

**Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Elétrica**

**UTILIZAÇÃO DE FATORES DE
PARTICIPAÇÃO ESTENDIDOS NA
DETECÇÃO DE FLUTUAÇÕES DE
TENSÃO EM SISTEMAS COM
GERAÇÃO SÍNCRONA DISTRIBUÍDA**

Anna Giuglia Menechelli Moraco

São Carlos, 2011

ANNA GIUGLIA MENECELLI MORACO

**UTILIZAÇÃO DE FATORES DE
PARTICIPAÇÃO ESTENDIDOS NA
DETECÇÃO DE FLUTUAÇÕES DE
TENSÃO EM SISTEMAS COM
GERAÇÃO SÍNCRONA DISTRIBUÍDA**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Escola de Engenharia de São
Carlos, da Universidade de São Paulo.

Curso de Engenharia Elétrica
com ênfase em Eletrônica

ORIENTADOR: Rodrigo Andrade Ramos

São Carlos, 2011

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

Moraco, Anna Giuglia Menechelli.

M827u Utilização de fatores de participação estendidos na detecção de flutuações de tensão em sistemas com geração síncrona distribuída. / Anna Giuglia Menechelli Moraco ; orientador Rodrigo Andrade Ramos — São Carlos, 2011.

Monografia (Graduação em Engenharia Elétrica com ênfase em Eletrônica) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2011.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Nome: Anna Giuglia Menechelli Moraco

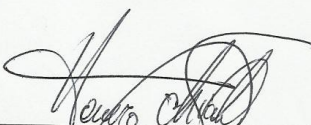
Título: "Utilização de Fatores de Participação Estendidos na Detecção de Flutuações de Tensão em Sistemas com Geração Síncrona Distribuída."

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado
em 21 / 11 / 2011,

com NOTA dez (10 , 0), pela comissão julgadora:

Marcelo Favoretto Castoldi
Prof. Dr. Marcelo Favoretto Castoldi - UTFPR/Campus CP

Ana Paula Mijolaro
Profa. Dra. Ana Paula Mijolaro - ETEC/Prof. Armando Bayeux Silva



Prof. Associado Homero Schiabel
Coordenador da CoC-Engenharia Elétrica
EESC/USP

Dedicatória

Dedico este trabalho de conclusão de curso aos meus pais os quais sempre me apoiaram e incentivaram a buscar meus sonhos e conquistar meus objetivos e que me proporcionaram toda a base para que eu me tornasse a pessoa que sou hoje.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais por me proporcionarem a oportunidade de estudar em boas escolas para que eu pudesse ingressar na melhor universidade do país.

Agradeço ao professor Rodrigo Andrade Ramos por ter me dado a oportunidade de realizar a iniciação científica, levar meu trabalho ao congresso e posteriormente me orientar neste trabalho de conclusão de curso e à Tatiane Cristina da Costa Fernandes, aluna de mestrado, que me ajudou muito durante todo o processo de realização deste trabalho, sem os quais eu não poderia ter concluído com êxito.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo e à Universidade de São Paulo que contribuíram direta ou indiretamente para a realização desta pesquisa.

Aos professores do departamento que me deram a base de conhecimentos necessários para que fosse possível a realização deste trabalho e por final, aos meus amigos por todo apoio, ajuda e incentivo durante o curso.

Resumo

MORACO, A. G. M. **Utilização de Fatores de Participação Estendidos na Detecção de Flutuações de Tensão em Sistemas com Geração Síncrona Distribuída.** 2011. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Elétrica com Ênfase em Eletrônica) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

Com a presença crescente de geradores síncronos em sistemas de distribuição, fenômenos antes observados somente em sistemas de transmissão agora também estão presentes em sistemas de distribuição. Impactos relacionados a oscilações eletromecânicas mal amortecidas, um dos focos de análise do estudo da estabilidade a pequenas perturbações, podem agora afetar também os sistemas de distribuição com geradores síncronos, o que traz preocupações tanto do ponto de vista da estabilidade quanto da qualidade da tensão entregue aos consumidores. Ferramentas comumente utilizadas em sistemas de transmissão para a análise de tais oscilações (tais como os fatores de participação, por exemplo) podem não ser completamente adequadas para analisar os fenômenos que ocorrem nos sistemas de distribuição por conta dos mesmos. Por esta razão, esse trabalho propõe a utilização do conceito de fatores de participação estendidos como ferramenta para a detecção de flutuações de tensão provocadas por oscilações eletromecânicas em sistemas de distribuição com geradores síncronos, de forma a avaliar o impacto de tais oscilações na qualidade de energia elétrica. Para isso um estudo inicial é feito através de simulações em um sistema com um gerador conectado a um sistema de subtransmissão, no qual são avaliadas e verificadas as caracterizações da resposta da tensão tanto pelos fatores de participação tradicionais quanto pelos fatores de participação estendidos. Simulações computacionais mostram que, apesar de os fatores de participação tradicionais não conseguirem identificar o impacto das oscilações eletromecânicas na resposta da tensão, o uso dos fatores de participação estendidos é uma alternativa eficiente para realizar tal identificação.

Palavras Chaves: Oscilações Eletromecânicas – Estabilidade a Pequenas Perturbações – Qualidade de Tensão – Análise Modal Seletiva – Fatores de Participação.

Abstract

MORACO, A. G. M. **Application of Extended Participation Factors to Detect Voltage Fluctuations in Distributed Generation Systems**. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Elétrica com Ênfase em Eletrônica) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

With the increasing penetration of synchronous generators in distribution systems, phenomena observed only in transmission systems are now also present in distribution systems. Impacts related to poorly damped oscillations, a focus of the analysis of stability to small perturbations, can now also affect the distributed systems with synchronous generators, which concerns from the point of view of stability and quality of the voltage delivered to consumers. Tools commonly used in transmission systems for the analysis of such oscillations (such as participation factors, for example) may not be entirely appropriate to analyze the phenomena that occur in distribution systems on their behalf. For this reason, this work proposes the use of the concept of extended participation factors as a tool for the detection of voltage fluctuations caused by electromechanical oscillations in distribution systems with synchronous generators in order to evaluate the impact of such fluctuations in electric power quality. For this, an initial study is made through simulations on a system with a generator connected to a sub transmission system, which the characterizations of the voltage response are evaluated and verified by both participation factors, traditional and extended. Computer simulations show that, although the traditional participation factors are unable to identify the impact of oscillations in the response of the voltage, the use of extended participation factors is an efficient alternative to accomplish this identification.

Index Terms: Participation Factors – Small-Signal Stability – Distributed Generation – Power Quality – Electromechanical Oscillations – Selective Modal Analysis.

Lista de Figuras

Figura 5.1 - Abordagem Determinística	34
Figura 5.2 - Abordagem Probabilística.....	34
Figura 6.1 - Máquina contra barramento finito.....	37
Figura 7.1 - Função de distribuição de probabilidade uniforme para o parâmetro t_{falta}	44
Figura 7.2 - Função de distribuição de probabilidade uniforme para o parâmetro V_{∞}	45
Figura 7.3 - Função de distribuição de probabilidade uniforme para o parâmetro X_e	45
Figura 7.4 - Saída do Transdutor de Tensão Terminal	47
Figura 7.5 - Outras respostas para a saída do transdutor de tensão terminal	48
Figura B.1 - Resposta da variável de estado $x_1(t)$	63
Figura B.2 - Resposta da variável de estado $x_2(t)$	64
Figura B.3 - Resposta de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ no plano de fase.....	64
Figura B.4 - Resposta da variável de estado $x_1(t)$	66
Figura B.5 - Resposta da variável de estado $x_2(t)$	66
Figura B.6 - Resposta de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ no plano de fase	67

Lista de Tabelas

Tabela 7-I - Fatores de Participação Tradicionais do sistema simulado	42
Tabela 7-II – Valores absolutos dos Fatores de Participação Estendidos Determinísticos do Sistema Simulado (Multiplicados por 10^{-6})	43
Tabela 7-III - Valores absolutos dos Fatores de Participação Estendidos Estatísticos do Sistema Simulado (Multiplicados por 10^{-6})	46

Lista de Abreviaturas e Siglas

GD	Geração Distribuída
PCH	Pequena Central Hidrelétrica
OEM	Oscilação Eletromecânica
SMA	<i>Selective Modal Analysis</i>
SEP	Sistema Elétrico de Potência
SMIB	<i>Single-Machine Infinite-Bus</i>
MC	Monte Carlo
SMC	Simulação de Monte Carlo
PSS	<i>Power System Stabilizers</i>

Lista de Símbolos

A	Matriz de estados do sistema
\mathbf{u}_i	i-ésimo autovetor à esquerda
\mathbf{y}_i	i-ésimo autovetor à direita
λ_i	i-ésimo autovalor
p_{ki}	Fator de participação tradicional do modo i na variável de estado k e vice-versa
u_{ki}	k-ésimo elemento do i-ésimo autovetor à esquerda
y_{ki}	k-ésimo elemento do i-ésimo autovetor à direita
\bar{p}_{ki}	Fator de participação estendido do modo i na variável de estado k
Z_{eq}	Impedância equivalente
δ	Ângulo do rotor
ω	Velocidade do rotor
P_m	Potência mecânica do gerador síncrono
E'_q	Tensão transitória de eixo em quadratura
E_{FD}	Tensão de campo
V_t	Tensão do barramento terminal
V_o	Tensão de saída do transdutor
V_d	Componente do eixo direto da tensão terminal
V_q	Componente de eixo em quadratura da tensão terminal
x_e	Ponto de equilíbrio do sistema
H	Constante de inércia do gerador
X_d	Reatância síncrona de eixo direto
X_q	Reatância síncrona de eixo em quadratura
X'_d	Reatância transitória de eixo direto
X'_q	Reatância transitória de eixo em quadratura
T'_{do}	Constante de tempo de circuito aberto transitória de eixo direto
K_e	Ganho de regime permanente do regulador de tensão
T_e	Constante de tempo do regulador de tensão
T_{tp}	Constante de tempo do transdutor de tensão
K_{PSS}	Ganho do PSS
T_w	Constante de tempo do PSS
T_1, T_2, T_3, T_4	Constante de tempo de avanço-atraso do PSS
X_e	Impedância Equivalente
t_falta	Tempo de duração da falta
V_∞	Tensão do barramento infinito

\dot{x}_1, \dot{x}_2 Estados intermediários do *PSS*

Sumário

1. Motivação e Introdução.....	21
2. Metodologia	25
3. Fatores de Participação Tradicionais	29
4. Fatores de Participação Estendidos.....	31
5. O método de Simulações de Monte Carlo.....	33
6. Modelagem do Sistema	37
6.1 Linearização do Modelo por expansão em Série de Taylor	38
7. Resultados.....	41
7.1 Caracterização da tensão terminal a partir dos fatores de participação tradicionais .	41
7.2 Caracterização da tensão terminal a partir dos fatores de participação estendidos (abordagem determinística)	42
7.3 Caracterização da tensão terminal a partir dos fatores de participação estendidos (abordagem probabilística)	44
7.4 Análise da resposta da tensão de saída do transdutor no tempo	47
8. Conclusões.....	51
Bibliografia.....	53
Apêndice A - Revisão Conceitual de Álgebra Linear.....	57
Apêndice B – Revisão Conceitual de Equações Diferenciais Lineares	61

1 . Motivação e Introdução

A geração distribuída (GD) é caracterizada pela geração de energia elétrica junto ou próxima dos consumidores independente da potência, tecnologia e fonte de energia utilizada [1]. Não há consenso ainda sobre uma definição precisa do termo, mas neste texto o conceito de GD será definido por geradores conectados a sistemas de distribuição ou subtransmissão, o que está de acordo com a característica mencionada anteriormente. Dentro desta definição estão incluídas as pequenas centrais hidrelétricas e os co-geradores (geradores que aproveitam um determinado processo industrial para produzir energia elétrica), por exemplo. De forma mais específica, um exemplo típico de co-geração pode ser encontrado na produção de açúcar e álcool, na qual os rejeitos industriais (bagaço-de-cana) são queimados em uma caldeira, produzindo vapor para movimentar um gerador termoelétrico.

Quando a energia é entregue aos consumidores através dos sistemas de subtransmissão e distribuição, ocorrem perdas devido à impedância de alimentadores e transformadores, ou seja, uma parte da energia é perdida devido ao trânsito desta energia desde a geração até a carga. Esta perda representa uma quantidade de energia que é gerada, mas não se transforma em receita para a concessionária, podendo ser significativa em condições de sobrecarga [1]. Com a inclusão da geração distribuída, as perdas na subtransmissão e na distribuição podem ser reduzidas (em determinadas situações), além de outras vantagens como redução da necessidade de expansão do sistema de geração/transmissão de grande porte (pelo suprimento local da demanda de energia), aproveitamento de recursos renováveis, etc.

Na primeira metade do século, quando a energia elétrica industrial era toda gerada localmente, a geração de energia elétrica perto do consumidor chegou a ser regra. Porém em meados dos anos 40, a geração de energia a partir das usinas de grande porte tornou-se mais barata (devido às economias de escala existentes no processo produtivo), diminuindo o interesse dos consumidores pela GD e, conseqüentemente, o desenvolvimento tecnológico para incentivar este tipo de geração [1]. A partir da década de 90, as crises do petróleo introduziram fatores que mudaram irreversivelmente este panorama, revelando a importância, por exemplo, da economia obtida através da co-geração, permitindo a reforma do setor elétrico brasileiro e a competição nos serviços de energia, criando concorrência e estimulando todos os potenciais energéticos com custos competitivos. Com o fim do monopólio da geração elétrica, o desenvolvimento de tecnologias voltou a ser incentivado com visíveis resultados na redução de custos [1].

O interesse pela conexão de pequenos e médios geradores síncronos diretamente nos sistemas de distribuição ou subtransmissão tem crescido desde então principalmente

pelo fato da integração da geração distribuída com tais sistemas oferecer grandes benefícios técnicos, econômicos e ambientais [2]. Outro fator de incentivo é o fato de que diversas tecnologias podem ser utilizadas para a geração da eletricidade de forma distribuída conforme descritas detalhadamente em [3], sendo essas tecnologias caracterizadas pela eficiência energética.

O advento dos geradores síncronos distribuídos tem modificado as características dos sistemas de distribuição. Anteriormente, o sistema de distribuição poderia ser identificado como essencialmente passivo, responsável simplesmente pela entrega da energia vinda da subestação a seus consumidores. Com a presença crescente desses elementos ativos no sistema de distribuição, fenômenos que antes eram observados apenas na resposta dinâmica dos sistemas de grande porte de geração/transmissão agora também estão presentes na resposta dos sistemas de distribuição.

Como os sistemas de distribuição não foram projetados para operarem com elementos ativos, nem para abrigarem uma grande quantidade de geradores, as concessionárias de energia elétrica devem estar preparadas com ferramentas de análise para este novo cenário. Vários estudos mostram que a inserção da GD nos sistemas de distribuição e/ou subtransmissão pode causar problemas técnicos e de segurança [3], podendo contribuir para a ocorrência de correntes de falta, flutuações de tensão, interferências nos processos de controle de tensão, etc.

Dentro deste novo cenário, as mudanças associadas à rede de distribuição de energia apontam para um potencial efeito desestabilizante das interações dinâmicas dos geradores distribuídos, sendo que este efeito pode variar de acordo com o grau de inserção de elementos ativos na rede e do tipo de tecnologia de GD, além de ser dependente das características da rede de distribuição [2].

Oscilações eletromecânicas (OEM) de baixa frequência são fenômenos comumente observados nos sistemas de geração/transmissão. Tais oscilações aparecem quando o sistema é perturbado de suas condições de estado estacionário devido a uma falha ou quando o nível de carga é alterado rapidamente. Nestes casos, devido ao desequilíbrio temporário de energia, os rotores das máquinas oscilam uns contra os outros usando as linhas de transmissão que os conecta para a troca de energia [4].

Diferentes modos de oscilações eletromecânicas podem ser identificados de acordo com a estrutura e os parâmetros do sistema de potência [5]. Isso ocorre porque os sistemas de geração / transmissão são caracterizados pela presença de um gerador ou vários grupos de geradores síncronos (com diferentes tamanhos e capacidades de geração de energia) interligados uns com os outros.

A taxa de amortecimento destas OEM é influenciada por diversos fatores, como por exemplo, sistemas de excitação rápidos com ganhos elevados que são adicionados a

geradores síncronos para melhorar a estabilidade transitória e a capacidade de transferência de potência, o que pode levar a uma taxa de amortecimento muito baixa [4, 6]. Outros fatores que podem diminuir o amortecimento das OEM são a presença de longas linhas de transmissão interligando grandes grupos de geradores síncronos e a alta carga da rede de transmissão [5, 7].

Já as redes de distribuição têm arranjos predominantemente radiais, suas linhas são relativamente curtas e tais redes estão ligadas a sistemas de transmissão ou subtransmissão, que normalmente podem ser considerados como barramentos infinitos devido a suas proporções maiores em comparação com as redes de distribuição. Além disso, as resistências dos condutores utilizados nas redes são proporcionalmente muito superiores aos de cabos de transmissão e os geradores têm inércia muitas vezes pequena e inserem apenas uma pequena quantidade de potência ativa na rede [8, 9].

Todos esses aspectos sugerem que as oscilações eletromecânicas observadas em sistemas com GD provavelmente apresentam maiores frequências e níveis de amortecimento do que os observados nos sistemas de geração/transmissão. Isso pode levar a desconsiderar essas oscilações como um problema para o qual se deve prestar atenção ao projetar um sistema de distribuição ou permitir que um novo gerador seja conectado a ele. Porém, os autores em [8, 9, 10] mostram que tais oscilações influenciam diretamente na amplitude e na frequência da tensão nas barras de carga da rede de distribuição, podendo esta ser gravemente afetada em alguns casos, causando problemas não somente relacionados à estabilidade, mas também relacionados à qualidade de energia fornecida aos consumidores.

Para análise da estabilidade a pequenas perturbações em sistemas de grande porte, a identificação dos modos de oscilação e dos geradores associados a esses modos é comumente feita através do método da Análise Modal Seletiva (SMA, sigla em inglês para *Selective Modal Analysis*) [11], com uso dos fatores de participação. É natural supor, então, que a mesma técnica possa ser utilizada nos sistemas de distribuição para identificação dos impactos provocados pelos geradores síncronos distribuídos. Devido à forma como os fatores de participação são definidos em [11], considerando como perturbação um vetor de condições iniciais pertencente à base canônica do espaço de estados, tem-se que estes fatores de participação são capazes de identificar corretamente a participação dos estados nos modos de oscilação eletromecânica. Entretanto, esta mesma característica da definição dos fatores de participação em [11] impede que os mesmos caracterizem de forma satisfatória a resposta física do sistema (o que, de um certo ponto de vista, pode ser associado com a participação dos modos nos estados, conforme será explicado mais adiante no texto).

Como mencionado anteriormente, a inserção de GD nos sistemas de distribuição e/ou subtransmissão pode provocar o aparecimento de OEM neste sistema, e tais oscilações podem, por sua vez, induzir flutuações na magnitude das tensões nas barras que configurem problemas de qualidade de energia. O problema mencionado no parágrafo anterior impede que tais flutuações de tensão possam ser corretamente identificadas pelos fatores de participação definidos em [11] (os quais serão denotados neste texto como **fatores de participação tradicionais**).

Em [12], um novo conceito de fatores de participação é apresentado, sendo formulado a partir da média da contribuição relativa dos modos nos estados sobre um conjunto de condições iniciais. O cálculo dos **fatores de participação estendidos**, assim chamados em [12] e no decorrer deste texto, é feito com base na resposta sobre um conjunto de condições iniciais e não a partir de uma condição inicial particular. Tal fato possibilita identificar corretamente a resposta dinâmica dos geradores e, conseqüentemente, avaliar corretamente o impacto das oscilações sobre a tensão (o qual se manifesta na forma de flutuações).

Dessa forma, um dos objetivos desse trabalho é mostrar que a técnica convencional de SMA (a qual faz uso dos fatores de participação tradicionais) não é adequada para ser utilizada em sistemas de distribuição e subtransmissão com o propósito de identificar as flutuações de tensão derivadas da dinâmica oscilatórias dos geradores. Além disso, é proposto o uso dos fatores de participação estendidos como ferramenta para caracterização física da resposta do sistema, de forma que seja possível detectar problemas relacionados à qualidade de tensão advindos desta dinâmica oscilatória. Como se trata de um estudo inicial, as simulações serão feitas através de um modelo de gerador síncrono conectado ao sistema de subtransmissão, sendo este representado por um barramento infinito.

No capítulo 2 é descrita a metodologia para este estudo, o qual apresentará como resultados basicamente uma comparação entre as capacidades dos fatores de participação tradicionais e estendidos em detectar corretamente as flutuações de tensão induzidas pelas OEM no sistema sob análise. Para embasar matematicamente tal metodologia, nos capítulos 3 e 4 são apresentadas, respectivamente, as definições formais dos fatores de participação tradicionais e estendidos. No capítulo 5 é feita uma breve descrição do método de simulações de Monte Carlo, o qual será utilizado para gerar o conjunto de condições iniciais aleatórias requerido para o cálculo dos fatores de participação estendidos. Em seguida, o capítulo 6 apresentará a modelagem do sistema em estudo, e o capítulo 7 mostrará a aplicação da metodologia proposta ao sistema modelado e a respectiva comparação de resultados com a metodologia tradicional. O texto é finalizado com as conclusões gerais do trabalho.

2 . Metodologia

Para a realização deste trabalho de conclusão de curso um estudo inicial é feito através de simulações em um sistema com um gerador conectado a um sistema de subtransmissão, no qual são avaliadas e verificadas as caracterizações da resposta da tensão tanto pelos fatores de participação tradicionais quanto pelos fatores de participação estendidos.

A realização deste trabalho foi dividida em cinco fases. A primeira fase consiste na revisão dos conceitos de álgebra linear, equações diferenciais e o estudo dos fatores de participação. Esta fase do projeto é muito importante, pois os conceitos de álgebra linear e equações diferenciais são assuntos fundamentais para o estudo das propriedades de uma determinada matriz ou de soluções de uma equação diferencial linear. Em controle, esses conceitos são de grande importância principalmente na análise de estabilidade de um sistema linear e de sua resposta no tempo, tanto em regime transitório, quanto em regime permanente. No que diz respeito aos fatores de participação, eles apresentam a principal base para o seu cálculo e conceito, o que será mostrado mais para frente.

Esta fase pode ser subdividida em três partes. A primeira é o estudo dos conceitos de álgebra linear, retirados principalmente das referências [13,14]. Os principais são: autovalores e autovetores, polinômio característico, produto escalar e produto interno e base de um espaço vetorial, todos esses conhecimentos necessários para o entendimento do comportamento dos sistemas lineares e de fatores de participação. O resumo destes conceitos pode ser vistos no apêndice A.

A segunda parte é o estudo de equações diferenciais, cujo resumo pode ser visto no apêndice B. O conteúdo foi retirado do material didático do professor orientador [15] e das referências [16,17]. A importância desse estudo encontra-se na abordagem da resolução dessas equações, a qual está diretamente relacionada a dois conceitos estudados anteriormente: o autovalor e autovetor da matriz de estados do sistema.

Finalmente, a última parte desta fase consiste no estudo dos fatores de participação tradicionais, que é extremamente importante para o cumprimento do objetivo deste trabalho, ou seja, comparar os resultados fornecidos por estes fatores tradicionais com aqueles obtidos utilizando-se os fatores de participação estendidos.

A segunda fase aborda a aplicação da análise de fatores de participação ao sistema. Conforme estudado na fase anterior, os fatores de participação definem associações entre grupos de variáveis de estado e grupos de autovalores de uma matriz A de um sistema do tipo $\Delta \dot{x} = A\Delta x$, ou seja, representa a participação relativa do i -ésimo modo de oscilação (associado ao i -ésimo autovalor) na k -ésima variável de estado [11].

Sendo assim, o objetivo desta fase é entender melhor o que isso significa na prática, através da aplicação deste conceito ao sistema elétrico em estudo. Para isso a definição

algébrica de fatores de participação tradicionais será implementada no software MATLAB e aplicada a uma dada matriz A que descreve o comportamento de um sistema com um gerador conectado a um sistema de subtransmissão. Isso foi feito para que, posteriormente, os resultados fornecidos por estes fatores tradicionais possam ser observados e comparados com os resultados que forem obtidos com os fatores de participação estendidos.

Um problema encontrado nesta fase é a necessidade de que o sistema tenha um conjunto de condições iniciais em específico para sua caracterização através dos fatores de participação tradicionais, ou seja, é necessário que as condições iniciais do sistema componham um vetor da base canônica. Por razões físicas, dificilmente se encontra o caso em que somente uma variável de estado é tirada de sua condição de equilíbrio por uma perturbação e, sendo assim, esta se torna uma das maiores deficiências do conceito de fatores de participação tradicionais.

A terceira fase é o estudo do conceito de fatores de participação estendidos, um novo conceito de fatores de participação definido em [12]. Esta nova definição é a chave para o nosso estudo, pois corrige o problema encontrado anteriormente com os fatores de participação tradicionais, e para isso ela leva em conta um conjunto de condições iniciais incertas na proximidade do ponto de equilíbrio do sistema.

Neste caso, a incerteza da condição inicial pode ser tomada como conjunto determinístico ou probabilístico. Dessa forma, a nova abordagem estendida passa a ser capaz de detectar corretamente as flutuações de tensão em sistemas com geração distribuída.

A quarta fase consiste na aplicação da análise estendida de fatores de participação ao sistema. Assim como na segunda fase deste trabalho, esta fase tem como objetivo a realização de uma aplicação prática dos estudos realizados na fase anterior para um melhor entendimento e análise dos fatores de participação estendidos (abordagem determinística e probabilística) e posterior comparação com os resultados dos fatores de participação tradicionais.

Para a realização desta etapa, a nova definição de fatores de participação foi implementada utilizando-se o software MATLAB e aplicada à mesma matriz A utilizada na segunda fase deste trabalho. Para isso, foi necessária a criação de um conjunto de condições iniciais que refletissem corretamente o que ocorreria com o sistema na prática. Para a abordagem determinística dos fatores de participação estendidos, este conjunto foi criado aplicando-se faltas trifásicas sobre o modelo do gerador, alterando-se o valor dos seguintes parâmetros: tempo de duração da falta, tensão da barra infinita e impedância equivalente. Para a criação do conjunto probabilístico de condições iniciais foi utilizado o método de Simulação de Monte Carlo, o qual tem o objetivo de definir funções de

distribuição de probabilidade para os parâmetros que serão alterados, ou seja, os mesmos parâmetros alterados para a criação das condições iniciais determinísticas. Ambos os processos de criação de condições iniciais serão melhor detalhados ao longo deste trabalho.

Finalmente, a quinta fase deste trabalho é a análise e comparação de resultados entre as fases dois e quatro, ou seja, efetuar a comparação entre os fatores de participação tradicionais e fatores de participação estendidos com abordagem determinística e estatística e apresentar as conclusões finais do trabalho. Para a realização desta etapa, é necessária, além dos resultados dos fatores de participação estendidos e tradicionais, a realização de uma simulação do sistema levando em consideração uma condição inicial específica, tal como é requerida para a análise do sistema a partir dos fatores de participação tradicionais, ou seja, um vetor da base canônica, e levando em conta uma condição inicial a qual descreve o comportamento do sistema como ocorreria na prática, ou seja, uma instância dentro do conjunto de condições iniciais criado para o cálculo dos fatores de participação estendidos. Tais simulações computacionais foram realizadas sobre o modelo não-linear por meio da ferramenta "*ode15s*", a qual realiza a resolução numérica de equações diferenciais e está disponível no aplicativo MATLAB.

As fases mencionadas neste capítulo estão descritas ao longo dos capítulos seguintes deste texto, de forma a constituírem uma sequência didática que facilite o entendimento por parte do leitor.

3 . Fatores de Participação Tradicionais

A técnica de SMA possibilita que sistemas dinâmicos de grande dimensão e complexidade, com inúmeras variáveis associadas a muitos componentes do sistema, possam ser simplificados, destacando do sistema o que é relevante para dinâmica de interesse enquanto mantém-se a estrutura e comportamento do sistema intactos [11]. Tal técnica, que se baseia no uso dos fatores de participação, é altamente difundida em sistemas de transmissão para estudo da análise de estabilidade a pequenas perturbações.

Segundo sua definição, os fatores de participação tradicionais, ferramenta que compõe a técnica SMA, são escalares que possibilitam medir a contribuição relativa dos modos do sistema nas variáveis de estado do mesmo e, além disso, a contribuição relativa das variáveis de estados na resposta dos modos [11]. Desde a sua introdução, os mesmos têm sido amplamente utilizados em sistemas elétricos de potência e em outras aplicações. Em alguns casos, o emprego desta ferramenta pode ser adequado. Neste trabalho questionaremos o uso deste método para detecção de violações de tensão em sistemas com geração síncrona distribuída.

Para permitir uma melhor compreensão do conceito de fatores de participação e da SMA, considere um sistema LTI do tipo

$$\dot{\Delta x} = A\Delta x, \Delta x(0) = \Delta x_0 \quad (3.1)$$

cujas resposta temporal pode descrita por:

$$\Delta x(t) = \sum_{i=1}^n [u_i^T \Delta x_0] y_i e^{\lambda_i t} \quad (3.2)$$

conforme consta no apêndice B.

Em (3.2), admite-se que a matriz A em (3.1) é uma matriz de estados com n autovalores distintos $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, cada um deles associado ao seus respectivos autovetores à esquerda u_i e à direita y_i . Dessa forma, cada um dos autovalores λ_i é chamado de modo de resposta do sistema (3.1) [11].

Para sistemas desse tipo, existem associações entre as variáveis de estado e os modos da matriz A do sistema, que podem ser definidas por meio da matriz de participação [11],

$$P \triangleq \{p_{ki}\} = \{u_{ki} y_{ki}\}, \quad (3.3)$$

em que y_{ki} (u_{ki}) é a k -ésima entrada do i -ésimo autovetor à direita (esquerda) y_i (u_i) de A , e p_{ki} é chamado de fator de participação do modo i na variável de estado k e vice-versa. Estas associações serão mais bem detalhadas ao longo da explicação da equação (3.5), mais adiante no texto.

Para possibilitar uma análise percentual, os autovetores devem ser normalizados de maneira que:

$$u_i^T y_j = 1 \text{ se } i = j; \quad u_i^T y_j = 0 \text{ se } i \neq j \quad (3.4)$$

Quando (3.4) é satisfeita, a soma dos valores de todas as entradas de uma única linha ou coluna de P é sempre igual a 1, o que permite a realização da análise percentual mencionada acima. As entradas de P são, portanto, fatores adimensionais que medem a participação relativa do i -ésimo autovalor (ou modo de resposta) na resposta da k -ésima variável de estado do sistema (3.1) à condição inicial Δx_0 .

Para entender como os fatores de participação p_{ki} podem ser utilizados para caracterizar tal resposta, considere que $u_i^T \Delta x_0$ em (3.2) como sendo a contribuição da condição inicial Δx_0 para o i -ésimo modo de resposta e que y_i descreve a distribuição deste i -ésimo modo de resposta através das variáveis de estado em (3.1). Além disso, suponha $\Delta x_0 = e_k$, sendo e_k o k -ésimo vetor da base canônica do espaço de estados (ou seja, um vetor onde a k -ésima entrada é 1 e as demais são 0). A partir destas considerações, pode-se escrever

$$\Delta x_k(t) = \sum_{i=1}^N p_{ki} e^{\lambda_i t} \quad (3.5)$$

Observa-se, portanto, que para a caracterização da resposta de uma determinada variável de estado de (3.1) a partir dos fatores de participação da matriz A , é necessário que a condição inicial tenha uma forma particular (i.e., seja um vetor da base canônica), forma esta que dificilmente seria encontrada na prática. Pode-se concluir com isso que, embora os fatores de participação (os quais serão chamados, deste ponto em diante no texto, de fatores de participação tradicionais) sejam bastante úteis para identificar as quais variáveis de estados os modos de resposta do sistema estão associados, não são efetivos para caracterizar a resposta do sistema a condições iniciais tipicamente encontradas na prática.

4 . Fatores de Participação Estendidos

Os fatores de participação estendidos, definidos em [12], contornam o problema apontado no último parágrafo do capítulo anterior, levando em conta um conjunto de condições iniciais incertos na proximidade do ponto de equilíbrio do sistema, ao invés da contribuição de apenas uma condição inicial particular.

O fator de participação estendido é responsável por medir a influência relativa do modo λ_i na variável de estado Δx_k , podendo ser obtido da seguinte forma [12],[18],

$$\bar{p}_{ki} := \text{avg}_{\Delta x_0 \in S} \frac{(u_i \Delta x_0) y_i^k}{\Delta x_0^k} \quad (4.1)$$

sendo $\Delta x_0^k = \sum_{i=1}^n (u_i \Delta x_0) y_i^k$ o valor de $\Delta x_k(t)$ em $t = 0$ e $\text{avg}_{\Delta x_0 \in S}$ um operador que computa a média sobre escalares calculados a partir de elementos do conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ (neste caso, o conjunto de valores de condições iniciais Δx_0 considerado).

Os fatores de participação estendidos também podem ser definidos a partir de um conjunto probabilístico de condições iniciais, calculados através de (4.2),

$$p_{ki} := E \left\{ \frac{(u_i \Delta x_0) y_i^k}{\Delta x_0^k} \right\} \quad (4.2)$$

Analisando (4.2) observa-se que a média aritmética em (4.1) é agora definida como uma expectativa matemática, sendo a mesma avaliada para alguma função de densidade de probabilidade conjunta assumida $f(\Delta x_0)$ para a condição inicial desconhecida (caso exista tal função)[12].

A equação (4.2) pode ser reescrita no seguinte formato:

$$p_{ki} = u_i^k y_i^k + \sum_{j=1, j \neq k}^n u_j^k y_j^k E \left\{ \frac{\Delta x_j(0)}{\Delta x_k(0)} \right\} \quad (4.3)$$

Vale ressaltar que o segundo termo em (4.3) desaparece quando os componentes do vetor de condições iniciais $\Delta x_0^1, \Delta x_0^2, \dots, \Delta x_0^n$ forem independentes e tiverem média zero. Nessas condições, a participação do i -ésimo modo na k -ésima variável de estado é dada pela mesma expressão introduzida originalmente em [12]. O mesmo resultado pode ser obtido por meio de (4.1).

Analisando as formas de cálculo dos fatores de participação estendidos observa-se, em (4.1), que tal cálculo é feito a partir de um conjunto de condições iniciais determinístico. O uso de tal conjunto é vantajoso em relação à definição inicial proposta em [11], uma vez

que permite que o mesmo seja construído por condições que ocorrem na prática, a partir das quais o SEP pode iniciar sua resposta dinâmica (tais como condições geradas após a remoção de uma falta temporária ou a inserção de um bloco de carga relativamente pequeno no sistema, por exemplo).

Entretanto, conjuntos determinísticos podem não representar de forma efetiva as condições reais às quais o SEP possa estar sujeito, pois se considera apenas um grupo limitado de condições iniciais dentro diversas possibilidades aleatórias que possam desencadear uma resposta dinâmica do SEP. Tal fato motiva também a aplicação de técnicas probabilísticas para construção do conjunto de condições iniciais na tentativa de que os mesmos reflitam adequadamente o processo físico ao qual o SEP está sujeito. Para isso um conjunto probabilístico de condições iniciais será obtido através de simulações de Monte Carlo.

5 . O método de Simulações de Monte Carlo

A Simulação de Monte Carlo (SMC) é um método de simulação estocástica poderoso para a exploração e solução de problemas matemáticos através da geração de números aleatórios para atribuir valores às variáveis que se deseja analisar ao invés de se utilizar simulações determinísticas. O fator chave da Simulação de Monte Carlo é a utilização de um processo aleatório (ou, de forma mais exata, pseudo-aleatório) para modelar o comportamento de variáveis estocásticas de forma independente de acordo com uma distribuição de probabilidade definida. Ao invés de utilizar apenas o valor médio para modelar certas variáveis, a completa função distribuição é usada para descrever suas características [19, 20].

O método recebeu este nome por causa da famosa roleta de Monte Carlo, na cidade de Mônaco, um gerador de números aleatório simples. O nome e o desenvolvimento sistemático do método de Monte Carlo data de cerca de 1944. No entanto, existem uma série de casos isolados e subdesenvolvidos em muito ocasiões anteriores. Por exemplo, na segunda metade do século XIX, um experimento foi realizado, no qual foram jogadas agulhas de maneira aleatória em uma placa de linhas retas paralelas e, a partir dos resultados deste experimento, foi possível inferir o valor de aproximado de Pi (como 3,14) tendo como base a observação do número de interseções entre as agulhas e linhas [21].

A utilização real da SMC como uma ferramenta de pesquisa é o resultado do trabalho sobre a bomba atômica durante a segunda guerra mundial. Este trabalho envolveu a simulação direta dos problemas probabilísticos relacionados com a difusão de nêutrons aleatórios em material físsil, mas ainda numa fase inicial das investigações. Em 1948 Fermi, Metropolis e Ulam obtiveram estimativas de MC para os autovalores da equação de Schrodinger [21]. Por volta de 1970, a teoria desenvolvida na época, a qual abordava a complexidade computacional, começou a fornecer um raciocínio mais preciso e persuasivo o emprego do método de Monte Carlo.

Atualmente pode-se verificar a utilização deste método em diversas áreas, como economia, física, química, medicina entre outras. A técnica é também altamente difundida em SEP para simulações de processos que ocorrem no sistema e são iniciados por condições aleatórias, como por exemplo, em trabalhos em que é feito o estudo da ocorrência de afundamentos de tensão [22, 23] uma vez que o método de Monte Carlo permite definir aleatoriamente o local da falta a partir de uma dada distribuição de probabilidade. O método também é adotado em trabalhos relacionados à confiabilidade e segurança do SEP, pois o mesmo permite representar de forma adequada a característica aleatória com que as contingências podem ocorrer no sistema [24, 25].

Para um melhor entendimento sobre como a SMC foi aplicada neste trabalho primeiro será explicada a diferença entre as abordagens determinística e probabilística dos fatores de participação estendidos.

Na abordagem determinística supõe-se uma variável x com valor mínimo x_{\min} e valor máximo x_{\max} . Dentro desse intervalo de valores, são utilizados valores pré-determinados para a simulação do sistema, como pode ser visto na Figura 5.1.

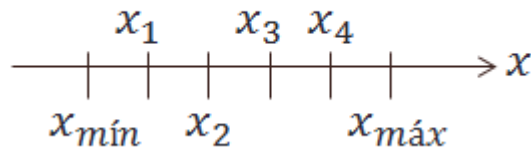


Figura 5.1 - Abordagem Determinística

Já na abordagem probabilística, utilizando-se a SMC, supõe-se uma variável x com valor mínimo x_{\min} e valor máximo x_{\max} e também uma função de distribuição de probabilidade para esta variável (no caso deste trabalho foi utilizada a distribuição uniforme, Figura 5.2) e a partir disso foram sorteados valores aleatórios para a simulação do sistema.

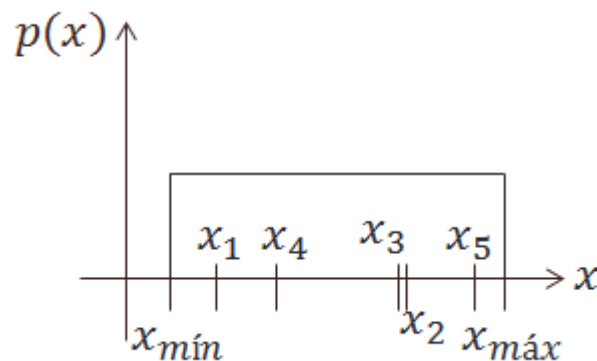


Figura 5.2 - Abordagem Probabilística

Mais especificamente, no caso deste trabalho, são aplicadas faltas trifásicas, como forma de perturbação, a um gerador síncrono conectado ao sistema de subtransmissão para formação do conjunto de condições iniciais que reflitam as condições reais que ocorrem em SEP. Assim a simulação de Monte Carlo permite que os diversos parâmetros envolvidos para aplicação da falta sejam representados por funções distribuições de probabilidades. De acordo com a probabilidade de ocorrência de cada parâmetro definidos por sua função de distribuição de probabilidade, são realizados sorteios onde cada vetor de condições iniciais é formado. Diversas simulações são repetidas formando um conjunto de condições iniciais [26].

É importante destacar que devido à aleatoriedade do processo, é necessário que o conjunto de condições iniciais seja composto por um grande número de vetores para que o mesmo seja formado em sua maioria por vetores que retratem o comportamento médio das situações de falta, não sendo constituído apenas por situações particulares ou pouco prováveis.

6 . Modelagem do Sistema

Cada vez mais é dada atenção ao estudo de estabilidade a pequenas perturbações em máquinas síncronas, principalmente no que diz respeito ao controle de excitação sobre o amortecimento de oscilações que caracterizam o fenômeno da estabilidade [6].

Em casos de geradores isolados, conectados radialmente a um sistema de maior porte, este estudo é comumente realizado utilizando-se o modelo de uma máquina conectada a um barramento infinito através de uma impedância externa (ou SMIB, sigla advinda do inglês usada para descrever tal modelo).

Para o estudo inicial proposto por esse trabalho, supõe-se então o caso de um gerador síncrono conectado a um sistema de subtransmissão. Este caso é bastante comum na conexão de pequenas centrais hidrelétricas ao sistema, e pode ser modelado de forma equivalente através de um SMIB.

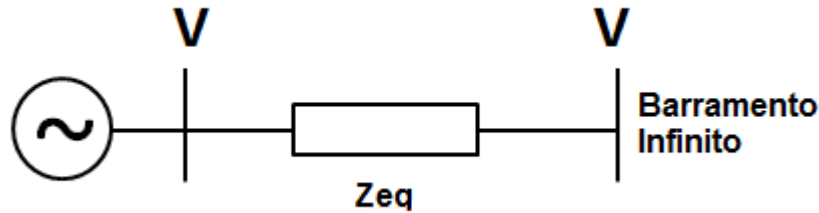


Figura 6.1 - Máquina contra barramento finito

Através de simulações realizadas sobre este modelo, analisam-se tanto os fatores de participação quanto os fatores de participação estendidos de forma a verificar se os mesmos estão caracterizando corretamente a resposta do sistema.

O sistema simulado é composto pelo gerador síncrono representado pelo modelo de um eixo de 3ª ordem, juntamente com um transdutor de tensão terminal de 1ª ordem. Dois processos de controle atuam sobre o gerador: o controle da excitação e o controle de amortecimento das oscilações eletromecânicas. O primeiro laço de controle é feito pelo regulador automático de tensão representado por um modelo de 1ª ordem. O segundo é realizado pelo controlador PSS (*Power System Stabilizer*), representado por um modelo dinâmico de 3ª ordem. O desempenho dinâmico desse sistema pode ser descrito pelas seguintes equações algébrico-diferenciais:

$$\Delta \dot{\delta} = \omega_o \Delta \omega \quad (6.1)$$

$$\Delta \dot{\omega} = \frac{1}{2H} [P_m - \Delta E'_q I_q] \quad (6.2)$$

$$\Delta \dot{E}'_q = \frac{1}{\tau'_{do}} [\Delta E_{FD} - \Delta E'_q + (x_d - x'_d) I_d] \quad (6.3)$$

$$\Delta \dot{V}_o = \frac{1}{T_R} [V_t - \Delta V_o] \quad (6.4)$$

$$\Delta \dot{E}_{FD} = \frac{1}{T_e} [K_e (V_{ref} - V_t) - \Delta E_{FD} + E_{FDeq}] \quad (6.5)$$

$$\dot{x}_1 = \frac{K_{pss}}{T_w} [\Delta \omega + T_w \Delta \dot{\omega}] \quad (6.6)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{T_2} [x_1 + T_1 \dot{x}_1 - x_2] \quad (6.7)$$

$$\dot{V}_{pss} = \frac{1}{T_4} [x_2 + T_3 \dot{x}_2 - V_{pss}] \quad (6.8)$$

$$V_q = V_\infty \cos \delta - x_e I_d ; V_d = -V_\infty \sin \delta + x_e I_q \quad (6.9)$$

$$V_q = E'_q - x'_d I_d ; V_d = -x_d I_q ; V_t = \sqrt{V_q^2 + V_d^2} \quad (6.10)$$

Em (6.1)-(6.10), δ é o ângulo do rotor, ω é a velocidade do rotor e P_m é a potência mecânica do gerador síncrono. Além disso, E'_q é a tensão transitória de eixo em quadratura e E_{FD} a tensão de campo. As variáveis V_t e V_o representam, respectivamente, a tensão do barramento terminal e a tensão de saída do transdutor. Por último, a variável V_d é a componente de eixo direto e V_q é a componente de eixo em quadratura da tensão terminal. As equações (6.6), (6.7) e (6.8) estão relacionadas à dinâmica do PSS.

Analisando o conjunto de equações do sistema observa-se que o modelo adotado é não linear nas variáveis E'_q e δ e, portanto, capaz de descrever o sistema em qualquer ponto de operação. Entretanto, justamente por ser um modelo não-linear, o mesmo não permite que as técnicas de análise e controle lineares sejam aplicadas. Para tornar mais simples a análise de sua resposta, o modelo pode ser linearizado em torno de um ponto de equilíbrio, fazendo com que a estabilidade local do sistema possa ser estudada e que técnicas de controle linear possam ser aplicadas.

6.1 Linearização do Modelo por expansão em Série de Taylor

O conjunto de equações algébrico-diferenciais (6.1)-(6.10) que descrevem o modelo pode ser reescrito no formato apenas diferencial, após a substituição das restrições algébricas (6.9)-(6.10) nas equações diferenciais (6.2)-(6.5). A modelagem resultante deste processo de substituição pode ser descrita, de forma condensada, por:

$$\dot{x} = f(x) , \quad x(0) = x_0 \quad (6.11)$$

O sistema não-linear apresentado em (6.11) pode ser linearizado através da expansão em Série de Taylor em relação a um ponto de equilíbrio específico. Admitindo que x_e seja o ponto de equilíbrio do sistema (6.11), de tal forma que $f(x_e) = 0$, e definindo $\Delta x = x - x_e$, obtém um novo sistema de coordenadas cuja origem coincide com o ponto de equilíbrio do modelo não linear (6.11). A função $f(x)$ pode ser expandida em torno do ponto de equilíbrio x_e através da série de Taylor [27], ou seja:

$$f(x) = f(x_e) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_e} (x - x_e) + e(x(t)) \quad (6.12)$$

Em (6.12), $e(x(t))$ engloba os termos não lineares da expansão em série de Taylor. Supondo que Δx é pequeno, de forma que x não se afasta significativamente de x_e , tem-se que os termos de ordem superior a 1 da série de Taylor podem ser desprezados, ou seja $e(x(t)) \approx 0$. Como $f(x_e) = 0$, pode-se aproximar $f(x)$ através de $f(x) \cong A\Delta x$, sendo $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_e}$, de forma que (3.1) seja uma boa aproximação de (6.11) numa vizinhança do ponto de equilíbrio x_e [27]. A suposição (3.1) é válida quando as trajetórias provenientes do sistema não-linear original não se afastam significativamente do ponto de equilíbrio x_e . Desta forma, a aproximação linear é capaz de representar o modelo não linear do sistema em estudo sem perda significativa de precisão, desde que as condições iniciais estejam em uma região próxima ao ponto x_e .

7 . Resultados

Com o propósito de se fazer um estudo sobre a utilização dos fatores de participação (tradicionais e estendidos) para detecção de flutuações de tensão em um sistema com geradores síncronos distribuídos, simulações foram feitas no modelo apresentado na seção 6. Os valores numéricos, em p.u. ou segundos (dependendo da grandeza em questão), dos parâmetros adotados no modelo são:

- **Parâmetros do Gerador Síncrono:** $H = 5.0$, $X_d = 1.6$, $X_q = 1.55$, $X'_d = 1.6$, $X'_q = 1.55$, $T'_{do} = 6.0$, $X_q = 1.55$;
- **Parâmetros do Regulador de Tensão:** $K_e = 100.0$, $T_e = 0.01$;
- **Parâmetro do Transdutor de Tensão:** $T_{tp} = 0.001$;
- **Parâmetros do Controlador PSS:** $K_{pss} = 5.0$, $T_w = 3.0$, $T_1 = 0.7$, $T_2 = 0.11$, $T_3 = 0.70$, $T_4 = 0.11$;
- **Parâmetros da Rede:** $V_{inf} = 1.2649$, $x_e = 0.40$.

Vale ressaltar aqui que o PSS foi intencionalmente mal sintonizado neste trabalho para garantir a presença de oscilações mal amortecidas na resposta do sistema. Nos itens a seguir, os resultados obtidos através de cada técnica para caracterização da resposta da tensão terminal podem ser vistos.

7.1 Caracterização da tensão terminal a partir dos fatores de participação tradicionais

A partir da matriz de estados A do sistema em estudo, foram obtidos os autovalores, autovetores à esquerda e à direita. Os autovalores da matriz A são: $\lambda_1 = -1001.0$, $\lambda_2 = -94.1$, $\lambda_{3,4} = -9.3 \pm 21.3i$, $\lambda_{5,6} = -0.4 \pm 4.8i$, $\lambda_7 = -4.2$, $\lambda_8 = -4.2$.

Conforme a definição na seção 3, os fatores de participação tradicionais foram calculados para o sistema em estudo com auxílio do software MATLAB e podem ser vistos na Tabela 7-I.

Tabela 7-I - Fatores de Participação Tradicionais do sistema simulado

	λ_1	λ_2	$\lambda_{3,4}$	$\lambda_{5,6}$	λ_7	λ_8
δ	0.0000	0.0004	0.0436	0.4456	0.1382	0.0030
ω	0.0000	0.0004	0.0436	0.4456	0.1382	0.0030
E'_q	0.0010	0.0626	0.5054	0.1087	0.1029	0.0001
V_o	0.9979	0.0115	0.0048	0.0013	0.0011	0.0000
E_{FD}	0.0011	0.9950	0.1248	0.0052	0.0041	0.0000
x_1	0.0000	0.0000	0.0202	0.0641	0.0742	1.0054
x_2	0.0000	0.0000	0.1532	0.2178	0.4061	0.0008
V_{pss}	0.0000	0.0000	0.4534	0.1402	0.1402	0.0001

Analisando a Tabela 7-I, pode-se verificar que os autovalores 5,6 correspondem aos modos eletromecânicos, pois estão fortemente associados às variáveis eletromecânicas δ e ω , ângulo e velocidade do rotor respectivamente. Tais modos caracterizam as oscilações de baixa frequência, e quando presentes na tensão podem induzir a flutuação da mesma.

Como o objetivo deste trabalho é verificar a presença de flutuações de tensão induzidas por oscilações eletromecânicas mal amortecidas na tensão terminal do gerador deve-se observar na tabela I a tensão de saída do transdutor (variável V_o), pois esta medida é muito próxima da tensão terminal do gerador. A linha correspondente a esta variável encontra-se em destaque na cor cinza.

Observa-se, portanto, através da Tabela 7-I, que o fator de participação do modo eletromecânico na tensão de saída é de baixa amplitude, induzindo à conclusão de que não haveria flutuação de tensão induzida pelos modos eletromecânicos mal amortecidos na resposta temporal desta variável. Entretanto, esta conclusão é errônea, conforme será visto adiante na comparação com os resultados dos fatores de participação estendidos e nas simulações da resposta do sistema a uma condição inicial plausível de ocorrência na prática.

7.2 Caracterização da tensão terminal a partir dos fatores de participação estendidos (abordagem determinística)

De acordo com a definição proposta no capítulo 4, a determinação dos fatores de participação estendidos deve ser feita a partir da média da contribuição relativa de um conjunto de condições iniciais, e não de uma condição inicial particular. Com intuito de criar

um conjunto contendo perturbações que descrevam adequadamente o que ocorre fisicamente no processo, são aplicadas faltas trifásicas sobre o modelo do gerador descrito no capítulo 6, alterando o valor dos seguintes parâmetros:

- **Tempo de duração da falta (t_{falta}):** 32, 40, 48, 52, 56, 64, 72, 80, 88 e 100 ms.
- **Tensão da barra infinita (V_{∞}):** O valor da tensão da barra infinita foi incrementado em até 10% a partir da tensão nas condições nominais, descritas na seção 2.
- **Impedância equivalente (X_e):** O valor da impedância equivalente terminal foi incrementado em até 10% a partir da impedância equivalente do sistema pré-falta, 0.4 pu.

São feitas combinações entre 11 valores de V_{∞} , 11 valores de X_e e 10 valores de t_{falta} , obtendo no total um conjunto com 1210 condições iniciais. A partir desse conjunto de condições iniciais e da equação (4.1) os fatores de participação estendidos foram calculados e os resultados podem ser vistos na tabela II. Nessa tabela, todos os elementos representam o valor absoluto dos fatores de participação estendidos e estão multiplicados por 10^{-6} (ou seja, os valores numéricos dos fatores de participação podem ser obtidos de forma aproximada multiplicando-se os elementos da Tabela 7-II por 10^6). É importante ressaltar que os fatores de participação estendidos não geram resultados adimensionais (como é o caso dos fatores de participação tradicionais) e, como se trata de uma soma ponderada sobre o conjunto S , quanto maior o número de condições iniciais pertencentes a este conjunto, maiores são os valores absolutos dos fatores de participação estendidos.

Tabela 7-II – Valores absolutos dos Fatores de Participação Estendidos Determinísticos do Sistema Simulado (Multiplicados por 10^{-6})

	λ_1	λ_2	$\lambda_{3,4}$	$\lambda_{5,6}$	λ_7	λ_8
δ	0.0000	0.0000	0.0013	0.0689	0.0248	0.0068
ω	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0002	0.0000
E'_q	0.0000	0.0005	0.0106	0.0343	0.0281	0.0058
V_o	0.0006	0.0003	0.0054	0.0242	0.0169	0.0036
E_{FD}	0.0041	0.1497	0.8228	0.5562	0.3637	0.0004
x_1	0.0000	0.0010	0.0936	1.0075	0.3391	2.2683
x_2	0.0000	0.0018	0.1718	0.8609	0.3267	0.4881
V_{pss}	0.0000	0.0034	0.3175	0.7402	0.3166	0.1057

Analisando na Tabela 7-II a linha correspondente à tensão de saída do transdutor (variável V_o) a qual se encontra em destaque na cor cinza, observa-se que os modos eletromecânicos são os que possuem maior contribuição estendida na resposta dinâmica desta variável indicando que haveria flutuação de tensão provocada por oscilações eletromecânicas mal amortecidas.

7.3 Caracterização da tensão terminal a partir dos fatores de participação estendidos (abordagem probabilística)

Para a realização do cálculo dos fatores de participação estendidos do sistema em estudo, é necessário inicialmente formar o conjunto de condições iniciais. Para criação desse conjunto, conforme apresentado no capítulo 4, é necessário criar um conjunto probabilístico de condições iniciais que reflitam condições práticas, sendo para isso utilizado o método de Simulação de Monte Carlo.

Assim com o intuito de criar um conjunto contendo perturbações que descrevam adequadamente o que ocorre fisicamente no processo, são aplicadas faltas trifásicas sobre o sistema em estudo alterando os seguintes parâmetros: tempo de duração de falta (t_f), tensão de barra infinita (V_∞) e impedância equivalente do sistema pré-falta (x_e). De acordo com o que é definido pela simulação de Monte Carlo, o primeiro passo para aplicação do método consiste em definir funções de distribuição de probabilidade para esses parâmetros que serão alterados. Tais funções são definidas abaixo:

- **Tempo de duração de falta (t_{falta}):** considera-se que nas simulações esse parâmetro possui a mesma probabilidade para assumir um determinado valor dentro de um intervalo de valores possíveis, ou seja, assume-se que a escolha é feita com base na distribuição uniforme de probabilidade. Na Figura 7.1, é apresentada a função de distribuição uniforme de probabilidade para a escolha do tempo de duração de falta. Dentro dessa faixa de valores que o parâmetro pode assumir, o valor mínimo, t_{fmin} , é de 0s e o valor máximo, t_{fmax} , é de 100ms.

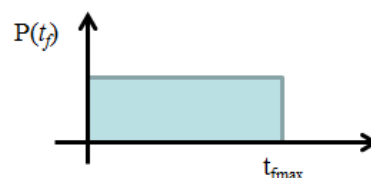


Figura 7.1 - Função de distribuição de probabilidade uniforme para o parâmetro t_{falta}

- **Tensão do barramento infinito (V_{∞}):** Assim como o parâmetro anterior, a escolha da V_{∞} é feita com base na função de distribuição uniforme, conforme pode ser visto na Figura 7.2. Dentro do intervalo de valores que esse parâmetro pode assumir, considerou-se como o valor mínimo ($V_{\infty min}$) a tensão 10% menor que a tensão nas condições nominais, e como valor máximo ($V_{\infty max}$) a tensão 10% maior que o tensão nas condições nominais. As condições nominais estão descritas no capítulo 6.

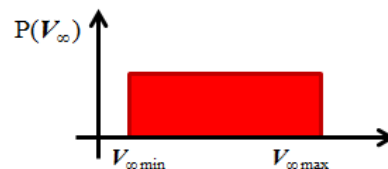


Figura 7.2 - Função de distribuição de probabilidade uniforme para o parâmetro V_{∞}

- **Impedância Equivalente (X_e):** De forma equivalente aos parâmetros anteriores, essa variável também obedece à função de distribuição uniforme, conforme consta na Figura 7.3, sendo que o valor máximo que a impedância equivalente pré-falta pode assumir é 10% maior que o valor nominal, e o valor mínimo é 10% menor que o valor nominal.

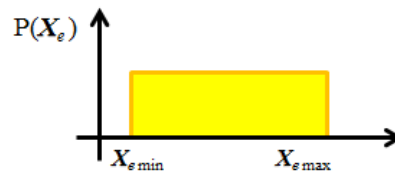


Figura 7.3 - Função de distribuição de probabilidade uniforme para o parâmetro X_e

Uma vez definidas as funções de probabilidade que descrevem os parâmetros que são alterados, sorteios são realizados formando um conjunto composto por 1000 vetores de condições iniciais. Assim, a partir de (4.2) o cálculo dos fatores de participação estendidos é realizado, e os resultados podem ser visualizados na Tabela 7-III.

Tabela 7-III - Valores absolutos dos Fatores de Participação Estendidos Estatísticos do Sistema Simulado (Multiplicados por 10^{-6})

	λ_1	λ_2	$\lambda_{3,4}$	$\lambda_{5,6}$	λ_7	λ_8
δ	0.0000	0.0000	0.0011	0.0571	0.0206	0.0056
Ω	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0001	0.0000
E'_q	0.0000	0.0004	0.0090	0.0290	0.0238	0.0049
V_o	0.0005	0.0002	0.0044	0.0198	0.0138	0.0030
E_{FD}	0.0419	1.4424	8.0231	5.4169	3.5420	0.0036
x_1	0.0000	0.0033	0.3291	3.5385	1.1909	7.9664
x_2	0.0000	0.0025	0.2478	1.2389	0.4700	0.7024
V_{pss}	0.0000	0.0062	0.5819	1.3549	0.5795	0.0001

Nessa tabela, os elementos representam os valores absolutos dos fatores de participação estendidos e estão multiplicados por 10^{-6} . Vale ressaltar novamente que os fatores de participação estendidos não são adimensionais, mesmo quando o cálculo é feito a partir de um conjunto probabilístico de condições iniciais (como é o caso desse trabalho), portanto não é possível comparar os fatores de participação estendidos entre variáveis de estado de unidades diferentes, ou seja, não é possível fazer a comparação dos fatores de participação em coluna. E também, assim como se trata de uma soma ponderada, quanto maior o número de condições iniciais, maior é o valor absoluto dos fatores de participação estendidos.

Analisando os resultados, observando a linha correspondente à tensão de saída do transdutor, destacada em cinza, tem-se que a maior contribuição relativa na resposta dinâmica desta variável é dada pelos modos eletromecânicos (modos 5,6).

Esse resultado assemelha-se àquele observado através da Tabela 7-II utilizando-se a abordagem determinística dos fatores de participação, e a diferença é a forma de construção do conjunto de condições iniciais. Pode-se afirmar que o conjunto criado através de simulações de Monte Carlo tende a ser melhor representativo do comportamento real do sistema, pois abrange todas as condições reais ao qual o SEP está sujeito, podendo refletir de forma mais adequada o que ocorre na prática levando em conta a probabilidade de ocorrência daquele determinado comportamento do sistema.

Com isso conclui-se, através dos fatores de participação estendidos estatísticos, que haveria flutuação de tensão induzida por oscilações eletromecânicas mal amortecidas dos geradores na tensão terminal, levando em conta a probabilidade de ocorrência da mesma.

Além disso, é importante destacar que ambos os resultados para os fatores de participação estendidos, abordagem determinística e probabilística, obtidos neste trabalho,

reforçam que há presença de flutuação de tensão induzida por geradores síncronos em sistemas de distribuição com geração distribuída e que os mesmos não são detectados pelos fatores de participação tradicionais.

7.4 Análise da resposta da tensão de saída do transdutor no tempo

Como os resultados dos fatores de participação tradicionais e estendidos divergem na caracterização da resposta da tensão terminal do sistema, simulações foram realizadas sobre o modelo não linear considerando uma condição inicial real (em linha contínua), ou seja, uma instância dentro do conjunto de condições iniciais criado através da SMC para o cálculo dos fatores de participação estendidos e uma condição inicial hipotética (em linha tracejada), ou seja, uma condição inicial requerida para a aplicação dos fatores de participação tradicionais (que é um vetor da base canônica, contendo apenas o valor da variável V_o).

A Figura 7.4 mostra a resposta transitória da tensão terminal no pós falta resultante da incidência de uma falta trifásica, com tempo de duração de 64ms, com tensão terminal na barra igual a 90% do valor pré-falta e impedância equivalente correspondente a 90% da impedância pré-falta.

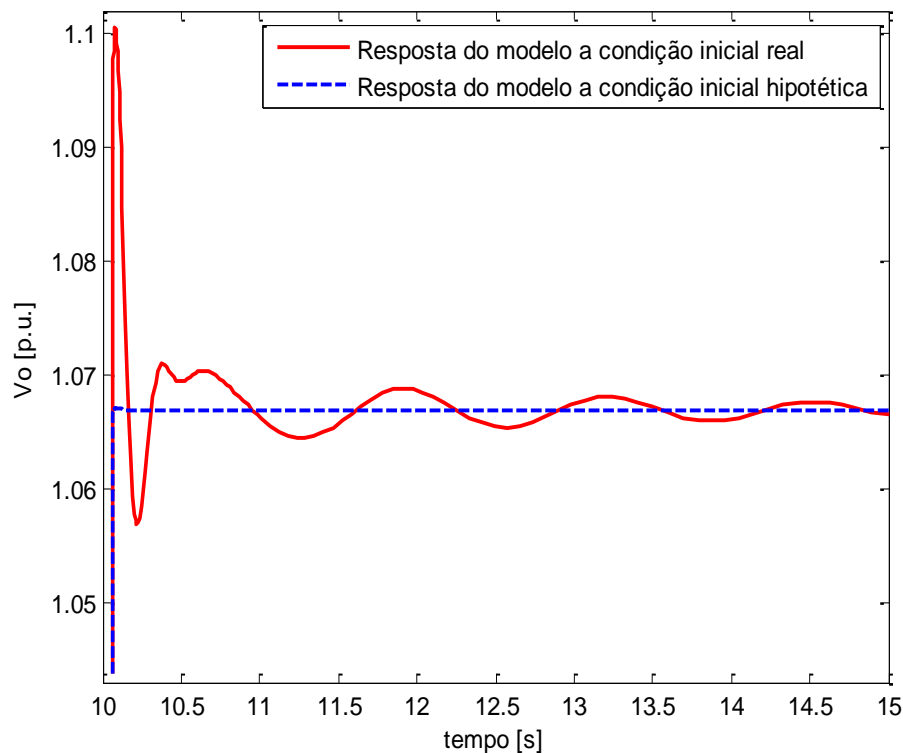


Figura 7.4 - Saída do Transdutor de Tensão Terminal

Pode-se observar no gráfico em linha tracejada (azul) que a resposta dinâmica da tensão terminal não apresenta oscilação considerando uma condição inicial hipotética, assim como previsto pelos fatores de participação tradicionais. Porém, esta condição inicial dificilmente seria encontrada na prática, a menos que houvesse algum problema com o transdutor de tensão, fazendo com que apenas o valor da saída deste transdutor apresente desvio com relação a seu valor de equilíbrio (caso este que não é o foco do presente trabalho).

Já em linha contínua (vermelha), fica clara a presença de oscilação na resposta dinâmica da tensão terminal utilizando uma condição inicial real para a perturbação simulada, assim como previsto pelos fatores de participação estendidos. Nota-se que a frequência dessas oscilações é de aproximadamente 0.76Hz, que é a mesma dada pelo modo eletromecânico $\lambda_{5,6} = -4 \pm j4.8$.

Outros exemplos de simulações do sistema utilizando várias condições iniciais diferentes entre aquelas utilizadas para o cálculo dos fatores de participação estendidos podem ser vistos na Figura 7.5.

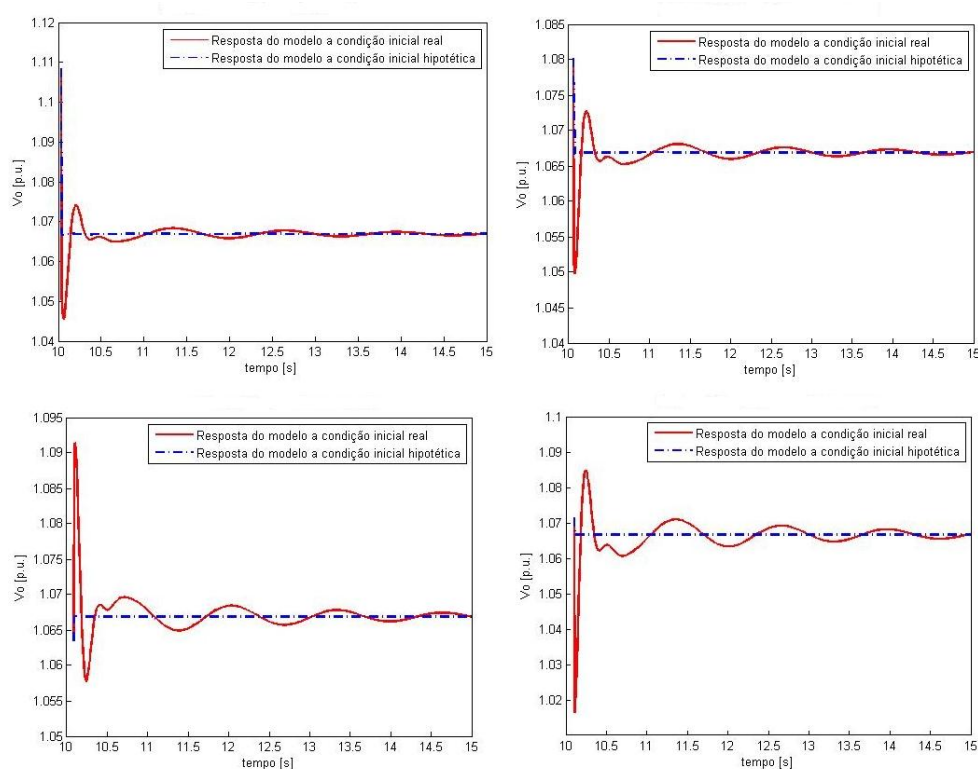


Figura 7.5 - Outras respostas para a saída do transdutor de tensão terminal

Os resultados vistos na figura acima reforçam aqueles obtidos anteriormente com a Figura 7.4, pois, em todas as simulações houve flutuações de tensão quando a condição inicial é representada como ocorreria na prática, reforçando o resultado correto dos fatores de participação estendidos.

Com isso pode-se concluir que os dos fatores de participação estendidos são capazes de caracterizar corretamente a resposta física do sistema, podendo ser utilizados para detecção de flutuações de tensão induzidas por oscilações eletromecânicas em sistemas de distribuição com geração distribuída.

8 . Conclusões

Pode-se concluir deste trabalho que os fatores de participação estendidos são capazes de caracterizar corretamente a resposta dinâmica de sistemas lineares. Um exemplo disto é a detecção correta de flutuações de tensão induzidas por oscilações eletromecânicas mal amortecidas em sistemas com geração síncrona distribuída. Isso se deve ao fato de que os mesmos incluem em seu cálculo um conjunto de condições iniciais que pode ser criado de maneira que reflita o que ocorre com o sistema na prática, como por exemplo, a condição inicial a partir do qual o sistema iniciará sua dinâmica após a remoção de uma falta trifásica temporária, e não uma condição inicial em particular como considerado para o cálculo dos fatores de participação tradicionais.

Comparando-se os fatores de participação estendidos calculados a partir de uma abordagem determinística com os calculados utilizando-se uma abordagem estatística, os resultados são condizentes, sendo que o uso dos fatores estendidos estatísticos é mais interessante, pois os mesmos levam em conta a probabilidade de ocorrência de uma falta no sistema, sendo assim mais abrangentes que os fatores determinísticos. Entretanto, as distribuições uniformes utilizadas neste trabalho carregam certo grau de simplificação com relação ao comportamento do sistema real em falta e, por essa razão, a utilização de distribuições Gaussianas ou outras distribuições que melhor reflitam a ocorrência de perturbações na prática está entre as perspectivas futuras deste trabalho.

Por último, observa-se que os fatores de participação tradicionais, apesar de identificarem corretamente a natureza dos modos (influência dos estados sobre os modos) não são capazes de identificar corretamente a resposta física do sistema (influência dos modos sobre os estados) devido à suposição de que a resposta dinâmica de uma determinada variável de estado desse sistema seja descrita utilizando-se um vetor da base canônica como condição inicial do mesmo. Essa imposição impede que os modos do sistema sejam excitados da mesma maneira que ocorre fisicamente, já que não é possível provocar perturbações num sistema em uma única variável sem alterar outras variáveis associadas (com exceção do caso, já comentado, em que haja algum defeito no transdutor de tensão terminal, porém este não é o foco deste trabalho).

Conclui-se, portanto, que o conceito de fatores de participação estendidos tem potencial para gerar ferramentas de análise de grande utilidade em sistemas com geração distribuída e, possivelmente, outros tipos de sistemas com características dinâmicas similares. Dentre as próximas etapas deste trabalho, encontram-se a busca por um método de adimensionalização no cálculo dos fatores de participação estendidos, de forma a permitir uma comparação entre variáveis de estado de diferentes grandezas físicas, assim como ocorre no caso dos fatores de participação tradicionais. Para o momento, por outro

lado, concluímos o trabalho com esta perspectiva de potencial contribuição significativa para a análise de sistemas dinâmicos lineares, e salientamos que as publicações resultantes desta pesquisa podem ser vistas nas referências [26, 28, 29].

Bibliografia

- [1] Instituto Nacional de Eficiência Energética, Disponível em: <http://www.inee.org.br>, Acesso em: 17 out. 2011.
- [2] Edwards F. V., Dudgeon G.J.W, McDonald J.R., Leithead W.E. "Dynamics of Distribution Networks with Distributed Generation." *Proceedings of the IEEE Power Engineering Society Winter Meeting, New York, USA, 2000.*
- [3] Jenkins N., Allan R., Crossley P., Kirschen D., Strbac G. "Embedded Generation." *The Institution of Engineering and Technology; 2000.*
- [4] Kundur P., Paserba J., Ajarapu V., "Definition and classification of power system stability IEEE/CIGRE joint task force on stability terms and definitions." *IEEE Transactions on Power Systems 2004; 19(3):1387–1401. DOI: 10.1109/TPWRS.2004.825981*
- [5] Rogers G., "Power System Oscillations." *Kluwer: Norwell, MA, 2000.*
- [6] Demello F. P., Concordia C., "Concepts of synchronous machine stability as affected by excitation control." *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems 1969; (4):316–329. DOI:10.1109/TPAS.1969.292452*
- [7] Vittal V., "Consequence and impact of electric utility industry restructuring on transient stability and small-signal stability analysis." *Proceedings of IEEE 2000; 88(2):196–207. DOI:10.1109/5.823998*
- [8] Kuiava R., Ramos R. A., e Bretas N. G., "An analysis of the potential impacts of electromechanical oscillations on the stability and power quality of distributed generation systems." *In: Proceedings of the IEEE Power Engineering Society General Meeting, Pittsburgh, USA, 2008.*
- [9] Salim R. H., Kuiava R., Ramos R. A., Bretas N. G., "Impact of power factor regulation on small-signal stability of power distribution systems with distributed synchronous generators." *European Transactions on Electrical Power, 2010, DOI: 10.1002/etep.504.*
- [10] Salim R. H., Oleskovicz M., Ramos R. A., "Assessment of Voltage Fluctuations Induced by Electromechanical Oscillations in Distributed Generation Systems." *In: Proceedings of IEEE PES General Meeting, 2010.*
- [11] Pérez-Arriaga I. J., Verghese G. C., Schweppe F., "Selective modal analysis with applications to electric power systems, part I: heuristic introduction." *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-101, No. 9, September 1982, pp. 3117-3125.*
- [12] Hashlamoun W. A., Hassouneh M. A., Abed E. H., "New results on modal participation factors: revealing a previously unknown dichotomy." *IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 54, No. 7, July 2009, pp. 1439-1449.*

- [13] Callioli, C. A., Domingues H. H., Costa R. C. F., *Álgebra Linear e Aplicações*, 6 ed, São Paulo: Atual, 2007.
- [14] Noble B., Daniel J. W., *Applied Linear Algebra*, Prentice-Hall, 1988.
- [15] Ramos, R. A., Disponível em: <http://www.sel.eesc.usp.br/laco/publicacoes/tecnicos.html>, Acesso em: 01 out. 2011.
- [16] Cassago Jr. H.; Ladeira L. A. C., *Equações Diferenciais Ordinárias, Notas de aula, ICMC-USP*. (http://www.icmc.usp.br/~walmarar/aulas2010/herminio_ladeira2011.pdf)
- [17] Boyce, W. E., Di Prima, R. C.; *Elementary Differential Equations*, John Wiley, New York, 1969.
- [18] Abed E. H., Lindsay D., Hashlamoun W. A., "On participation factors for linear systems." *Automatica*, vol. 36, pp. 1489-1496, 2000.
- [19] Olguin G., "Voltage dip (sag) estimation in power system based on stochastic assessment and optimal monitoring", *Ph.D. Tese, Div. Of Electric Power Eng., Chalmers Univ. of Tech., Gothenburg, Sweden*, 2005.
- [20] Rubinstein R. Y., Kroese D. P., *Simulation and the Monte Carlo Method*, Second Edition. Copyright © 2007 John Wiley & Sons, Inc.
- [21] Pillana S., *History Of Monte Carlo Method*, 2002, Disponível em: <http://web.student.tuwien.ac.at/~e9527412/index.html> Acesso em: 17 out. 2011.
- [22] Olguin G., Karlsson D., Leborgne R., "Stochastic Assessment of Voltage Dips (Sags): The Method of Fault Positions versus a Monte Carlo Simulation Approach" *Power Tech Conference Proceedings, 2003, IEEE Bologna, Vol.4, 23-26 June 2003*.
- [23] Oliveira T. C., "Afundamentos de tensão: avaliação estatística de resultados de medição com base em simulações". *Tese de doutorado, Universidade Federal de Itajubá, Brasil*, 2008.
- [24] Agreira C. I. F., Jesus S. M. F., Figueiredo S. L., Ferreira C. M., Pinto J. A. D., Barbosa F. P. M., "Probabilistic Steady-State Security Assessment of an Electric Power System Using A Monte Carlo Approach," *Universities Power Engineering Conference, 2006. UPEC 06'. Proceedings of the 41st International*, vol.2, no., pp.408-411, 6-8 Sept. 2006
- [25] Billinton R., Lian G., "Monte Carlo approach to substation reliability evaluation" *Generation, Transmission and Distribution, IEEE Proceedings C*, vol.140, no.2, pp.147-152, Mar 1993.

- [26] Ramos R. A, Moraco A. G. M., Fernandes T. C. C., Garcia G. S., “Análise Estatística para Detecção de Flutuações de Tensão em Sistemas com Geração Síncrona Distribuída Utilizando Fatores de Participação Estendido”. In: *NINTH LATIN-AMERICAN CONGRESS ON ELECTRICITY GENERATION AND TRANSMISSION, Mardel Plata, 2011, 6-9 de novembro*.
- [27] Chen C. T., *Linear System Theory and Design, 3rd Edition, Oxford University Press, Inc. New York, USA, 1998*.
- [28] Ramos R. A, Moraco A. G. M., Fernandes T. C. C., “Utilização de Fatores de Participação na detecção de flutuações de tensão em sistemas com geração síncrona distribuída.” In: *XIV ERIAC - Encuentro Regional Iberoamericano del Cigré, 2011, Ciudad del Este. Anais do XIV ERIAC - Encuentro Regional Iberoamericano del Cigré, 2011. p. 1-8*
- [29] Ramos R. A, Moraco A. G. M., Fernandes T. C. C., Oliveira R. V., “Application of Extended Participation Factors to Detect Voltage Fluctuations in Distributed Generation Systems”. In: *IEEE POWER & ENERGY SOCIETY GENERAL MEETING DETROIT, 2011, 24-28 julho*.

Apêndice A - Revisão Conceitual de Álgebra Linear

A.1. Autovalor

Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial de dimensão N . Um vetor não-nulo $u \in V$ é um autovetor de T e $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor associado ao autovetor u se:

$$T(u) = \lambda u \quad (A.1)$$

A.2. Autovetores à Direita e à Esquerda

Seja um autovetor à direita um vetor coluna X_R satisfazendo:

$$AX_R = \lambda_R X_R \quad (A.2)$$

onde A é uma matriz, então:

$$(A - \lambda_R I)X_R = 0 \quad (A.3)$$

e

$$\det(A - \lambda_R I) = 0 \quad (A.4)$$

Similarmente, define-se autovetor à esquerda como um vetor linha X_L satisfazendo:

$$X_L A = \lambda_L X_L \quad (A.5)$$

Transpondo-se dos dois lados:

$$(X_L A)^T = \lambda_L X_L^T \quad (A.6)$$

que pode ser escrito como:

$$A^T X_L^T = \lambda_L X_L^T \quad (A.7)$$

Rearranjando obtém-se:

$$(A^T - \lambda_L I)X_L^T = 0 \quad (A.8)$$

Ou seja:

$$\det(A^T - \lambda_L I) = 0 \quad (A.9)$$

A.3. Polinômio característico

Dada uma matriz $A=(a_{ij})$ de ordem n , chama-se polinômio característico da matriz A o seguinte polinômio de grau n :

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = \det(A - \lambda I_n) \quad (A.10)$$

onde as raízes de $p_A(\lambda)$ são chamadas de autovalores de A.

A.4. Produto escalar

O produto escalar entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} é definido como número real $|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ e é denotado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ou $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Se os vetores são dados em sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais o produto escalar entre eles é dado por:

$$\vec{u} = (x_1, y_1) \text{ e } \vec{v} = (x_2, y_2) \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 \quad (A.11)$$

A.5. Produto interno

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{R}^n . Entende-se por *produto interno* sobre V uma aplicação que transforma cada par ordenado $(u, v) \in V \times V$ em um número real (indicado por $\langle u, v \rangle$) obedecendo às seguintes condições:

- (a) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall u, v, w \in V;$
- (b) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u, v \in V;$
- (c) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall u, v \in V;$
- (d) $\langle u, u \rangle$ é um número real maior que zero para todo vetor $u \neq 0$.

A.6. Base de um espaço vetorial

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Uma base de V é um subconjunto finito de $B \subset V$ para o qual as seguintes condições se verificam:

- (a) $[B] = V$, onde a notação $[\cdot]$ representa o espaço gerado pelo argumento \cdot .
- (b) B é linearmente independente.

Ex. $\{(1,0), (0,1)\}$ é uma base do \mathbb{R}^2 pois:

$$(a, b) = a(1,0) + b(0,1), \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \text{ e}$$

$$x(1,0) + y(0,1) = (0,0) \rightarrow x = 0 \text{ e } y = 0.$$

A.7. Base ortonormal

Uma base $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de um espaço vetorial com produto interno V é *base ortonormal* se:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{para } i \neq j \\ 1, & \text{para } i = j \end{cases} \quad (A.12)$$

Apêndice B – Revisão Conceitual de Equações Diferenciais Lineares

B.1. Primeira Análise

Seja o sistema:

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \quad (B.1)$$

A solução de (B.1) pode ser escrita como:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i v_i e^{\lambda_i t} \quad (B.2)$$

Prova:

Se (B.2) é solução de (B.1):

$$\begin{aligned} \dot{x} = Ax &= A \sum_{i=1}^n c_i v_i e^{\lambda_i t} \Rightarrow \\ \dot{x} &= \sum_{i=1}^n c_i (A v_i) e^{\lambda_i t} \end{aligned} \quad (B.3)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} x(t) = \sum_{i=1}^n c_i v_i e^{\lambda_i t} &\Rightarrow \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n c_i v_i \lambda_i e^{\lambda_i t} \Rightarrow \\ \dot{x} &= \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i v_i e^{\lambda_i t} \end{aligned} \quad (B.4)$$

Comparando (B.3) e (B.4):

$$\sum_{i=1}^n c_i (A v_i) e^{\lambda_i t} = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i v_i e^{\lambda_i t}$$

Conclui-se então que a condição para que (B.2) seja solução de (B.1) é:

$$\lambda_i v_i = A v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Ou seja, λ_i deve ser *autovalor* de A associado ao *autovetor à direita* v_i .

B.2. Segunda Análise

Seja o sistema (B.1).

A solução de (B.1) também pode ser escrita como:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n [u_i^T x_0] y_i e^{\lambda_i t} \quad (B.5)$$

Prova:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n [u_i^T x_0] \lambda_i y_i e^{\lambda_i t} = \sum_{i=1}^n [u_i^T x_0] A y_i e^{\lambda_i t} = A \sum_{i=1}^n [u_i^T x_0] y_i e^{\lambda_i t} = A x(t)$$

Sendo $U^T = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix}$ e $Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]$, tem-se:

$$x(0) = \sum_{i=1}^n [u_i^T x_0] y_i = U^T Y x_0 = x_0$$

pois

$$U^T Y = I$$

Portanto

$$c_i = u_i^T x_0 \quad (B.6)$$

B.3. Principais casos

B.3.1. Autovalores Reais

Neste caso, a solução geral do sistema (14) é dada por:

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n v_n e^{\lambda_n t} \quad (B.7)$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são autovalores da matriz A , com autovetores v_1, v_2, \dots, v_n , respectivamente.

Se todos os λ_n forem negativos, então $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, e então sistema linear é estável do ponto de vista de controle. Por outro lado, se todos os λ_n forem positivos, então $x(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$ e o sistema é instável do ponto de vista de controle.

Exemplo numérico:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Autovalores e autovetores à direita da matriz:

$$\lambda_1 = 1, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \lambda_2 = -1, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix};$$

Portanto:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{1t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-1t}$$

Para calcular c_1 e c_2 , considera-se o sistema em $t = 0$:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^0 + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^0 \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ -2c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$c_1 = 1; \quad c_2 = 1$$

e a solução do sistema fica sendo:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{1t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-1t}$$

$$\therefore x_1(t) = e^{1t} + e^{-1t}$$

$$x_2(t) = 2e^{-1t}$$

A solução do sistema é interpretada como sendo λ_i o modo de resposta do sistema, e v_i a distribuição do modo entre as variáveis de estado.

Visualização da resposta do sistema:

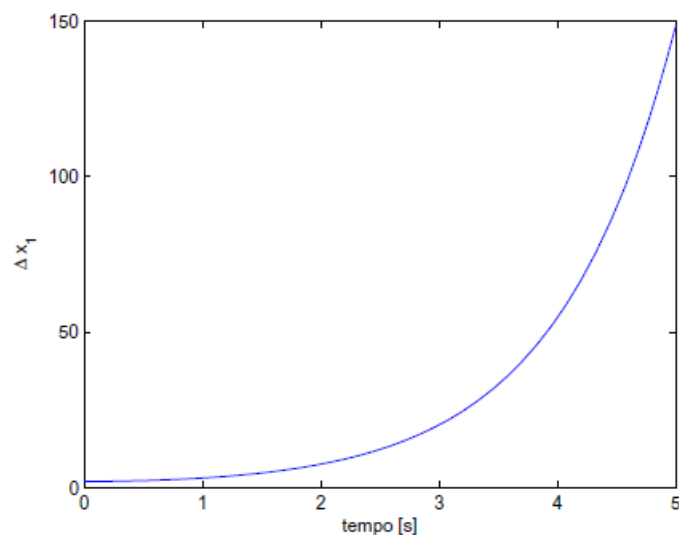


Figura B.1 - Resposta da variável de estado $x_1(t)$

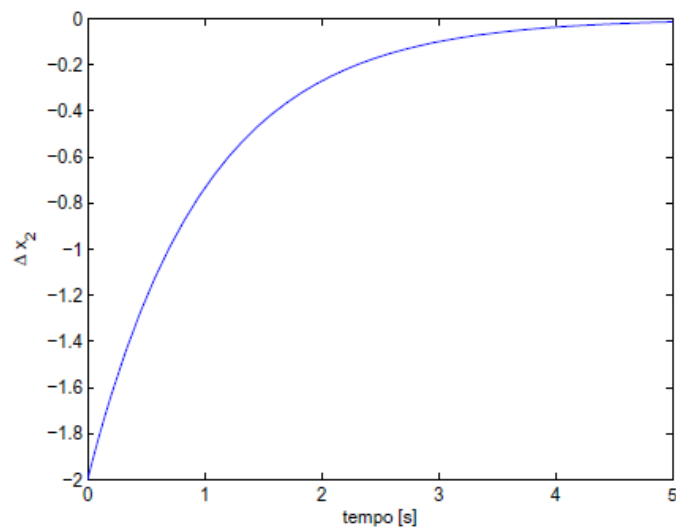


Figura B.2 - Resposta da variável de estado $x_2(t)$

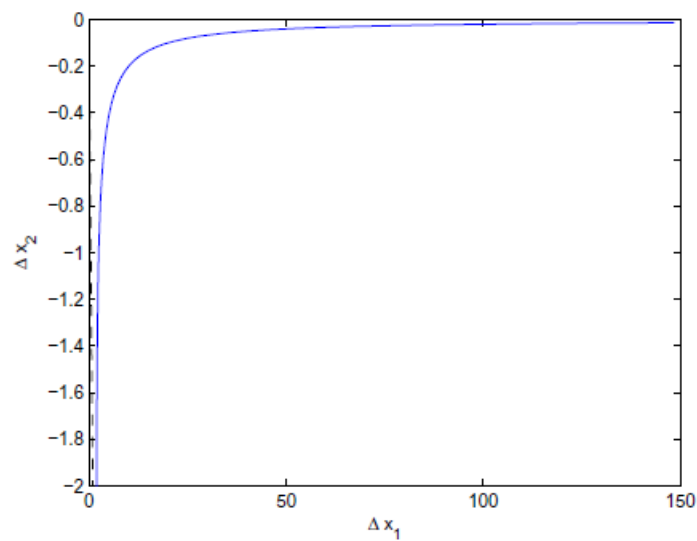


Figura B.3 - Resposta de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ no plano de fase

B.3.2. Autovalores Complexos

Seja A uma matriz real com componentes reais 2×2 , com autovalores complexos $\sigma \pm \omega i$ e seus correspondentes autovetores v e \bar{v} . Então, a solução do sistema linear de equações diferenciais $\dot{x} = Ax$ é:

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \bar{v}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t} \quad (B.8)$$

Exemplo numérico:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores e autovetores à direita da matriz são:

$$\lambda_1 = -1 + 10j, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}; \lambda_2 = -1 - 10j, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$$

Solução:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} e^{(-1+10j)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} e^{(-1-10j)t}$$

Em t=0:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} e^0 + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} e^0$$

$$\begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ -jc_1 + jc_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$$

Solução geral do sistema:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} e^{(-1+10j)t} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} e^{(-1-10j)t}$$

$$\begin{aligned} \therefore x_1(t) &= \frac{1}{2} e^{(-1+10j)t} + \frac{1}{2} e^{(-1-10j)t} = \frac{1}{2} e^{-1t} e^{10jt} + \frac{1}{2} e^{-1t} e^{-10jt} = e^{-1t} \left(\frac{e^{10jt} + e^{-10jt}}{2} \right) \\ &= e^{-1t} \cos 10t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -\frac{j}{2} e^{(-1+10j)t} + \frac{j}{2} e^{(-1-10j)t} = \frac{1}{2j} e^{-1t} e^{10jt} - \frac{1}{2j} e^{-1t} e^{-10jt} = e^{-1t} \left(\frac{e^{10jt} - e^{-10jt}}{2j} \right) \\ &= e^{-1t} \sin 10t \end{aligned}$$

A interpretação do autovalor $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$ é dada como sendo σ_i a taxa de decaimento ou crescimento exponencial da resposta e ω_i a sua frequência de oscilação.

Visualização da resposta do sistema:

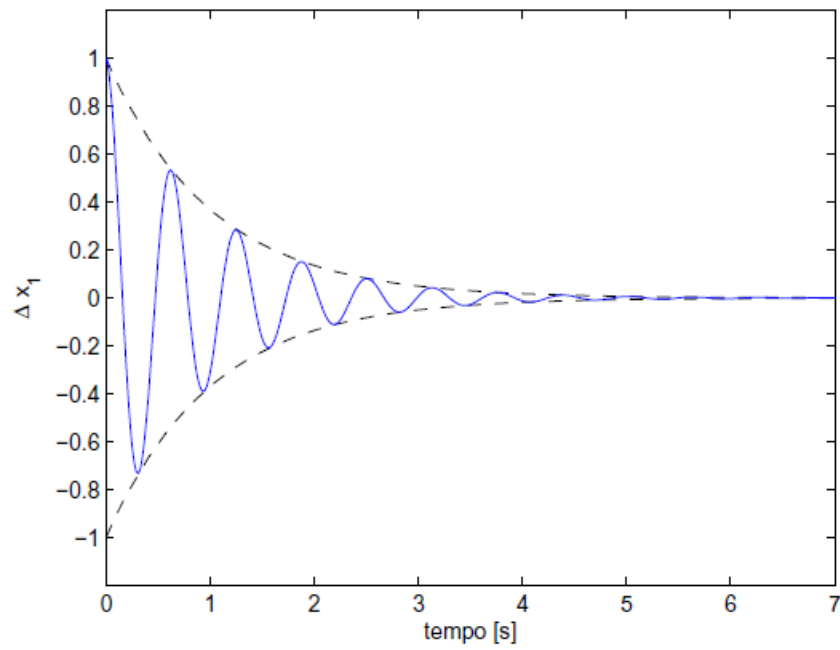


Figura B.4 - Resposta da variável de estado $x_1(t)$

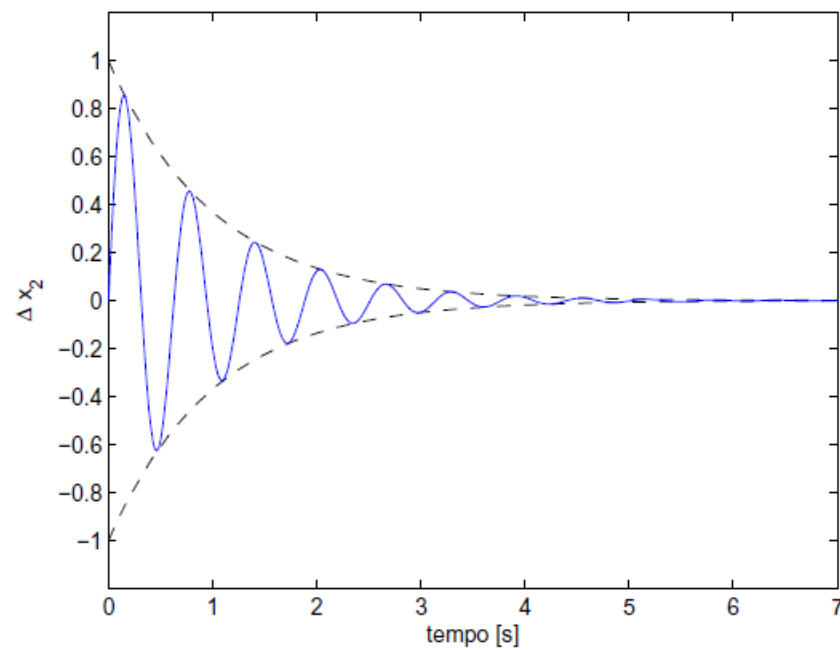


Figura B.5 - Resposta da variável de estado $x_2(t)$

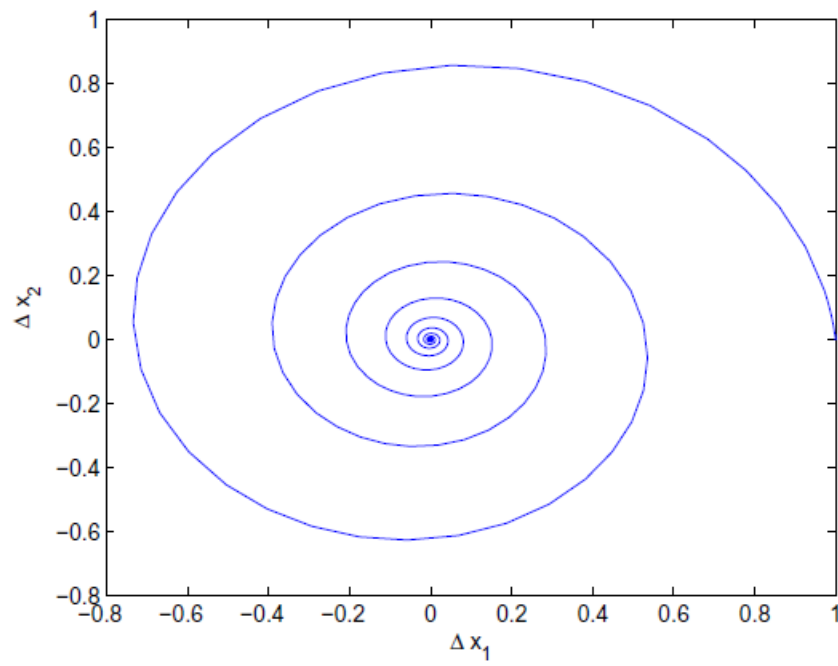


Figura B.6 - Resposta de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ no plano de fase