Os preços de ativos no mercado financeiro são freqüentemente interpretados como variáveis aleatórias. O fato de se conhecer a trajetória de preços no passado, não explica qual será a sua trajetória no futuro. Dessa forma, pode-se considerar que para cada instante t no futuro existe uma distribuição de probabilidade, como mostrada na figura 4.1.

A figura 4.1 mostra que a variação segue uma curva de probabilidade para cada instante t , sendo que a distribuição de probabilidade não é necessariamente igual para os demais instantes.

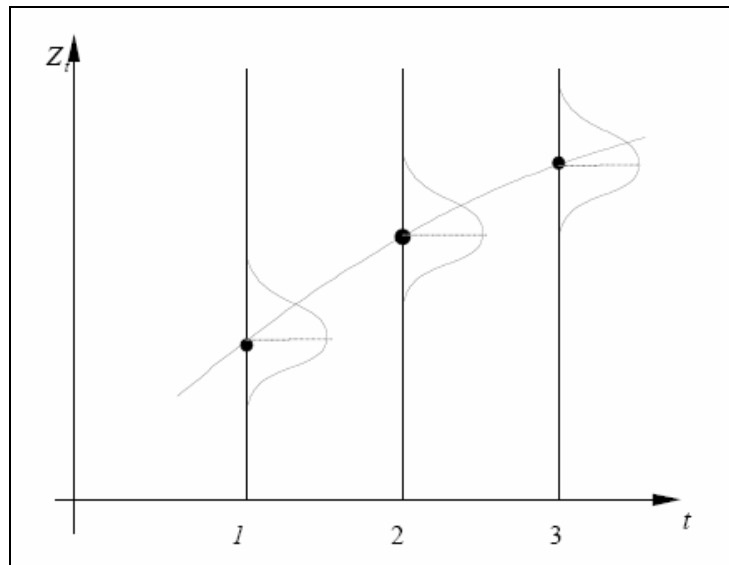


Figura 4.1 – Distribuição de probabilidade para processos estocásticos

Uma série temporal pode ser vista como a realização de um processo estocástico, sendo esta definida como uma seqüência de observações regidas por leis probabilísticas. O objetivo principal da análise de uma série temporal é determinar os componentes básicos tentando identificar um comportamento, a partir de dados históricos, que permita modelar as suas previsões.

É importante que seja feita uma análise gráfica de uma série temporal, a fim de se ter uma visão mais qualitativa do seu comportamento. Entretanto, as análises

estatísticas são necessárias para uma conclusão mais verdadeira do comportamento da série temporal.

As quatro principais características de uma série temporal são descritas abaixo:

- **Tendência:** indica uma direção das observações estudadas. A principal característica desse comportamento é um movimento suave registrado em um período de tempo mais longo, podendo ele ser constante, crescente ou decrescente. Makridakis (1998) afirma que uma tendência existe quando se evidência um aumento ou diminuição do valor médio dos dados em um longo período.
- **Sazonalidade:** são flutuações que se repetem periodicamente, acompanhadas por um padrão temporal. Podem ser decorrentes de influências como clima ou demanda de um produto que ocorre em determinadas épocas do ano (picos de venda). A sazonalidade está relacionada às mudanças cíclicas de curto e médio prazo. Alguns autores diferenciam a sazonalidade dos fenômenos cíclicos, pois esses são caracterizados por serem mais regulares no longo prazo.
- **Variações irregulares:** são alterações no comportamento das séries temporais resultantes de fatores excepcionais como catástrofes, que não podem ser previstos e incluídos nos modelos.
- **Aleatoriedade:** são as oscilações que não podem ser relacionadas com nenhum fator. Matematicamente ela pode ser descrita como uma função que engloba os fatores mencionados anteriormente mais uma variável aleatória. Nesse caso, assume-se que a distribuição de probabilidade dessa variável seja conhecida, com média zero e variância constante σ^2 .

Os modelos estatísticos utilizados para descrever as séries temporais podem ser classificados em duas categorias, segundo o número de parâmetros envolvidos:

- **Modelos paramétricos:** possuem um número finito de parâmetros.

- Modelos não-paramétricos: possuem um número infinito de parâmetros.

4.2 Ruído Branco

Segundo Morettin e Toloí, um ruído branco pode ser descrito como um conjunto de variáveis aleatórias ε_t , $t \in Z$, se as variáveis aleatórias ε_t não forem correlacionadas, ou seja, $Cov\{\varepsilon_t, \varepsilon_s\} = 0$, $t \neq s$.

Além disso, deve-se considerar que o conjunto ε_t possui uma distribuição normal, com média μ_ε e variância de σ_ε^2 para todo t .

4.3 Modelos de Previsão

4.3.1 Modelo de Médias Móveis (MA)

O método de médias móveis (*moving average*) consiste em calcular a média das q observações mais recentes. O valor calculado é considerado a previsão para o instante seguinte.

Segundo Enders, o modelo de médias móveis é apropriado quando a variável na data t é explicada através da soma ponderada dos ruídos brancos anteriores mais um ruído atual.

Se uma observação x_t pode ser obtida através da média ponderada do valor presente e dos q últimos valores observados de um processo de ruído branco ε_t mais a média μ , então ela pode ser modelada como um processo MA(q):

$$x_t = \mu - \sum_{i=1}^q \beta_i \cdot \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \quad (4.1)$$

Onde:

- $\varepsilon_t = x_t - \hat{x}_t$
- \hat{x}_t é a estimativa de x_t
- β_i são os coeficientes da média móvel

Uma condição necessária para a estacionariedade do modelo é $\sum_{i=1}^q \beta_i < 1$. Um MA(q) com um q finito sempre será estacionário. O modelo mais simples é o MA(1):

$$x_t = \mu - \beta_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.2)$$

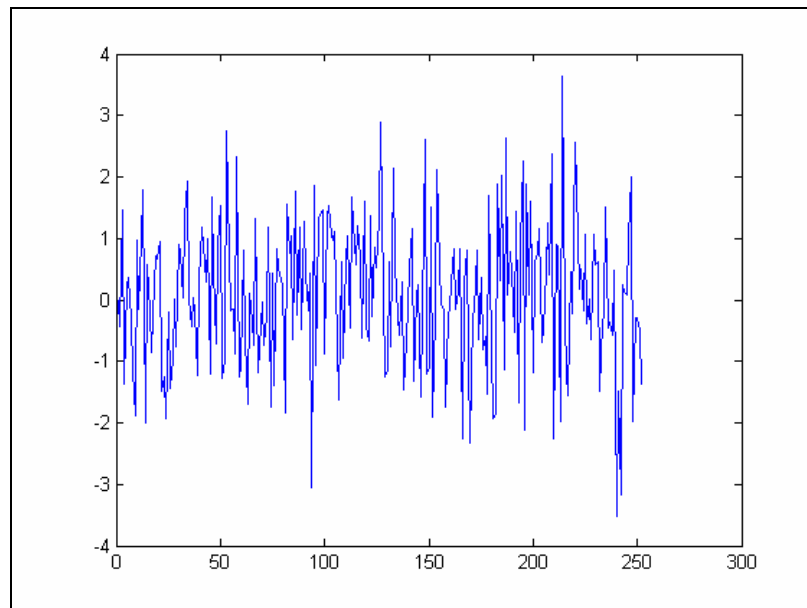


Figura 4.2 – Exemplo de um processo descrito através de um modelo MA(1)

Quanto maior for o período considerado no modelo de médias móveis, mais suave será o comportamento da média e menos exposta ela estará aos ruídos. Entretanto, se o período for longo demais, a resposta pode ser muito lenta para mudanças mais significativas do mercado. Se o período for muito pequeno, a média estará exposta às variações dos valores, perdendo a sua característica de seguir tendências.

4.3.2 Modelo Autoregressivo (AR)

Uma variável X_t segue um processo autoregressivo (*autoregressive*) de primeira ordem quando o seu valor em um instante t depende apenas do valor no período anterior ($t-1$), e de um ruído branco ε_t , não correlacionado com x_t , com média zero e variância constante σ^2 .

A versão mais simples do modelo AR é aquela em que x_t depende apenas de x_{t-1} , de ε_t e da constante a_0 . Nesse caso o modelo é indicado por AR(1):

$$x_t = a_0 + a_1 \cdot x_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.3)$$

Se uma observação x_t pode ser obtida através da média ponderada das p observações anteriores, acrescidas de um ruído branco ε_t , então ela pode ser modelada como um processo AR(p):

$$x_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \cdot x_{t-i} + \varepsilon_t \quad (4.4)$$

Onde:

- $\varepsilon_t = x_t - \hat{x}_t$

- \hat{x}_t é a estimativa de x_t
- a_i são os coeficientes constantes autoregressivos

Segundo Enders, a média de uma variável descrita por um modelo AR(p) é dada por:

$$E(x_t) = \frac{a_0}{1 - \sum_{i=1}^p a_i} = \mu \quad (4.5)$$

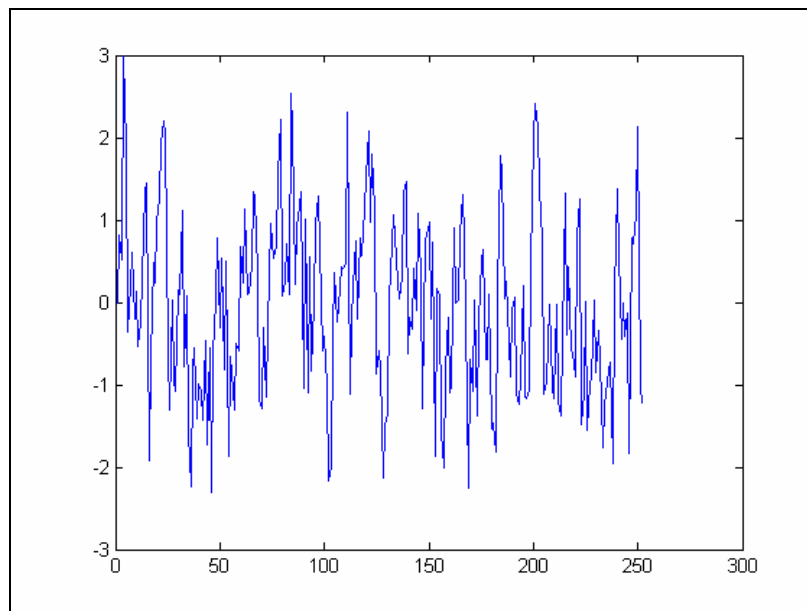


Figura 4.3 – Exemplo de um processo descrito através de um modelo AR(1)

Se o processo for estacionário, a média será constante. Para isso, uma condição necessária é que $\sum_{i=1}^p a_i < 1$.

Nesse caso, a variância de x_t é constante, e segundo Enders (1995), suas autocovariâncias γ_k podem ser consideradas independentes de t .

4.3.3 Modelo Autoregressivo de Médias Móveis (ARMA)

Se um processo apresenta características tanto de um processo AR como de um MA, então ele pode ser modelado como um processo misto, denominado ARMA (*autoregressive moving average*), descrito através de seus p valores passados e pelos q ruídos brancos passados e pelo ruído presente. A formulação do modelo é dada como:

$$x_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \cdot x_{t-i} - \sum_{i=0}^q \beta_i \cdot \varepsilon_{t-i} \quad (4.6)$$

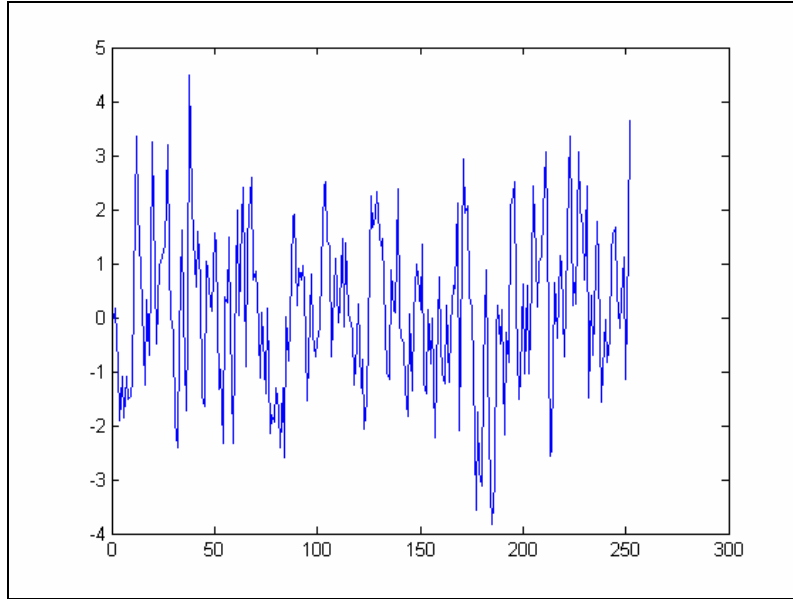


Figura 4.4 – Exemplo de um processo descrito através de um modelo ARMA(1,1)

Tanto a média como as condições de estacionariedade são geradas pela parcela do processo AR.

A versão mais simples do modelo é o ARMA(1,1), que pode ser formulada da seguinte forma:

$$x_t = a_0 + a_1 \cdot x_{t-1} - \beta_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.7)$$

Na prática, os valores de p e q são geralmente menores do que 2, para que as séries temporais sejam estacionárias (Box-Jenkins).

4.4 Processo Estacionário e Função Autocorrelação

Para Makridakis (1998), um processo estocástico é dito estacionário se as características estatísticas do processo não se alteram ao longo do tempo e quando os seus valores variam ao redor de uma média constante.

Matematicamente isto ocorre quando a distribuição de probabilidade conjunta em t_1, t_2, \dots, t_m , é a mesma que nos instantes $t_{1+k}, t_{2+k}, \dots, t_{m+k}$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Se a distribuição marginal de $Z(t)$ for a mesma que a de $Z(t+k)$, a sua distribuição não depende do instante de tempo, e sua média e variância é constante para qualquer t . Portanto, a covariância entre $Z(t)$ e $Z(t+k)$ depende apenas do intervalo k , sendo assim:

$$\text{cov}(x_t, x_{t+k}) = \gamma_k \quad (4.8)$$

Segundo Morettin e Toloi (2005), uma das hipóteses usuais feitas na análise das séries temporais é de que o processo estocástico é um processo estacionário.

A autocorrelação consiste na correlação entre dois valores de uma mesma variável nos instantes t e $t+k$, onde k é denominado *lag* (Box-Jenkins). Para uma série temporal $Z(t)$:

- A autocovariância γ é a medida de dependência entre duas observações separadas por um intervalo k .

$$\gamma_k = \text{cov}(Z_t, Z_{t+k}) = E[(Z_t - \mu_z) \cdot (Z_{t+k} - \mu_z)] \quad (4.9)$$

Isso significa que se $\gamma_t > 0$, um valor alto da variável aleatória x no estado atual será provavelmente seguido de um valor alto em seu estado seguinte. Essa hipótese permite prever valores futuros de maneira mais consistente, uma vez que γ_t é estável ao longo do tempo.

- A autocorrelação mede a intensidade com que um valor observado em t é influenciado pelo valor em $t-k$, e varia entre -1 e 1.

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(Z_t, Z_{t+k})}{\sqrt{\text{var}(Z_t) \cdot \text{var}(Z_{t+k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad (4.10)$$

A função autocorrelação (ACF – *autocorrelation function*), é usada para identificar a ordem de um modelo autoregressivo. Todos os modelos autoregressivos têm uma ACF que decresce exponencialmente ao longo do tempo, convergindo para zero. Em séries temporais, a autocorrelação significa que o valor de uma variável em qualquer instante está correlacionado com seus próprios valores defasados em um intervalo k .

A função de autocorrelação parcial (PACF – *partial autocorrelation function*) mede a correlação entre duas observações x_i e x_{i+k} , excluindo a dependência dos valores intermediários.

4.5 Modelo ARCH

O modelo ARCH (*autoregressive conditional heteroscedasticity*) foi proposto por Engle em 1982, provando ser possível construir um modelo paramétrico para a variância condicionada através da média e da variância condicionada das observações passadas. Esse modelo utiliza propriedades da autocorrelação para a previsão da

volatilidade. Isso foi uma grande evolução para a modelagem de séries temporais, uma vez que a hipótese de dependência linear dos retornos do modelo ARMA não é adequada para a construção de modelos em mercados de capitais.

Uma das hipóteses assumidas nesse modelo é a existência da heteroscedasticidade condicional na série histórica. O modelo ARCH assume que a variância condicional não é constante, embora a variância incondicional seja.

O modelo ARCH pode ser formulado da seguinte forma:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \cdot \varepsilon_{t-i}^2 \quad (4.11)$$

Onde:

- ε_t é o erro aleatório com distribuição $N(0, \sigma^2)$ – também chamado de inovação;
- $\alpha_i > 0$, são os parâmetros do modelo para $i \in N$;
- $q > 0$

Nesse modelo, a variância condicional depende do quadrado do erro segundo uma ordem q . É possível provar que a variância condicional tende a convergir para a variância incondicional (Enders et al, 1995 apud Bollerslev, 1986), dado por:

$$\sigma_\infty^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i} \quad (4.12)$$

O modelo traz uma desvantagem, pois trata da mesma forma os retornos positivos e negativos, visto que o modelo depende apenas do quadrado dos erros.

4.6 Modelo GARCH

Um modelo mais genérico para descrever a variância condicional é o modelo GARCH (*generalized autoregressive conditional heretoscedasticity*), que foi uma continuidade do trabalho de Engle desenvolvida por Bollerslev em 1986. Uma característica desse modelo é o número reduzido de parâmetros, reduzindo o processamento computacional.

O modelo GARCH inclui as variâncias passadas para a previsão das variâncias futuras. Dessa forma, o modelo ARCH pode ser considerado um caso particular do GARCH. A formulação do modelo é dada por:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \cdot \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \cdot \sigma_{t-i}^2 \quad (4.13)$$

Onde:

- $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1$, garantindo a estacionariedade e tendência de convergência para a variância incondicional.

4.7 Aplicação do Modelo GARCH

É possível encontrar um número significativo de trabalhos em que o modelo GARCH é utilizado no setor de *commodities* agrícolas. Em 1990, Holt e Aradhyula (et. al. Enders, 1995) fizeram um estudo nos EUA examinando a relação entre a quantidade de grãos produzidos por um agricultor e o preço negociado no mercado do produto. Para isso, Holt e Aradhyula analisaram a relação da quantidade com: (1) o preço esperado do grão no mercado, (2) a variância condicional esperada, (3) o preço real no instante

anterior e (4) o estoque no instante anterior. O trabalho trouxe uma grande contribuição, pois o GARCH foi utilizado como uma ferramenta de análise de risco, uma vez que o modelo tentava relacionar o comportamento do agricultor em situações de alta e baixa dos preços das *commodities*.

Baillie e Myers (1991) desenvolveram um estudo da relação entre os preços à vista e futuro de seis *commodities* através de um modelo de GARCH bivariado (BGARCH). O trabalho tinha como objetivo identificar uma razão ótima de *hedge* através da matriz de variância-covariância, mas os resultados não foram satisfatórios.

Em 2007, Lien e Yang deram continuidade ao trabalho iniciado por Baillie e Myers, também utilizando um modelo GARCH bivariado (BGARCH) para uma análise entre os preços à vista e futuro de diversas *commodities*. O estudo trouxe uma contribuição em estratégias de *hedging* com o mercado futuro, minimizando a variância das razões de *hedge*. Entretanto, o modelo não considera as restrições do sistema produtivo do agricultor, analisando a estratégia de *hedging* no mercado futuro de forma isolada.

Ramírez e Fadiga (2003) aplicaram o modelo GARCH na análise de preços de três *commodities*, a soja, o milho e o trigo. Eles constataram a eficiência de modelos derivados do GARCH para distribuições não gaussianas, comparando o desempenho dos modelos A-GARCH, para distribuições assimétricas, e o *t*-GARCH, para modelos baseados na distribuição de *t*-Student.

Em 2002, Giot utilizou o modelo GARCH para a estimativa da volatilidade das *commodities* agrícolas negociadas na bolsa de Nova Iorque (NYBOT), constatando que os contratos futuros de opções podem ser utilizados para a estimativa da volatilidade das *commodities* agrícolas.

Desta forma, percebe-se que o modelo GARCH é aplicado de diversas maneiras no mercado de *commodities* agrícolas, não se restringindo apenas à estimativa de volatilidades, mas sendo utilizado como técnica de análise de risco (Holt e Aradhyula, 1990) e como ferramenta para estratégias de *hedging* (Lien e Yang, 2007). Neste trabalho, o modelo GARCH foi utilizado para a estimativa da volatilidade, sendo sua aplicação bastante similar no trabalho de Giot (2002).

4.7.1 Ajuste da Série Temporal

Uma das propostas deste trabalho é aplicar o modelo GARCH para se estimar a volatilidade na série de preços do açúcar, tanto o à vista como o futuro. A série de preços do açúcar à vista foi obtida no site da CEPEA⁶, e os preços do açúcar futuros através da Bloomberg, ambos referentes ao período entre janeiro de 2002 a maio de 2008. No caso dos preços futuros, como são negociados contratos com diferentes vencimentos, optou-se pelo contrato de vencimento mais próximo.

O modelo GARCH assume que a série estudada terá o comportamento de um processo estacionário, ou seja, o nível médio da variação dos valores é estável. Entretanto, para analisar a variância, o comportamento dos preços não pode ser considerado estacionário. Dessa forma, é necessário estudar a série através do logaritmo dos seus retornos relativos.

Para o ajuste da série, toma-se o retorno logarítmico entre os instantes t e $t+1$:

$$y_t = \log\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right) \quad (4.14)$$

⁶ CEPEA – Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada

As séries de preços do açúcar futuro e dos retornos logarítmicos diários obtidos são mostradas nas figuras 4.5 e 4.6:

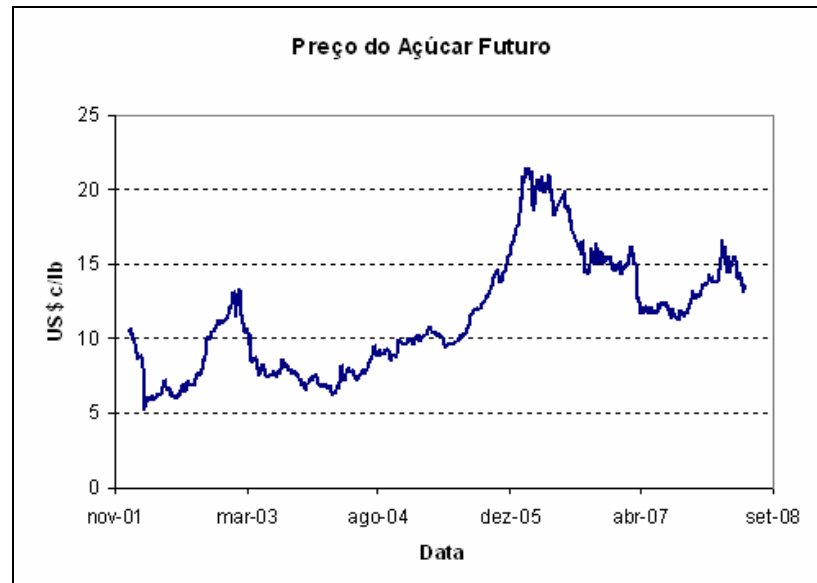


Figura 4.5 – Gráfico do preço do açúcar futuro

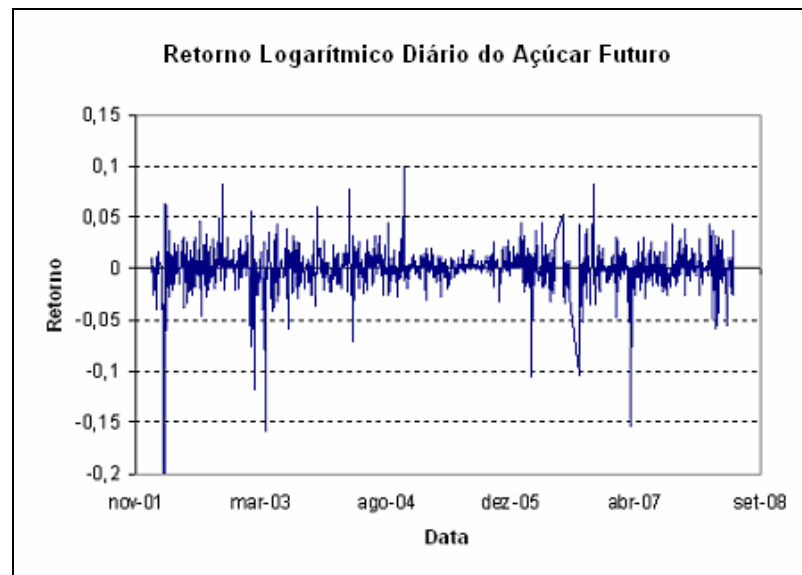


Figura 4.6 – Retorno logarítmico diário do açúcar futuro

A transformação da série em retornos logarítmicos permite tornar a série estacionária, possibilitando a aplicação do modelo GARCH, que tem como intuito modelar a volatilidade da série.

4.7.2 Gráfico de Autocorrelação

Na estimativa de parâmetros de modelos que descrevem a média e variância condicional, freqüentemente encontram-se problemas de convergência dos modelos numéricos. Isso pode induzir a soluções não esperadas, inadequadas ou ineficientes.

Para se evitar esse tipo de problemas, é necessário que seja feita uma análise da autocorrelação da série de retornos, como já havia sido descrito anteriormente. A maneira mais simples de se fazer isso é analisar o gráfico da função autocorrelação.

As retas horizontais representam os limites com um intervalo de confiança de 95%. O gráfico da autocorrelação exibe pequenas correlações entre os retornos, de modo que é possível aplicar o modelo GARCH.

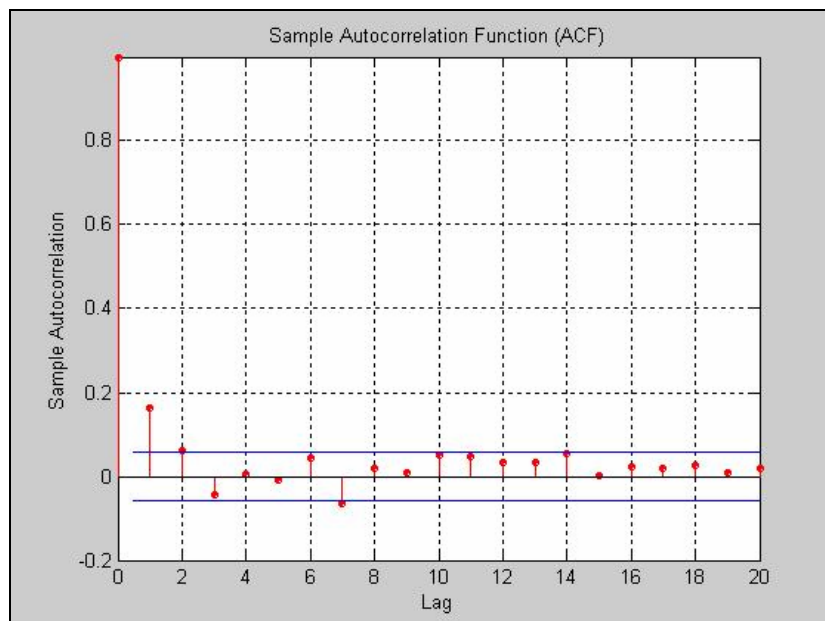


Figura 4.7 – Gráfico da função autocorrelação da série de retorno

4.7.3 Metodologia

A construção do modelo para a estimativa da volatilidade do açúcar foi implementado pelo software MatLab. A série original corresponde à série de preços futuros do açúcar negociados entre janeiro de 2002 a maio de 2008, totalizando 1503 observações.

A estimativa dos parâmetros foi obtida usando a função “garchfit” disponível no MatLab. A função determina o melhor modelo (GARCH ou ARCH) para a série analisada. O resultado obtido foi um GARCH(1,1). A função “garchfit” utiliza o método da máxima verossimilhança para a estimativa dos parâmetros. Os parâmetros obtidos são mostrados na tabela abaixo:

Tabela 4.1 – Parâmetros do modelo GARCH

Parâmetros	Valor
C	1,9167E-04
K	5,6462E-08
GARCH(1)	0,91727
ARCH(1)	0,08271

Assim, pode-se escrever o modelo GARCH como:

$$y_t = 0,00019167 + \varepsilon_t \quad (4.15)$$

$$\sigma_t^2 = 5,6462e-8 + 0,91727 \cdot \sigma_{t-1}^2 + 0,082713 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 \quad (4.16)$$

Com esses dados, é possível estimar a volatilidade para o açúcar futuro. A seguir, os gráficos da volatilidade do açúcar futuro modelado através do GARCH e do retorno logarítmico estimado.

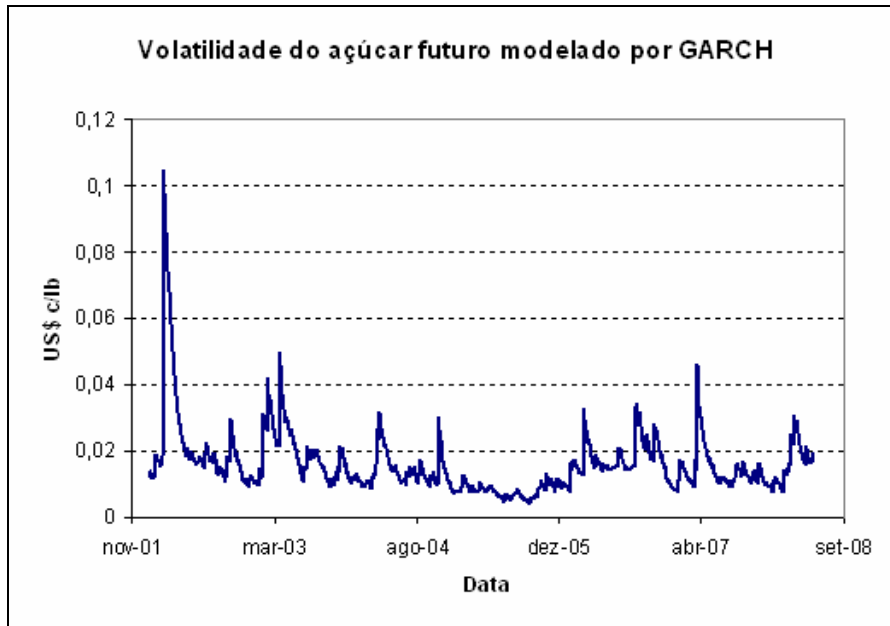


Figura 4.8 – Volatilidade do açúcar futuro modelado por GARCH

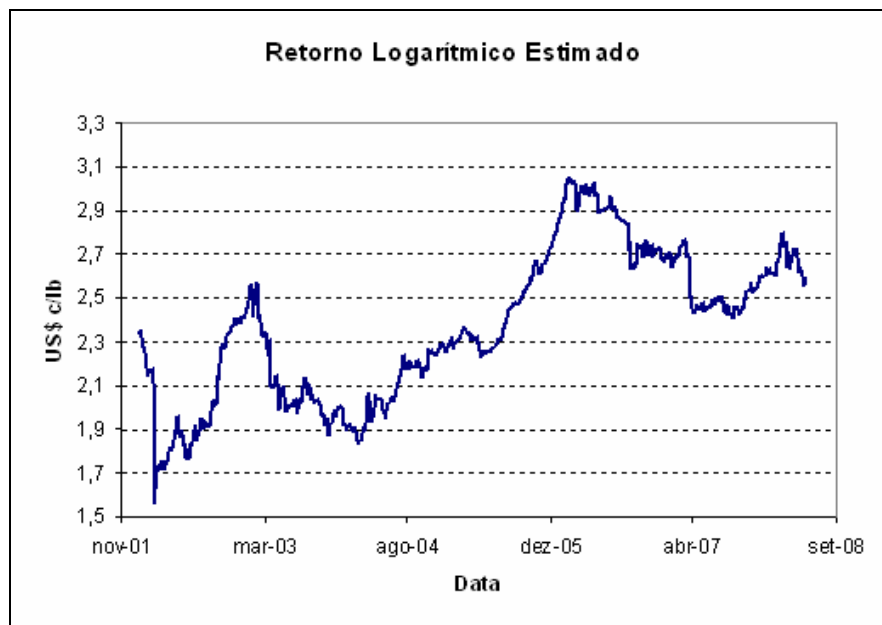


Figura 4.9 – Retorno logarítmico estimado pelo método GARCH

4.8 Simulação de Preços

Como uma das propostas deste trabalho é utilizar o mercado futuro como uma ferramenta de *hedging* para o agricultor, ele pode ser considerado um gestor de uma carteira de ativos. É importante que um gestor consiga projetar a evolução dos preços no horizonte de investimentos, simulando diferentes caminhos dos preços dos ativos ao longo do tempo. Dessa forma, o investidor pode calcular o risco a que estará exposto através da variação do valor de sua carteira de acordo com os diferentes cenários simulados.

O Método de Monte Carlo é um método de simulação estatística que utiliza uma sequência de números aleatórios através da descrição de uma função densidade de probabilidade para se gerar cenários. Estes cenários são obtidos através da geração de números aleatórios, de modo que as amostras encontradas pelo Método de Monte Carlo possibilitem chegar a uma solução do problema. Esse método tem sido largamente utilizado em finanças para descrever a evolução dos preços dos ativos.

Segundo Hull, os preços de ativos podem ser analisados como um processo Wiener, dado por:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dz \quad (4.9)$$

O processo Wiener é um processo que possui as seguintes características: (1) é um processo estocástico que apresenta a propriedade de Markov, ou seja, a distribuição de probabilidades condicional depende apenas do estado atual, independente do caminho traçado até este estado, (2) possui incrementos independentes de mudança ao longo do tempo, e (3) as mudanças no processo em qualquer instante em um intervalo finito assumem uma distribuição normal, onde a variância cresce linearmente ao longo do tempo. Dessa forma, quando analisamos um ativo através de um processo Wiener, assume-se que toda a informação do movimento futuro do ativo encontra-se no seu valor atual. Para se gerar cenários para o preço futuro do ativo, integra-se a equação acima, obtendo:

$$\Delta S_t = S_t \cdot \left(\mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \varepsilon_t \cdot \sqrt{\Delta t} \right) \quad (4.10)$$

onde ε é uma variável aleatória com distribuição normal, média zero e variância unitária, gerada pela simulação de Monte Carlo.

Entretanto, a equação acima se aplica apenas ao comportamento de uma variável. Como o problema estudado envolve mais de uma variável, a simulação deve considerar a correlação dos preços das variáveis consideradas, como ocorre na realidade. Essa correlação entre os preços simulados é representada pela matriz de covariância (Σ_t). A técnica que será utilizada para obter a matriz de covariância é a fatoração de Cholesky. O fator de Cholesky L é uma matriz triangular inferior, que pode ser obtido através da seguinte equação:

$$\Sigma = L \cdot L^T \quad (4.11)$$

O fator de Cholesky pode ser inserido no modelo da seguinte forma:

$$\Delta S_t = S_t \cdot \left(\mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \varepsilon_t \cdot L \cdot \sqrt{\Delta t} \right) \quad (4.12)$$

Essa matriz triangular inferior é multiplicada pela matriz formada pelos números aleatórios gerados pela simulação de Monte Carlo para que o resultado sejam choques correlacionados entre si.

5. Definição do Modelo

5.1 Introdução

Existe uma certa carência de modelos que otimizem a gestão de risco no setor sucro alcooleiro, sob uma ótica que aborde simultaneamente o sistema produtivo e os sistemas financeiros disponíveis no mercado de derivativos. É possível encontrar na literatura diversos trabalhos relacionados à otimização do sistema produtivo, abordando a política de estoques com os níveis de produção e vendas. Há também uma vasta literatura de estudos de modelos de estratégias no mercado de derivativos.

Sosnosky (2007) desenvolveu um trabalho que agrupou essas duas abordagens em um modelo de otimização de riqueza. O modelo proposto neste trabalho é uma continuação do modelo desenvolvido por Sosnosky, mas com uma análise mais robusta, tanto na estimativa das volatilidades, onde foi utilizado o modelo GARCH, como no modelo de otimização em si.

Neste capítulo, descreve-se um modelo matemático para a gestão do risco através do CVaR, englobando restrições do sistema produtivo de uma usina e da estratégia de *hedging* no mercado futuro. Após uma introdução dos parâmetros utilizados no modelo, são descritas as hipóteses adotadas e as restrições utilizadas no modelo. Por fim, é feita uma descrição de como o modelo de otimização utiliza o CVaR.

5.2 Parâmetros do Modelo

O problema deve ser visto tanto na ótica de um agricultor, preocupado em atender as restrições do sistema produtivo, tais como a demanda e estratégias de estoque, como na ótica de um investidor, que deseja minimizar o seu risco utilizando o mercado

futuro como uma ferramenta de *hedging*. Por isso, os parâmetros apresentados neste capítulo descrevem o modelo de forma a agrupar essas duas abordagens.

O objetivo do modelo é satisfazer um retorno mínimo esperado e minimizar a medida de risco adotada para cada estratégia escolhida pelo agricultor. Apesar dos preços final e inicial serem os mais relevantes, a geração de cenários permitiu representar as possíveis oscilações de preços no mercado. Ressalta-se que os cenários foram considerados equiprováveis, ou seja, com a mesma probabilidade de ocorrência.

O modelo considera que o agricultor possa tomar três tipos de estratégias: (1) vender parte de sua produção no mercado à vista, (2) comprar ou vender no mercado futuro, como uma ferramenta de *hedging* para a sua produção, e (3) estocar parte de sua produção, considerando os custos envolvidos.

Caberá ao modelo de otimização definir qual a melhor distribuição para que, dado um retorno mínimo, o agricultor esteja exposto ao menor nível de medida de risco adotado, no caso o CVaR.

O modelo busca otimizar a relação risco-retorno num período de 60 dias corridos (dois meses), sendo adotada uma metodologia de testes sequenciais para analisar o resultado num horizonte de um ano, ou seja, o modelo foi aplicado seis vezes seguidas, sendo que os resultados obtidos no período anterior fossem utilizados como ponto de partida para o período seguinte. Os meses adotados para a implementação do modelo foram janeiro, março, maio, julho, setembro e novembro, sempre no primeiro dia útil do mês.

Em algumas estratégias, para análise de resultados, o modelo foi aplicado em um período único de um ano.

Os seguintes parâmetros foram utilizados no modelo de otimização:

Parâmetros indexadores:

- $t = \{1, \dots, T\}$: conjunto dos instantes de tempo para cada tomada de decisão.
- $s = \{1, \dots, S\}$: conjunto dos cenários gerados através do Método de Monte Carlo.
- $i = \{1, 2, 3, 4\}$: conjunto para identificar a saída do modelo (vendas à vista, compra / venda no mercado futuro, estoque e VaR);

Parâmetros relacionados ao CVaR:

- w_i : vetor de saída do modelo com as percentagens ótimas;
- μ : retorno mínimo esperado;
- α : nível de confiança para o cálculo do CVaR;
- R_s : retorno da estratégia no cenário s ;
- \bar{R} : retorno médio obtido através dos cenários simulados;

Parâmetros relacionados às restrições:

- K : capital disponível para as operações de *hedging*. Esse capital tem como objetivo limitar a compra ou venda no mercado futuro.
- $P(t)$: quantidade de açúcar produzido no instante t em toneladas.

- $D(t)$: demanda de açúcar no instante t .
- Q : quantidade de terra disponível para a produção em ha.
- $prod$: produtividade anual do empreendimento (tons cana-de-açúcar/ha).
- CA : capacidade nominal de produção de cana-de-açúcar anual em toneladas.
- $rend$: rendimento da cana-de-açúcar para a produção de açúcar (kg de açúcar/ton de cana-de-açúcar).
- cp : custo de produção de açúcar em US\$ /ton.
- ce : custo de estocagem do açúcar em US\$ /ton/dia.
- $CE(t)$: capacidade de estocagem no período t em toneladas de açúcar.

Parâmetros gerais:

- $V_x(t)$: quantidade de açúcar vendida no mercado à vista no instante t em toneladas.
- $V_f(t)$: quantidade de açúcar vendido no mercado futuro no instante t em toneladas.
- $C_f(t)$: quantidade de açúcar comprado no mercado futuro no instante t em toneladas.
- $E(t)$: quantidade de açúcar estocado no instante t em toneladas.

- $x_s(t)$: preço à vista do açúcar no instante t para o cenário s em US\$ /ton.
- $f_s(t)$: preço futuro do açúcar no instante t para o cenário s em US\$ /ton.
- $px_s(t)$: probabilidade do preço x no cenário s ocorrer no instante t
- $pf_s(t)$: probabilidade do preço futuro f no cenário s ocorrer no instante t .
- $Riq(0)$: riqueza inicial em US\$.
- $Riq(s)$: riqueza média obtida através dos s cenários em US\$.

5.5 Hipóteses Adotadas

As seguintes hipóteses foram adotadas para se obter os dados iniciais do modelo:

- A produção foi considerada constante para cada instante de t . Ela foi obtida através da definição: (1) da quantidade de terras disponíveis (cinco mil e trezentos hectares), (2) da produtividade anual (80 ton de cana-de-açúcar/ha), e (3) do rendimento (140 kg de açúcar/ton de cana-de-açúcar). As definições (2) e (3) foram citadas no capítulo 2. Através desses dados, obteve-se uma capacidade produtiva anual em torno de 60 mil toneladas de açúcar por ano. As fórmulas abaixo foram utilizadas para o resultado:

$$CA = Q \cdot prod \quad (5.1)$$

$$P = CA \cdot rend \quad (5.2)$$

- Segundo dados do CEPEA, em 1997 o nível de estoque brasileiro de açúcar aumentou em 860 mil toneladas. Em 2007, o nível recuou em 485 mil toneladas. Neste mesmo período o preço do açúcar divulgado pela ESALQ dobrou. Através destes dados é possível inferir que o custo de estoque do açúcar se dá em torno de US\$ 0,30/ton/dia. Entretanto, como o valor obtido foi inferido de dados públicos, o modelo foi testado com alguns valores próximos do resultado, selecionando-se um valor para o modelo.
- Como a quantidade de açúcar produzido foi considerada constante, o custo de produção do açúcar também foi considerado constante a US\$ 300/ton.
- O capital disponível para o *hedging* no mercado futuro foi limitado, de modo que o agricultor possa negociar nesse mercado no máximo a sua capacidade produtiva. Essa restrição impede o agricultor de especular no mercado futuro, estratégia esta que não é o intuito do modelo.
- Não foram considerados custos de transação no mercado futuro.
- O tamanho dos contratos de açúcar futuro negociado na NYBOT é de 112,000 libras. Entretanto, o modelo não possui restrições quanto ao tamanho do contrato, podendo o agricultor comprar ou vender a quantidade que desejar.
- Foi considerada uma demanda constante em torno de 30% da capacidade produtiva do empreendimento, pois ela é bastante estável, sendo suficiente para abastecer o mercado interno e externo.
- O modelo não considerou os períodos de sazonalidade do açúcar ao longo do ano.

- A capacidade de estocagem também foi limitada pela capacidade produtiva do empreendimento, uma vez que o açúcar é um produto perecível. Esse limite é grande o suficiente para o agricultor estocar a sua produção para o período de entressafra (o que condiz com a realidade), apesar da sazonalidade não ser considerada no modelo. Além disso, esta restrição garante que haverá um giro no estoque do agricultor.
- O vetor w_i foi utilizado para a saída do modelo a fim de facilitar a análise dos resultados. Ele é apenas uma transformação das quantidades ótimas do modelo em relação à capacidade produtiva total.
- A riqueza inicial $R_{iq}(0)$ corresponde ao valor gasto na produção $P(t)$. Essa produção inicial foi considerada como um estoque do agricultor, podendo ele vender no mercado à vista ou futuro, ou ainda de mantê-lo no estoque.
- O modelo envolve apenas os custos de produção referentes ao açúcar, não levando em consideração os custos de produção do álcool e nem de subprodutos.

5.6 Restrições do Modelo

As restrições do sistema produtivo foram adotadas para se viabilizar o funcionamento da usina, de modo que ela se assemelhasse o máximo possível com as condições reais de mercado.

A restrição (5.3) foi também definida no trabalho de Sosnosky (2007), que relaciona a quantidade produzida em t com o volume de venda no mercado à vista e com o volume de compra e venda no mercado futuro, assim como com a variação do estoque entre os instantes t e $t-1$.

$$P(t) = Vx(t) - Cf(t - 1) + Vf(t - 1) + E(t) - E(t - 1) \quad (5.3)$$

As operações no mercado futuro são referentes ao período anterior, uma vez que a negociação só é concretizada no período seguinte da operação.

A riqueza acumulada no instante t será o total de receita bruta gerada com as vendas no mercado à vista, consolidado com as operações no mercado futuro, deduzindo-se os custos de produção e estocagem.

$$Riq(t) = Vx(t) \cdot x(t) + Vf(t) \cdot f(t) - Cf(t) \cdot f(t) - P(t) \cdot cp + P(t - 1) \cdot cp - E(t) \cdot ce \quad (5.4)$$

Como foram simulados s cenários, a riqueza média é dada por:

$$Riq(s) = \sum_s Riq(t) \quad (5.5)$$

Resultando no retorno R_s dos cenários e no retorno médio \bar{R} :

$$R_s = \frac{Riq(s)}{Riq(0)} - 1 \quad (5.6)$$

$$\bar{R} = \frac{1}{S} \cdot \sum_s R_s \quad (5.7)$$

Uma restrição necessária do modelo CVaR é que a variável de entrada μ deve ser o limite inferior do retorno médio:

$$\bar{R} \geq \mu \quad (5.8)$$

O estoque deve ser restringido pela quantidade de açúcar vendido no mercado futuro, de modo a se garantir a entrega física do produto. Além disso, ela não deve exceder a capacidade produtiva do empreendimento.

$$0 \leq E(t) - E(t-1) + Vx(t) + Vf(t) \leq P(t) \quad (5.9)$$

As restrições (5.6) a (5.14) são restrições referentes aos limites inferiores e superiores do modelo de otimização.

$$P(t) \geq 0, \forall t \in T \quad (5.10)$$

$$Vx(t) \geq 0, \forall t \in T \quad (5.11)$$

$$Vf(t) \geq 0, \forall t \in T \quad (5.12)$$

$$Cf(t) \geq 0, \forall t \in T \quad (5.13)$$

$$E(t) \geq 0, \forall t \in T \quad (5.14)$$

$$Vx(t) \leq D(t), \forall t \in T \quad (5.15)$$

$$Vf(t) \cdot f(t) \leq K(t), \forall t \in T \quad (5.16)$$

$$Cf(t) \cdot f(t) \leq K(t), \forall t \in T \quad (5.17)$$

$$E(t) \leq CE(t), \forall t \in T \quad (5.18)$$

5.7 Função Objetivo

A função objetivo tratada neste trabalho minimiza uma medida de risco, representada pelo CVaR. É possível modificar as restrições do modelo de modo a impedir que o agricultor utilize o mercado futuro como instrumento de *hedge*. Essa possibilidade de alteração permitirá comparar se a adoção ou não da estratégia de *hedging* pelo agricultor apresenta alguma vantagem.

5.7.1 Valor em Risco Condicional (CVaR)

O modelo proposto pelo CVaR tem como objetivo minimizar o risco da tomada de decisão do agricultor. Para isso, considere um conjunto de decisões x tomado pelo agricultor, englobando todas as variáveis citadas anteriormente. Para o conjunto de decisões x é possível associá-lo a uma função de perda para cada cenário simulado:

$$L_s = f(x), \forall s \in S \quad (5.19)$$

onde:

L_s : é a função de perda.

A probabilidade da função perda não exceder um nível especificado η é igual à soma das probabilidades dos cenários cuja perda foi menor que η :

$$\psi(x, \eta) = \sum_{s|L_s \leq \eta} p_s \quad (5.20)$$

onde:

p_s : é a probabilidade do cenário s ocorrer.

Pode-se definir o VaR como o menor valor η , tal que a probabilidade da função perda exceder η seja maior ou igual a um nível de confiança $\alpha\%$.

$$VaR(x, \alpha) = \min\{\eta \in \mathfrak{R} \mid \psi(x, \eta) \geq \alpha\} \quad (5.21)$$

Rockafellar e Uryasev (2000) demonstram que o CVaR, calculado como a perda média da carteira que excede o VaR para um dado nível de confiança $\alpha\%$, pode ser definido como:

$$CVaR(x, \alpha) = \frac{\eta}{1 - \alpha} \cdot \sum_{s|L_s \leq \eta} p_s - \alpha + \frac{1}{1 - \alpha} \cdot \sum_{s|L_s > \eta} p_s \cdot L_s \quad (5.22)$$

Como os cenários foram considerados equiprováveis, o modelo de minimização do CVaR pode ser simplificado da seguinte forma:

$$\text{MIN } CVaR(x, \alpha) = \eta + \frac{I}{S \cdot (1 - \alpha)} \cdot \sum_{s=1}^S y_s \quad (5.23)$$

onde

$$y_s = \max\{0, L_s - \eta\} \quad (5.24)$$

Neste caso, a perda pode ser considerada como um retorno negativo, ou seja:

$$L_s = -R_s \quad (5.24)$$

6. Resultados e Análise de Sensibilidade

6.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados os resultados mais expressivos, tanto para o modelo de otimização como para a simulação de preços. Além disso, serão realizadas algumas análises de sensibilidade para se observar as principais mudanças dos resultados obtidos através da função objetivo.

Após toda a descrição detalhada dos conceitos e do modelo a ser utilizado, finalmente ele é aplicado de forma prática no trabalho. Primeiramente, serão mostrados os resultados das simulações para em seguida apresentar os resultado da otimização propriamente dita. É muito importante a realização de uma análise de sensibilidade, a fim de se ter um senso crítico dos resultados obtidos, tanto para o modelo do sistema produtivo, como para a estratégia de *hedging* no mercado futuro.

Foi utilizado o software MatLab, tanto para a geração e simulação de preços como para a resolução da modelagem. A grande vantagem desse *software* é que ele possui diversos algoritmos prontos e uma versatilidade para se trabalhar com matrizes, reduzindo tempo para codificá-los em uma linguagem computacional.

6.2 Resultados da Simulação

Para se gerar os cenários que expliquem a evolução dos preços do açúcar, tanto à vista como futuro, foi utilizado o Método de Monte Carlo. A volatilidade foi obtida através do modelo GARCH, de maneira que a volatilidade varie diariamente, ou seja, obteve-se uma simulação de preços mais robusta do que assumir uma volatilidade constante para o período analisado.

Entretanto, como o problema trabalha com duas séries de preços, foi necessário considerar a correlação desses preços na simulação. Para isso, utilizou-se a matriz da fatoração de Cholesky, que multiplicada à matriz dos números aleatórios resultou em uma matriz que gera choques correlacionando as duas séries. A matriz resultante da fatoração de Cholesky é apresentada na tabela 6.1:

Tabela 6.1 – Matriz resultante da fatoração de Cholesky

	a vista	futuro
a vista	0,6633	0
futuro	0,3534	0,1126

Foram simulados 500 cenários de preços, tanto para o açúcar à vista como futuro, num horizonte de 252 dias, ou seja, um ano de dias úteis.

É importante ressaltar que os cenários simulados foram considerados equiprováveis, ou seja, com a mesma probabilidade de ocorrência.

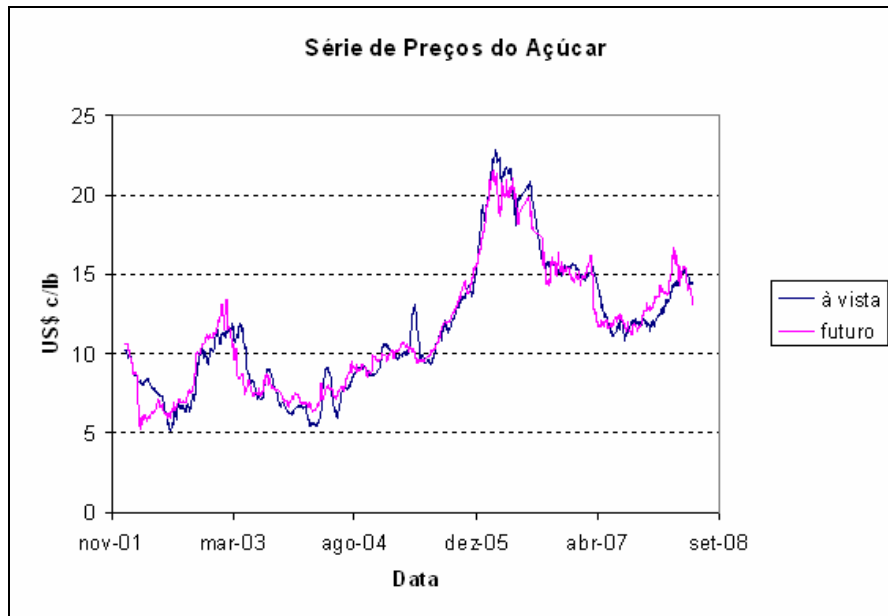


Figura 6.1 – Série histórica de preços utilizados para a simulação

As figuras 6.2 e 6.3 mostram os cenários simulados para os preços do açúcar à vista e futuro.

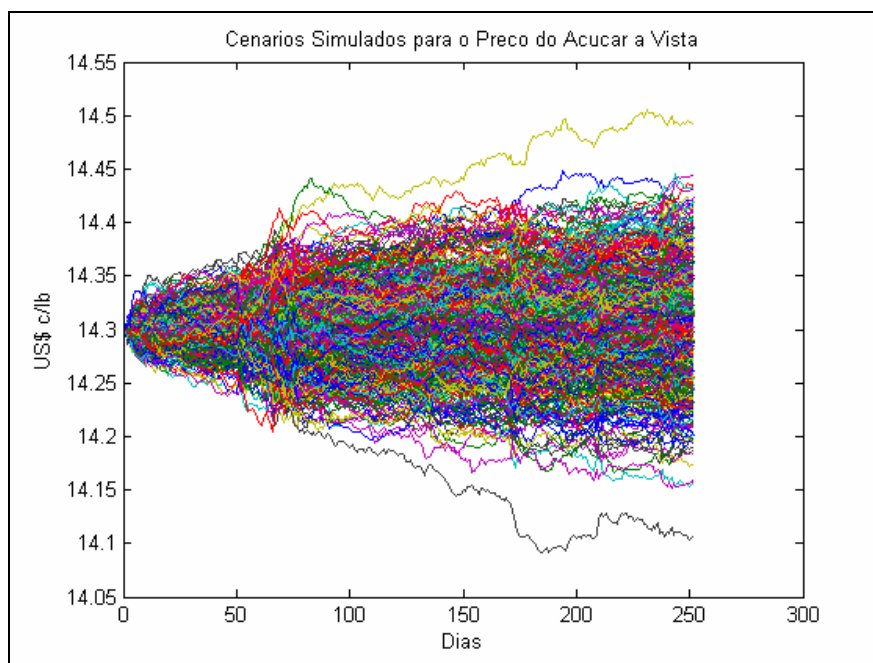


Figura 6.2 – Cenários simulados para o preço do açúcar à vista

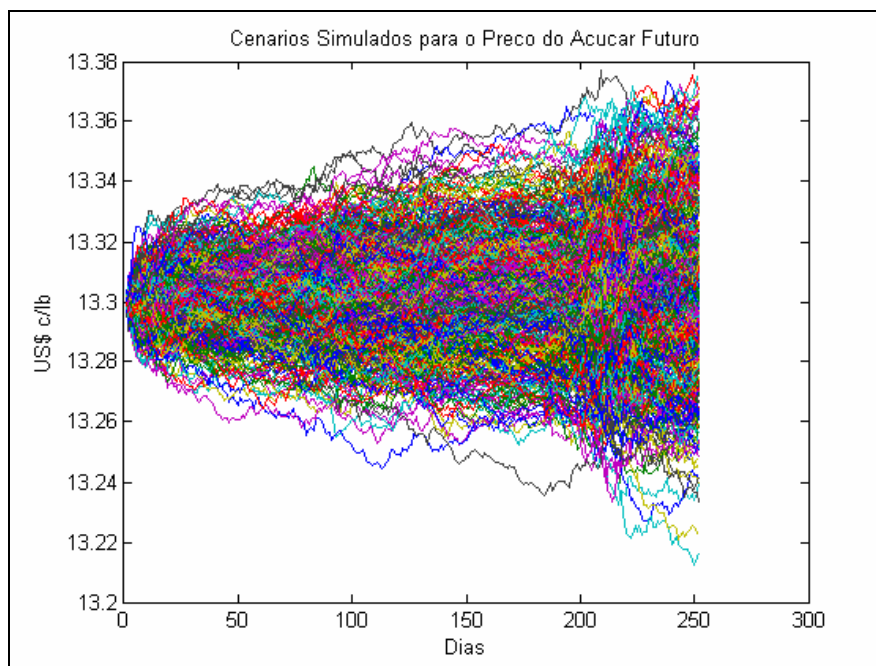


Figura 6.3 – Cenários simulados para o preço do açúcar futuro

6.2 Definição das Variáveis de Entrada do Modelo

- Custo e Capacidade de Produção: segundo um estudo do IDEA, os principais componentes do custo de produção da cana são:

Tabela 6.2 – Componentes do custo de produção da cana-de-açúcar

Componentes	%
Formação do canavial	17%
Trato com a cana e planta	3%
Tratos com soqueiras	27%
Colheita e transporte	33%
Administração agrícola	4%
Remuneração da terra	16%
Total	100%

Através desses dados e de um levantamento realizado pela EMBRAPA, pode-se obter uma estimativa para os custos de produção do açúcar em US\$/ton.

A capacidade de produção foi obtida através das hipóteses adotadas de (1) terras disponíveis em hectares, (2) produtividade da terra e (3) rendimento de conversão da cana em açúcar, visto no capítulo 5. Isso inclui o fator de sazonalidade que evidencia os períodos de safra e entressafra.

- Custo e Capacidade de Estocagem: o custo de estocagem foi estimado através dos resultados trimestrais divulgados pelas indústrias do setor (Cosan, São Martinho e Açúcar Guarani). Foi imposto um limite grande o suficiente para que a capacidade de estocagem atenda à demanda no período correspondente à entressafra.
- Demanda: a demanda foi considerada constante ao longo do horizonte de análise do modelo.
- Preço à Vista do Açúcar: os preços de açúcar à vista foram obtidos através do site do CEPEA/ESALQ, dados em R\$/saca de 50kg. Os preços foram ajustados

para o modelo de otimização, de modo a serem mensurados em US\$/ton, obtendo-se uma série histórica diária de janeiro de 2002 a maio de 2008.

- Preço Futuro do Açúcar: os preços do açúcar futuro foram obtidos através da Bloomberg, para a bolsa de Nova Iorque, a NYBOT. Os preços são dados em US\$ c/lb⁷, de modo que eles foram ajustados para US\$/ton no modelo de otimização.
- Capital disponível para operações no mercado futuro: o objetivo de se limitar o capital disponível para as operações de *hedging* é evitar que o modelo se aproveite de um cenário favorável para a alocação máxima com contratos futuros, tornando a produção da usina desnecessária. Além disso, assume-se que esse capital seja suficiente para cobrir os custos de se manter o empreendimento.

6.4 Resultados do CVaR

No modelo de otimização do CVaR, foi adotado um nível de confiança de 95%. O algoritmo utilizado para a resolução do problema foi o Quasi-Newton, para problemas de programação lineares e não-lineares (função *fmincon* do MatLab), uma vez que a modelagem matemática do CVaR pode ser escrita da seguinte forma:

Função objetivo	$\min f(x)$			
sujeito à:				
restrições de igualdade:	Ax	$=$		b
restrições de desigualdade:	Cx	\leq		d
limites superiores e inferiores:	lb	\leq	x	\leq ub

⁷ centavos por libra

Vale ressaltar que não foi utilizada nenhuma restrição do tipo não-linear no modelo de otimização. Apenas se optou por utilizar uma função que englobasse os dois tipos de programação disponível no MatLab, e que possui uma maior versatilidade na programação do código.

A parametrização gerou um modelo de otimização com as seguintes características:

- Número de variáveis: 31
- Número de restrições de igualdade: 12
- Número de restrições de desigualdade: 63

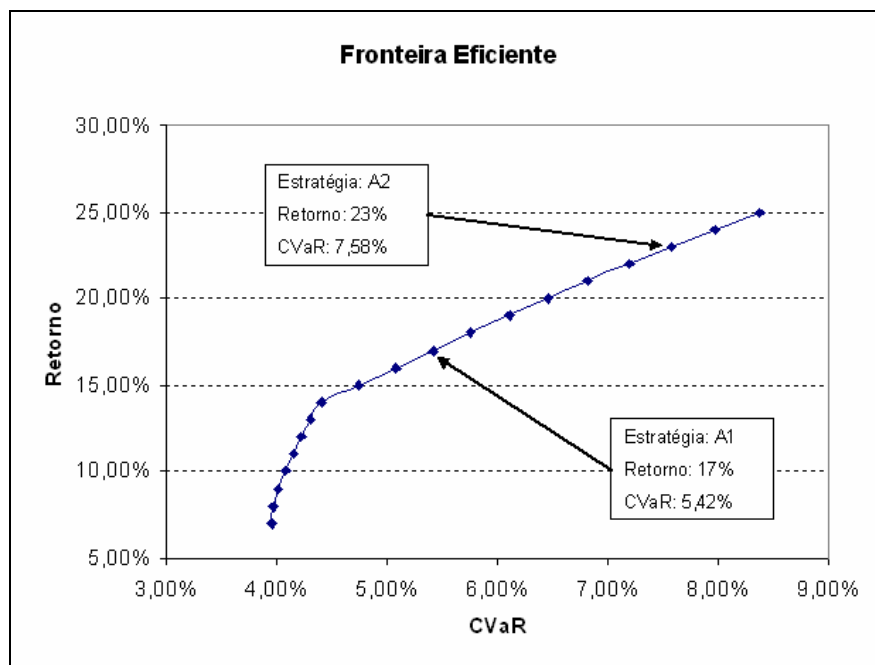


Figura 6.4 – Fronteira eficiente com a estratégia de hedging

Foi descartado o efeito da sazonalidade no modelo de otimização, uma vez que essa restrição aumentava a complexidade computacional do problema. Além disso, como o objetivo principal deste trabalho é evidenciar as vantagens de se adotar uma

estratégia de *hedging* no mercado futuro, a exclusão da sazonalidade não irá prejudicar os resultados obtidos no modelo de otimização.

A fronteira eficiente foi obtida através de 19 estratégias ótimas, adotando a variação do retorno mínimo entre 7% a 25%, em incrementos de 1%.

Foram escolhidas duas estratégias para exemplificação, A1 e A2, destacadas na figura 6.4.

Estratégia A1

- Retorno: 17%
- CVaR: 5,42%

A estratégia A1 apresenta um retorno esperado de 17% e um CVaR de 5,42%. Para que a estratégia possua essas características, a porcentagem de vendas no mercado à vista no final do período deve ser de 30%, e o agricultor deve adotar uma posição compradora no mercado futuro, como uma ferramenta de hedging, correspondendo a 21%, ambas em relação à capacidade produtiva. Além disso, ele deverá estocar 49% da sua produção. A tabela abaixo traz um resumo da estratégia A1.

Tabela 6.3 – Resultados da otimização do CVaR para a estratégia A1 em todo o período

	Vendas à vista	Compras futuras	Vendas futuras	Estoque
Final do período	30%	21%	0%	49%

É possível realizar também uma análise de testes seqüenciais, de modo que o agricultor tome uma decisão em intervalos de 60 dias corridos, ou seja, dois meses, até que se complete o período de 1 ano. Os resultados possuem algumas diferenças em relação ao resultado obtido ao se analisar o período de 1 ano inteiro. Entretanto, percebe-se que houve uma pequena variação em relação à porcentagem de vendas no mercado à

vista, e o modelo mantém a opção de adotar uma estratégia de compra no mercado futuro como *hedging*.

Tabela 6.4 – Resultados da otimização do CVaR para a estratégia A1 em testes seqüenciais

	Vendas à vista	Compras futuras	Vendas futuras	Estoque
Julho	47%	41%	0%	12%
Setembro	54%	21%	0%	25%
Novembro	53%	24%	0%	23%
Janeiro	53%	23%	0%	24%
Março	53%	24%	0%	23%
Maio	30%	24%	0%	46%

Estratégia A2

- Retorno: 23%
- CVaR: 7,58%

A estratégia A2 apresenta um retorno esperado de 23% e um CVaR de 7,58%. Para que a estratégia possua essas características, a porcentagem de vendas no mercado à vista no final do período deve ser de 47%, e o agricultor deve adotar uma posição compradora no mercado futuro, como uma ferramenta de *hedging*, correspondendo a 41% do total de sua capacidade produtiva. Além disso, ele deverá estocar 12% da sua produção. A tabela abaixo traz um resumo da estratégia A2.

Tabela 6.5 - Resultados da otimização do CVaR para a estratégia A2 em todo o período

	Vendas à vista	Compras futuras	Vendas futuras	Estoque
Final do período	47%	41%	0%	12%

É possível realizar também uma análise de testes seqüenciais, de modo que o agricultor tome uma decisão em intervalos de 60 dias corridos, ou seja, dois meses, até que se complete o período de 1 ano. Os resultados são mostrados na tabela a seguir.

Tabela 6.6 - Resultados da otimização do CVaR para a estratégia A2 em testes seqüenciais

	Vendas à vista	Compras futuras	Vendas futuras	Estoque
Julho	47%	53%	0%	0%
Setembro	54%	30%	0%	16%
Novembro	54%	31%	0%	15%
Janeiro	51%	30%	0%	19%
Março	63%	33%	0%	4%
Maio	30%	70%	0%	0%

6.5 Resultados Obtidos Excluindo o Hedging

Como uma forma de se comparar a eficiência da estratégia de *hedging* no mercado futuro, utilizou-se o mesmo modelo matemático da minimização do CVaR, porém modificando as restrições dos limites superiores e inferiores da compra e venda de açúcar futuro de forma com que se excluísse a possibilidade do agricultor negociar no mercado futuro.

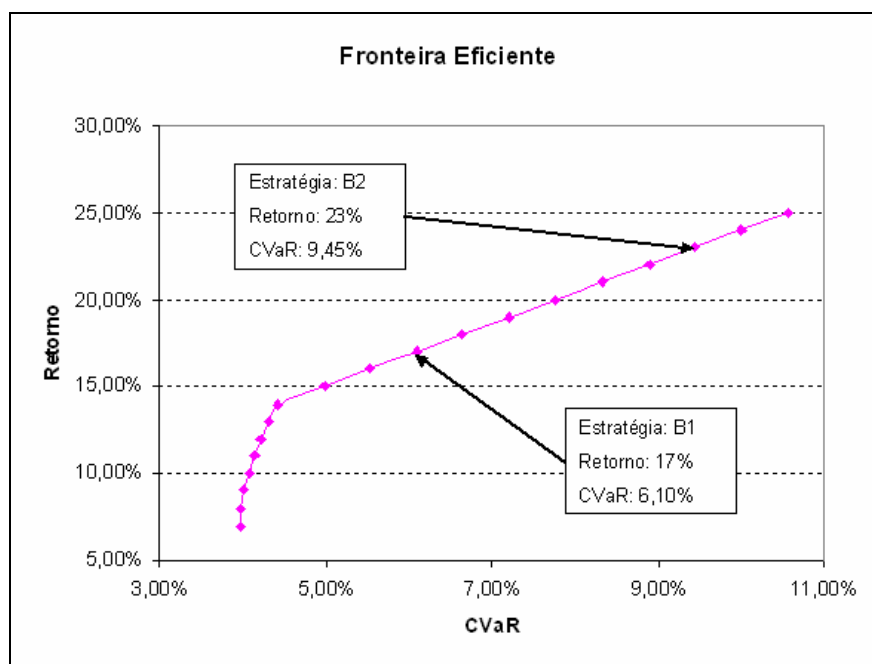


Figura 6.5 – Fronteira eficiente sem a estratégia de hedging

A fronteira eficiente foi obtida através de 19 estratégias ótimas, adotando a variação do retorno mínimo entre 7% a 25%, em incrementos de 1%.

Foram escolhidas duas estratégias para exemplificação, B1 e B2, destacadas na figura 6.5.

Estratégia B1

- Retorno: 17%
- CVaR: 6,10%

A estratégia B1 apresenta um retorno esperado de 17% e um CVaR de 6,10%. Para que a estratégia possua essas características, a porcentagem de vendas à vista deverá corresponder a 30% da capacidade produtiva no final do período. Além disso, o agricultor deverá alocar 70% de sua produção no estoque. A tabela abaixo mostra os resultados obtidos analisando o período de 1 ano, com tomadas de decisão em intervalos de 60 dias corridos.

Tabela 6.7 - Resultados da otimização do CVaR para a estratégia B1 em todo o período

	Vendas à vista	Compras futuras	Vendas futuras	Estoque
Julho	53%	0%	0%	47%
Setembro	53%	0%	0%	47%
Novembro	53%	0%	0%	47%
Janeiro	53%	0%	0%	47%
Março	30%	0%	0%	70%
Maio	30%	0%	0%	70%

Estratégia B2

- Retorno: 23%
- CVaR: 9,45%

A estratégia B2 apresenta um retorno esperado de 23% e um CVaR de 9,45%. Para que a estratégia possua essas características, o agricultor deverá vender 79% de sua capacidade produtiva, estocando uma parcela de 21%.

Tabela 6.8 - Resultados da otimização do CVaR para a estratégia B2 em todo o período

	Vendas à vista	Compras futuras	Vendas futuras	Estoque
Julho	53%	0%	0%	47%
Setembro	53%	0%	0%	47%
Novembro	79%	0%	0%	21%
Janeiro	79%	0%	0%	21%
Março	79%	0%	0%	21%
Maio	79%	0%	0%	21%

6.6 Análise de Sensibilidade

Foram analisados dois parâmetros que influenciam diretamente nos resultados obtidos no modelo de otimização.

- Nível de retorno mínimo (μ): para os dois tipos de estratégias, A e B, foram analisados valores entre 7% e 25% , com incrementos de 1%. Em ambos os casos, foram gerados 19 estratégias diferentes para a construção das fronteiras eficientes.
- *Hedging*: A fim de se evidenciar as vantagens obtidas com a estratégia de *hedging* com operações no mercado futuro, foram analisados dois tipos de estratégias: (A) que possibilita o agricultor negociar no mercado futuro, podendo ele tomar uma posição comprada ou vendida do açúcar futuro e, (B) onde não é permitido que o agricultor se utilize do instrumento de *hedging* no mercado futuro, tendo suas decisões restritas apenas à quantidade de sua produção a ser vendida no mercado à vista e sua política de estocagem.

Embora o nível de confiança adotado, $\alpha\%$, seja um parâmetro que afete diretamente os resultados pois, quanto maior for o nível de confiança, menor é o tamanho da cauda que está sendo analisado, foi apresentado apenas um nível de confiança no trabalho.

Além disso, foram realizadas duas abordagens distintas para o modelo de otimização. A primeira foi considerar o período de um ano inteiro (252 dias úteis) como intervalo da análise, permitindo o agricultor tomar decisões em intervalos de 60 dias corridos (2 meses). Na segunda, o período de análise foi reduzido para 60 dias corridos, mas aplicando testes sequenciais que completassem o período de análise para 1 ano.

Pode-se comparar os gráficos de fronteira eficientes gerados para os dois tipos de estratégias (no caso da análise para o período de um ano inteiro), como mostra a figura a seguir:

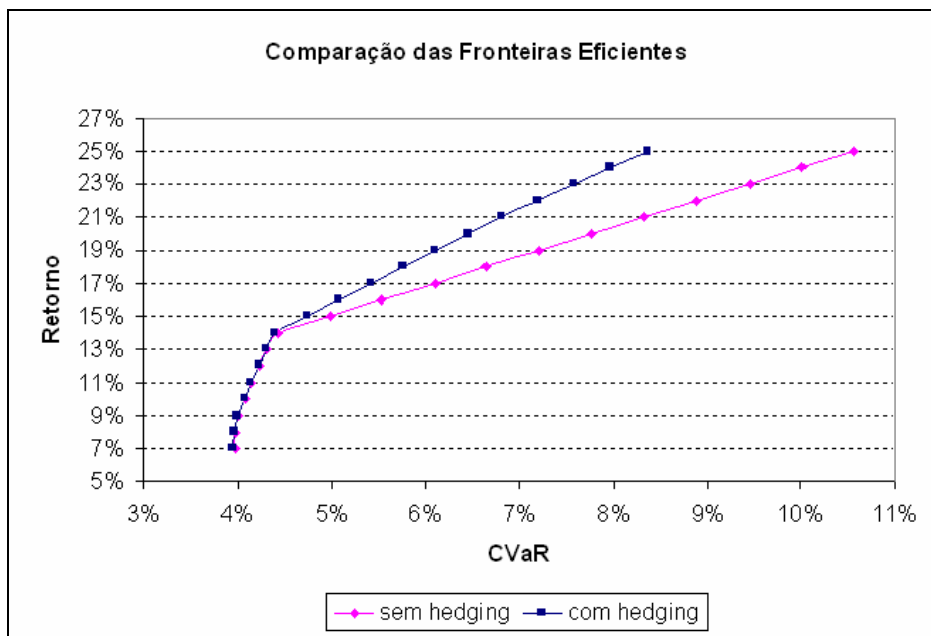


Figura 6.6 – Comparação entre as fronteiras eficientes geradas

Observa-se que o risco tomado pelo agricultor é maior no caso dele não utilizar o mercado futuro como instrumento de *hedging* para um mesmo nível de retorno, a partir

de um certo nível de retorno esperado (em torno de 14%). Conforme o nível de retorno esperado aumenta, aumenta a diferença, tanto absoluta como relativa, da medida de risco CVaR. Isso mostra que existe uma faixa de retorno esperado na qual a utilização do mercado futuro como *hedge* não reduzirá o risco do agricultor. Por outro lado, para níveis de retorno esperado maiores do que essa faixa fica clara a importância da utilização do mercado futuro pelo agricultor. Nesse caso, quanto maior o retorno esperado pelo agricultor, maior a posição de *hedging* que ele deverá tomar, ficando mais evidente a redução de risco obtida.

É importante notar também que, para cada nível de retorno esperado, varia a quantidade de *hedging* alocada, de forma a se otimizar a relação risco-retorno. Caso o agricultor utilize o mercado futuro com o intuito de aumentar a rentabilidade do seu negócio, ele poderá estar colocando a sua empresa em risco, já que ele estará tomando uma posição em excesso nesse mercado. Dessa forma, o mercado futuro deve ser utilizado apenas como instrumento financeiro, apoiando a atividade produtiva, que deve ser a atividade central do empreendimento.

Comparando os resultados obtidos na estratégia com *hedging*, evidencia-se que para retornos mais baixos, o modelo aponta uma maior alocação em estoque, não deixando de utilizar o mercado futuro como forma de otimizar a relação risco-retorno da estratégia. Já para níveis de retornos mais altos, percebe-se a importância do instrumento de *hedging* no mercado futuro, onde para um retorno esperado de 23%, o agricultor deve tomar uma posição comprada de 61% de sua capacidade produtiva no final do período.

É importante notar que os resultados das estratégias com *hedging*, quando analisados em testes seqüenciais, mostram que à medida que o agricultor vende ou estoca a sua produção, ele precisa aumentar a posição de *hedge*, comprando mais contratos de açúcar futuro. Percebe-se também, que os resultados finais obtidos através dos testes seqüenciais se assemelham aos resultados obtidos através de um período único.

Nas estratégias sem *hedging*, fica mais clara a importância do estoque para o agricultor. Para níveis mais baixos de retorno esperado, o estoque é utilizado como uma ferramenta para se diminuir o risco. Em linhas gerais, o agricultor irá vender no mercado à vista uma parcela de sua produção que atenda o nível de retorno mínimo exigido, alocando no estoque a parcela restante. À medida que o nível de retorno mínimo exigido aumenta, maior será a percentagem de produção que ele terá de vender no mercado à vista.

7. Conclusões

7.1 Conclusões

Foi desenvolvido um modelo que minimizasse o risco do agricultor para um dado retorno mínimo exigido, incluindo a possibilidade do agricultor tomar posições no mercado futuro como instrumento de *hedging*. A medida de risco adotada foi o CVaR, que é uma medida mais robusta que o VaR, pois captura a distribuição de perdas na cauda. A partir do modelo proposto, foi possível conciliar as restrições produtivas de uma usina sucro alcooleira com as restrições de uma estratégia de *hedging* no mercado futuro. O trabalho pode ser considerado como uma continuação do trabalho desenvolvido por Sosnosky (2007), uma vez que foi utilizado o CVaR como medida de risco nas possíveis estratégias adotadas pelo usineiro. Apesar do modelo ter sido desenvolvido para usinas que tenham como principais produtos o açúcar e o álcool, o álcool não foi tratado neste trabalho, devido à baixa liquidez deste produto no mercado futuro, podendo condicionar a cenários absurdos os resultados de sua análise.

Destaca-se a utilização do modelo GARCH para a estimativa da volatilidade dos preços, que foi uma das recomendações do trabalho de Sosnosky (2007). Isso permitiu que a volatilidade estimada, utilizada na geração de cenários, fosse tratada como uma variância condicional heteroscedástica de uma variável, no caso o retorno. A grande vantagem do modelo GARCH é que ele é uma generalização dos modelos da família ARCH, adequado para estimativas de volatilidades de *commodities* agrícolas, como visto nos trabalhos de Holt e Aradhyula (et. al. Enders, 1995), Park e Switzer (1995), Lien e Yang (2007). Através de uma análise das funções de autocorrelação, validou-se a utilização do modelo proposto. A estimativa gerada pelo modelo GARCH foi uma série diária da volatilidade que foi utilizada para a geração de cenários através do Método de Monte Carlo.

Ainda não são conhecidas aplicações de otimização de estratégias produtivas utilizando o CVaR como medida de risco no país, representado uma contribuição significativa do presente trabalho. Uma abordagem similar foi feita por Liu e Uryasev (2006), onde o CVaR foi utilizado como medida de risco para otimizar a colheita de *commodities* sobre variações climáticas. Zylstra e Kilmer (2003) utilizam o CVaR como medida de risco na análise de uma indústria de laticínios. Além disso, o trabalho evidenciou que o mercado de derivativos possui um papel fundamental na minimização do risco do agricultor, permitindo uma melhor relação de risco-retorno do seu negócio.

7.2 Comentários Finais e Recomendações para Trabalhos Futuros

Os resultados obtidos evidenciam que a adoção de uma estratégia de *hedging* no mercado futuro adotada por um usineiro permite que ele tenha os mesmos níveis de retornos no caso dele não utilizar o mercado futuro, mas com menores níveis de risco. Para isso, o mercado futuro deve ser utilizado apenas como uma ferramenta financeira, não devendo ser a principal fonte de rendimento da usina.

Devido à alta complexidade das verdadeiras restrições existentes no sistema produtivo de uma usina e, por muitas delas não fazerem parte do escopo deste trabalho de formatura, foi necessária uma simplificação dessas restrições, simplificando também a exigência computacional para a resolução do problema.

Apesar de ter sido utilizado o modelo GARCH na estimativa da volatilidade dos preços à vista e futuro do açúcar, foi utilizado apenas um produto no modelo, adaptando-se a utilização do CVaR em carteiras para estratégias produtivas envolvendo *hedging* com mercado futuro. Uma recomendação para trabalhos futuros seria a inclusão de outras *commodities* na estratégia, diversificando os produtos trabalhados pelo agricultor. Entretanto, ressalta-se a dificuldade de encontrar *commodities* com boa liquidez no

mercado futuro, e que tenham uma correlação com o açúcar. Outras recomendações para trabalhos futuros seriam:

- **Estratégias com mercado de ações e opções:** Existem diversos outros tipos de produtos financeiros que podem ser utilizados para se diminuir o risco do agricultor. A mais simples delas seria utilizar ações do segmento como proteção (CSAN3, SMT03, ACGU3). Mecanismos mais complexos incluem as opções, utilizando técnicas de apreçamento como o *Black-Scholes* (veja Hull, 1997).
- **Análise da sazonalidade:** No primeiro momento o efeito da sazonalidade foi incluído no modelo de otimização. Entretanto, por motivos de modelagem computacional, decidiu-se descartar este efeito. Uma recomendação seria incluir este fator, mas fazendo uma análise mais detalhada das implicações deste fator no sistema produtivo. Ressalta-se que existe uma diferença de sazonalidade dependendo da região produtiva. Além disso, é necessário fazer um estudo do nível de estoque máximo permitido, uma vez que o produto analisado é perecível, não podendo ser estocado por muito tempo.
- **Análise do retorno de conveniência:** É bastante evidente que existe um retorno de conveniência do açúcar para o agricultor, ou seja, existe uma vantagem do usineiro possuir a mercadoria física, do que apenas comprá-la no mercado futuro. Por isso, frequentemente o açúcar à vista é negociado a preços mais altos que no mercado futuro. Um estudo bastante interessante para se desenvolver em trabalhos futuros seria considerar o retorno de conveniência no modelo de otimização.
- **Análise da demanda:** A demanda foi considerada constante nos períodos de análise neste trabalho, no entanto, ela poderia ser uma variável de estudo para trabalhos futuros, de forma a equacioná-la nas restrições.

- **Utilização de outras técnicas para geração de cenários:** Existem outras técnicas além do Método de Monte Carlo para a geração de cenários como, por exemplo, o *bootstrap*, que foi tratado por Guastaroba e Mansini (2007). No trabalho de Guastaroba, foi realizada uma análise dos resultados obtidos através das diversas técnicas de geração de cenários, mas voltado para uma análise de carteira de derivativos, podendo ela ser adaptada para problemas que envolvam a gestão produtiva.
- **Análises mais extensivas do modelo GARCH:** O modelo GARCH pode ser validado através de diversos tipos de análises técnicas como testes de hipótese na correlação, teste Q de Ljung-Box-Pierce e o teste de Engle. Como o escopo principal deste trabalho era o modelo de otimização, fica como uma recomendação para trabalhos futuros uma análise mais minuciosa do modelo GARCH.
- **Estratégias de *hedging* com o câmbio:** A moeda utilizada no modelo de otimização deste trabalho foi o dólar. Como o usineiro trabalha tanto com a moeda local (real brasileiro) e o dólar americano, é possível desenvolver um modelo que utilize estratégias de *hedging* com o câmbio.

8. Referências Bibliográficas

Sites utilizados: EMBRAPA, CEPEA, ÚNICA, ESALQ, USDA, FAO, Census.

Dados públicos de empresas: Cosan, São Martinho, Açúcar Guarani (Resultados Trimestrais).

ALARCON, C. M., **“Avaliação de Modelos de Value-at-Risk para Ações.”** – Universidade Estadual de Campinas, 2005.

BIRGE, J. R., **“Introduction to Stochastic Programming.”** – New York: Springer, 1997.

BOLLERSLEV, T. **“Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.”** Journal of Econometrics, 1986.

BORCA, B., **“Multi-period Constrained Portfolio Optimization Using Conditional Value-at-Risk.”** – University of Lausanne, 2005.

BOX, G and JENKINS, G. **“Time Series Analysis – Forecasting and Control.”** New Jersey: Prentice Hall, 1994.

BURNQUIST, H. L., BACCHI, M. R. P., **“Análise de Barreiras Protecionistas no Mercado de Açúcar.”** – Agroindústria Canavieira do Brasil. Ed. Atlas, 2002.

CARDOSO, M. M. **“Simulação de Modelos GARCH para Séries Temporais Univariadas de Demanda de Energia Elétrica para Consumidores Livres em Regime de Curto Prazo.”** – Universidade Federal de Itajubá, 2005.

CORSINI, F. P., **“Dinâmica e Previsão de Preços de Commodities Agrícolas com Filtro de Kalman.”** – EP/PRO, 2008.

ENDERS, W. **“Applied Econometric Time Series.”** John Wiley & Sons, 1995.

EVANS, J., OLSON, D., **“Introduction to Simulation and Risk Analysis.”** – Prentice Hall, 1998.

GELETU, A., **“Solving Optimization Problems Using Matlab Optimization Toolbox – a Tutorial.”** – Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften, 2007.

GITMAN, L. J. **“Princípios da Administração Financeira.”** Pearson Addison Wesley, 2004.

GLASSERMAN, P. **“Monte Carlo Methods in Financial Engineering.”** Springer, 2003.

GUASTAROBA, G; MANSINI, R and SPERANZA, M. **“On the Effectiveness of Scenario Generation Techniques in Single-Period Portfolio Optimization.”** European Journal of Operation Research, 2007.

HULL, J. C. **“Fundamentos dos Mercados Futuros e de Opções.”** BM&F, 2005.

HULL, J. C., **“Options, Futures and Others Derivatives.”** – New Jersey: Prentice Hall, 1997.

JORION, P., **“Value at Risk: A Nova Fonte de Referência para a Gestão de Risco Financeiro.”** – BM&F, 2003.

LEWIS, N. C., **“Market Risk Modelling: Applied Statistical Methods for Practicioners.”** – London: Risk Water Group Ltd, 2003.

LIEN, D and Yang, L. **“Asymmetric Effect of Basis on Dynamic Future Hedging: Empirical Evidence from Commodity Markets.”** Journal of Banking & Finance, 2007.

LIU, M. C., Uryasev, S., **“Conditional Value-at-Risk Model for Optimizing Crop Insurance Under Climate Variability”** – University of Florida, 2006.

LUENBERGER, D. G. **“Investment Science.”** Oxford University Press, 1997.

MAKRIDAKIS, S. **“Forecasting: methods and applications.”** New York: John Wiley & Sons, 1998.

MANKIW, N. G., **“Introdução à Economia.”** – 3.ed São Paulo: Thomson, 2005.

MARKOWITZ, H. M., **“Portfolio Selection.”** – Journal of Finance, 1952.

MATHWORKS. **“GARCH Toolbox User’s Guide.”** Version 1, 2000.

MORETTIN, P, A. e TOLOI, C, M, C. **“Análise de Séries Temporais.”** Edgard Blücher, 2004.

PARK, T. H., SWITZER, L. N., **“Bivariate GARCH Estimation of the Optimal Hedge Ratios for Stock Index Futures: A Note.”** – Journal of Future Markets, 1995.

PINTO, R., **“Gerência Agrícola na Agroindústria Canavieira.”** – IDEA, 2006.

ROCKAFELLAR, R. T. and Uryasev, S. **“Optimization for Conditional Value-at-Risk.”** Journal of Risk, Vol. 2, 2000.

RUSSI, B e RIBEIRO, C. **“Otimização Multiperíodo de Carteiras de Investimentos Utilizando a Técnica de Geração de Árvores de Cenários.”** EP/PRO, 2005.

SEN, A. **“Regression Analysis: Theory, Methods and Applications.”** – Springer, 1990.

SILVA, G, S. **“Novos Instrumentos de Financiamento do Agronegócio Brasileiro e uma Análise das Alternativas de Investimentos para o CDA/WA.”** Dissertação (Mestrado em Economia Aplicada) – ESALQ, 2006.

SOSNOSKY, A e RIBEIRO, C. **“Otimização na Gestão Financeira de Usinas Sucro Alcooleiras.”** EP/PRO, 2007.

VINOD, H. D. **“Recent Advances in Regression Methods.”** – Dekker, 1981.

WINSTON, W, L. **“Operations Research.”** Thomson, 2004.

ZYLSTRA, M., KILMER, R. **“Risk Balancing Strategies in the Florida Dairy Industry: an application of conditional value at risk.”** – American Agricultural Economics, 2003.

9. ANEXOS

A. Modelo de Markowitz

O modelo de Markowitz apresenta a composição das carteiras que possuem a menor variância para um dado nível de retorno. Dessa forma, ele pode ser formulado como um modelo em que a sua função objetivo minimiza a variância da carteira:

$$\text{minimizar: } \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^n w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{ij} \quad (\text{A.1})$$

$$\text{sujeito à: } \sum_{i=1}^n w_i \cdot \bar{r}_i = \bar{r} \quad (\text{A.2})$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (\text{A.3})$$

onde:

n : é o número de ativos na carteira;

$i, j = 1, 2, \dots, n$;

w_i : é o peso do ativo i na carteira;

σ_{ij} : é a covariância entre os ativos i e j ;

\bar{r}_i : é a taxa de retorno esperado do ativo i ;

O modelo de Markowitz é adequado apenas para um período único de análise, ele se baseia na correlação negativa (*trade-off*) entre risco e retorno. É possível obter a solução do modelo através dos múltiplos de Lagrange, λ e μ , onde a função Lagrangiana é dada por:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^n w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{ij} - \lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^n w_i \cdot \bar{r}_i - \bar{r} \right) - \mu \cdot \left(\sum_{i=1}^n w_i - 1 \right) \quad (\text{A.4})$$

Calcula-se a primeira diferença da Lagrangiana para cada w_i , e iguala-se a derivada a zero. No caso de se trabalhar com dois ativos, as equações diferenciais se dão por:

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = \frac{1}{2} (2\sigma_1^2 w_1 + \sigma_{12} w_2 + \sigma_{12} w_2) - \lambda \bar{r}_1 - \mu \quad (\text{A.5a})$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = \frac{1}{2} (\sigma_{12} w_1 + \sigma_{21} w_1 + 2\sigma_2^2 w_2) - \lambda \bar{r}_2 - \mu \quad (\text{A.5b})$$

Usando o fato de que $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, e igualando ambas as equações a zero, obtém-se:

$$\sigma_1^2 w_1 + \sigma_{12} w_2 - \lambda \bar{r}_1 - \mu = 0 \quad (\text{A.6a})$$

$$\sigma_{12} w_1 + \sigma_2^2 w_2 - \lambda \bar{r}_2 - \mu = 0 \quad (\text{A.6b})$$

Dessa forma, recai-se em um sistema linear de quatro equações, com quatro incógnitas w_1 , w_2 , λ e μ .

B. Quasi-Newton

O método Quasi-Newton é baseado no método de Newton para se achar pontos estacionários de uma função, onde o seu gradiente é zero, ou seja, os pontos de máximo e mínimo da função. Seja f caracterizado como:

$$N_f(\alpha) = \{x \in M \mid f(x) \leq \alpha\} \quad (\text{B.1})$$

o gradiente de f é dado por:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) \right)_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Para cada passo iterativo $k \in \{1, 2, \dots\}$, o método determina a direção de busca d^k através da equação:

$$d^k = -H_k^{-1} \nabla f(x^k) \quad (\text{B.3})$$

onde H_k é uma matriz simétrica positiva que possui a seguinte propriedade:

$$H_k(x^k - x^{k-1}) = \nabla f(x^k) - \nabla f(x^{k-1}) \quad (\text{B.4})$$

A matriz H_{k+1} é obtida através da fórmula de Broyde-Fletcher-Goldfarb-Shanon (BFGS):

$$H_{k+1} = H_k - \frac{(H_k \cdot s^k) \cdot (H_k \cdot s^k)^T}{(s^k)^T \cdot H_k \cdot s^k} + \frac{q^k \cdot (q^k)^T}{(q^k)^T \cdot s^k} \quad (\text{B.5})$$

onde:

$$s^k = x^{k+1} - x^k \quad (\text{B.6})$$

$$q^k = \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k) \quad (\text{B.7})$$

A direção de busca d^{k+1} é encontrada através de:

$$d^{k+1} = -H_{k+1}^{-1} \nabla f(x^k) \quad (\text{B.8})$$

Existem outros métodos para a determinação de d^{k+1} , como a fórmula de Davidon-Fletcher-Powell (DFP).

Em seguida é necessário determinar o comprimento do passo α_k , de forma que

$$f(x^k + \alpha_k \cdot x^k) = f(x^{k+1}) < f(x^k) \quad (\text{B.9})$$

Considerando $\varphi(\alpha) = f(x^k + \alpha \cdot d^k)$, é possível determinar o mínimo de φ satisfazendo a condição $f(x^{k+1}) < f(x^k)$. Para a resolução da minimização, o MatLab utiliza funções de interpolação quadrática para se chegar a um valor aproximado do mínimo da função.

C. Método da Máxima Verossimilhança

O método de máxima verossimilhança consiste em maximizar a função densidade de probabilidade (fdp) em relação aos efeitos fixos e aos componentes de variância dos efeitos aleatórios do modelo. Existem alguns problemas no uso deste estimador devido ao fato deste não considerar a perda de graus de liberdade resultantes da estimativa dos efeitos fixos do modelo.

Esse método fornece estimativas para os parâmetros que maximizam a probabilidade de obter o conjunto observado de dados. Assim, uma amostra aleatória (y_1, y_2, \dots, y_n) retirada de uma população com uma função de densidade de probabilidade $f(y, \theta)$, a qual depende do vetor de parâmetro θ , tem uma função de densidade de probabilidade conjunta dada por:

$$\prod_{i=1}^n f(y_i, \theta) = f(y_1, \theta) \cdot f(y_2, \theta) \cdot \dots \cdot f(y_n, \theta) \quad (C.1)$$

onde θ é um vetor de parâmetros fixos e y_i é uma variável aleatória.

Note que, antes da retirada da amostra, cada observação é uma variável aleatória cuja fdp é igual à função densidade de probabilidade da população. A média e a variância de cada observação a ser retirada são iguais à média e variância da população em questão. É nesse sentido que dizemos que na fdp conjunta, antes de retirada a amostra, θ é fixo e y_i é variável.

Um vez que tenha sido obtida uma amostra específica, y_i torna-se fixo e a fdp conjunta pode ser reinterpretada como sendo uma função do vetor de parâmetro θ , que se tornam variáveis. Para uma dada amostra (y_1, y_2, \dots, y_n) , a fdp conjunta, vista como função do vetor de parâmetros desconhecidos θ , é denominada função de verossimilhança.

Os problemas relacionados com econometria são, para uma dada amostra, obter-se uma estimativa dos valores dos parâmetros populacionais desconhecidos. Uma possível solução do problema de estimativa é escolher o vetor θ que maximize a probabilidade de obtenção da amostra específica (y_1, y_2, \dots, y_n) , ou seja, deseja-se definir o vetor θ que maximize a função de verossimilhança.

Tem-se, portanto uma função de verossimilhança $L(y, \theta)$, onde y é fixo e θ é a variável, e o problema consiste em obter o vetor θ que maximiza essa função. O estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$ é o vetor que faz

$$L(\hat{\theta}, y) > L(\hat{\theta}, y) \quad (C.2)$$

onde $\hat{\theta}$ é qualquer outro estimador de θ .

Para a implementação desse procedimento, basta igualar a zero as derivadas parciais da função de verossimilhança e achar o vetor θ que resolva o conjunto de equações. Na maioria dos casos, trabalha-se com o logaritmo natural da função de verossimilhança ($\ln L$), pois maximizar o logaritmo natural de uma função é mais simples e produz os mesmos resultados da maximização da função original.

D. Fatoração de Cholesky

A matriz de Cholesky pode ser obtida através da decomposição da matriz de variância-covariância A . Como a matriz A é simétrica, pode-se decompô-la da seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB} \\ \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB} & \sigma_B^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{11} & I_{21} \\ 0 & I_{22} \end{pmatrix} = L \cdot L' \quad (\text{D.1})$$

onde L é obtido resolvendo-se a equação acima:

$$L = \begin{pmatrix} \sigma_A & 0 \\ \sigma_B \cdot \rho_{AB} & \sigma_B \cdot \sqrt{1 - \rho_{AB}^2} \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$