

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Alcançando altas acelerações  
usando manipuladores paralelos planares:  
Avaliação da contribuição da redundância cinemática no  
desempenho dinâmico

Aluno: João Cavalcanti Santos

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dra. Máira Martins da Silva

SÃO CARLOS

2014

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

C376a Cavalcanti Santos, João  
Alcançando altas acelerações usando manipuladores  
paralelos planares: Avaliação da contribuição da  
redundância cinemática no desempenho dinâmico / João  
Cavalcanti Santos; orientadora Máira Martins da Silva.  
São Carlos, 2014.

Monografia (Graduação em Engenharia Mecânica) --  
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de  
São Paulo, 2014.

1. Robótica paralela. 2. Redundância cinemática. 3.  
Modelo dinâmico. I. Título.

## FOLHA DE AVALIAÇÃO

**Candidato:** JOÃO CAVALCANTI SANTOS

**Título:** "Alcançando altas acelerações usando manipuladores paralelos planares:  
Avaliação da contribuição da redundância cinemática no desempenho dinâmico"

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Escola de Engenharia de São Carlos da  
Universidade de São Paulo  
Curso de Engenharia Mecânica.

### BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Paulo Sérgio Varoto

Nota atribuída: 10,0 ( DEZ )



(assinatura)

MSc. João Vitor de Carvalho Fontes

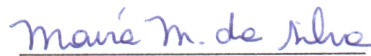
Nota atribuída: 10,0 ( DEZ )



(assinatura)

Profª Drª Máira Martins da Silva (Orientadora)

Nota atribuída: 10,0 ( DEZ )



(assinatura)

Média: 10,0 ( DEZ )

Resultado: APROVADO

Data: 04/12/2014

Este trabalho tem condições de ser hospedado no Portal Digital da Biblioteca da EESC

SIM  NÃO  Visto do orientador Máira M. de Silva

## **DEDICATÓRIA**

À Fernanda. Meu apoio, minha motivação.

## **AGRADECIMENTOS**

À família pelo grande ensinamento e incentivo;

À Profª Drª Maira Martins da Silva pela oportunidade, orientação e prestatividade;

Ao Prof Dr Washington Luiz Marar pela iniciação no campo da pesquisa;

À Universidade de São Paulo pela infraestrutura;

Ao CNPq pelo apoio.

## RESUMO

Santos, J. C. **Alcançando altas acelerações usando manipuladores paralelos planares: Avaliação da contribuição da redundância cinemática no desempenho dinâmico.**

Dissertação de trabalho de conclusão de curso, Escola de engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2014

A arquitetura paralela vem se estabelecendo como um conceito promissor para o aperfeiçoamento do desempenho de manipuladores. Ainda assim, as contrapartidas impostas em configurações simples limitam excessivamente sua aplicação. Objetiva-se com este estudo analisar a contribuição da redundância cinemática na supressão destas contrapartidas e otimização das qualidades dinâmicas comparando simulações de versões redundantes com não redundantes. Foram desenvolvidos modelos cinemáticos e dinâmicos das configurações  $3RRR$  e  $3PRRR$ , proporcionando instrumentos para avaliação das exigências dos atuadores para diferentes percursos e habilidade de reconfiguração para evitar singularidades. Como conclusão, são apresentados dados numéricos contrastantes entre robôs planares não redundantes, redundantes com otimização *off-line* (atuadores suplementares estáticos durante a movimentação) e com otimização *on-line*.

**Palavras-chave:** Robótica paralela; redundância cinemática; modelo dinâmico.

## ABSTRACT

Santos, J. C. **Reaching high accelerations using planar parallel manipulators: kinematic redundancy performance evaluation.** Term paper, Escola de engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2014.

The parallel architecture has been established as a promising concept able to enhance manipulators dynamic performance. Nevertheless, trivial configurations present adverse issues restricting practical applications. Our aim was to evaluate the contribution achieved by the usage of kinematic redundancy seeking a higher dynamic efficiency and avoiding these adverse issues. Kinematic and dynamic models of  $3\underline{R}RR$  and  $3\underline{P}RR$  have been developed, making possible the prediction of actuators charges and the test of the desired ability of reconfiguration when a singularity is faced. In summary, numerical data is presented in an effort to contrast three different possibilities: non-redundant, redundant under *off-line* optimization and under *on-line* optimization (with static and mobile spare actuators).

**Keywords:** Parallel manipulators; kinematic redundancy; dynamic model.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Exemplos de Redundância.....	12
Figura 2: Par2.....	13
Figura 3: Manipulador (P)RRR+2RRR.....	13
Figura 4: Diferentes instâncias de redundância cinemática.....	15
Figura 5: Robô Hexápode.....	18
Figura 6: Configurações possíveis de manipuladores planares.....	20
Figura 7: Representação do 3RRR.....	22
Figura 8: 3RPR.....	25
Figura 9: Reconfiguração do manipulador planar (P)RRR+2RRR.....	31
Figura 10: 3RRR.....	32
Figura 11: Representação da animação obtida.....	36
Figura 12: Ângulos dos atuadores.....	36
Figura 13: Torques dos atuadores.....	41
Figura 14: Torques dos atuadores.....	42
Figura 15: 3PRRR.....	43
Figura 16: Corpo para estudo dos trabalhos virtuais.....	48
Figura 17: Gráficos de trajetória 1.....	55
Figura 18: Posições inicial e final para a trajetória 1.....	56
Figura 19: Torques com otimização off-line para a trajetória 1.....	56
Figura 20: Torques sem otimização para a trajetória 1.....	57
Figura 21: Gráficos de trajetória 2.....	58
Figura 22: Posições inicial e final para a trajetória 2.....	58
Figura 23: Torques com otimização off-line para a trajetória 2.....	59
Figura 24: Torques sem otimização para a trajetória 2.....	59
Figura 25: Posições inicial e final para a trajetória 1.....	61
Figura 26: Posições dos atuadores lineares.....	61
Figura 27: Solicitações com otimização para a trajetória 1.....	62
Figura 28: Posições com otimização on-line.....	62
Figura 29: Posições.....	63
Figura 30: Solicitações com otimização para a trajetória 2.....	63
Figura 31: Erro da Jacobiana.....	64
Figura 32: Erro na conservação de energia.....	65
Figura 33: Dados otimização instante-a-instante.....	68
Figura 34: Limitações otimização instante-a-instante.....	68

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>11</b>
<b>2. OBJETIVOS.....</b>	<b>15</b>
<b>3. METODOLOGIA.....</b>	<b>17</b>
<b>3.1. CARACTERÍSTICAS E DEFINIÇÕES.....</b>	<b>17</b>
<b>3.2. PROJETO INICIAL.....</b>	<b>19</b>
<b>3.3. CINEMÁTICA INVERSA.....</b>	<b>21</b>
<b>3.4. CINEMÁTICA DIRETA.....</b>	<b>23</b>
<b>3.5. ANÁLISE DE VELOCIDADE, ACELERAÇÃO E PRECISÃO.....</b>	<b>27</b>
<b>3.6. SINGULARIDADES.....</b>	<b>29</b>
<b>4. RESULTADOS.....</b>	<b>32</b>
<b>4.1. MODELAGEM DO 3PRRR.....</b>	<b>32</b>
4.1.1. CINEMÁTICA INVERSA.....	32
4.1.2. MATRIZ JACOBIANA.....	36
4.1.3. VELOCIDADES PARCIAIS.....	37
4.1.4. ACELERAÇÕES.....	39
4.1.5. MODELAGEM DINÂMICA.....	39
<b>4.2. RELAÇÕES DO 3PRRR.....</b>	<b>43</b>
4.2.1. CINEMÁTICA INVERSA.....	44
4.2.2. MATRIZ JACOBIANA.....	46
4.2.3. CINEMÁTICA DIRETA.....	47
4.2.4. EXTENSÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS.....	47
4.2.5. VELOCIDADES PARCIAIS.....	49
4.2.6. FORÇAS E MOMENTOS DE INÉRCIA.....	52
4.2.7. MODELAGEM DINÂMICA.....	52
<b>4.3. SIMULAÇÕES DO 3PRRR.....</b>	<b>53</b>
4.3.1. OTIMIZAÇÃO <i>OFF-LINE</i> .....	53
4.3.2. OTIMIZAÇÃO <i>ON-LINE</i> .....	59
<b>5. CONCLUSÕES.....</b>	<b>70</b>
<b>6. REFERÊNCIAS.....</b>	<b>71</b>

## 1. INTRODUÇÃO

A crescente relevância acadêmica e industrial alcançada pelo projeto e estudo de robôs paralelos (PKM, *Parallel Kinematic Manipulators*) é plenamente justificada pelos predicados, já hoje tangidos na sua aplicação em soluções mecânicas automatizadas. Destas qualidades, destacamos a alta relação capacidade de carga por massa da máquina, elevadas acelerações, rigidez superior e precisão melhorada.

A definição de robótica paralela especifica a presença de cadeia cinemática fechada, ou seja, em tais robôs cada *link* é ligado a, pelo menos, outros dois (considerando base e plataforma como *links*). Daí nascem as interessantes características já citadas que não são usuais aos tradicionais robôs seriais.

Mas em conjunto com estas, nos deparamos com contrapartidas de difícil análise e solução: baixa relação de área de trabalho com espaço necessário para montagem do manipulador, presença de frequentes singularidades cinemáticas, picos de carregamento nos componentes (principalmente em posições próximas às singularidades) e necessidade de estudos mais intensos no seu projeto para a aplicação numa dada tarefa.

Frente a esta miscelânea de características desejadas e indesejadas, nos interessamos em impor redundância a este instrumento. Redundância na robótica paralela recebeu diversas definições na literatura desde o seu surgimento, mas já há um consenso de que pode ser dividida em três famílias:

- **Redundância de medidas:** adiciona-se em um robô não redundante, sensores às juntas de forma que o número total seja maior que os graus de liberdade da plataforma (*end-effector*).
- **Redundância cinemática:** para uma dada posição, orientação e velocidade do efetuador, existe um número infinito de velocidades correspondentes nas juntas. O que representa a adição de atuadores a cadeias já existentes em robôs não redundantes. Proporciona maior área de trabalho e evita singularidades.
- **Redundância de atuação:** para uma dada posição e orientação do efetuador e para uma dada força atuando no efetuador, existem um número infinito de torques e forças que podem ser exercidos pelos atuadores, situação não obtida na análise cinemática.

Esta propriedade é atingida com pernas extras que proporcionam restrição dinâmica maior. É eficiente para evitar singularidades.

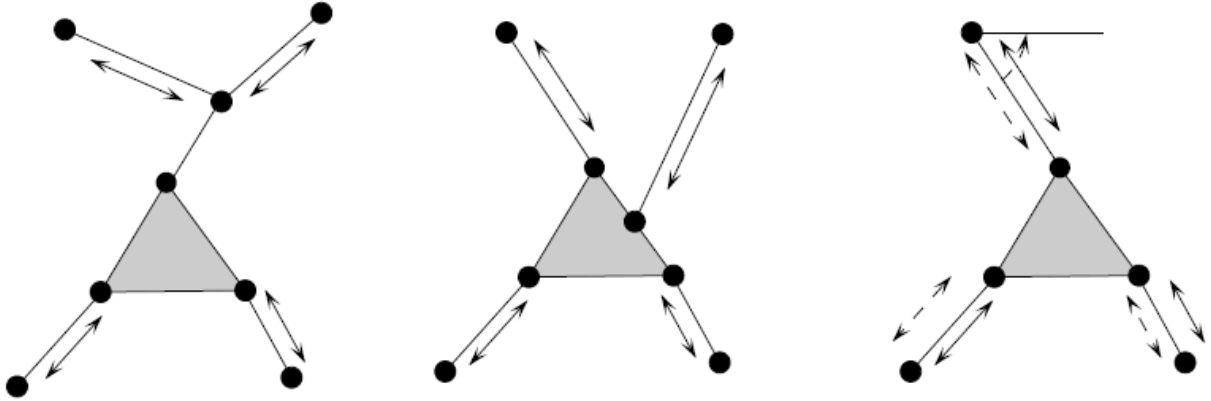


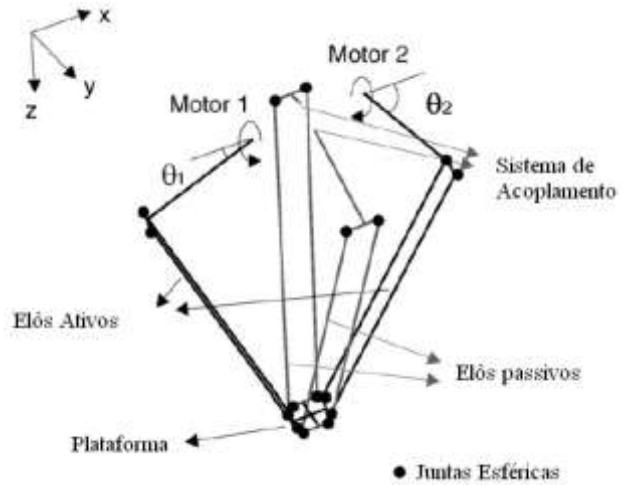
Figura 1: Exemplos de redundância cinemática, de atuação e de medidas.

Neste projeto, nos dedicamos à redundância cinemática. Com este recurso as qualidades supracitadas foram otimizadas (principalmente a aptidão em produzir altas acelerações), bem como reduzir diversas contrapartidas intrínsecas de PKMs (existência de singularidades no espaço de trabalho, picos de torque nos componentes e baixa área de trabalho).

Atualmente, esta não é uma tarefa trivial. Por exemplo, a corroboração da redundância para o alcance de acelerações superiores (foco da pesquisa), não tem confirmação garantida, apesar de ser intuitivamente óbvia. Isto porque ao se somar atuadores numa cadeia, ainda que representem torques e forças extras aplicados de formas estratégicas, também implicam em uma inércia aumentada. Assim, cabe um estudo detalhado de otimização para a avaliação desta hipótese.



(a)



(b)

Figura 2 (a) Par2: robô de cinemática paralela projetado e desenvolvido pela Fundación Fatronik e pelo CNRS e (b) Esquema de atuação do robô Par2

Como amostra concreta da potencialidade dos estudos nesta área, temos os já construídos manipuladores Par2 (**Figura 2**), robô de 2 graus de liberdade que alcança acelerações de até  $400 \text{ m/s}^2$ , sendo o mais rápido disponível no mercado atualmente, e o PKM planar apresentado na **Figura 3**, que possui comprovada eficácia em reconfigurar e, portanto, otimizar a sua geometria de acordo com vários critérios de desempenho e estratégias de controle de movimento.



Figura 3 Manipulador planar (P)RRR+2RRR construído pelo Instituto de Sistemas Mecatrônicas na Universidade de Leibniz em Hanover na Alemanha

Destaca-se ainda, detalhes de grande complexidade mas não menor relevância neste estudo, tais como a avaliação de vibrações causadas pelas altas acelerações, avaliação da precisão, características do espaço de trabalho, e calibração.

## 2. OBJETIVOS

O foco da pesquisa é analisar a potencialidade de aumento no desempenho dinâmico de robôs paralelos com o auxílio de redundância cinemática.

Nos dedicamos à modelagem cinemática e dinâmica para que pudéssemos prever seu comportamento numa tarefa qualquer. Estes modelos descritivos junto de métricas consistentes para quantificação do desempenho obtido, nos permite comparar diferentes configurações e suas capacidades de trabalho, objetivo desta pesquisa.

A abordagem foi centrada primeiramente na disposição planar  $3R\bar{R}R$  com três cadeias idênticas, nas quais têm-se três juntas rotacionais sendo a primeira ativa. Posteriormente, estudou-se a configuração  $3P\bar{R}R$ , onde vemos que a adição de um motor linear em cada base de cadeia disponibiliza grande versatilidade e alto poder de reposicionamento em comparação ao tradicional  $3R\bar{R}R$  não redundante. Pela **Figura 4** vemos as nuances entre os dois modelos detalhados.

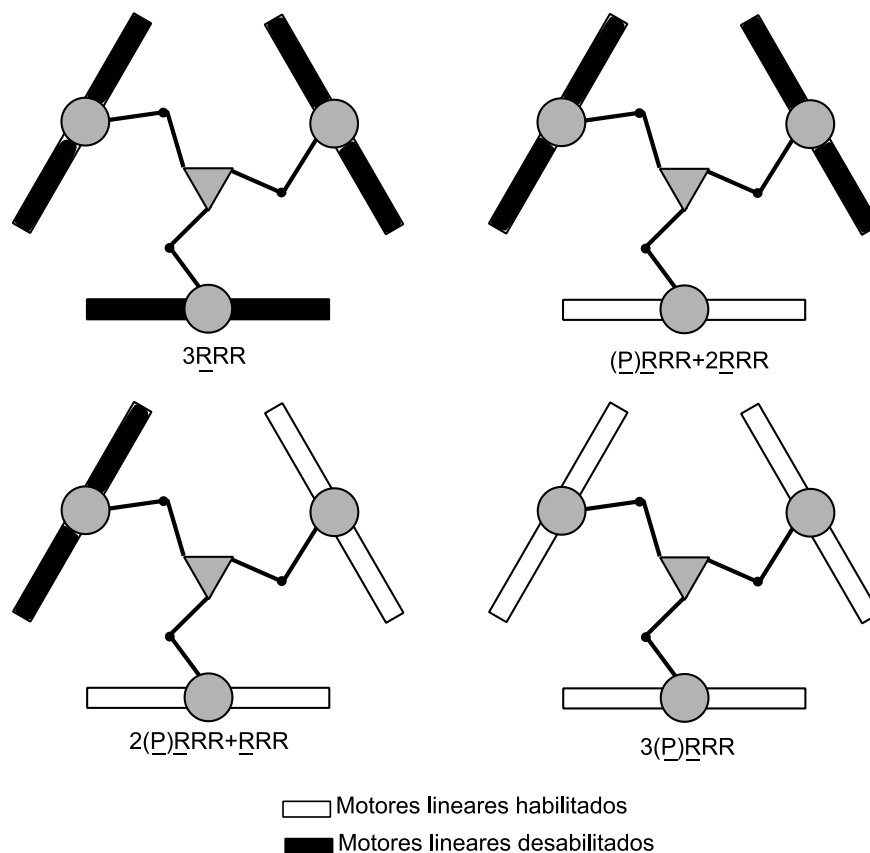


Figura 4 Versatilidade do manipulador robótico: configurações não-redundantes e redundantes

Pode-se ver que a pesquisa visa um caso de alta complexidade, proporcionando liberdade de simplificação para uma situação mais modesta na existência de necessidade ou conveniência, isso sem complementos nos conceitos e modelos.

Sumarizando, os objetivos desse trabalho são:

- Obter modelos cinemáticos e dinâmicos do manipulador paralelo planar não-redundante  $3\underline{R}RR$
- Obter modelos cinemáticos e dinâmicos do manipulador paralelo planar redundante  $3\underline{P}RRR$
- Verificar estratégias para a reconfiguração do manipulador redundante: (*offline*) cálculo do melhor posicionamento do atuador redundante para uma dada trajetória e (*online*) cálculo do melhor movimento do atuador redundante para uma dada trajetória.
- Comparar os manipuladores e as estratégias de reconfiguração com o objetivo de concluir se a redundância pode ser uma boa solução para manipuladores de alto desempenho.

### 3. METODOLOGIA

Num primeiro momento, foi necessário o estudo dos conceitos básicos relativos ao estudo da robótica paralela em geral. Eles são relacionados principalmente ao conteúdo absorvido da literatura, sendo este o procedimento previsto para esta primeira fase de trabalho. Simultaneamente foram feitas interpretações dirigidas aos robôs focos da pesquisa (**Figura 4**).

#### 3.1 CARACTERÍSTICAS E DEFINIÇÕES

A definição mais geral de um robô paralelo afirma que este representa em si uma cadeia cinemática fechada (cada corpo rígido é ligado duas juntas ao menos), concretizada por uma plataforma (*end-effector*) ligada à base inercial através de múltiplas cadeias independentes.

Além desta convenção primária, são declarados outros conceitos como sua consequência e que delimitam normas para viabilizar o uso do mecanismo:

- haverão, no mínimo, duas cadeias ligantes e cada uma delas deve possuir ao menos uma junta ativa e um sensor de posição, sejam estes lineares ou angulares;
- o número de juntas ativas (atuadores) é igual ou maior que o de graus de liberdade do *end-effector*. Esta condição define se há redundância (tema primordial deste trabalho) ou não;
- estando os atuadores travados, a plataforma deve ter seus graus de liberdade anulados, ou seja, sua posição nominal será mantida independente do carregamento aplicado sobre a máquina.
- como já detalhado, existem diversas definições de redundância na robótica paralela, mas neste trabalho será aplicada apenas a redundância cinemática, caso no qual a quantidade de atuadores em ao menos uma das cadeias é maior que o necessário para produzir os graus de liberdade (G.D.L.) da plataforma.

Desta forma, vê-se que um mecanismo com as especificidades supracitadas obtém qualidades práticas altamente desejadas se comparadas com os tradicionais robôs de arquitetura serial:

- carregamento dividido em cada uma das cadeias ligantes;
- rigidez melhorada devido à configuração espacial conveniente (em alguns casos o PKM travado se assemelha a uma treliça (**Figura 5**));

- a complacência passiva (deslocamento da cadeia em resposta a carregamentos) é reduzida;
- carga inercial móvel reduzida, vez que (exceto na presença de redundância) não existe necessidade de um atuador mover outro, apenas *links*, juntas e plataforma representam partes móveis.



Figura 5: O robô hexápode, plataforma de Stewart, que, quando estático, tem links agindo como elementos de treliça.

Há ainda uma classificação específica para manipuladores montados com a quantidade de cadeias estritamente igual ao número de graus de liberdade da plataforma (*Fully Parallel Robots*). Para formalizar matematicamente esta qualidade, é possível partir da equação de Grübler, chamar de  $p$  o número de cadeias do mecanismo,  $n$  o número de corpos rígidos em uma única cadeia (sem considerar a base e *end-effector*), e partindo de que  $p$  se iguala ao número de graus de liberdade do mecanismo, chegaremos, no caso planar, a

$$p(3 - n) = 3$$

E no espacial

$$p(6 - n) = 6$$

Mas estas equações não garantem que o número de cadeias seja igual ao de graus de liberdade em robôs com redundância cinemática, pois nestes o sistema tem mais graus de liberdade que

o *end-effector*, fazendo a dedução descrita perder a consistência no momento em que igualamos o número de G.D.L. da equação de Grubler (referente a todo o mecanismo) com o exclusivo da plataforma.

Foi introduzido também, o índice de paralelismo do mecanismo  $d = \frac{k}{l-1}$ , dado em função da diferença entre a quantidade de juntas de um grau de liberdade  $k$ , e o número de G.D.L. da plataforma  $l$ .

E por fim foi deduzido através da equação de Grübler que um robô planar enquadrado na classe de *Fully Parallel Manipulator* não redundante com três graus de liberdade deve possuir três cadeias com dois corpos rígidos cada, totalizando-se oito corpos (contando com base e plataforma) e nove juntas de um G.D.L., sendo três delas (uma em cada cadeia) ativas.

### 3.2 PROJETO INICIAL

O primeiro passo no projeto de um robô paralelo é formalizar as possíveis configurações de cadeias capazes de estabelecer as características cinemáticas desejadas ao *end-effector*. Este procedimento, diferentemente do relacionado com a robótica serial, pode ser de grande complexidade em consequência da vasta gama de possibilidades e imprevisibilidade na ausência de abordagens mais profundas das possíveis propriedades cinemáticas e dinâmicas para uma dada configuração do robô.

Uma metodologia se faz necessária para que este encargo não se submeta à simples intuição do projetista, sendo assim, são tratadas três formas de se objetivar as configurações aplicáveis.

A forma mais intuitiva e primária é a gráfica, na qual *links* são representados por arestas e juntas por vértices. O que antes era nada mais que uma forma de projetos já idealizados serem representados, se tornou uma ferramenta de manipulação poderosa, principalmente com auxílio computacional.

Outro meio é lançar mão do formalismo matemático que acompanha o conjunto  $\{D\}$  de deslocamentos. Tal possui dimensão seis, clarifica qualquer movimentação de um corpo rígido no espaço, e se divide em subgrupos de deslocamentos com especificidades distintas. Este recurso nos possibilita classificar a movimentação desejada em um subgrupo e implicar que este seja igual ao da intersecção dos gerados pelas cadeias.

E por fim é possível fazer uso da interessante reciprocidade entre velocidade e carregamento em mecanismos. Esta é a denominação dada ao fato dos vetores de seis dimensões representantes das velocidades (translacional e angular) e de carregamentos (força resultante e torque) serem perpendiculares (têm produto escalar nulo), sendo isto consequência da restrição sofrida pela carga transmitida pela junta. Assim, através das velocidades desejadas, encontramos os mecanismos hábeis de produzir o carregamento recíproco.

Como já foi descrito, no caso de robôs planares não redundantes de três G.D.L. (dois translacionais e um rotacional), deveremos ter uma plataforma ligada à base por três cadeias, tendo cada uma dela dois corpos rígidos (*links*) e três juntas (uma delas ativa).

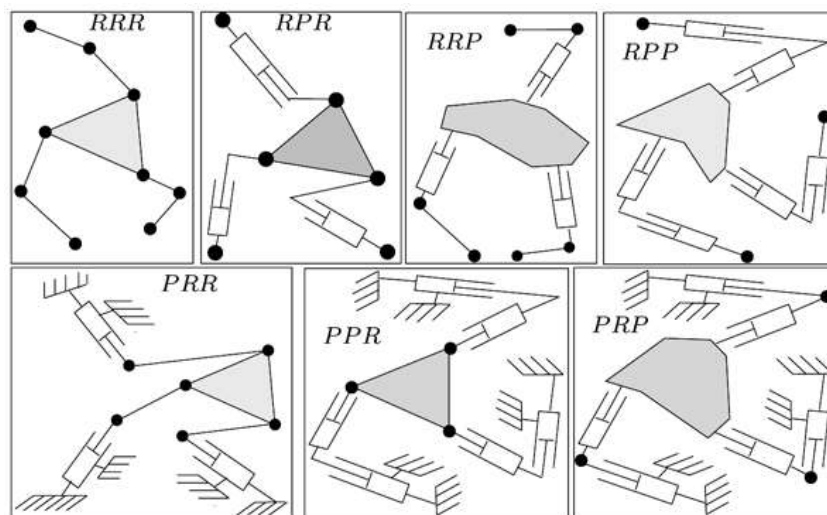


Figura 6 As sete configurações possíveis para manipuladores planares de três graus de liberdade.

Sabendo que no caso planar são aplicáveis dois tipos de juntas: de revolução e prismática, denotadas por  $R$  e  $P$ , deduz-se que os casos possíveis para o manipulador desejado serão combinações usando-as em trios. Usando um dos métodos descritos, ou até intuitivamente, vê-se que a única restrição existente é para a configuração  $3PPP$ , ou seja, um mecanismo de três cadeias com três juntas prismáticas cada. Isto porque tais cadeias, se tiverem alguma mobilidade, alcançam apenas dois graus translacionais no plano, sendo assim redundantes. Têm-se as então praticáveis os casos  $RRR$ ,  $RRP$ ,  $RPR$ ,  $PRR$ ,  $RPP$ ,  $PRP$  e  $PPR$  (**Figura 6**).

Nota-se que sendo ativa qualquer uma das juntas, as características desejadas já são validadas, mas é recomendado que esta seja instalada na mais próxima da base, pois caso contrário a inércia do mecanismo é aumentada.

### 3.3 CINEMÁTICA INVERSA

Nesta seção serão detalhados os métodos responsáveis pelo cálculo das posições das juntas a partir de uma dada posição da plataforma. Este é o primeiro passo do estudo cinemático do mecanismo.

Mais detalhadamente, o objetivo é encontrar os vetores  $\Theta$  possuíntes das coordenadas das juntas que satisfazem uma possível montagem com um arranjo do *end-effector* descrita por um vetor  $\mathbf{X}$  dado. Como neste trabalho há interesse apenas na robótica planar,  $\mathbf{X}$  será de dimensão três, responsável por detalhar as posições angular e translacional de um dado ponto da plataforma. Será visto que este procedimento não requer grande complexidade de cálculos.

Para atingir o objetivo tomado, são formalizados dois métodos: o analítico e o geométrico.

#### ➤ Método Analítico

Denota-se como  $A$  e  $B$  os pontos de ligação de cada cadeia com base e *end-effector*, respectivamente. Como já de início são conhecidas as disposições tanto da plataforma como dos pontos em que as cadeias são ligadas à base é trivial a determinação dos vetores (três para o caso planar)  $\mathbf{AB}$ . Têm-se então

$$\mathbf{AB} = \mathbf{H}_1(\mathbf{X})$$

Mas também é possível obter um vetor para cada cadeia em função das posições das suas juntas e se necessário  $\mathbf{X}$  que tenha início em  $A$  e fim em  $B$ , ou seja, um segundo  $\mathbf{AB}$ :

$$\mathbf{AB} = \mathbf{H}_2(\mathbf{X}, \Theta)$$

Este método se constitui em igualar tais vetores, isto é, fazer

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{H}_2(\mathbf{X}, \Theta)$$

Nota-se que com tal processo, chegamos às posições de todas as juntas, não só as ativas.

Como exemplo, a aplicação será pormenorizada em um manipulador  $3RRR$  (**Figura 7**).

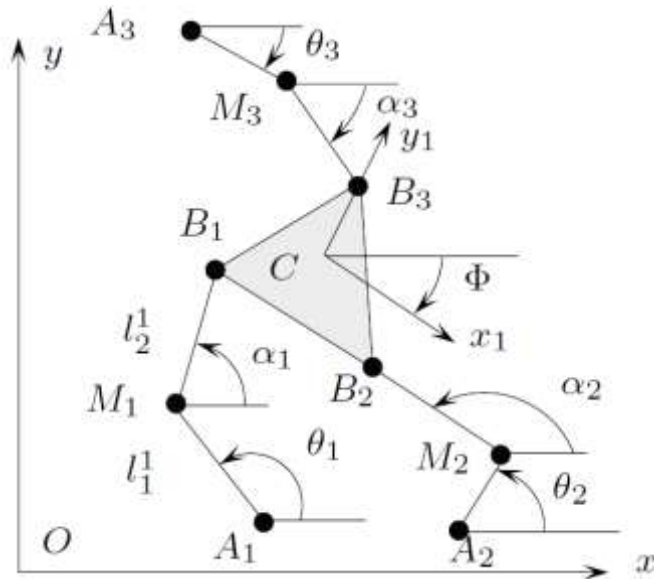


Figura 7: Representação de um robô 3RRR.

Sendo  $C = (x_c, y_c)$ , pode-se representar os vetores posição de juntas e plataforma por  $\Theta = (\alpha_i, \theta_i)$  e  $\mathbf{X} = (x_c, y_c, \Phi)$ . Seguindo o método descrito, é proposto que seja montada uma matriz de rotação  $\mathbf{R}$  em função de  $\Phi$  e explicitar

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC}(x_c, y_c) + \mathbf{R}(\Phi)\mathbf{CB}_r = \mathbf{H}_1(\mathbf{X})$$

Sendo estes vetores já conhecidos já que  $\mathbf{X}$  é dado. É preciso, então, construir a segunda expressão

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AM}_i(\theta_i) + \mathbf{M}_i\mathbf{B}_i(\alpha_i) = \mathbf{H}_2(\mathbf{X}, \Theta)$$

Vê-se que neste caso foi possível fazer  $\mathbf{H}_2$  independente de  $\mathbf{X}$ , permitindo a afirmação  $\mathbf{H}_2(\mathbf{X}, \Theta) = \mathbf{H}_2(\Theta)$ . E finalizando o processo a igualdade

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{H}_2(\Theta)$$

provem  $\Theta = (\alpha_i, \theta_i)$ , alcançando, então, a informação requerida.

### ➤ Método Geométrico

Neste processo, semelhantemente ao anterior, de início é preciso explicitar os limites de cada cadeia, os pontos  $A_i$  e  $B_i$ . Tendo isto feito, estas são virtualmente desligadas em uma de suas juntas (recomenda-se que numa primeira tentativa seja a central), dando origem a duas

cadeias abertas cada, uma fixa na base (ponto  $A_i$ ) e outra no ponto  $B_i$  de ligação com o *end-effector*.

Para cada uma das novas cadeias, os virtualmente diferentes pontos de desligamento são estudados a partir da movimentação das novas cadeias abertas de forma a se conhecer os dois espaços alcançados. Mas no mecanismo originário os pontos de desligamento são congruentes, portanto as montagens possíveis são as intersecções dos espaços obtidos. Essas serão, em geral, pontos finitos, explicitando que os  $\Theta$  que satisfazem a posição dada da plataforma são finitas. Caso não sejam, a posição  $X$  representa uma singularidade do manipulador (tema que será abordado numa seção futura).

No exemplo  $3RRR$  dado, este método conduz a um desligamento da segunda junta de revolução de cada cadeia que origina duas barras com liberdade de rotação e fixas uma na base e outra no *end-effector*. A avaliação dos pontos de desligamento nesta montagem virtual leva a duas circunferências, uma centrada no ponto  $A$  e outra em  $B$ . Assim, as posições das juntas são dadas nas intersecções.

### 3.4 CINEMÁTICA DIRETA

Esta seção se dedica à tarefa de determinar a posição da plataforma a partir de informações dadas das juntas ativas. É evidente a relevância deste estudo no controle cinemático do manipulador.

A determinação será obtida pela solução do sistema obtido da cinemática inversa. Mas agora a complexidade será maior, visto que as expressões transcendentais de cada cadeia serão interdependentes, diferentemente do estudo feito na seção anterior, onde os extremos de todas as cadeias eram conhecidos, fazendo a solução de cada cadeia ser desenvolvida isoladamente.

#### ➤ Intersecção de Curvas Algébricas

Neste momento é interessante relembrar o teorema de Bezout, que afirma que uma curva algébrica de ordem  $n$  intercepta outra de ordem  $m$  em geral em  $n.m$  pontos. Mas para aplicação plena deste teorema é necessário esclarecer o conceito de circularidade.

Manipulando-se uma curva plana escrita no espaço projetivo (obtido da transformação  $(x, y) \rightarrow (\frac{x}{w}, \frac{y}{w})$ ) pode-se obter a curva no sistema de coordenadas homogêneo, ou seja  $(x, y, w) = (\lambda x, \lambda y, \lambda w)$ . Assim, ao fazer  $w=0$ , a circularidade da curva é definida como a multiplicidade dos pontos  $(x, y, w) = (0, \pm i, 0)$  como solução, estudada a partir da fatoração por  $x^2+y^2$ .

Por exemplo, se o teorema de Bezout for aplicado a duas circunferências (ordem dois), deduz-se que estas se interceptariam em quatro pontos. Mas seguindo os passos descritos, vê-se que qualquer circunferência tem circularidade um, ou seja, intercepta os pontos  $(0, -i, 0)$  e  $(0, +i, 0)$  uma vez cada. Assim, é esclarecido que estes são dois dos quatro pontos coincidentes, restando apenas outros dois visíveis na representação geométrica.

Com estes conceitos pode-se prever o máximo número de intersecções entre curvas geradas por mecanismos, procedimento importante no estudo de possíveis montagens (o método geométrico apresentado na cinemática inversa é um exemplo).

### ➤ Solução do Manipulador 3RPR

Apoiando-se na denotação da **Figura 8**, têm-se como dados as localizações dos pontos  $A$ ,  $C$ , e  $F$ , os comprimentos das barras  $AB$ ,  $CD$  e  $EF$  (representam as informações dadas pelas juntas ativas), e a geometria do *end-effector* ( $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  e  $\theta$ , ângulo formado por  $l_2$  e  $l_3$ ). O intuito é obter as coordenadas translacionais de um dos pontos da plataforma (neste caso o ponto  $B$  foi o escolhido, com coordenadas  $(x, y)$ ) e orientação (ângulo  $\Phi$ ).

Usando um raciocínio semelhante ao da solução pelo método geométrico da cinemática inversa, vê-se que ao desvincular a junta  $E$  serão originados dois mecanismos: um quatro barras com corpo acoplador  $EDB$ , e uma barra fixa pela junta de revolução  $F$ . O quatro barras cria uma curva acopladora de grau seis pelo ponto de desligamento  $E$ , já a barra  $EF$  dá origem a uma circunferência em torno de  $F$ . Pelo teorema previamente descrito, deduz-se que existem 12 pontos de intersecção das duas curvas, mas considerando que a curva proveniente do quatro barras possui circularidade três, é concluído que seis destes doze são intersecções imaginárias. Portanto, haverá, no máximo, as restantes seis montagens diferentes que satisfaçam a configuração dada de juntas ativas.

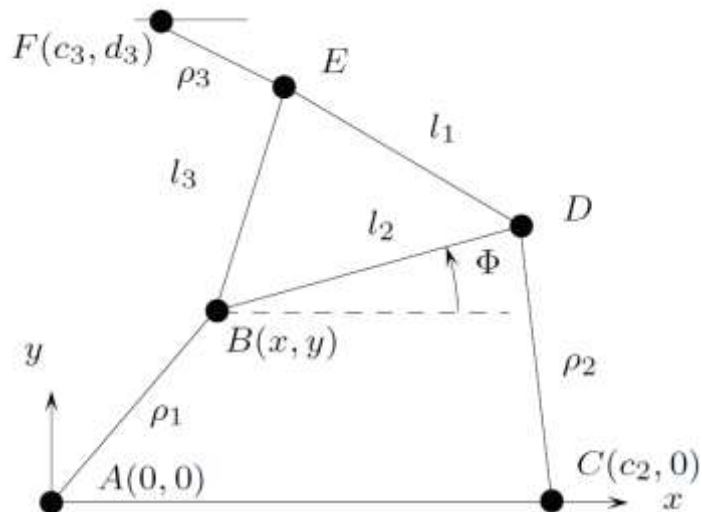


Figura 8: Manipulador 3RPR.

Após esta previsão, foi pormenorizada analiticamente a cinemática direta partindo do sistema de equações alcançado pela cinemática inversa e que após diversas manipulações matemáticas origina um polinômio de grau seis em  $\tan(\Phi/2)$ . Sendo assim, a partir desse, são encontradas até seis soluções (assim como o previsto) que levam a respectivos valores de  $(x,y)$ .

Observa-se que este procedimento é de grande semelhança com o necessário para o manipulador 3RRR, ou ainda para o pretendido por este projeto (**Figura 3**), já que as informações dadas pelos atuadores chegarão por geometria elementar aos mesmos dados iniciais desta dedução.

### ➤ Métodos Numéricos na Cinemática Inversa

Até agora não foi comentado como proceder na avaliação de qual dentre os resultados obtidos representa a real posição apreciada no momento de medição. Para isto, métodos numéricos iterativos representam instrumentos úteis, já que, além de solucionar com praticidade o polinômio obtido, descrevem convergência para a pose desejada se a estimativa inicial for próxima o bastante da solução real.

Este fato é usado principalmente aplicando-se informações de posições anteriores suficientemente próximas. Na prática, pode-se partir de uma pose anteriormente conhecida e efetuar repetidos cálculos durante a movimentação com um intervalo pequeno o bastante para que não haja convergência para fora do resultado real.

Os métodos estudados foram subdivisões do iterativo de Newton, que foi apresentado semelhantemente no curso de Cálculo Numérico, presente na grade curricular do bolsista. Ainda foi discutida a contraposição entre eficiência e tempo computacional entre cada uma das subdivisões, com esclarecimentos que métodos com ordem de convergência menor podem apresentar aplicabilidade maior, por descreverem maior rapidez de cálculo (tema delicado quando há intuito de aplicação em tempo real).

#### ➤ **Redundância de Medidas**

A adição de sensores que totalizem (junto com os já existentes) um número maior que o de G.D.L. do manipulador representa um forte instrumento de auxílio para procura de um resultado único na cinemática direta. Esses fornecem informações extras sobre a montagem real do mecanismo, eliminando soluções incoerentes.

Pode-se proceder com a redundância de medidas de duas formas: adicionando-se sensores angulares em juntas passivas pré-existentes, ou anexando uma cadeia passiva instrumentada de sensores lineares e/ou angulares ao mecanismo.

A versatilidade do uso de sensores em juntas pré-existentes é sempre desejada, já que a sua presença pouco afeta o funcionamento do robô. Diferentemente da anexação de uma cadeia passiva, visto que sua colocação deve ser bem planejada para que não haja interferência, afetando o espaço de trabalho.

Porém, os sensores lineares têm grande vantagem ao se considerar a precisão, pois os angulares propagam seu erro ao longo do comprimento do *link*. Portanto estas vantagens e contrapontos devem ser avaliados no projeto.

### **3.5 ANÁLISE DE VELOCIDADE, ACELERAÇÃO E PRECISÃO**

Na maioria das aplicações da robótica, são necessárias informações sobre a agilidade e destreza para a avaliação da rentabilidade na aplicação. Esta seção aborda tais temas, completando os estudos sobre a cinemática básica de robôs paralelos e aplicando convenientemente os conceitos obtidos para julgar sua precisão.

O primeiro intuito será associar a velocidade das juntas, mais especificamente as ativas  $\dot{\Theta}_a$ , com as velocidades translacionais e angulares do *end-effector* (descritas no vetor  $\dot{\mathbf{X}}$ ). Isto pode ser feito a partir do sistema de equações obtido da cinemática inversa

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{X}) - \mathbf{H}_2(\mathbf{X}, \Theta) = \mathbf{0}$$

Primeiramente é necessário escrevê-la em função apenas de  $\mathbf{X}$  e  $\Theta_a$ . No caso do manipulador *3RPR* esta eliminação das juntas passivas  $\Theta_p$  é facilmente obtida usando-se a identidade trigonométrica elementar que elimina os quadrados de senos e cossenos do ângulo formado nos pontos  $A$ ,  $C$  e  $F$ .

Depois disso, a derivação em relação ao tempo do sistema obtido levará a

$$\mathbf{A}\dot{\Theta}_a + \mathbf{B}\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$$

Onde  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são matrizes em função  $\mathbf{X}$  e  $\Theta$ . Pode-se, então, escrever

$$\dot{\Theta}_a = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{X}}$$

Assim, a matriz  $-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  é denotada como  $\mathbf{J}^{-1}$ , a matriz jacobiana inversa. Isto porque ela descreve como um diferencial descrito pelo *end-effector* impõe uma variação em cada junta ativa, processo análogo ao da cinemática inversa. Assim, tendo-se  $\mathbf{J}^{-1}$ , a desejada relação entre velocidades da plataforma e juntas ativas é alcançada.

Mas além da derivação do sistema obtido pela cinemática inversa, pode-se expressar tal matriz pela análise de velocidades. Este processo explicita matricialmente as velocidades  $\mathbf{V}B_i$  de cada junta presente no *end-effector* (os pontos  $B_i$ ) obtidos por dois caminhos diferentes: a partir do vetor  $\dot{\mathbf{X}}$ , e do  $\dot{\Theta}$ . A matriz jacobiana inversa é obtida ao igualá-las e isolar  $\dot{\Theta}$ . Esta forma é análoga à anterior, já que exige igualdade nas juntas  $B_i$ , diferenciando-se apenas pelo estudo já interessado na coerência de velocidades, enquanto que na anterior aplicava-se a restrição de posição e só então o sistema era derivado.

Para atingir plenamente a relação entre velocidades de atuadores/plataforma, deve ser objetivado o vetor  $\dot{\mathbf{X}}$  para um dado  $\dot{\Theta}$  (o inverso do descrito até agora). Para isto, é possível inverter analiticamente  $\mathbf{J}^{-1}$ , e obter a matriz jacobiana  $\mathbf{J}$ :

$$\mathbf{J}\dot{\Theta} = \dot{\mathbf{X}}$$

Para manipuladores planares esta inversão não é de grande complexidade, diferentemente de casos com mais de três G.D.L.

Com estes instrumentos, é imediata a previsão de velocidades limite da plataforma para restrições na agilidade dos atuadores. Foi, então, deduzido que para uma dada posição do robô, os possíveis vetores velocidade estão localizados no interior de um polígono com dimensões limitadas pelas restrições de mobilidade dos atuadores.

Levando-se em conta que  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{J}^{-1}$  relacionam variações (independentes do domínio do tempo) que o *end-effector* e atuadores implicam um no outro, é possível, fazendo uso destes recursos, relacionar a precisão entre estes, visto que o erro de medição nas juntas ativas e sua propagação para a plataforma podem ser interpretadas como as tais variações. Ou seja, as matrizes jacobiana e jacobiana inversa são caracterizadoras da precisão do manipulador.

Com isto em mente, foram descritos diversos índices baseados nestas matrizes que mesuram a destreza do robô, e ainda foi demonstrado que muitas vezes podem ser incertos e inconsistentes.

Mas deve-se considerar fatores adicionais causadores de erros: alterações de dimensão com causa térmica, erros geométricos originados na manufatura dos elementos e deslocamentos devidos a carregamentos estáticos e dinâmicos.

E por fim, foi detalhada a derivação em relação ao tempo das equações respectivas à velocidade que vêm a correlacionar as acelerações do *end-effector* e juntas ativas.

### 3.6 SINGULARIDADES

Para a robótica paralela, qualquer classificação de singularidade implica numa perda da rigidez intrínseca às configurações não singulares. Em condições normais, estando fixos os atuadores ou a plataforma, o mecanismo apresenta mobilidade nula. Isto significa dizer que se  $\dot{\mathbf{X}} = 0$  ou  $\dot{\Theta}_a = 0$ , todos os outros *links* e juntas deverão estar igualmente estáticos.

Para formalização deste conceito, os conhecimentos apreendidos na última seção são convenientes. Recordando que as velocidades de juntas ativas e *end-effector* podem ser relacionadas por

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{Q}}_a + \mathbf{B}\dot{\mathbf{X}} = 0$$

torna-se fácil a compreensão de que a singularidade de  $\mathbf{A}$  e/ou  $\mathbf{B}$  produzem o efeito descrito. Se  $\mathbf{A}$  for singular, uma velocidade não nula dos atuadores pode ser obtida mesmo com a plataforma estática, descrevendo a classificada como *singularidade de entrada redundante* (*R.I. – redundant input*). Já se  $\mathbf{B}$  é singular, mesmo com as juntas ativas travadas, o *end-effector* possui alguma mobilidade, é o caso da *singularidade de saída redundante* (*R.O. – redundant output*). Ainda é citada a *singularidade de redundância passiva*, na qual juntas passivas têm graus de liberdade diferente de zero ainda que atuadores e plataforma estejam travados, mas este caso não é interessante para o estudo de manipuladores planares.

O caso *R.I.* também é chamado de singularidade serial, enquanto que a *R.O.* é denotada por singularidade paralela. Esta é a principal situação à qual esta seção se atenta (a partir daqui, qualquer referência a singularidades refere-se à este caso específico), sendo este o mais nocivo para o controle do robô.

Também é possível interpretar tal fenômeno através do estudo do conjunto de soluções para a cinemática direta: para que não haja singularidade, as soluções devem ser pontuais e esparsas, pois caso não sejam, mesmo com os atuadores estáticos, a plataforma pode ter mobilidade infinitesimal ou ainda apresentar deslocamentos finitos.

Um resultado análogo ao obtido das relações cinemáticas pode ser aplicado ligando os carregamentos nas juntas e no *end-effector*. Estudando esta relação, conclui-se que próximos aos pontos de singularidade (onde os carregamentos são incapazes de se anular) as forças de reação presentes nos *links* e juntas são fortemente acrescidas. O que evidencia um dos grandes motivos para que tais pontos sejam evitados.

Tendo esclarecidos os conceitos básicos sobre singularidades, o principal objetivo do estudo de tal é prever e evitar estas configurações para redução de carregamentos capazes de colapsar *links* e juntas, e conservação do controle do robô, visto que nestes pontos o *end-effector* adquire mobilidade autônoma.

Primeiramente, é necessário ter claro que singularidades serão descritas quando em

$$\dot{\Theta}_a = \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{X}}$$

a matriz jacobiana inversa  $\mathbf{J}^{-1}$  é singular, ou seja, quando é possível que o efetuador descreva velocidade não nula para atuadores estáticos. Esta informação é usada para definir em quais posições do mecanismo este evento se sucede, visto que  $\mathbf{J}^{-1}$  é função de  $\mathbf{X}$  e  $\Theta_a$  e ao igualar seu determinante à zero obtêm-se as restrições procuradas.

Este método é aplicável em manipuladores de três graus de liberdade, mas apresenta dificuldades em casos mais complexos. Para estes, pode ser usada a geometria de Grassmann, estudada rapidamente nesta pesquisa.

É interessante prever, além da ocorrência, a movimentação descrita pelo *end-effector* nas singularidades. Isto é feito pela interpretação direta dos auto-vetores relacionados aos autovalores nulos. E para auxiliar esta interpretação é conveniente o estudo do movimento (muitas vezes infinitesimal) pelo seu eixo instantâneo de rotação, e por isso foi visto um método prático para sua determinação.

Para completar a análise do tema, foram expostos métodos de prevenção, dentre eles a formalização de índices representantes da proximidade de um ponto de singularidade e a discretização do espaço de trabalho para avaliação de riscos.

É importante notar que o robô redundante (P)RRR+2RRR tem características promissoras para a revogação de singularidades, já que tem uma estrutura de um tradicional 3RRR, mas com suas vulnerabilidades facilmente contornáveis. Isto pela habilidade de reconfiguração de sua montagem ao se deparar com um ponto de risco em sua trajetória (**Figura 9**).

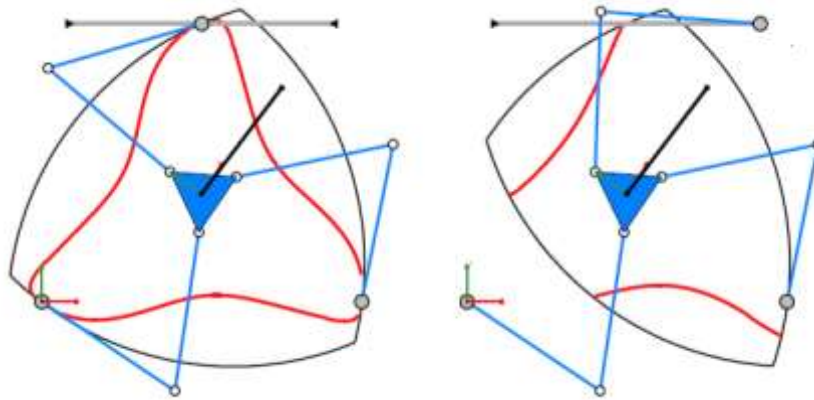


Figura 9 Reconfiguração do manipulador planar (P)RRR+2RRR através da redundância.

Objetivamente, para um manipulador paralelo redundante, a matriz  $\mathbf{J}^{-1}$  é retangular devido ao excesso de atuadores. A singularidade ocorre somente se o rank da matriz  $\mathbf{J}$  for menor que o número de graus de liberdade do sistema. Em outras palavras, para um sistema com a matriz  $\mathbf{J}^{-1} \in \mathfrak{R}^{4 \times 3}$ , onde 4 é o número de atuadores e 3 é o número de graus de liberdade do sistema, a singularidade somente ocorrerá se os 4 determinantes das matrizes 3 x 3 extraídas de  $\mathbf{J}^{-1}$  forem nulos.

## 4. RESULTADOS

Os resultados foram organizados em três grandes seções: a primeira detalha os resultados obtidos das modelagens do 3RRR, a segunda referente às relações algébricas desenvolvidas para o 3PRRR, e finalmente a terceira apresenta os resultados numéricos obtidos comparando as diferentes classes de simulações do aparato redundante.

### 4.1 MODELAGEM DO 3RRR

A seguir, são apresentados detalhes das simulações obtidas até agora, sendo estas apoiadas nos conceitos descritos na seção 4.1 e em desenvolvimentos publicados em artigos científicos.

#### 4.1.1 CINEMÁTICA INVERSA

O primeiro passo no processo de modelagem do 3RRR é a aplicação da cinemática inversa, de forma a obtermos a configuração geral do robô para uma dada posição do *end-effector*. Devemos equacionar o problema a partir da **Figura 10**.

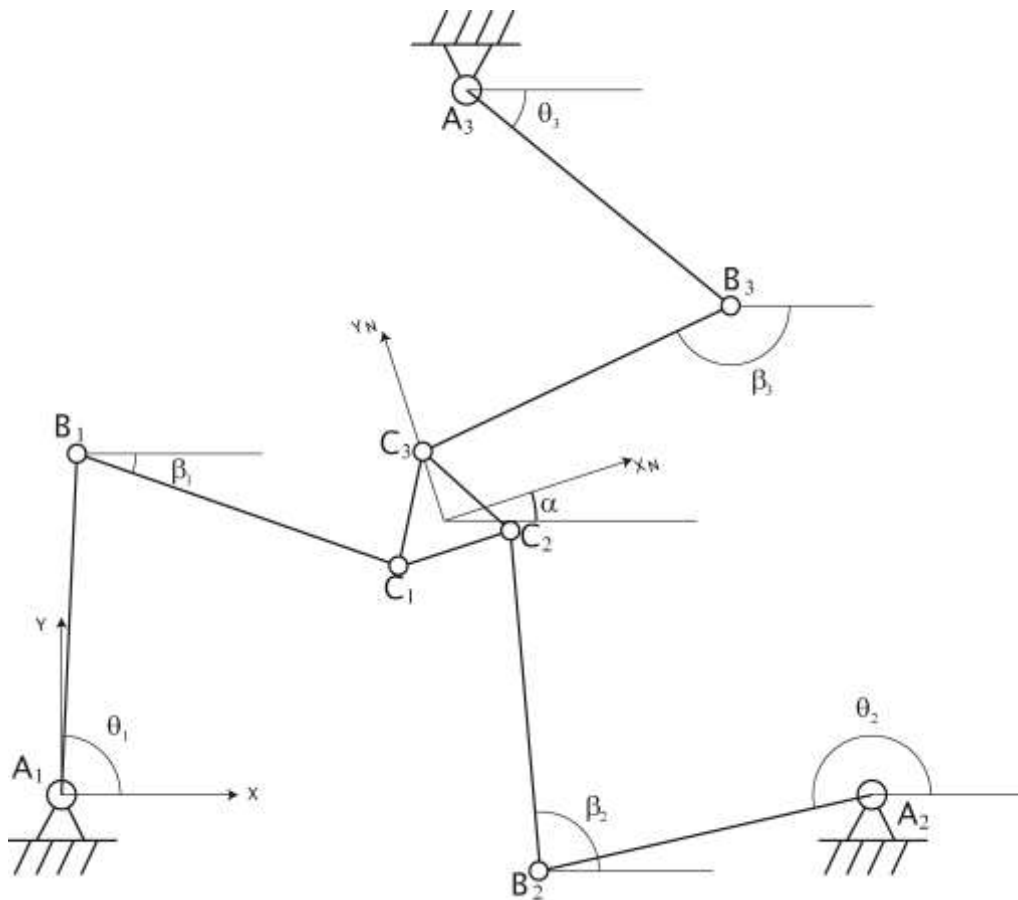


Figura 10 Esquemática do 3RRR.

No caso deste PK, tanto a base como efetuador apresentam formato de triângulo equilátero, assim denotamos  $a$  como a largura da base (distância de  $A_1$  e  $A_2$ ) e  $h$  como a largura do *end-effector* (distância de  $C_1$  a  $C_2$ ). Para o seu posicionamento,  $\mathbf{r}_{On} = (x, y)$  e  $\alpha$  são, respectivamente, vetor posição de seu centro e ângulo de rotação.

O problema de deduzir cada  $\theta_i$  pode ser isolado focando nossas atenções apenas na sua respectiva cadeia. Isto é feito obtendo  $\mathbf{r}_{Ci}$  diretamente das informações dadas ( $\alpha$ ,  $h$  e  $\mathbf{r}_{On}$ ). Tais vetores são obtidos por geometria direta como

$$\mathbf{r}_{Ci} = \mathbf{r}_{On} + \mathbf{R} \mathbf{r}_{Ci}^N$$

onde  $\mathbf{r}_{Ci}^N$  é o vetor do ponto  $C_i$  no sistemas  $X_N Y_N$  e  $\mathbf{R}$  é a matriz de rotação a partir do ângulo  $\alpha$  ou seja  $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ . Outro vetor de interesse é  $\mathbf{r}_{Bi} = l_1 \begin{bmatrix} \cos \beta_i \\ \sin \beta_i \end{bmatrix}$ , já que tendo em mãos todas estas informações, podemos exigir que a montagem pelo *link*  $l_2$  seja feita:

$$\|\mathbf{r}_{Ci} - \mathbf{r}_{Bi}\| = l_2$$

Ao se desenvolver esta equação, chegamos à seguinte expressão

$$e_{1i} \sin \theta_i + e_{2i} \cos \theta_i + e_{3i} = 0 \quad (4.2.1)$$

que representa as três equações resultantes para cada cadeia com  $e_{1i}$ ,  $e_{2i}$ ,  $e_{3i}$ , coeficientes dependendo dos diversos parâmetros já enumerados. Para a solução desta equação, aplica-se a propriedade trigonométrica:

$$\sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}; \quad \cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

Permitindo escrever:

$$\theta_i = 2. \tan^{-1} \left( \frac{-e_{1i} \pm \sqrt{e_{1i}^2 + e_{2i}^2 - e_{3i}^2}}{e_{3i} - e_{2i}} \right)$$

onde:

$$\begin{aligned}
e_{11} &= -2l_1 \left( y - \frac{h \sin \alpha}{2} - \frac{\sqrt{3} h \cos \alpha}{6} \right); \quad e_{21} = -2l_1 \left( x - \frac{h \cos \alpha}{2} - \frac{\sqrt{3} h \sin \alpha}{6} \right) \\
e_{31} &= \left( x - \frac{h \cos \alpha}{2} + \frac{\sqrt{3} h \sin \alpha}{6} \right)^2 + \left( y - \frac{h \cos \alpha}{2} - \frac{\sqrt{3} h \sin \alpha}{6} \right)^2 + l_1^2 - l_2^2; \\
e_{12} &= -2l_1 \left( y + \frac{h \sin \alpha}{2} - \frac{\sqrt{3} h \cos \alpha}{6} \right); \quad e_{22} = -2l_1 \left( x + \frac{h \cos \alpha}{2} + \frac{\sqrt{3} h \sin \alpha}{6} - a \right); \\
e_{32} &= \left( x + \frac{h \cos \alpha}{2} + \frac{\sqrt{3} h \sin \alpha}{6} - a \right)^2 + \left( y + \frac{h \sin \alpha}{2} - \frac{\sqrt{3} h \cos \alpha}{6} \right)^2 + l_1^2 - l_2^2; \\
e_{13} &= -2l_1 \left( y + \frac{\sqrt{3} h \cos \alpha}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} a \right); \quad e_{23} = -2l_1 \left( x + \frac{\sqrt{3} h \sin \alpha}{3} - \frac{1}{2} a \right); \\
e_{33} &= \left( x + \frac{\sqrt{3} h \sin \alpha}{3} - \frac{1}{2} a \right)^2 + \left( y + \frac{\sqrt{3} h \cos \alpha}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} a \right)^2 + l_1^2 - l_2^2.
\end{aligned}$$

Com toda a dedução teórica dedicada à cinemática inversa, a modelagem foi aplicada da seguinte forma: para uma dada trajetória contínua do *end-effector*, calcula-se qual a movimentação necessária das juntas ativas. Para isso, produzimos rotinas generalizadas capazes de obter esta resposta para quaisquer parâmetros de configuração do robô e de trajetória do efetuador.

Cabe ressaltar que a solução de posicionamento de cada cadeia não é única (salvo raras exceções), portanto, para uma mesma posição da plataforma, são possíveis diversas configurações do robô (duas para cada perna, e oito no total). Para resolver este problema, ao se discretizar a movimentação, a configuração obtida pela rotina no instante seguinte será a que tiver os parâmetros mais próximos do instante anterior. Isto garantiu a continuidade na modelagem cinemática.

Todo o procedimento descrito até aqui pode ser desenvolvido alternativamente considerando os *links* como vetores no plano complexo, escritos na forma polar ( $\mathbf{r} = L e^{i\varphi}$ ), o que é particularmente promissor para o nosso caso, já que a movimentação se dá pela orientação de barras de dimensões constantes (variáveis os ângulos  $\varphi$  com os comprimentos  $L$  invariantes). Em seguida, fazendo uso do fato de uma equação de números complexos ser válida para seus

conjugados, eliminamos as variáveis  $\beta_i$  e obtemos uma equação mais compacta de 4.2.1, envolvendo cossenos de somas dos ângulos de interesse.

$$f_i(\theta_i) = 0 \quad i = 1,2,3$$

Podemos, então, partir para a solução numérica da equação obtida. Para isso, calculou-se  $df_i(\theta_i)/d\theta_i$  para a aplicação do método iterativo de Newton-Raphson, consistindo de sucessivas substituições de  $\theta_i$  em:

$$\theta_i^{(n+1)} = \theta_i^{(n)} - \frac{f_i(\theta_i^{(n)})}{f_i'(\theta_i^{(n)})}$$

até que se alcance um  $f_i(\theta_i^{(n)})$  suficientemente pequeno (o usuário que deve definir o erro permitido). Este procedimento permite embutir a continuidade no processo de discretização do movimento usando o  $\theta_i(t_j)$  obtido no instante anterior como chute inicial  $\theta_i^1(t_{j+1})$  do instante subsequente, garantindo uma convergência à solução próxima à anterior. Isto também favorece a redução de iterações necessárias para obtenção de erro menor que o exigido. Fatores estes que proporcionam um desenvolvimento de rotinas mais compactas.

Como exemplo, apresentamos **Figuras 11 e 12** resultado simulação desenvolvida aplicando-se os métodos descritos.

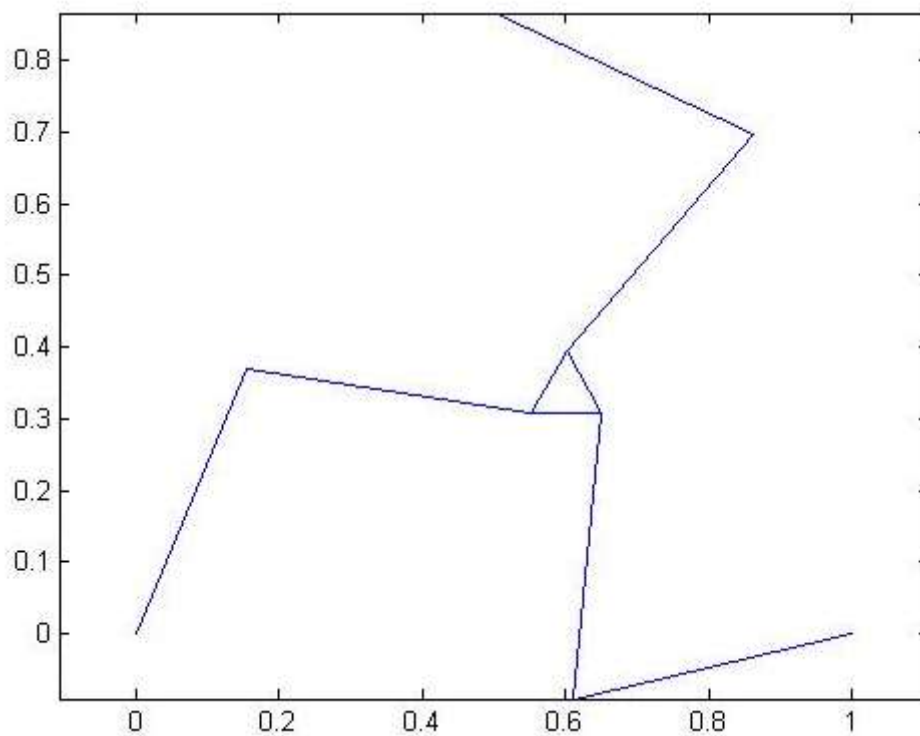


Figura 11 Animação representante da movimentação geral para uma dada rota da plataforma.

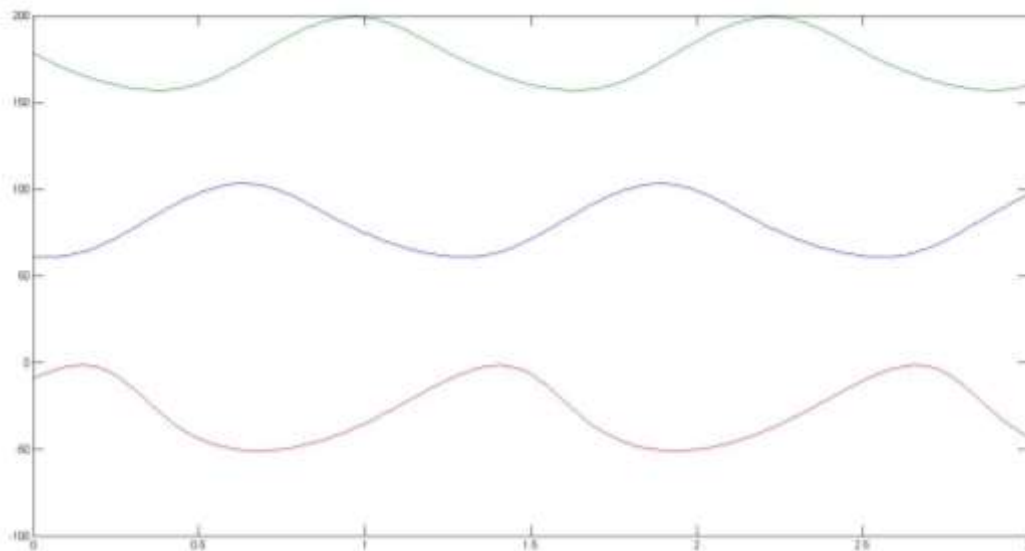


Figura 12: Valores de  $\theta_1, \theta_2$  e  $\theta_3$  para a mesma trajetória.

#### 4.1.2 MATRIZ JACOBIANA

A matriz jacobiana relaciona as velocidades da plataforma com as dos atuadores. A obtenção desta relação vem diretamente da derivação em relação ao tempo da (4.2.1):

$$\dot{e}_{1i} \cdot \sin \theta_i + \dot{e}_{2i} \cdot \cos \theta_i + \dot{e}_{3i} + (e_{1i} \cdot \cos \theta_i - e_{2i} \cdot \sin \theta_i) \dot{\theta}_i = 0$$

Unindo e organizando convenientemente as três equações representadas acima na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

onde:

$$Q_{i1} = 2.l_1 \cos \theta_i + e_{2i}/l_1; \quad Q_{i2} = 2.l_1 \sin \theta_i + e_{1i}/l_1; \quad D_{ii} = e_{1i} \cdot \cos \theta_i - e_{2i} \cdot \sin \theta_i;$$

$$Q_{13} = \left( \frac{h \cdot \sin \alpha}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot h \cdot \cos \alpha}{6} \right) Q_{11} - \left( \frac{h \cdot \cos \alpha}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot h \cdot \sin \alpha}{6} \right) Q_{12};$$

$$Q_{23} = \left( \frac{h \cdot \cos \alpha}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot h \cdot \sin \alpha}{6} \right) Q_{22} - \left( -\frac{h \cdot \sin \alpha}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot h \cdot \cos \alpha}{6} \right) Q_{21};$$

$$Q_{33} = -\frac{\sqrt{3} \cdot h \cdot \sin \alpha}{3} Q_{32} - \frac{\sqrt{3} \cdot h \cdot \cos \alpha}{3} Q_{31};$$

Assim temos:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (4.2.2)$$

que é a procurada relação.

Com estas relações, a obtenção da matriz jacobiana é direta a partir do prévio desenvolvimento da cinemática inversa.

#### 4.1.3 VELOCIDADES PARCIAIS:

No nosso intuito de determinar as relações dinâmicas do robô, se faz necessária e explicitação das matrizes que relacionam as velocidades e acelerações de cada elemento para os parâmetros dados. Isto é feito com o auxílio das equações obtidas no desenvolvimento de  $\mathbf{J}$ .

Para simplificar o equacionamento, os pontos de referência foram fixados nas juntas que minimizam o aparecimento de termos.

Nos *links*  $A_i B_i$ , os pontos de referência fixados foram os  $A_i$ , de forma que a matriz de velocidade parcial em torno dos pontos  $A_i$  são nulas:

$$\mathbf{H}_{i1} = 0$$

Quanto às velocidades angulares, vemos que  $\dot{\theta}_i$  é dado diretamente pela (4.2.2)

$$\dot{\theta}_i = \frac{1}{D_{ii}} [Q_{i1} \quad Q_{i2} \quad Q_{i3}] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{G}_{i1} = \begin{bmatrix} \frac{Q_{i1}}{D_{ii}} & \frac{Q_{i2}}{D_{ii}} & \frac{Q_{i3}}{D_{ii}} \end{bmatrix}$$

Para os *links*  $B_i C_i$ , as velocidades dos pontos  $B_i$  são obtidas pela rotação em torno de  $A_i$ :

$$\dot{\mathbf{r}}_{B_i} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \dot{\theta}_i l_1 = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} l_1 \mathbf{G}_{i1} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{H}_{i2} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} l_1 \mathbf{G}_{i1}$$

Para obter a matriz de velocidade angular parcial dos *links*  $B_i C_i$  é necessário usar a relação geométrica:

$$\mathbf{r}_{O_n} + \mathbf{R} \mathbf{r}_{C_i} = \mathbf{r}_{B_i} + l_2 \begin{bmatrix} \cos \beta_i \\ \sin \beta_i \end{bmatrix}$$

Derivando-a em relação ao tempo e isolando  $\dot{\beta}_i$  chegamos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_i &= \begin{bmatrix} -\frac{\sin \beta_i}{l_2} & \frac{\cos \beta_i}{l_2} \end{bmatrix} (\dot{\mathbf{r}}_{O_n} + \dot{\alpha} \mathbf{R}^T \mathbf{r}_{C_i} - \dot{\mathbf{r}}_{B_i}) = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\sin \beta_i}{l_2} & \frac{\cos \beta_i}{l_2} \end{bmatrix} \left( (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)^T + \mathbf{R}^T \mathbf{r}_{C_i} \mathbf{e}_3^T - \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} l_1 \mathbf{G}_{i1} \right) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{G}_{i2} = \begin{bmatrix} -\frac{\sin \beta_i}{l_2} & \frac{\cos \beta_i}{l_2} \end{bmatrix} \left( (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)^T + \mathbf{R}^T \mathbf{r}_{C_i} \mathbf{e}_3^T - \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} l_1 \mathbf{G}_{i1} \right) \end{aligned}$$

No *end-effector*, o ponto usado foi a junta  $C_3$ , isto por pertencer ao eixo  $Y_N$ , o que elimina a soma de arcos constantes na contabilização da velocidade linear causada pela rotação  $\dot{\alpha}$ . Assim, a velocidade de  $C_3$  é dada pela soma da velocidade do centro da plataforma  $\dot{\mathbf{r}}_{O_n}$  com a advinda da rotação:

$$\dot{\mathbf{r}}_{C_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3}h.\cos\alpha \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3}h.\sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{H}_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3}h.\cos\alpha \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3}h.\sin\alpha \end{bmatrix}$$

A velocidade angular é dada diretamente por  $\dot{\alpha}$ , assim:

$$\mathbf{G}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos as velocidades de todos os componentes móveis a partir de uma dada velocidade da plataforma.

#### 4.1.4 ACELERAÇÕES

As acelerações dos pontos  $B_i$  e  $C_i$  são obtidas por cinemática básica, o que nos fornece:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{B_i} = l_1.\ddot{\theta}_i \begin{bmatrix} -\sin\theta_i \\ \cos\theta_i \end{bmatrix} - l_1.\dot{\theta}_i^2 \begin{bmatrix} -\sin\theta_i \\ \cos\theta_i \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{C_i} = \ddot{\mathbf{r}}_{O_n} + \ddot{\alpha} \mathbf{R}^T \mathbf{r}_{C_i}^N - \dot{\alpha}^2 \mathbf{R} \mathbf{r}_{C_i}^N$$

Sendo estas obtidas diretamente dos valores numéricos dos parâmetros deduzidos na cinemática inversa.

#### 4.1.5 MODELAGEM DINÂMICA

Neste momento, aplicaremos o princípio dos trabalhos virtuais. Para isso, é preciso definir as forças e momentos de inércia de todos os elementos móveis sobre seus respectivos pontos de referência. Sendo assim, para os *links*  $A_iB_i$  são definidos:

$$\mathbf{F}_{i1} = -m_{i1} \left( s_{i1} \ddot{\theta}_i \begin{bmatrix} -\sin \theta_i \\ \cos \theta_i \end{bmatrix} - s_{i1} \dot{\theta}_i^2 \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{bmatrix} \right)$$

$$M_{i1} = -\ddot{\theta}_i I_{i1}$$

onde  $m_{i1}$ ,  $s_{i1}$  e  $I_{i1}$  são respectivamente a massa, a distância do C.G. ao ponto  $A_i$ , e o momento de inércia em relação ao mesmo ponto.

Fazendo o mesmo para os *links*  $B_i C_i$ :

$$\mathbf{F}_{i2} = -m_{i2} \left( \ddot{\mathbf{r}}_{Bi} + s_{i2} \ddot{\beta}_i \begin{bmatrix} -\sin \beta_i \\ \cos \beta_i \end{bmatrix} - s_{i2} \dot{\beta}_i^2 \begin{bmatrix} \cos \beta_i \\ \sin \beta_i \end{bmatrix} \right)$$

$$M_{i2} = -\ddot{\beta}_i I_{i2} - m_{i2} s_{i2} \begin{bmatrix} -\sin \beta_i & \cos \beta_i \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_{Bi}$$

E no end-effector:

$$\mathbf{F}_N = -m_N \left( \ddot{\mathbf{r}}_{On} + \ddot{\alpha} \mathbf{R}^T \mathbf{r}_{C3}^N - \dot{\alpha} \mathbf{R} \mathbf{r}_{C3}^N \right)$$

$$M_N = -\ddot{\alpha} I_N - m_N \ddot{\mathbf{r}}_{On}^T \mathbf{R}^T \mathbf{r}_{C3}^N$$

Finalmente, chamando os torques dos atuadores  $\boldsymbol{\tau} = [T_1 \ T_2 \ T_3]^T$ , a aplicação do conceito de que a soma dos trabalhos externos aplicados sobre o sistema com os trabalhos das forças e momentos de inércia é nula, teremos:

$$(\mathbf{J}^{-1})^T \boldsymbol{\tau} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ij}^T & \mathbf{G}_{ij}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ij} \\ M_{ij} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_N^T & \mathbf{G}_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_N \\ M_N \end{bmatrix} = 0$$

Portanto, como  $\left[ (\mathbf{J}^{-1})^T \right]^{-1} = \mathbf{J}^T$ :

$$\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{J}^T) \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ij}^T & \mathbf{G}_{ij}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ij} \\ M_{ij} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_N^T & \mathbf{G}_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_N \\ M_N \end{bmatrix} \right\} \quad (4.2.3)$$

Toda a dedução foi feita a partir dos deslocamentos virtuais do *end-effector*  $\delta \mathbf{X}$ . Mas é interessante ressaltar que este procedimento poderia ser alternativamente desenvolvido com os deslocamentos virtuais dos atuadores. Isto porque no caso do robô redundante a forma

utilizada aqui não será mais possível, já que alguns *links* não poderão ter suas velocidades parciais pelo vetor  $\dot{\mathbf{X}}$ , e sim pelo vetor  $\dot{\Theta}$ .

Vemos que, apesar da complexidade da dedução, alcançamos um método que nos permite prever os torques necessários  $\tau$  para uma dada trajetória do *end-effector*, reduzindo tal problema a um simples trato numérico dos parâmetros dados. Este detalhamento foi desenvolvido integralmente em software de manipulação matricial.

Para exemplificar sua aplicação, apresentamos seus resultados para duas simulações diferentes de um mesmo robô. Este tem as seguintes configurações:

Largura da base  $\Rightarrow a = 1m$

Largura da plataforma  $\Rightarrow h = 100mm$

Comprimento das barras  $\Rightarrow l_1 = l_2 = 400mm$

Massa da plataforma  $\Rightarrow m_N = 0,7kg$

Massa das barras  $\Rightarrow m_1 = m_2 = 0,8kg$

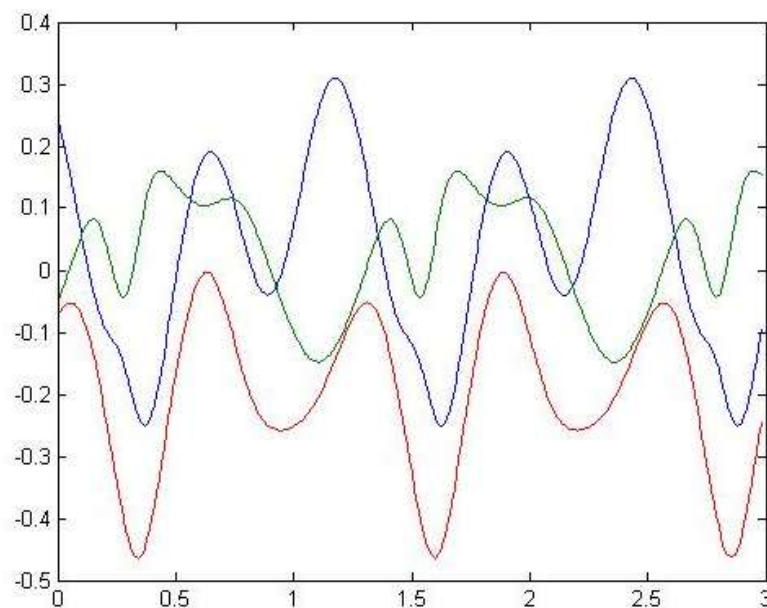


Fig 13 Torques necessários  $T_1, T_2$  e  $T_3$  [N.m] para gerar uma trajetória circular de raio de 148mm.

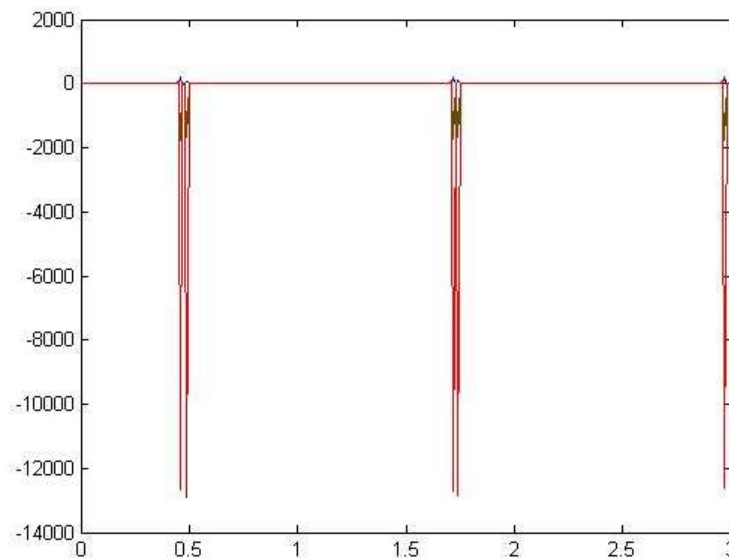


Figura 14 Torques para uma rota de raio de 149mm.

Estas duas simulações foram escolhidas justamente para exemplificar a sensibilidade deste modelo às discutidas singularidades. Com as informações obtidas, vemos claramente que mantendo todos os parâmetros adicionais constantes, o acréscimo aparentemente inofensivo de  $1\text{mm}$  (aproximadamente  $0,67\%$ ) no raio da trajetória circular requerida desencadeia uma exigência extrapolada de torque nos atuadores, e carregamento nos demais componentes por consequência. Isto, por si só, justifica o próximo passo da pesquisa, que é o desenvolvimento, similar ao descrito até aqui, para o modelo  $3\text{PRRR}$ , capaz de se reconfigurar ao prever tais fenômenos.

A redundância desenvolvida ao se acrescentar um atuador em uma das cadeias nos disponibiliza a desejada capacidade de reconfiguração, mas isto implica numa análise cinemática incerta num primeiro momento, já que as soluções da perna continente do motor linear extra terá infinitas disposições possíveis para uma mesma localização do *end-effector*. Assim, as rotinas dedicadas a otimização tratam com matrizes funções da posição do motor presente na junta prismática.

Vemos pela (4.2.3) que os torques produzidos necessários para a movimentação são intimamente ligados à matriz Jacobiana. Sabendo que processo similar ocorre no estudo do PKM redundante, nos focaremos também na manipulação de  $\mathbf{J}$  (que neste momento é retangular e função da posição do motor linear) de forma à reduzir os torques necessários.

Ainda é importante ressaltar que, lembrando dos conceitos apresentados na seção relativa à precisão, ao proceder desta maneira estaremos melhorando a acuracidade do robô.

#### 4.2 RELAÇÕES DO 3PRRR

As relações apresentados nesta seção foram obtidas já com a pretensão de criar instrumentos para a modelagem numérica no ambiente MATLAB. Isto dirigiu o processo para a obtenção de informações convenientes para este fim, diferentemente do detalhado na seção anterior, que teve fonte íntima deduções já acabadas da literatura com objetivo descritivo e não especificamente a modelagem computacional. Sendo assim, procurou-se relações mais enxutas e que em contrapartida exigissem métodos numéricos para sua aplicação.

Ainda são detalhados conceitos já implícitos nos cálculos de 4.2 mas que são apresentados aqui pois foram estudados com o rigor necessário para o desenvolvimento dos cálculos (não apenas compreensão como na seção anterior) nesta fase da pesquisa.

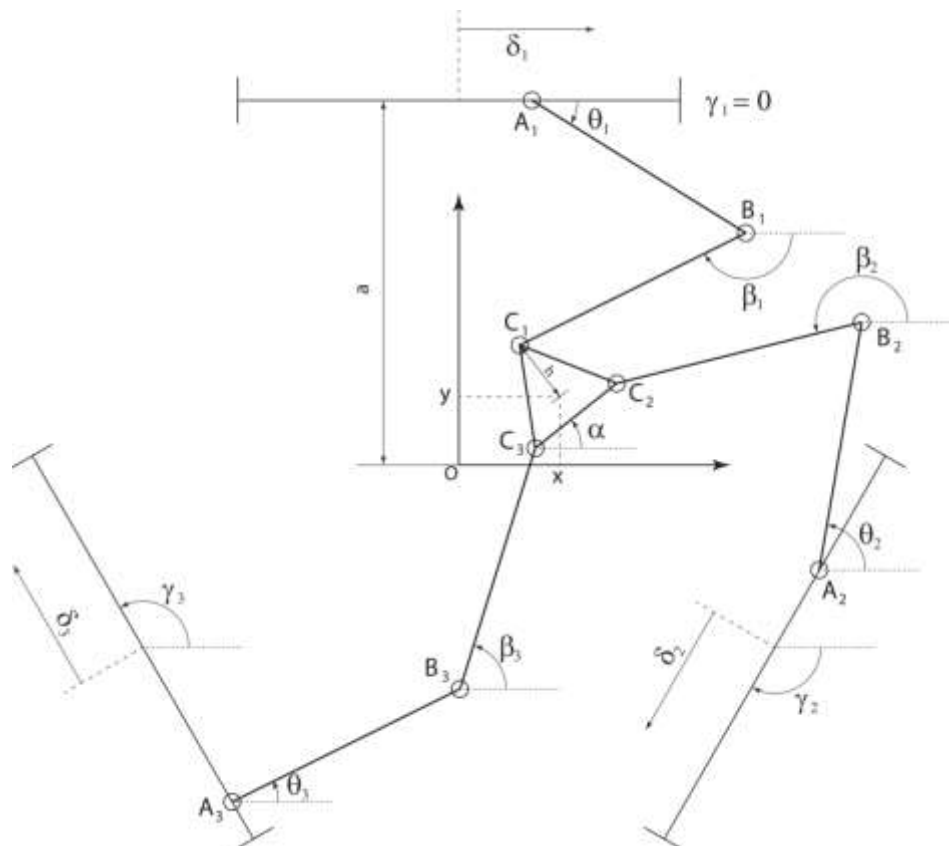


Figura 15: Configuração e notação do 3PRRR

### 4.2.1 CINEMÁTICA INVERSA

A proposta da modelagem é que, a partir de uma dada trajetória do *end-effector*, seja calculado o melhor posicionamento de cada *link* durante a movimentação. Como envolvemos redundância cinemática, teremos que basear a cinemática inversa na posição da plataforma e supor posições para alguns dos outros atuadores até que restem apenas um como incógnita em cada cadeia e posteriormente processar a otimização sobre os anteriormente fixados. Este desenvolvimento será melhor esclarecido durante a descrição detalhada dos cálculos. A **figura 15** esclarece as notações que serão usadas nos desenvolvimentos de toda a teoria.

Partimos dos  $\delta_i$  fixos, ou seja, deveremos calcular a posição dos *links*  $A_iB_i$  e  $B_iC_i$  a partir da posição da plataforma  $(x, y, \alpha)$  e das distâncias entre o centro dos motores lineares e seu respectivo  $A_i$ . Começaremos obtendo  $\theta_i$ . Chamando os comprimentos dos *links*  $A_iB_i$  e  $B_iC_i$  de  $l_1$  e  $l_2$ , respectivamente, a equação usada para relacionar esta incógnita com as tomadas como conhecidas sem envolver  $\beta_i$  é:

$$\|\vec{r}_{B_i} - \vec{r}_{C_i}\| = l_2 \quad (4.3.1)$$

A fim de simplificar a notação, é interessante definir  $\vec{N}(\omega) = [\cos(\omega) \quad \text{sen}(\omega)]^T$ . De forma que podemos escrever a relação anterior como:

$$\begin{aligned} \left\| a \vec{N}(\lambda_i) + \delta_i \vec{N}(\gamma_i) + l_1 \vec{N}(\theta_i) - h \vec{N}(\lambda_i + \alpha) - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| &= \left\| \begin{matrix} r_{BCx} \\ r_{BCy} \end{matrix} \right\| \\ &= l_2 \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Explicitar  $\theta_i$  analiticamente partindo desta equação implica em cálculos mais avançados, mas é possível obter esta informação simplesmente pela solução numérica. Isto se torna conveniente não apenas pela simplicidade, mas também por garantir continuidade dando como conjectura inicial a posição anterior ao se discretizar a movimentação. Para cada cadeia  $i$  teremos uma equação em  $\theta_i$  para solucionar.

Ainda na sequência é interessante determinarmos  $\beta_i$  tendo em vista sua exigência na aplicação do princípio dos trabalhos virtuais nos *links*  $B_iC_i$ . Isto será feito também por solução numérica, assim como o procedimento descrito anteriormente:

$$\|\vec{r}_{A_i} - \vec{r}_{B_i}\| = l_1$$

$$\|a \vec{N}(\lambda_i) + \delta_i \vec{N}(\gamma_i) - h \vec{N}(\lambda_i + \alpha) - [x \ y]^T - l_2 \vec{N}(\beta_i)\| = l_1$$

Desta forma temos todas as informações de posição necessárias.

Tal determinação dos ângulos  $\theta_i$  e  $\beta_i$  se mostrou precisa e simples, mas em uma das tentativas de otimização (*instante-a-instante*) deu motivos para a procura do método exato (as variações das posições de  $\delta_i$  nas iterações eram pequenas o bastante para exigir exatidão incoerente com a resolução numérica das equações acima). Sendo assim, o método exato foi desenvolvido. Definindo:

$$\begin{bmatrix} \mu_i \\ \rho_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + h \cdot \vec{N}(\alpha + \lambda_i) - \delta_i \cdot \vec{N}(\gamma_i) - a \cdot \vec{N}(\lambda_i)$$

A equação (4.3.2) é escrita por

$$\left\| \begin{matrix} \mu_i - l_1 \cdot \cos(\theta_i) \\ \rho_i - l_1 \cdot \sin(\theta_i) \end{matrix} \right\| = l_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{-2 \cdot l_1 \cdot \rho_i \cdot \sin(\theta_i)}_{e_{1i}} - \underbrace{2 \cdot l_1 \cdot \mu_i \cdot \cos(\theta_i)}_{e_{2i}} + \underbrace{\mu_i^2 + \rho_i^2 + l_1^2 - l_2^2}_{e_{3i}} = 0$$

Seguindo procedimento análogo ao implementado para o 3-RRR, evidenciando as funções trigonométricas por  $\tan(\theta_i/2)$ , chega-se a

$$\theta_i = 2 \cdot \text{atan} \left\{ \frac{-e_{1i} \pm \sqrt{e_{1i}^2 + e_{2i}^2 - e_{3i}^2}}{e_{3i} - e_{2i}} \right\}$$

Esta relação é aplicada diretamente para  $\theta_i \in (-\pi, \pi)$ . Caso o *link* ultrapasse este intervalo, é necessário somar múltiplos de  $2 \cdot \pi$  para garantir continuidade. Para obtenção de  $\beta_i$  usa-se simplesmente

$$\beta_i = \text{atan} \left\{ \frac{\rho_i - l_1 \cdot \sin(\theta_i)}{\mu_i - l_1 \cdot \cos(\theta_i)} \right\}$$

Tomando cuidado de forma análoga para continuidade além da correção para ângulos nos 2º e 3º quadrantes.

#### 4.2.2 MATRIZ JACOBIANA

A matriz jacobiana  $J$  é definida como a que relaciona as matrizes de velocidades do *end-effector* com a dos atuadores, ou seja

$$\dot{\mathbf{X}} = J \dot{\boldsymbol{\Theta}} \quad (4.3.3)$$

Onde  $\mathbf{X} = [x \ y \ \alpha]^T$  e  $\boldsymbol{\Theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3]^T$ . Esta relação nasce da equação (4.3.1) que pode ser escrita por

$$r_{BCx}^2 + r_{BCy}^2 = l_2^2$$

Com  $r_{BCx}$  e  $r_{BCy}$  obtidos diretamente de (4.3.2). Derivando em relação ao tempo teremos

$$r_{BCx} \dot{r}_{BCx} + r_{BCy} \dot{r}_{BCy} = 0$$

Até aqui  $r_{BCx}$  e  $r_{BCy}$  são escritos da extensa maneira obtida da equação usada na cinemática inversa. Mas também sabemos que são numericamente iguais a  $l_2 \cos(\beta_i)$  e  $l_2 \sin(\beta_i)$ , respectivamente. Usando esta substituição em  $r_{BCx}$  e  $r_{BCy}$ , desenvolvendo  $\dot{r}_{BCx}$  e  $\dot{r}_{BCy}$  (estes sem aplicar a simplificação descrita), chegaremos à relação compacta

$$\begin{aligned} \dot{x} \underbrace{\{l_2 \cos(\beta_i)\}}_{A_{i1}} + \dot{y} \underbrace{\{l_2 \sin(\beta_i)\}}_{A_{i2}} + \dot{\alpha} \underbrace{\{l_2 h \sin(\beta_i - \lambda_i - \alpha)\}}_{A_{i3}} = \\ = \dot{\theta}_i \underbrace{\{l_1 l_2 \sin(\beta_i - \theta_i)\}}_{B_{ii}} + \dot{\delta}_i \underbrace{\{l_2 \cos(\beta_i - \gamma_i)\}}_{B_{i \ i+3}} \end{aligned}$$

Podemos construir matrizes  $\mathbf{A}_{3 \times 3}$  e  $\mathbf{B}_{3 \times 6}$  com os componentes definidos como indicado e generalizar para todas as três cadeias

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 & B_{14} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 & 0 & B_{25} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & B_{36} \end{bmatrix} [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3]^T$$

Observando em (4.3.3) vemos que

$$J = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$$

Ainda tratando da matriz jacobiana, será interessante obter uma matriz com função semelhante, mas que relacione a movimentação do *end-effector* em termos de uma única

dimensão (da forma apresentada, confundem-se velocidades angulares e lineares), isto para que seja possível avaliar coerentemente sua influência através do chamado *condition number*.

A forma escolhida foi relacionar o vetor  $\mathbf{X} = [x \ y \ \alpha]^T$  com o homogêneo  $\mathbf{X}_h = [x \ y \ x_{c1} \ y_{c1}]^T$ , sendo  $x_{c1}$  e  $y_{c1}$  as coordenadas do ponto  $C_1$ . Assim

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_h &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & h \cos(\pi + \alpha) \\ 0 & 1 & h \sin(\pi + \alpha) \end{bmatrix} \mathbf{X} \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{X}}_h &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -h \sin(\pi + \alpha) \\ 0 & 1 & h \cos(\pi + \alpha) \end{bmatrix}}_M \dot{\mathbf{X}} \end{aligned}$$

Desta forma, podemos encontrar a procurada jacobiana homogênea

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\theta}} \Rightarrow \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{M} \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\theta}} \Rightarrow \dot{\mathbf{X}}_h = \mathbf{J}_h \dot{\boldsymbol{\theta}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{J}_h = \mathbf{M} \mathbf{J} \end{aligned}$$

#### 4.2.3 CINEMÁTICA DIRETA

Também foi desenvolvido um método para cálculo da posição da plataforma conhecendo a configuração dos atuadores. Novamente lançou-se mão da solução numérica, mas agora englobando um sistema de três equações correspondentes ao problema para cada cadeia, sendo elas

$$\left\| \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + h \vec{N}(\lambda_i + \alpha) \right\} - \left\{ a \vec{N}(\lambda_i) + \delta_i N(\gamma_i) + l_1 \vec{N}(\theta_i) \right\} \right\| = l_2$$

Assim, as iterações se dão até que as variáveis  $x$ ,  $y$  e  $\alpha$  relativas ao *end-effector* satisfaçam as três equações simultaneamente.

#### 4.2.4 EXTENSÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Usaremos o princípio dos trabalhos virtuais em todos os corpos envolvidos do robô. Porém, sua aplicação tradicional sobre o centro de massa de cada elemento seria inconveniente para a forma como organizou-se os parâmetros até aqui, portanto, foi desenvolvido uma extensão ao

princípio permitindo que este se aplique a pontos diferentes do centro de massa para um corpo  $m$  qualquer.

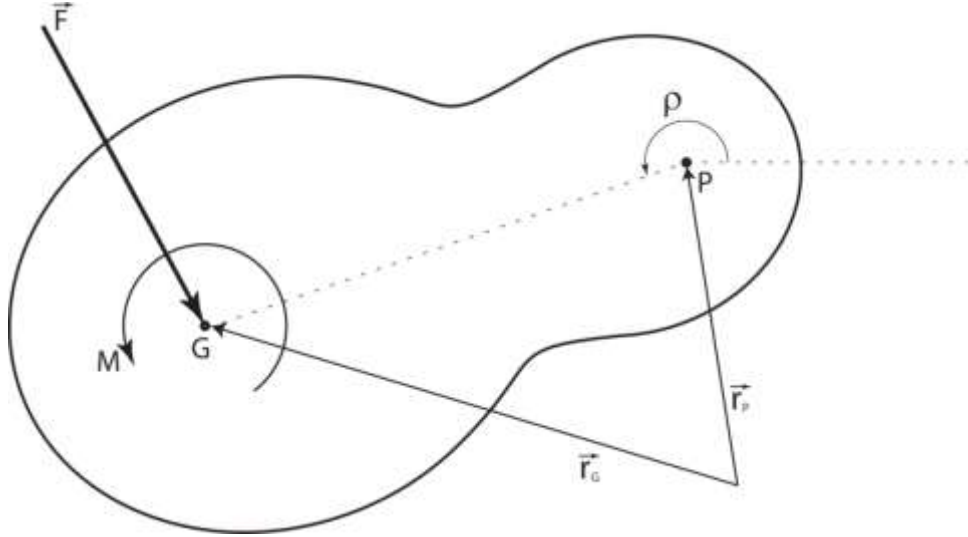


Fig 16: Representação de um corpo qualquer

Usando a nova definição  $\overline{dN}(\omega) = \frac{dN(\omega)}{d\omega} = [-\text{sen}(\omega) \quad \text{cos}(\omega)]^T$  e seguindo a notação indicada pela **Figura 16**, onde  $G$  é o centro de massa,  $P$  é qualquer outro ponto pertencente ao corpo e  $s$  é a distância entre eles

$$\vec{r}_G = \vec{r}_P + s \vec{N}(\rho) \Rightarrow \begin{cases} \delta \vec{r}_G = \delta \vec{r}_P + s \overline{dN}(\rho_i) \delta \rho \\ \ddot{\vec{r}}_G = \ddot{\vec{r}}_P + \ddot{\rho} s \overline{dN}(\rho_i) - \dot{\rho}^2 s \vec{N}(\rho_i) \end{cases}$$

Onde  $\rho$  é o ângulo de posição do corpo estudado. Com estas relações e sabendo que  $I_P = I_G + ms^2$ , o trabalho virtual aplicado sobre um corpo pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \delta w &= \vec{F}_R \cdot \delta \vec{r}_G + M \delta \rho = (m \ddot{\vec{r}}_G) \cdot \delta \vec{r}_G + (I_G \ddot{\rho}) \delta \rho \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta w &= \underbrace{\left\{ m (\ddot{\vec{r}}_P + \ddot{\rho} s \overline{dN}(\rho_i) - \dot{\rho}^2 s \vec{N}(\rho_i)) \right\}}_{F_m} \cdot \delta \vec{r}_P \\ &\quad + \underbrace{\left\{ m s (\ddot{\rho} \overline{dN}(\rho_i)) + I_P \ddot{\rho} \right\}}_{M_m} \delta \rho \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Onde temos como informações necessárias apenas as velocidades e acelerações lineares e angulares de um ponto qualquer. Nota-se que ainda foi definido as forças e momentos de inércia,  $F_m$  e  $M_m$  respectivamente, do corpo  $m$  sobre seu ponto  $P$ .

#### 4.2.5 VELOCIDADES PARCIAIS

Para aplicar a modelagem dinâmica, deve-se obter matrizes que relacionem os deslocamentos virtuais de cada corpo com os deslocamentos virtuais dos atuadores. Relacionar deslocamentos virtuais é equivalente a relacionar velocidades, assim a matriz jacobiana faz isso para o *end-effector*, nos restando encontrar matrizes análogas a ela para os outros *links* e demais corpos móveis.

É representado por  $\mathbf{H}_{ij}$  a matriz tal que  $\dot{\vec{r}}_{ij} = \mathbf{H}_{ij}\dot{\Theta}$ , onde  $\vec{r}_{ij}$  é o vetor que apresenta a posição do corpo  $j$  da cadeia  $i$ , sendo que os corpos foram sequenciados com números crescentes dos mais próximos à base para os mais próximos à plataforma. Assim, os conjuntos de rotores lineares e motores rotacionais em  $A_i$  recebem a numeração 1 ( $j=1$ ), os *links*  $A_iB_i$  recebem a numeração 2 com ponto de referência em  $A_i$ , e os *links*  $B_iC_i$  a numeração 3 com referência em  $B_i$ . Analogamente, as matrizes  $\mathbf{G}_{ij}$  ligam o vetor  $\dot{\Theta}$  às velocidades angulares  $\dot{\rho}_{ij}$ .

Seguindo esta notação, temos para as massas em  $A_i$

$$\dot{\vec{r}}_{Ai} = \dot{\vec{r}}_{i1} = \delta_i \begin{bmatrix} \cos(\gamma_i) \\ \text{sen}(\gamma_i) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & \overbrace{\cos(\gamma_i)}^{\text{coluna } i+3} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \overbrace{\text{sen}(\gamma_i)}^{\text{coluna } i+3} & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_{i1}} \dot{\Theta} \quad (4.3.5)$$

E como tais corpos rígidos não sofrem rotação, tem sua velocidade angular nula, fazendo com que

$$\mathbf{G}_{i1} = [0 \quad \dots \quad 0]_{1 \times 6} \quad (4.3.6)$$

Para o *links*  $A_iB_i$  teremos sua velocidades angulares dadas por  $\dot{\theta}_i$  e lineares por  $\dot{\vec{r}}_{Ai}$

$$\mathbf{H}_{i2} = \mathbf{H}_{i1} \quad (4.3.7)$$

$$\dot{\theta}_i = \dot{\rho}_{i2} = \underbrace{[0 \quad \dots \quad \overbrace{\hat{1}}^{\text{coluna } i} \quad \dots \quad 0]}_{\mathbf{G}_{i2}} \dot{\Theta} \quad (4.3.8)$$

Antes dos *links*  $B_iC_i$ , estudaremos as velocidades do *end-effector*. Como visto

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\Theta}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{N_{2 \times 6}} \\ \mathbf{G}_{N_{1 \times 6}} \end{bmatrix}_{3 \times 6} = \mathbf{J} \quad (4.3.9)$$

As velocidades lineares dos pontos  $B_i$  foram obtidas a partir dos vetores posição

$$\begin{aligned} \vec{r}_{Bi} &= \vec{r}_{i3} = a \vec{N}(\lambda_i) + \delta_i \vec{N}(\gamma_i) + l_1 \vec{N}(\theta_i) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dot{\vec{r}}_{i3} = \dot{\delta}_i \vec{N}(\gamma_i) + \dot{\theta}_i l_1 \overline{dN}(\theta_i) = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & \overbrace{l_1 \overline{dN}(\theta_i)}^{\text{coluna } i} & \dots & \overbrace{\vec{N}(\gamma_i)}^{\text{coluna } i+3} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_{i3}} \dot{\boldsymbol{\Theta}} \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Para determinar  $\mathbf{G}_{i3}$  é necessário uma relação entre as velocidades dos pontos  $C_i$  com a da plataforma

$$\begin{aligned} \vec{r}_{Ci} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + h \vec{N}(\lambda_i + \alpha) \Rightarrow \dot{\vec{r}}_{Ci} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \dot{\alpha} h \overline{dN}(\lambda_i + \alpha) \\ \dot{\vec{r}}_{Ci} &= \{ \mathbf{H}_N + h \overline{dN}(\lambda_i + \alpha) \mathbf{G}_N \} \dot{\boldsymbol{\Theta}} \end{aligned}$$

Onde usou-se (4.3.4). Só então, que partimos para ligar a rotação deste último corpo com os atuadores

$$\vec{r}_{Ci} = \vec{r}_{Bi} + l_2 \vec{N}(\beta_i) \Rightarrow \dot{\vec{r}}_{Ci} = \dot{\vec{r}}_{Bi} + \dot{\beta}_i l_2 \overline{dN}(\beta_i)$$

Fazendo uso do fato de  $[-\text{sen}(\omega) \quad \cos(\omega)] \begin{bmatrix} -\text{sen}(\omega) \\ \cos(\omega) \end{bmatrix} = 1$ , ou seja  $\overline{dN}(\beta_i)^T \overline{dN}(\beta_i) = 1$ ,

ao se isolar  $\dot{\beta}_i$  obtém-se

$$\dot{\beta}_i = \dot{\rho}_{i3} = \frac{1}{l_2} \overline{dN}(\beta_i)^T \{ \dot{\vec{r}}_{Ci} - \dot{\vec{r}}_{Bi} \}$$

Ainda podemos usar as relações (4.3.4) e (4.3.5) para chegar a

$$\dot{\rho}_{i3} = \underbrace{\left\{ \frac{1}{l_2} \overline{dN}(\beta_i)^T \{ \mathbf{H}_N + h \overline{dN}(\lambda_i + \alpha) \mathbf{G}_N + \mathbf{H}_{i3} \} \right\}}_{\mathbf{G}_{i3}} \dot{\boldsymbol{\Theta}} \quad (4.3.11)$$

A fim de simplificar o procedimento computacional definimos  $K_{ij} = \begin{bmatrix} H_{ij} \\ G_{ij} \end{bmatrix}$  e  $K_N = \begin{bmatrix} H_N \\ G_N \end{bmatrix}$ .

Por fim, é interessante explicitar, agora com todos os esmiuçamentos definidos, a ligação entre as equações desenvolvidas para velocidades com os desejados deslocamentos virtuais

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_{ij} &= \mathbf{H}_{ij} \dot{\Theta} \Rightarrow \delta \vec{r}_{ij} = \mathbf{H}_{ij} \delta \Theta \\ \dot{\rho}_{ij} &= M_{ij} \dot{\Theta} \Rightarrow \delta \rho_{ij} = M_{ij} \delta \Theta \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{r}}_{ij} &= \mathbf{H}_{ij} \dot{\Theta} \Rightarrow \delta \vec{r}_{ij} = \mathbf{H}_{ij} \delta \Theta \\ \dot{\rho}_{ij} &= M_{ij} \dot{\Theta} \Rightarrow \delta \rho_{ij} = M_{ij} \delta \Theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \delta \vec{r}_{ij} \\ \delta \rho_{ij} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{ij} \delta \Theta \quad (4.3.12)$$

Analogamente, o mesmo pode ser feito para o *end-effector*.

#### 4.2.6 FORÇAS E MOMENTOS DE INÉRCIA

Por (4.3.4) podemos ver que para o cálculo das forças e momentos de inércia de um corpo num dado instante as informações necessárias dizem respeito à cinemática. Procurando elas, foram explicitadas as posições e orientações de cada corpo em função das variáveis já obtidas e procedeu-se com a derivada numérica para a obtenção das suas velocidades e acelerações.

Mais detalhadamente: ao discretizarmos as funções no tempo por intervalos de  $\Delta t$ , estes interstícios foram tomados como infinitésimos e as respectivas derivadas baseadas nisso, de forma que uma função discretizada  $f$  qualquer traga

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t} \\ \ddot{f}(t) &= \frac{\dot{f}(t) - \dot{f}(t - \Delta t)}{\Delta t} \Rightarrow \ddot{f}(t) \\ &= \frac{f(t) - 2f(t - \Delta t) + f(t - 2\Delta t)}{\Delta t^2} \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Assim, substituindo  $f(t)$  todas as funções  $\vec{r}_{ij}$  e  $\rho_{ij}$  e suas derivadas no tempo foram obtidas.

#### 4.2.7 MODELAGEM DINÂMICA

Denotando o vetor  $\boldsymbol{\tau}$  como o representante dos momentos e forças instantâneos nos motores rotativos e lineares, respectivamente, explicita-se que a soma de todos os trabalhos aplicados pelos atuadores é

$$\delta w_{\text{at}} = \boldsymbol{\tau}^T \delta \boldsymbol{\Theta}$$

Também sabemos que o trabalho virtual aplicado em um corpo, tendo-se as informações cinemáticas num ponto  $P$  não necessariamente o centro de massa é descrito por (4.3.4). Completando com a informação de que  $\delta w_{\text{at}}$  é igual a soma dos trabalhos aplicados sobre todos os corpos móveis do sistema, teremos

$$\boldsymbol{\tau}^T \delta \boldsymbol{\Theta} = \mathbf{F}_N \delta \vec{r}_N + M_N \delta \rho_N \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\mathbf{F}_{ij} \cdot \delta \vec{r}_{ij} + M_{ij} \cdot \delta \rho_{ij})$$

As variáveis  $\mathbf{F}_N$ ,  $M_N$ ,  $\mathbf{F}_{ij}$  e  $M_{ij}$  envolvidas são obtidas com (4.3.4) em conjunto com (4.3.13), sendo que os subíndices referem-se ao corpo rígido da mesma forma que para as matrizes relacionadoras de velocidades parciais desenvolvidas até agora.

Definido  $\mathbf{p}_{ij} = [\mathbf{F}_{ij}^T \quad M_{ij}]$ ,  $\mathbf{p}_N = [\mathbf{F}_N^T \quad M_N]$ , e ecrevendo os deslocamentos virtuais em função de  $\boldsymbol{\Theta}$  de acordo com as equações (4.3.5) até (4.3.12)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^T \delta \boldsymbol{\Theta} &= \left\{ \mathbf{p}_N \mathbf{K}_N + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{p}_{ij} \mathbf{K}_{ij} \right\} \delta \boldsymbol{\Theta} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boldsymbol{\tau}^T = \mathbf{p}_N \mathbf{K}_N + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{p}_{ij} \mathbf{K}_{ij} \end{aligned}$$

Que é a relação procurada. Com ela podemos prever o torque ou força necessário de cada atuador para uma dada movimentação do *end-effector* e dos atuadores lineares  $\delta_i$  e proceder uma otimização numérica para minimizá-lo.

### 4.3 SIMULAÇÕES DO 3PRRR

No último semestre de pesquisa definiu-se como meta o estabelecimento de processos de otimização das posições dos atuadores lineares a fim de proporcionar uma performance dinâmica superior para o aparato 3PRRR. Foram feitas diversas tentativas, a seguir apresentam-se os resultados mais significantes obtidos neste processo, sendo alguns de evidente potencial prático já pelos métodos utilizados e outros interessantes como levantamento de possibilidades versáteis e robustas mas que exigem maior reflexão e estudo para sua aplicação.

Como trata-se da aplicação de um modelo desenvolvido na pesquisa de iniciação científica, no primeiro momento foram implementadas computacionalmente as relações para movimentações diversas sem qualquer otimização com o objetivo de verificar sua veracidade.

Divide-se este estudo em duas classes de metas diferentes: a otimização *off-line*, na qual encontra-se as melhores posições estáticas dos  $\delta_i$  com atuação apenas dos motores rotativos no decorrer da movimentação do *end-effector*; e a *on-line*, que procura a melhor atuação dinâmica conjunta dos motores lineares e rotativos.

#### 4.3.1 OTIMIZAÇÃO OFF-LINE

Nesta etapa é procurada a melhor configuração dos atuadores lineares de forma que travados durante a tarefa haja a menor solicitação dos motores rotativos para uma dada movimentação do atuador final. Para as próximas simulações apresentadas os parâmetros do robô utilizados seguindo a notação indicada anteriormente são

$$\left\{ \begin{array}{l} h = 0.1 \text{ m} \\ a = 1 \text{ m} \\ \delta_{m\acute{a}x} = 1 \text{ m} \\ l_1 = 1.3 \text{ m} \\ l_2 = 1.3 \text{ m} \\ m_1 = 0.4 \text{ kg} \\ m_2 = 0.2 \text{ kg} \\ m_3 = 0.2 \text{ kg} \\ m_n = 0.4 \text{ kg} \end{array} \right.$$

Sendo  $\delta_{max}$  o maior deslocamento possível dos atuadores lineares a partir do centro (da forma imposta, a amplitude de movimento destes é de 2 m), e os subíndices 1, 2, 3 e n nas massas são referentes aos corpos em  $A_i$ , links  $A_iB_i$ , links  $B_iC_i$  e *end-effector*, respectivamente. Os momentos de inércia das barras foram calculadas por  $m \cdot s^2/3$  (s de acordo 4.3.4) e o do atuador final foi assumido  $0,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

Para exemplificação dos principais métodos de otimização serão apresentadas duas movimentações do *end-effector*. Como uma das principais potenciais tarefas a ser realizada pelo robô é a pega-e-põe (*pick-and-place*) estes deslocamentos são ligações de posições iniciais a finais dadas por meio período de seno de cada parâmetro de posição do atuador final. Ambos desenvolvem a tarefa em 2 segundos. O primeiro exemplo, e de menor exigência do aparato tem como posições iniciais e finais seguindo as notações indicadas pela figura 15 (subíndice 0 indica posição inicial e f final)

$$\text{TRAJETÓRIA 1: } \begin{cases} x_0 = 0,3 \text{ m} & y_0 = -0,3 \text{ m} & \alpha_0 = -0,3 \cdot \pi \text{ rad} = -54^\circ \\ x_f = -0,3 \text{ m} & y_f = 0,3 \text{ m} & \alpha_f = 0,3 \cdot \pi \text{ rad} = 54^\circ \end{cases}$$

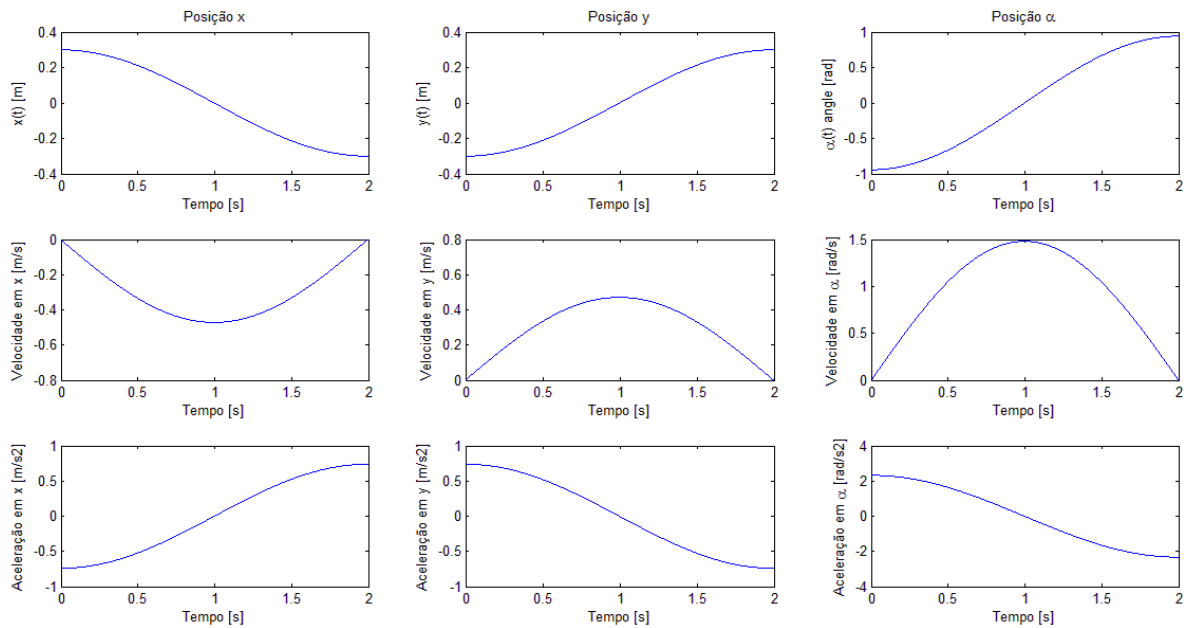


Figura 17: Informações da TRAJETÓRIA 1

Esta trajetória desenvolve aceleração linear máxima de  $1,05 \text{ m/s}^2$  e rotacional de  $2,32 \text{ rad/s}^2$ .

Para proceder a otimização foi usada discretização de pontos a cada  $10^{-2} \text{ s}$  e o posterior cálculo mais exato já tendo o potencial ponto ótimo com  $10^{-4} \text{ s}$ . Foi desenvolvida uma função

capaz de calcular máximo torque exigido ao longo da trajetória para uma dada posição fixa dos atuadores lineares. Tal função foi minimizada retornando os valores

$$\begin{cases} \delta_1 = -0,4332 \text{ m} \\ \delta_2 = -0,1811 \text{ m} \\ \delta_3 = -0,5571 \text{ m} \end{cases}$$

Sendo assim, temos que para estas localizações estáticas dos pontos  $A_i$  o torque máximo é o menor possível sob os parâmetros descritos. Abaixo são representadas as posições inicial e final dadas pela animação desenvolvida computacionalmente

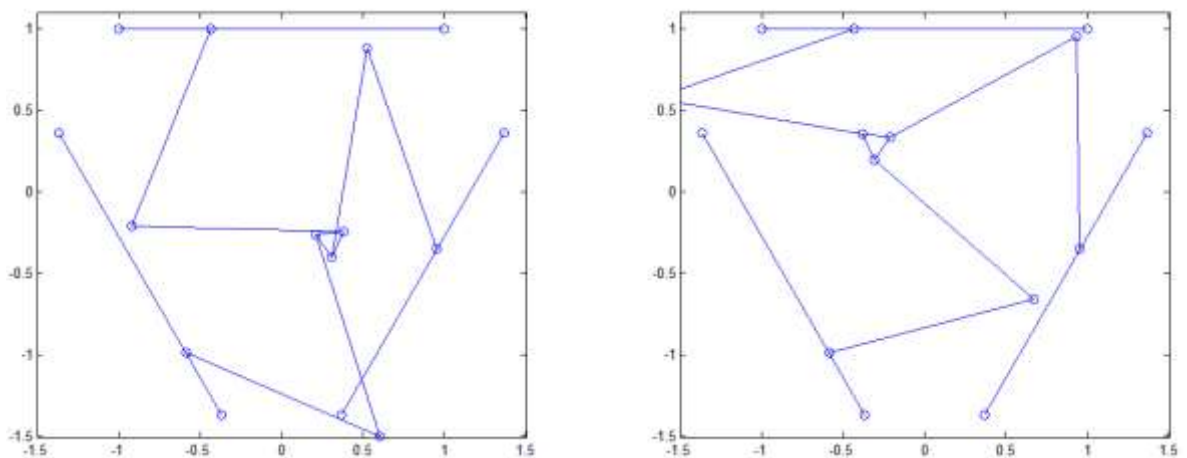


Figura 18: Posições inicial e final da TRAJETÓRIA 1

O máximo torque exigido nos motores rotativos nesta otimização *off-line* foi de 3,32 N.m. A seguir são apresentados os torques necessários nos três atuadores ao longo do deslocamento

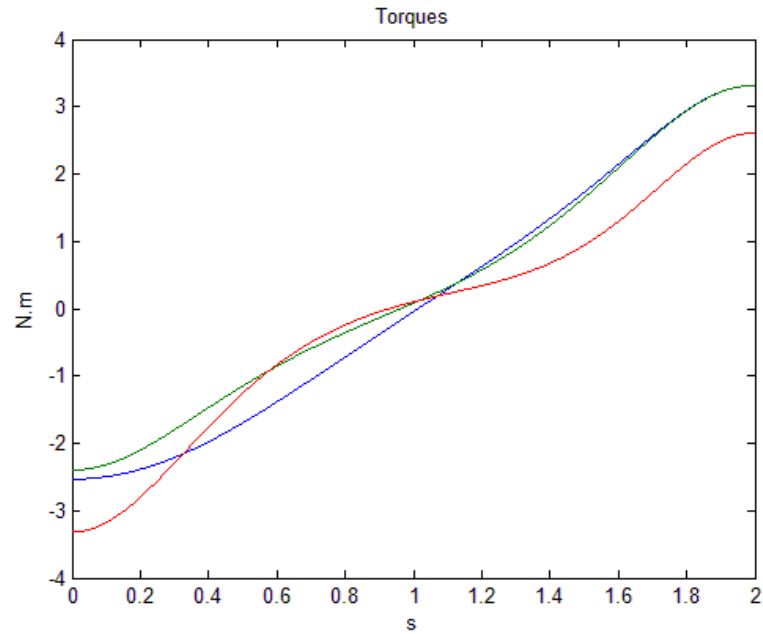


Figura 19: Torques com otimização off-line para a TRAJETÓRIA 1

A título de comparação, foram calculados os torques para as mesmas condições sem a aplicação da otimização, com os  $\delta_i$  em suas origens (equivalente ao não redundante 3-RRR). Neste caso, o torque máximo é de 10,16 N.m, demonstrando a aplicabilidade desta otimização.

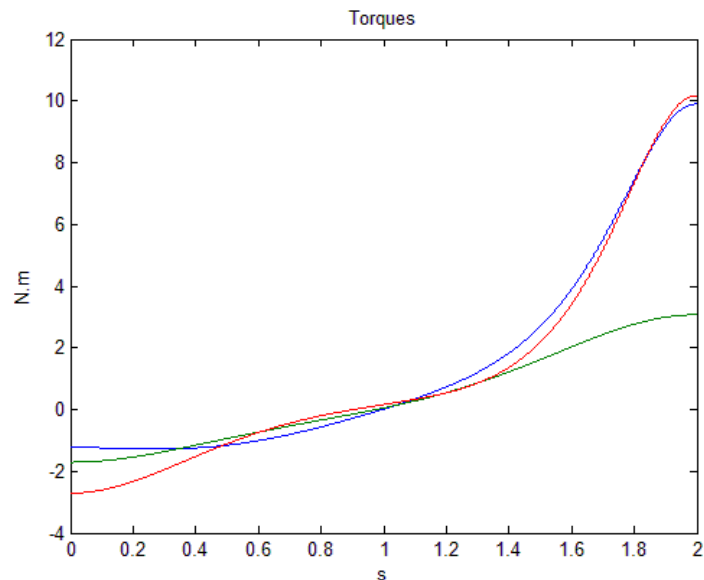


Figura 20: Torques sem otimização para a TRAJETÓRIA 1

É interessante observar que para este método de otimização o acréscimo de investimento em atuadores em comparação com o aparato não redundante é pequeno, já que os motores

responsáveis pela reconfiguração devem agir sob baixo carregamento na prévia do trabalho e são travados no desenvolvimento da tarefa.

Ainda será apresentado outro exemplo evidenciador da capacidade deste método de supressão de singularidades, evento tido como inadmissível para a operação de robôs paralelos. Para isso o descrito para a *TRAJETÓRIA 1* foi aplicado da mesma forma no seguinte caso

$$\text{TRAJETÓRIA 2: } \begin{cases} x_0 = 0,62 \text{ m} & y_0 = -0,62 \text{ m} & \alpha_0 = -0,3 \cdot \pi \text{ rad} = -54^\circ \\ x_f = -0,62 \text{ m} & y_f = 0,62 \text{ m} & \alpha_f = 0,3 \cdot \pi \text{ rad} = 54^\circ \end{cases}$$

Nestas condições, a aceleração linear máxima é de  $2,16 \text{ m/s}^2$ , e a posição ótima obtida é

$$\begin{cases} \delta_1 = -1,0000 \text{ m} \\ \delta_2 = 0,3448 \text{ m} \\ \delta_3 = 1,0000 \text{ m} \end{cases}$$

A seguir, são apresentadas informações referentes a *TRAJETÓRIA 2* que exige um torque máximo de  $7,44 \text{ N.m}$ .

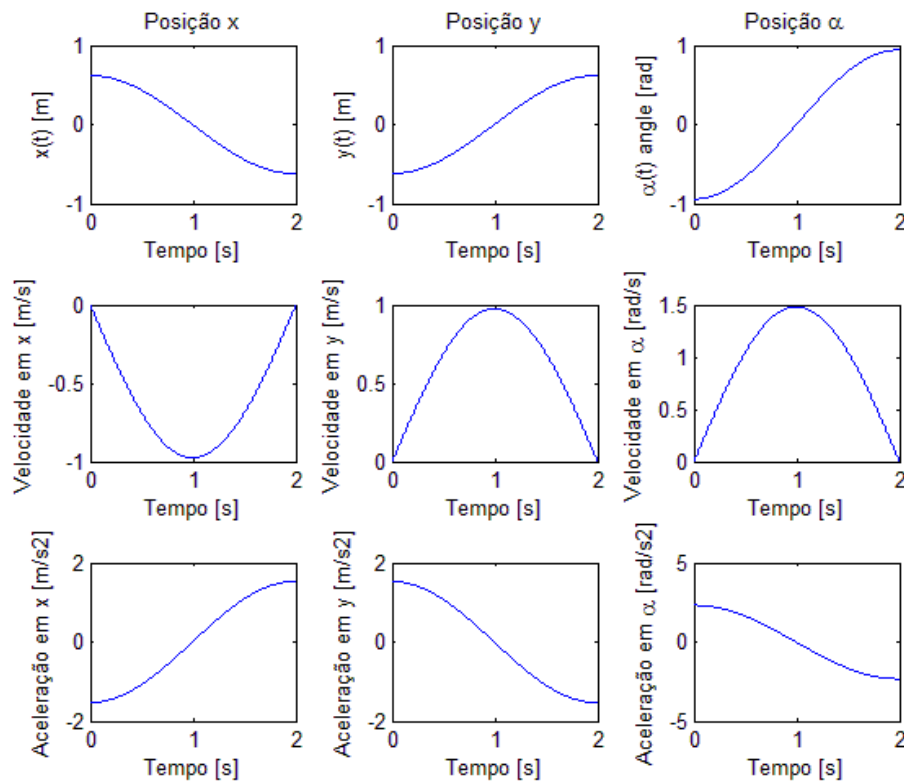


Figura 21: Informações da TRAJETÓRIA 2

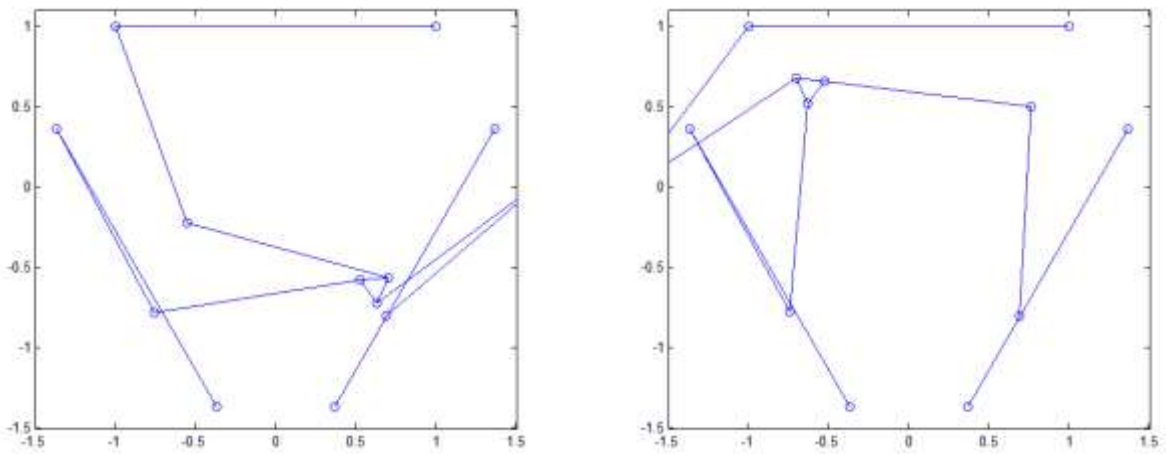


Figura 22: Posições inicial e final da TRAJETÓRIA 2

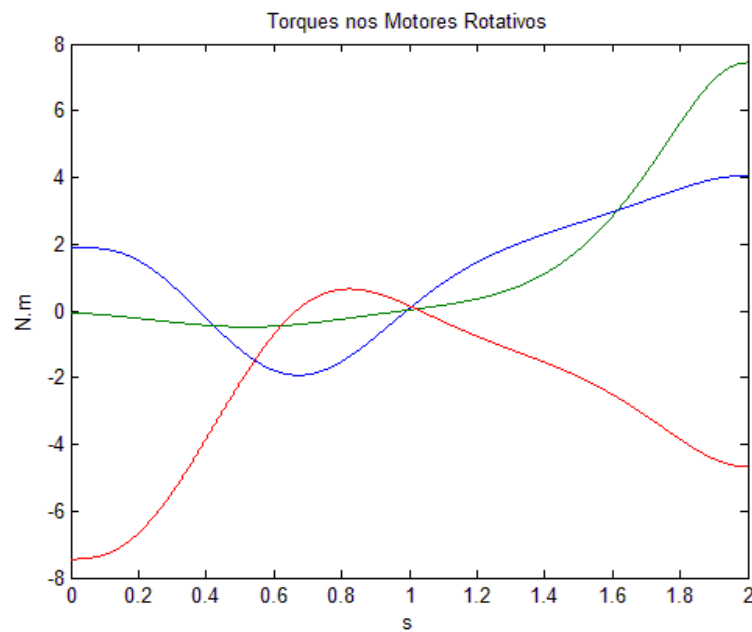


Figura 23: Torques com otimização off-line para a TRAJETÓRIA 2

Enquanto que para o robô não redundante teríamos os torques evidenciando a presença de uma singularidade.

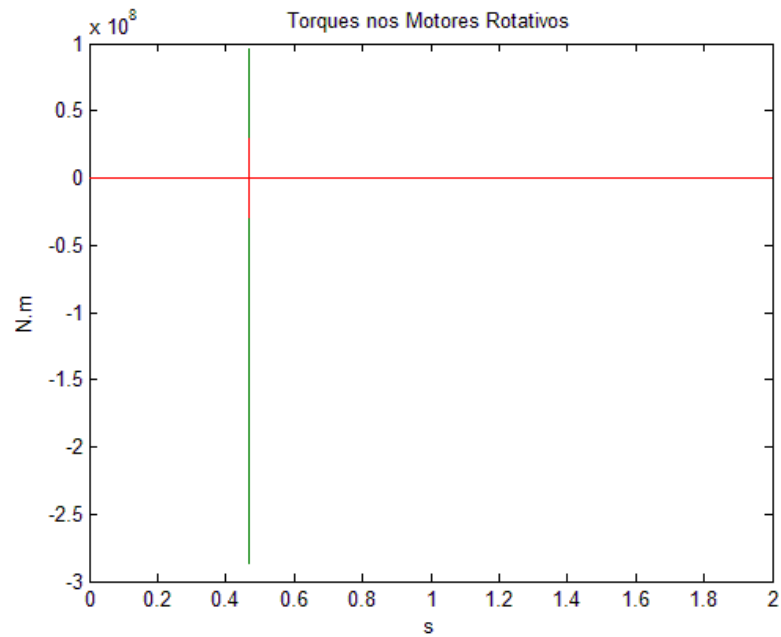


Figura 24: Torques sem otimização para a TRAJETÓRIA 2

#### 4.3.2 OTIMIZAÇÃO ON-LINE

Para esta classe de otimização desejamos encontrar a movimentação dos pontos  $A_i$  no decorrer da tarefa que minimize as solicitações. É evidente que se faz necessária alguma restrição dos dados de entrada para o cálculo dinâmico, já que a diversidade de possibilidades das movimentações de  $\delta_i$  durante o trabalho impossibilita a manipulação e julgamento de eficiência.

Foram aplicados basicamente duas formas de restrição aqui denotadas de otimização por *Posições limite* e *Instante-a-instante*.

A primeira em que a minimização escolhe as posições iniciais e finais dos atuadores lineares ligando-as por senos suaves de forma a otimizar o trabalho foi a que apresentou melhores resultados e será a primeiro a ser detalhado.

A segunda na qual a posição inicial é escolhida minimizando a norma da Jacobiana obtida pela relações de 4.3.2 e as posições subsequentes são deliberadas em cadeia minimizando as solicitações implicadas pelos deslocamentos a serem otimizados desenvolveu resultados inconclusivos mas merecedores de maiores estudos.

➤ Otimização por Posições limite

Foi desenvolvida uma função responsável pelo cálculo dinâmico que tem como entrada as posições finais e iniciais dos atuadores lineares. A função liga as posições limite por deslocamentos suaves e calcula o maior torque exigido por tal movimentação. O restante das rotinas escolhe os seis valores (três  $\delta$ 's iniciais e três finais) de forma a minimizar a solicitação dinâmica.

Ainda é importante ressaltar que como os motores lineares agem durante a tarefa, suas solicitações também devem ser pesadas na otimização. Então é necessário corrigir os carregamentos apresentados como força para que estes sejam coerentes com os torques referentes aos motores rotativos. Para configurações que façam uso de guias lineares ligadas a motores rotativos recomenda-se ajustar a massa  $m_1$  e introduzir uma constante relativa ao passo da respectiva rosca. Já para a aplicação de motores lineares é conveniente introduzir uma relação que equipare os custos implicados, *e.g.*: aproximar para a faixa esperada o custo do motor por *Newton* do motor linear e relacioná-lo com o gasto por *Newton.metro* do motor rotativo.

No caso desta pesquisa é interessante aplicar o caso das guias lineares, o que implica numa constante relacionadora das forças aplicadas em  $A_i$  e os torques impulsionando as guias razoavelmente menor que a unidade. Desta forma, nas simulações desenvolvidas os limitantes para o carregamento máximo foram todos os referentes aos motores rotativos mesmo para relações que supervalorizam as forças nos lineares. Sendo assim, esta preocupação torna-se dispensável nos exemplos apresentados.

Da mesma forma que para a otimização *off-line* foi usada discretização grosseira na minimização da função e posterior cálculo preciso com  $2 \cdot 10^4$  pontos.

Para a *TRAJETÓRIA 1* a movimentação ótima reduz o torque máximo necessário para 2,60 N.m. Seguem informações obtidas pela otimização.

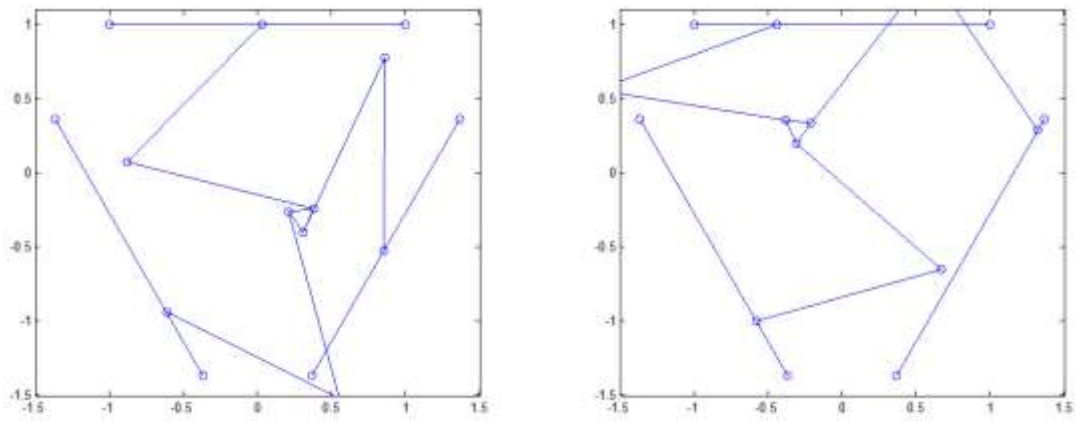


Figura 25: Posições inicial e final com otimização on-line para a TRAJETÓRIA 1

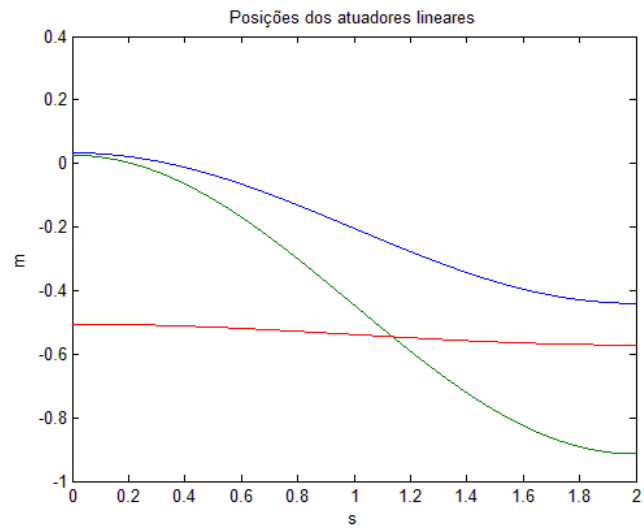


Figura 26: Posições  $\delta_i$  para a TRAJETÓRIA 1

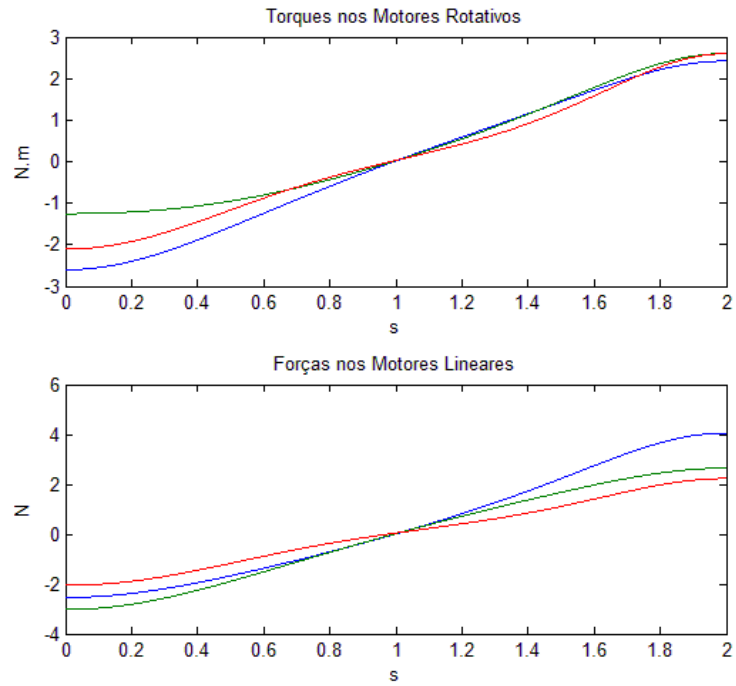


Figura 27: Solicitações com otimização on-line para a TRAJETÓRIA 1

Para o deslocamento de maior amplitude o torque exigido é 5,58 N.m. Abaixo, detalhes para a TRAJETÓRIA 2

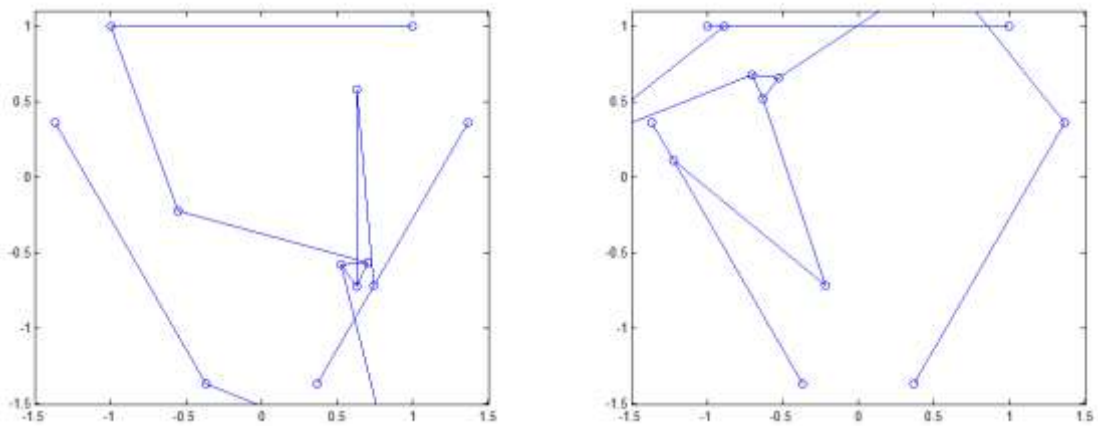


Figura 28: Posições inicial e final com otimização on-line para a TRAJETÓRIA 2

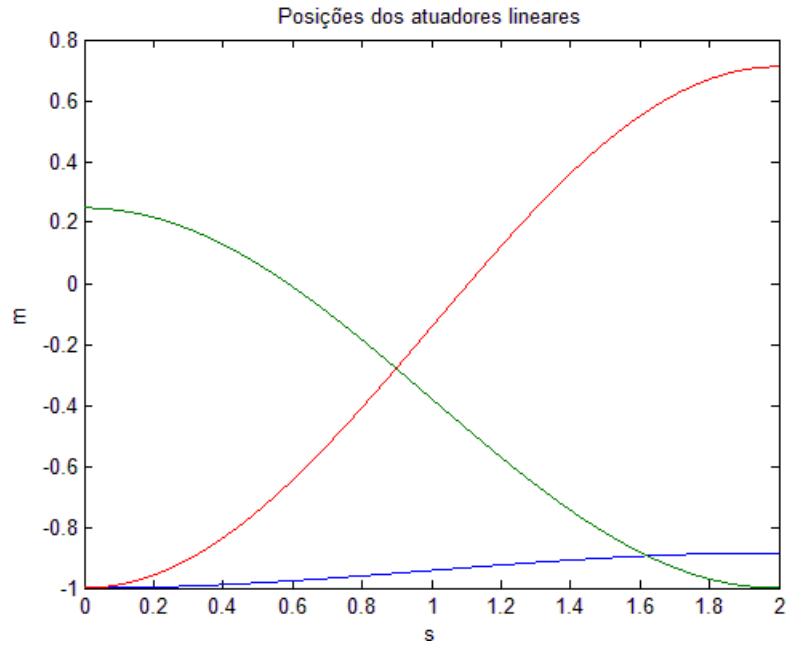


Figura 29: Posições  $\delta_i$  com otimização on-line para a TRAJETÓRIA 2

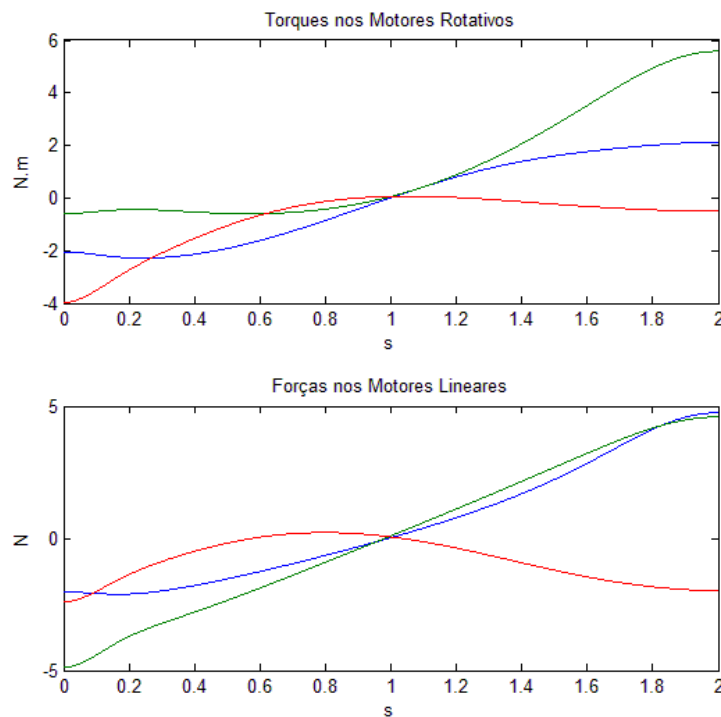


Figura 30: Solicitações com otimização on-line para a TRAJETÓRIA 2

Este último exemplo é útil para destacar informações importantes sobre o processo. Vemos pela figura representante da posição inicial do robô que caso fosse aplicada este deslocamento haveria interferência entre diversos *links* impossibilitando sua realização. Assim, se faz necessário o desenvolvimento de rotinas responsáveis pela detecção de choques. Também fica

evidente que para movimentos amplos a otimização *on-line* lança mão automaticamente de grande parte das posições possíveis dos atuadores lineares: a cadeia abaixo a esquerda faz uso do intervalo aproximado  $[-1;0.7]$ , 85% do total  $[-1;1]$ . Isto indica a aplicabilidade deste método.

Ainda baseados neste caso, serão apresentados os métodos mais importantes de conferência das relações e métodos computacionais. Um passo relevante de verificação foi a constatação de veracidade da equação 4.3.3. Se coerente, a matriz Jacobiana de um dado instante deve ligar as velocidades dos atuadores às do *end-effector*. Usando este raciocínio foram comparados a cada instante os valores obtidos pelo lado esquerdo (derivada numérica das posições do *end-effector*) e pelo lado direito (a Jacobiana do instante multiplicada pelas derivadas dos atuadores) de 4.3.3. A porcentagem de erro obtida é apresentada abaixo ao longo dos 2 s de movimentação

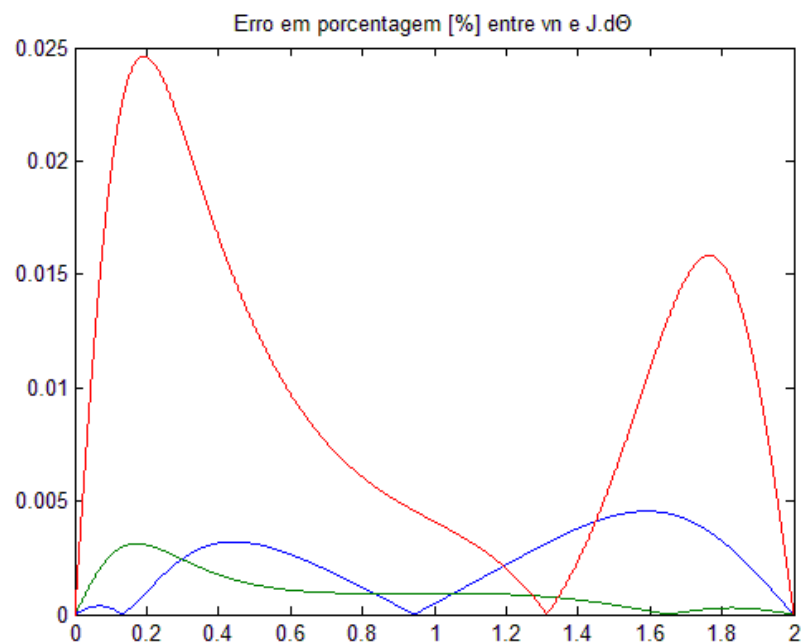


Figura 31: Divergência percentual entre velocidades

Vendo que o erro máximo é menor de 0,025% fica esclarecida a coerência das relações algébricas obtidas e dos métodos computacionais usados. Procedimento análogo foi implementado para todos os vetores de velocidades parciais, apresentando também bons resultados.

Outra verificação implementada foi a fim de julgar a coerência do princípio dos trabalhos virtuais usado. Para isso foi aferida a diferença entre a potência imprimida pelos atuadores e a soma da variação de energia cinética nos corpos rígidos. Chamando a primeira de  $dW$  e a segunda de  $dEc$  a porcentagem representante dos erro entre estes e gráfico simultâneo são apresentadas abaixo. O pico presente no instante próximo a 1s é provocado pelo valor nulo das funções comparadas entre si.

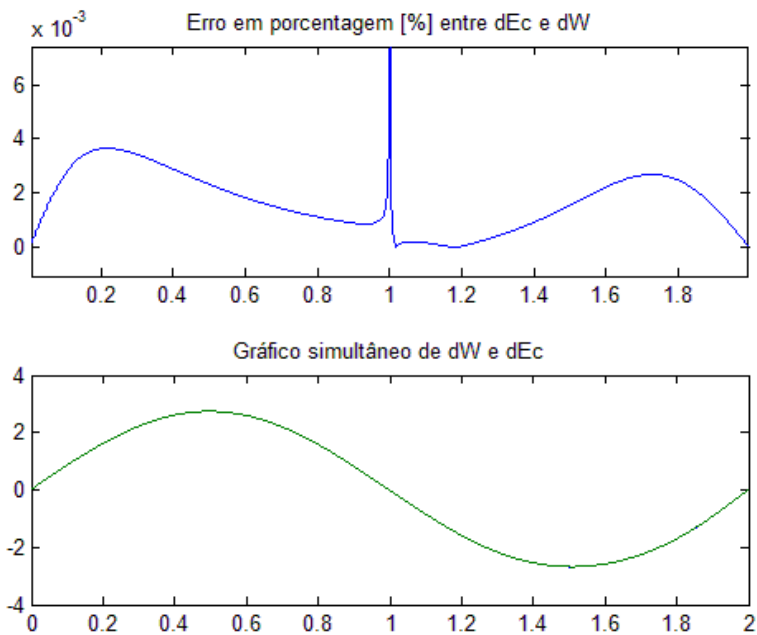


Figura 32: Divergência percentual entre variações de energia potência nos atuadores; e plotagem simultânea

Também foram conferidas os resultados geométricas da cinemática inversa.

Ao fim dos exemplos, abaixo se encontra uma síntese dos torque necessários obtidos

	On-line	Off-line	3-RRR
Trajectoria 1	2,6 N.m	3,32 N.m	10,16 N.m
Trajectoria 2	5,58 N.m	7,44 N.m	-----

Vê-se que já a otimização *off-line* apresenta forte aplicabilidade devido a sua alta eficiência junta de baixa exigência de investimento em atuadores. Para o método *on-line* obteve-se redução em torno de 23% em comparação com a anterior, indicando ação sensível. O apresentado nesta classe de otimização representa apenas um primeiro indicativo do potencial

para o aparato, deve-se ampliar as possibilidades para estender a eficiência do processo. É possível, por exemplo, acrescentar pontos intermediários.

➤ Otimização Instante-a-instante

A pretensão deste método é proporcionar uma otimização progressiva das posições  $\delta_i$  a cada instante discretizado para induzir uma trajetória com baixos níveis de sollicitação dinâmica e suprimindo a ação de singularidades para diversas formas de movimentação do *end-effector*. Espera-se, que com a escolha da melhor configuração dos  $\delta_i$  para um dado instante tendo os anteriores fixos, haja uma continuidade promissora para dinâmica da máquina.

A posição inicial é escolhida minimizando-se a norma da matriz Jacobiana homogênea obtida pelas relações da seção 4.3.2. No segundo instante discretizado os atuadores lineares permanecem na mesma posição para não proporcionar velocidade inicial não nula. A partir do terceiro instante é possível obter todas as relações cinemáticas, portanto também as sollicitações em função das hipotéticas posições dos atuadores lineares em conjunto com a posição da plataforma. No caso a seguir apresentado, minimizou-se a norma de  $\tau$  variando-se os  $\delta_i$ . Para isso, seguindo a sugestão da seção anterior, foi usado uma fator de correção de 1/8 para relacionar as forças nos atuadores lineares com os torques dos motores rotativos.

Porém na aplicação deste método ocorreram alguns impasses. É frequente os atuadores lineares serem levados para seus limitantes, seja pelo alcance de  $l_1 + l_2$  ou pelo  $\delta_{max}$  assumido, restringindo assim a ação da minimização caso ela seja dirigida para o sentido limitado.

Como pode ser visto na **Figura 24** a singularidade apresenta ação repentina e aguda. Usando a otimização nesta forma progressiva as singularidades acabam se mostrando num instante sem ter dado indícios de sua presença no ponto anterior.

A seguir é apresentado um exemplo que indica estes problemas mas também as potencialidades do método. Os parâmetros usados para esta simulação e a trajetória seguida estão apresentadas abaixo. O valor de  $\delta_{max}$  foi assumido exageradamente grande para minimizar os efeitos mencionados.

$$\left\{ \begin{array}{l} h = 0.1 \text{ m} \\ a = 1 \text{ m} \\ \delta_{m\acute{a}x} = 3 \text{ m} \\ l_1 = 1.4 \text{ m} \\ l_2 = 1.4 \text{ m} \\ m_1 = 0.4 \text{ kg} \\ m_2 = 0.2 \text{ kg} \\ m_3 = 0.2 \text{ kg} \\ m_n = 0.4 \text{ kg} \end{array} \right.$$

$$TRAJETÓRIA 2: \begin{cases} x_0 = -0,7 \text{ m} & y_0 = -0,8 \text{ m} & \alpha_0 = -0,2 \cdot \pi \text{ rad} = -36^\circ \\ x_f = 0,7 \text{ m} & y_f = 0,8 \text{ m} & \alpha_f = 0,2 \cdot \pi \text{ rad} = 36^\circ \end{cases}$$

Vê-se que os picos de solicitação dinâmica ocorrem, mas sem a agressividade característica das singularidades como na **Figura 24**, alcançando torque da ordem de  $10^8$  N.m. Isto indica possível capacidade do processo de reconhecer a ameaça da singularidade e anulá-la imperfeitamente devido a sua proximidade.

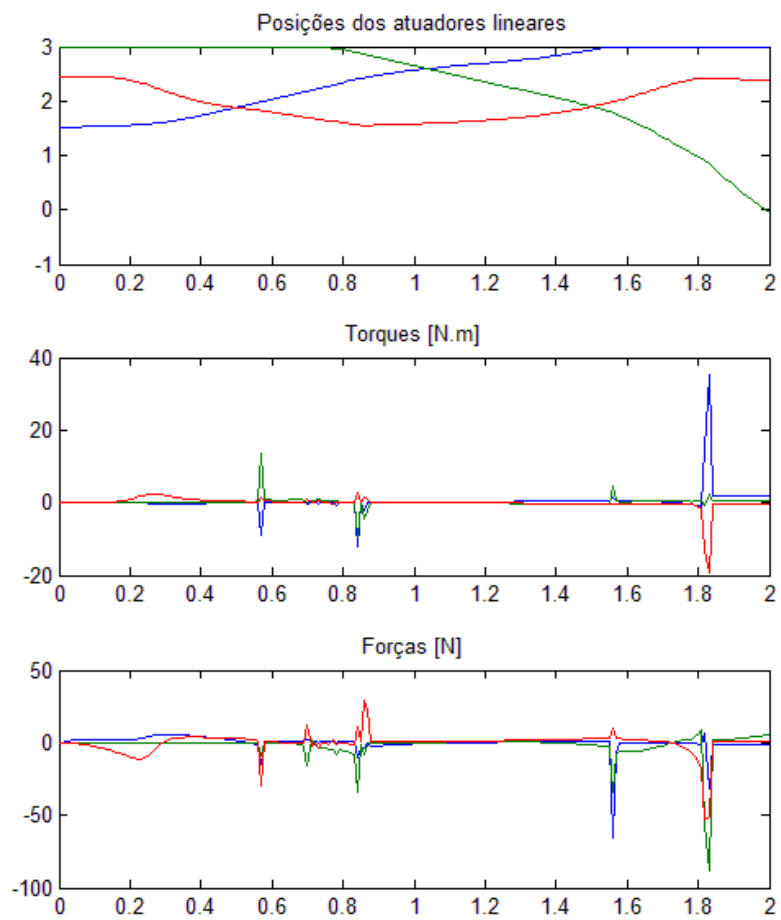


Figura 33: Dados referentes à otimização Instante-a-instante

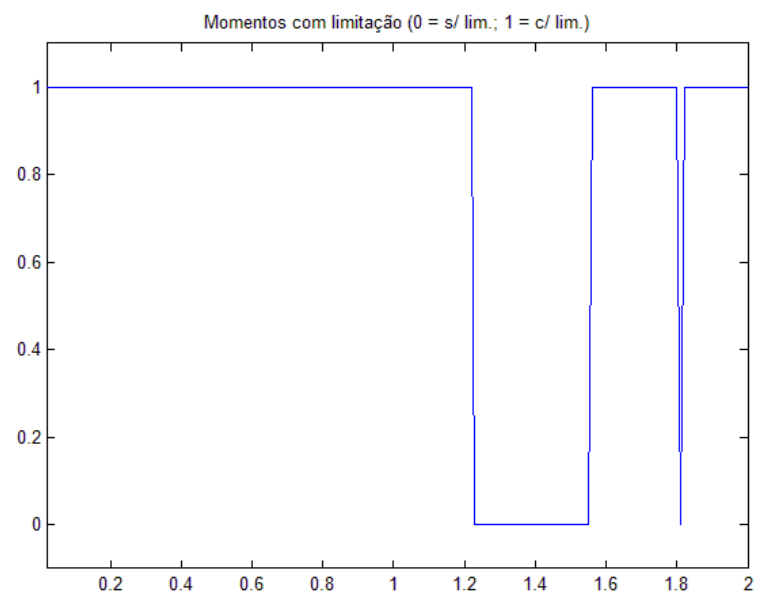


Figura 34: Representação dos instantes que apresentam alguma limitação nas cadeias ao longo do trajeto (1 indica presença de limitação e 0 indica ausência)

Foram feitas algumas tentativas para aprimoramento do método: aumentando os pontos de discretização para melhorar a continuidade dos torques e forças, e usando uma previsão das solicitações dos instantes subsequentes no ponderamento da posição atual. Mas os resultados foram inconclusivos.

O melhoramento deste método demanda cuidado na escolha dos parâmetros envolvidos. Diversas variáveis no processo de minimização se inter-relacionam influenciando os resultados, *eg.*: uma discretização de pontos mais densa exige que o intervalo entre posições de  $\delta_i$  na minimização seja reduzida já que variações de mesma dimensões entre discretizações mais próximas proporcionam maiores acelerações e velocidades.

Como deve ser feita uma minimização em três variáveis, outra dificuldade imposta neste processo é o tempo gasto em cálculos computacionais. Um trabalho com  $2 \cdot 10^4$  pontos (exatidão adotadas nos processos de cálculo final em 4.4.2.1) demanda aproximadamente 28 horas de processamento.

## 5. CONCLUSÕES

Os instrumentos e resultados obtidos indicam o potencial dinâmico teórico proporcionado pela aplicação da redundância cinemática em manipuladores paralelos planares, contribuindo diretamente no objetivo amplo definido. Incluso neste processo analítico, destaca-se os modelos cinemáticos e dinâmicos do manipulador 3PRRR desenvolvidos ao longo do projeto. São instrumentos necessários para a presente avaliação, mas também relevantes para a evolução da pesquisa na área. Foram elementos que possibilitaram o levantamento de dados numéricos reveladores do desempenho comparativo de cada modelo — contrastando assim a redundância cinemática — mas, sendo uma simulação do sistema, também poderá ser conceito base para qualquer interface com algum robô análogo.

No desfecho atual, temos mais claro o cenário fortemente promissor da configuração robótica proposta, mas ainda carente de aprofundamentos. Os principais pontos a serem abordados futuramente são análises experimentais em protótipo físico e esmiuçamento do potencial proporcionado pela otimização *on-line*, concretizada como uma metodologia eficiente exigida pela vasta gama de opções proporcionada com um *hardware* capaz de reconfiguração cinemática.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] J-P. Merlet. Redundant parallel manipulators. 2 ed. França: Springer, 2006.
- [2] Ebrahimi, I.; Carretero, J. A.; Boudreau, R.; 3-PRRR redundant planar parallel manipulator: Inverse displacement, workspace and singularity analyses. *Mechanism and Machine Theory*. v. 42, p. 1007–1016, 2007.
- [3] Wu, J.; Jinsong W.; You, Z. A comparison study on the dynamics of planar 3-DOF 4-RRR, 3-RRR and 2-RRR parallel manipulators. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*. v. 27, p. 150–156, 2011.
- [4] Boudreau, R.; Nokleby, S. Force optimization of kinematically-redundant planar parallel manipulators following a desired trajectory. *Mechanism and Machine Theory*. v. 56, p. 138–155, 2012.
- [5] Kotlarsky, J.; Abdellatif, H.; Heinmman, B; Improving the pose accuracy of a planar 3RRR parallel manipulator using kinematic redundancy and optimized switching patterns. 2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation Pasadena. p. 3863 – 3868, 2008.
- [6] Kotlarski, J.; Thanh, T. D.; Heimann, B.; Ortmaier, T. Optimization strategies for additional actuators of kinematically redundant parallel kinematic machines. 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation. p. 656 – 661, 2010.