



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**LIMITE DA LINEARIDADE DO MODELO MATEMÁTICO
DE UM MANCAL HIDRODINÂMICO ATIVO COM
SAPATAS MÓVEIS MAGNÉTICAS UTILIZANDO
SIMULAÇÃO NUMÉRICA**

Caio Alexandre Sicchieri

São Carlos
2013

Caio Alexandre Sicchieri

**LIMITE DA LINEARIDADE DO MODELO MATEMÁTICO
DE UM MANCAL HIDRODINÂMICO ATIVO COM
SAPATAS MÓVEIS MAGNÉTICAS UTILIZANDO
SIMULAÇÃO NUMÉRICA**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Escola de Engenharia de São
Carlos, EESC/USP, para obtenção do título
de Engenheiro Mecatrônico.

Área: Dinâmica de Máquinas e Sistemas.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Nicoletti.

São Carlos

2013

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

S5651 Sicchieri, Caio Alexandre
Limite da linearidade do modelo matemático de um
mancal hidrodinâmico ativo com sapatas móveis
magnéticas utilizando simulação numérica / Caio
Alexandre Sicchieri; orientador Prof. Dr. Rodrigo
Nicoletti. São Carlos, 2013.

Monografia (Graduação em Engenharia Mecatrônica) --
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de
São Paulo, 2013.

1. mancais segmentados. 2. dinâmica de rotores. 3.
sapatas móveis. 4. resposta em frequência. 5. sistemas
não-lineares. 6. hidrodinâmica. I. Título.

FOLHA DE AVALIAÇÃO

Candidato(s): Caio Alexandre Sicchieri

Título: Limite da Linearidade do Modelo Matemático de um Mancal Hidrodinâmico Ativo com Sapatas Móveis Magnéticas Utilizando Simulação Numérica

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Escola de Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo
Curso de Engenharia Mecatrônica

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Maíra Martins da Silva

Nota atribuída: 10,0 (dez)

Maíra M. da Silva
(assinatura)

Prof. Dr. Leopoldo Pisanelli Rodrigues de Oliveira

Nota atribuída: 10,0 (dez)

[Assinatura]
(assinatura)

Prof. Dr. Rodrigo Nicoletti (orientador)

Nota atribuída: 10,0 (dez)

Rodrigo Nicoletti
(assinatura)

Média: 10,0 (dez)

Resultado: Aprovado

Data: 04/02/2013

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família e à minha companheira pela dedicação, apoio e carinho incondicionais durante todos esses anos.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Rodrigo Nicoletti pela oportunidade e orientação que fizeram este trabalho possível.

À companheira Rita de Cássia pelo amor, paciência e conselhos que foram fundamentais para mim.

À minha mãe Regina e minha irmã Simone pelo amor e por tantos sacrifícios que me permitiram concluir a graduação.

Aos amigos Rangel, Eduardo e Mateus e às amigas Carla e Kelly pela amizade, incentivo nos momentos difíceis.

Aos companheiros de alojamento Gabriel e Santiago por terem compartilhado tantos bons momentos durante minha estadia.

“Uma longa jornada começa com o primeiro passo.”

Lao Tsé

RESUMO

Sicchieri, C. A., **Limite da linearidade do modelo matemático de um mancal hidrodinâmico ativo com sapatas móveis magnéticas utilizando simulação numérica**, xx p. Monografia de Conclusão de Curso, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

Vibrações são intrínsecas às máquinas rotativas e, embora não possam ser completamente eliminadas, dever ser controladas de modo a se evitar fadiga e até mesmo falha da máquina. Neste contexto, devido à sua capacidade de alterar as características dinâmicas destas máquinas, os mancais ativos são uma solução efetiva a fim de reduzir vibrações em rotores, permitindo não só maior ciclo de vida, mas também aumento de confiabilidade e desempenho. Frequentemente, os projetos destes mancais baseiam-se em um modelo matemático da planta, o qual pode ser de difícil obtenção e, devido à adoção de hipóteses simplificadoras (inerentes ao processo de modelagem), pode ser impreciso. Nesse sentido, é de vital importância para os projetistas saberem quais os limites de linearidade do modelo matemático adotado, ou seja, em que condições as não-linearidades não podem ser mais desprezadas. Para isso, este trabalho se propõe a investigar e identificar os limites de linearidade de um mancal hidrodinâmico ativo com sapatas móveis magnéticas através da homogeneidade e das distorções das Funções de Resposta em Frequência (FRF) para uma força de excitação aplicada diretamente no rotor e para uma força de excitação aplicada pelo atuador eletromagnético da sapata móvel, inserindo sua dinâmica no modelo matemático do sistema rotor-mancal ativo. Com base nos resultados obtidos numericamente, os dois modelos serão comparados e avaliados.

Palavras-chave: mancais segmentados, dinâmica de rotores, sapatas móveis, resposta em frequência, sistemas não-lineares, hidrodinâmica.

ABSTRACT

Sicchieri, C. A., **Linearity limit of the mathematical model of a journal bearing with magnetic tilting pads using numerical simulation**, xx p. Monograph for Course Conclusion, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

Vibrations are intrinsic to rotating machinery and, although they cannot be completely eliminated, it is important to control this kind of motion with the objective of avoiding fatigue and even failure of the machine. In this context, due to their capacity of changing the dynamic characteristics of these machines, active bearings are an effective solution to reduce vibrations in rotors, allowing not only longer lifecycle, but also higher performance. Frequently, the design of these bearings is based on a mathematical model of the plant, whose obtainment can be hard and, due to the adoption of simplifying hypotheses (inherent to the modeling process), it may be imprecise. Therefore, it is vitally important for designers to know what the limits of linearity of the mathematical model, i.e., under what conditions the nonlinearities can no longer be neglected. To this end, this paper aims to investigate and identify the limits of linearity in an active hydrodynamic bearing with magnetic tilting pads through homogeneity and distortions of Frequency Response Functions (FRF) for an excitation force applied directly to the rotor and a force excitation applied by the electromagnetic actuator of the tilting pad, inserting its dynamic in the mathematical model of the rotor-active bearing system. Based on the results obtained numerically, the two models are compared and evaluated.

Keywords: journal bearings, rotor dynamics, tilting pads, frequency response, nonlinear systems, hydrodynamics.

SUMÁRIO

1. Introdução	01
1.1 Motivação.....	01
1.2 Objetivos.....	07
1.3 Conteúdo do Trabalho.....	07
2. Modelagem Matemática	09
2.1 Modelo Matemático do Rotor	09
2.2 Modelo Matemático do Mancal Hidrodinâmico Segmentado	13
2.3 Forças Atuantes no Rotor	16
2.4 Equação de Reynolds	17
2.5 Modelo Matemático do Filme de Óleo	25
3. Simulação Numérica	29
3.1 Solução da Equação de Reynolds	29
3.2 Condições de contorno para a distribuição de pressão no filme de óleo	33
3.3 Sinal de Excitação de Varredura	35
3.4 Implementação do Programa de Simulação Numérica	36
3.5 Identificação de não linearidades em sistemas	38
4. Resultados	41
4.1 Dados utilizados na simulação numérica	41
4.2 Força de excitação aplicada diretamente no eixo	42
4.3 Força de excitação aplicada pelo atuador da sapata	43
4.4 Comparação entre as condições de carregamento	45
5. Conclusão	47
Referências Bibliográficas	48

Capítulo 1

Introdução

1.1 - Motivação

Ao longo de sua história, uma das principais preocupações do homem sempre foi a de inventar e construir máquinas e equipamentos para auxiliar nas suas tarefas, desde as mais simples até as mais complexas.

Ao longo da evolução das máquinas criadas pelo homem surgiram as máquinas rotativas, que possibilitaram a execução de novas tarefas e o surgimento de equipamentos cada vez mais complexos. O comportamento das máquinas rotativas influencia de maneira significativa o comportamento dos sistemas mecânicos nos quais estão inseridas.

Portanto, a compreensão do comportamento das máquinas rotativas faz parte da história do desenvolvimento dos sistemas mecânicos. Este comportamento é estudado há bastante tempo e envolve diversas áreas da engenharia mecânica.

Um dos principais problemas associados ao estudo de sistemas rotativos é controlar os movimentos vibratórios da parte girante do sistema, chamada de *rotor*. O controle das vibrações em tais máquinas pode ser feito através dos mancais, que são os elementos responsáveis por fixar o rotor à carcaça da máquina (SCALABRIN, 1999).

Dentre os tipos de mancais existentes, os mancais hidrodinâmicos pertencem à classe dos mancais cujo acoplamento entre parte girante e estática se faz através de uma fina película de óleo. Estes mancais funcionam pelo equilíbrio entre as forças de carregamento, que são transferidas ao mancal pela parte girante, e as forças hidrodinâmicas, que surgem devido à formação de uma distribuição de pressões no filme de óleo. A formação de uma distribuição de pressões no filme de óleo trata-se de um fenômeno bastante conhecido na área de Mecânica dos Fluidos como princípio

hidrodinâmico, e ocorre sempre que se tem a presença de um fluido viscoso na interface entre dois corpos com movimento relativo entre si (NICOLETTI, 2003).

Dentre os mancais hidrodinâmicos existentes, os mancais *segmentados de sapatas móveis* (Figura 1.1) são os que apresentam as melhores características dinâmicas no que diz respeito à estabilidade.

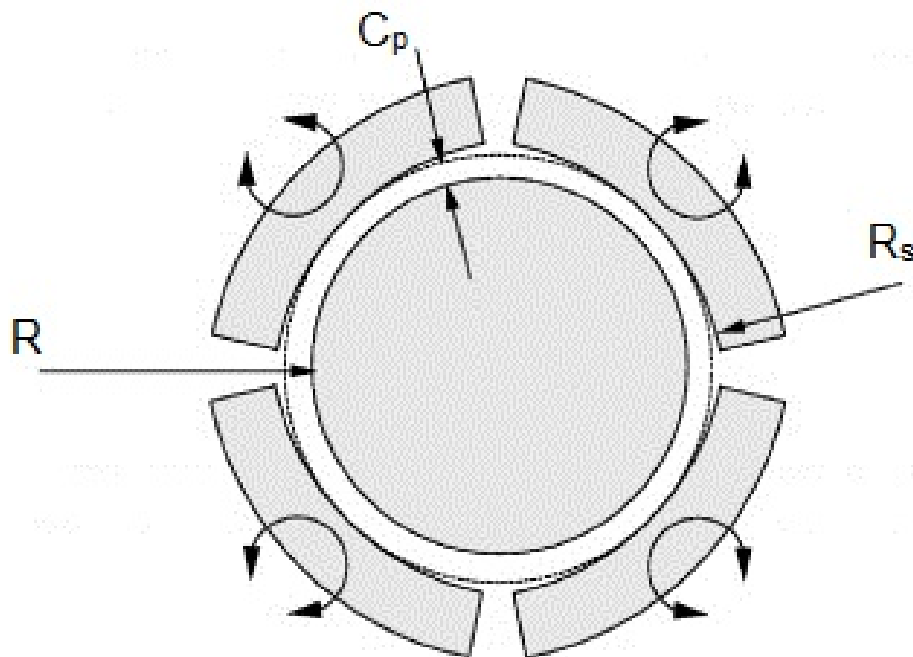


Figura 1.1: Esquemático de um mancal segmentado de sapatas móveis.

A propriedade mais importante de rotores suportados por mancais segmentados é o desacoplamento entre as duas direções ortogonais, o que não ocorre para outros tipos de mancal. Isto significa que quando o rotor se desloca numa determinada direção (na direção vertical, por exemplo), a força de reação exercida pelo mancal ocorre nesta mesma direção (vertical) e as componentes de reação na direção ortogonal (horizontal) ficam praticamente nulas. Este desacoplamento é justificado pela capacidade de rotação dos segmentos, que se ajustam para as mais diferentes condições de carregamento, e explica a alta estabilidade de sistemas rotativos acoplados à mancais segmentados. Este desacoplamento foi mostrado tanto teoricamente como experimentalmente por muitos autores (SCALABRIN, 1999).

Estes mancais são utilizados em várias áreas da indústria, por exemplo, em usinas hidroelétricas, usinas nucleares na indústria petrolífera e na indústria

aeroespacial, e sustentam diferentes tipos de máquinas rotativas, como turbinas Francis, turbinas a gás e compressores (SCALABRIN,1999).

O projeto e desenvolvimento de mancais têm como principais objetivos: melhorar o desempenho, aumentar a segurança de operação e garantir maior vida útil às máquinas rotativas. A partir desses objetivos, desenvolvem-se os mancais de forma a ajustar ou modificar suas características de acordo com as diferentes condições de operação de uma máquina e de acordo com determinadas necessidades para que os níveis de vibração das partes rotativas possam ser reduzidos (SCALABRIN).

Durante muito tempo o desenvolvimento de mancais segmentados foi baseado na modificação das formas geométricas e da sua configuração (número e posicionamento das sapatas). Uma nova tendência na evolução destes mancais é aproveitar a sua forma construtiva e conectá-los a sistemas de controle para modificar suas características de forma ativa (SCALABRIN, 1999).

Neste contexto, devido aos elementos de atuação a eles incorporados, os mancais ativos são uma solução eficaz a fim de se modificarem as características dinâmicas destas máquinas, de forma a se satisfazerem requisitos desejados: estabilidade, alto desempenho, maior disponibilidade, redução do consumo energético e ciclo de vida mais longo (BUTTINI, 2011).

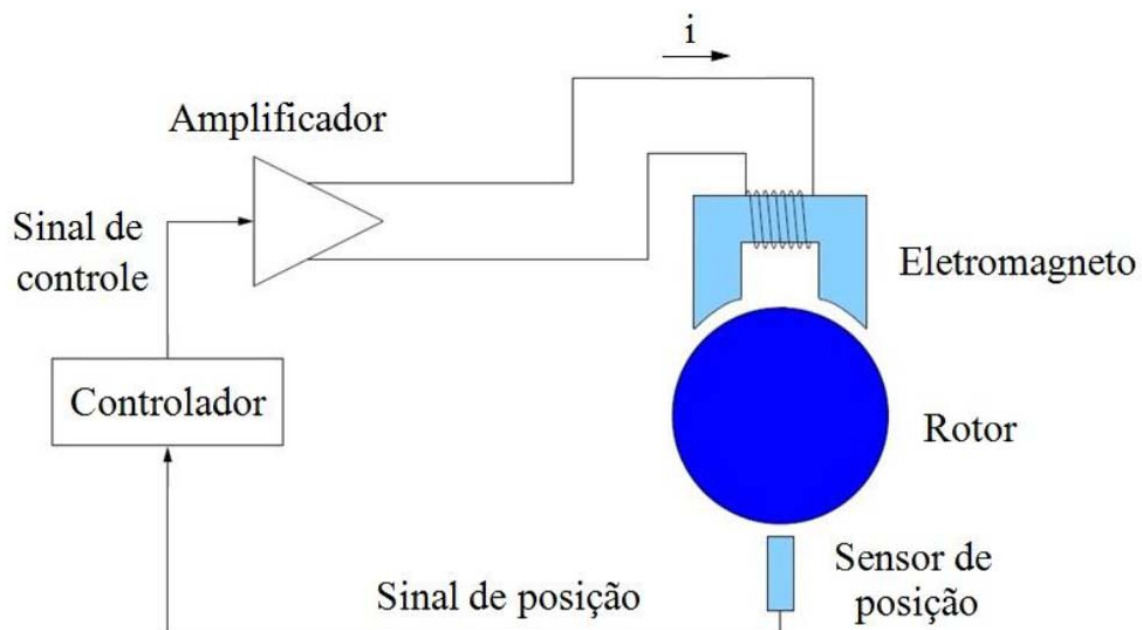


Figura 1.2: Princípio de funcionamento dos MMAs (Schweitzer e Maslen, 2009).

Como exemplos destes tipos de mancais, citam-se os mancais magnéticos ativos (MMAs), os quais empregam eletroímãs para sustentação e controle do rotor; os hidrodinâmicos, em que a variação da injeção radial do fluido permite o controle de vibrações; e os mancais acoplados a atuadores piezoelétricos e hidráulicos. Em geral, existem duas formas de se aplicar forças de controle em sistemas rotativos: através da ação direta sobre o rotor, que é o caso dos mancais magnéticos ativos e hidrodinâmicos, e por meio de ação indireta, atuando-se na carcaça dos mancais (mancais acoplados a atuadores piezoelétricos e hidráulicos) (BUTTINI, 2011).

Os MMAs consistem em uma nova geração de mancais cuja aplicação tem crescido nos últimos anos. Seu princípio de funcionamento baseia-se na levitação do rotor (o qual deve ser de material ferro-magnético) através de atuadores eletromagnéticos, responsáveis também por controlar ativamente vibrações. Para isto, mede-se o deslocamento do eixo por meio de um sensor de posição, cujos sinais são enviados a um controlador e amplificador, de forma a realimentar o sistema, fechando a malha de controle (Figura 1.2) (BUTTINI, 2011).

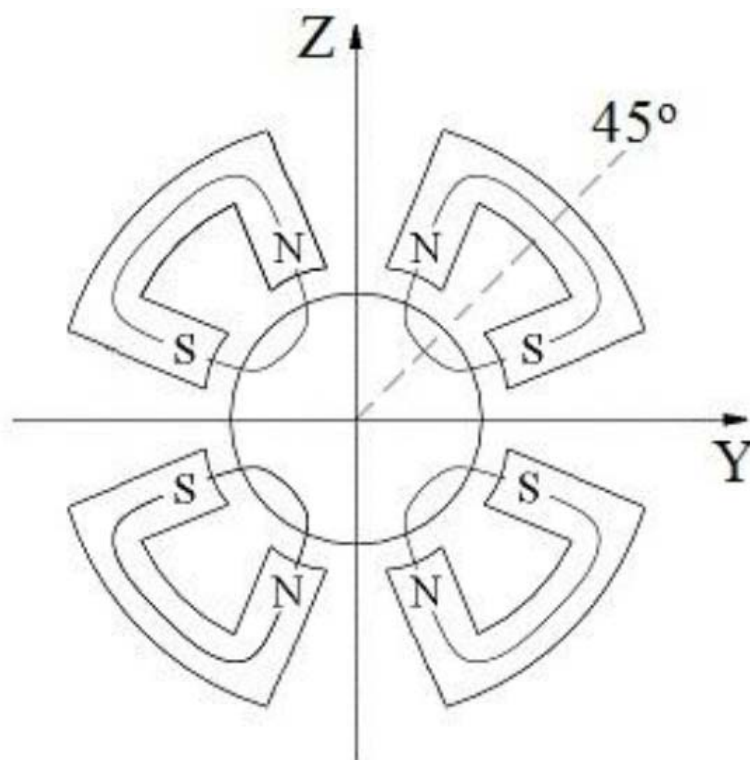


Figura 1.3: Configuração dos eletromagnetos de um MMA de 4 polos.

Embora a Figura 1.2 ilustre apenas um atuador, neste tipo de mancal os eletromagnetos são dispostos em pares, permitindo-se atrair o rotor em sentidos opostos em uma mesma direção, sendo o uso de 4 polos uma configuração bastante utilizada, de forma a controlar-se o rotor em duas direções ortogonais, em ambos os sentidos – Figura 1.3 (BUTTINI, 2011).

Em relação aos mancais convencionais, os MMAs apresentam vantagens como ausência de contato e, por conseguinte, de desgaste mecânico, possibilitando funcionamento em altas velocidades de rotação, e operação em uma ampla faixa de temperaturas. Além disso, por não haver atrito, estes mancais apresentam uma vida útil elevada e não requerem lubrificação, havendo apenas ar na interface entre rotor e o mancal, sendo considerados limpos. Tendo-se em vista as características específicas dos mancais magnéticos e suas vantagens, citam-se como exemplos de sua aplicação:

- máquinas-ferramentas: permitem alta velocidade de rotação, o que é um requisito essencial para a retificação de precisão de pequenas peças;
- dispositivos médicos: por serem mancais limpos, são especialmente úteis na área médica. Um exemplo de aplicação é a sua utilização em uma bomba cardíaca artificial;
- turbomáquinas (bombas, geradores, compressores): principal área de aplicação dos MMAs. Permitem alterar as características dinâmicas destes sistemas, aumentando seu amortecimento e a faixa de velocidades em que podem operar. Além disso, tais mancais podem ser utilizados como elementos de diagnose da máquina (identificação de trincas e rachaduras no eixo, por exemplo) e contribuem para a redução dos custos com manutenção e consumo energético.

Entretanto, apesar das vantagens citadas, este tipo de mancal não é apropriado para sistemas rotativos de grande porte, uma vez que a força requerida para a levitação do eixo é considerada elevada, tornando o sistema magnético caro e pouco compacto. Outro fator a ser considerado é que o uso de mancais magnéticos ativos isoladamente não é recomendado, uma vez que uma eventual sobrecarga e/ou falha do sistema de atuação poderia comprometer o funcionamento e a integridade da máquina, fazendo-se

necessária a utilização de sistemas de proteção, como mancais auxiliares (BUTTINI, 2011).

Neste contexto, destaca-se o conceito de mancal híbrido proposto por Nicoletti (2006): um mancal hidrodinâmico segmentado em conjunto com sapatas móveis magnéticas, em que um fino filme de óleo formado entre o eixo e as sapatas é responsável por sustentar o eixo, e atuadores eletromagnéticos pelo controle das vibrações laterais (Figura 1.4). Assim, tem-se um mancal híbrido em que as limitações do mancal magnético são atenuadas e suas vantagens são incorporadas às do mancal hidrodinâmico em uma única montagem (Tabela 1.1), o que se acredita poder permitir melhor desempenho e aumento da faixa de frequências de operação das máquinas rotativas, incrementando sua disponibilidade (BUTTINI, 2011).

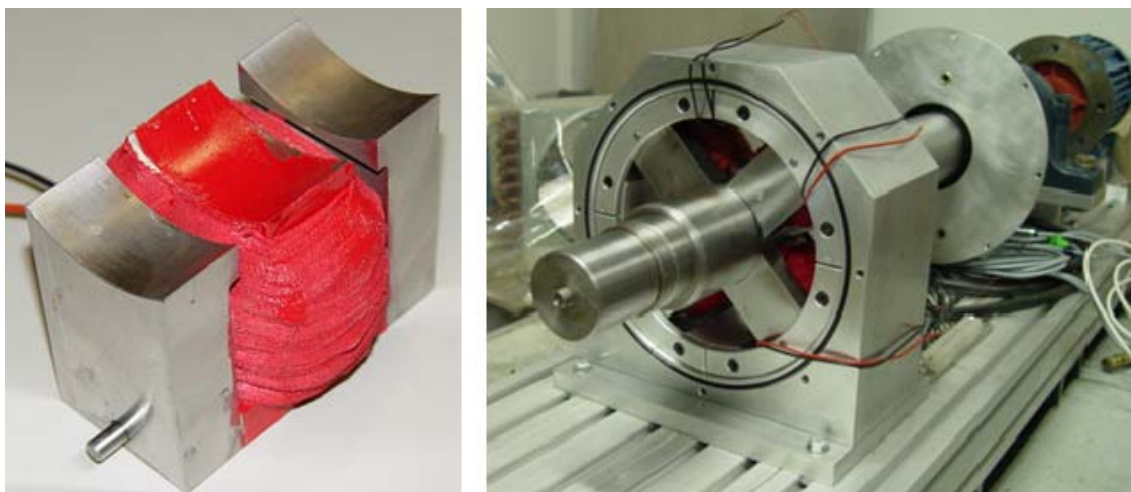


Figura 1.4: Montagem da sapata móvel magnética (direita) e mancal hidrodinâmico segmentado com sapatas móveis magnéticas (esquerda).

Em relação aos MMAs convencionais, o mancal em questão requer atuadores eletromagnéticos menores, pois estes passam a ser responsáveis apenas pelo controle ativo de vibrações, ficando a sustentação do eixo a cargo do princípio hidrodinâmico (fenômeno que ocorre quando há um fluido viscoso entre dois corpos com movimento relativo entre si, gerando uma distribuição de pressões), em que um sistema hidráulico de suprimento é responsável pelo bombeamento de óleo para o interior do mancal e retorno para o reservatório. Deste modo, tem-se uma montagem mais compacta e um sistema de proteção não se faz necessário (BUTTINI, 2011).

Tabela 1.1: Vantagens e desvantagens do uso de mancais hidrodinâmicos segmentados e mancais magnéticos.

Mancal	Vantagens	Desvantagens
Mancal Hidrodinâmico Segmentado	• Alta capacidade de carga • Desacoplamento entre direções ortogonais • Facilidade de montagem	• Sistema periférico volumoso (suprimento de óleo) • Baixa limpeza • Possível instabilidade dinâmica
Mancal Magnético	• Facilidade de alteração das características dinâmicas • Contato nulo com o rotor • Alta limpeza • Ampla faixa de operação (altas frequências de rotação)	• Baixa capacidade de carga • Complexidade construtiva proporcional ao tamanho • Necessidade de sistema de proteção em caso de falha ou excesso de carga

1.2 - Objetivos

Considerando-se os avanços alcançados na linha de pesquisa em questão, os principais objetivos deste trabalho são:

- Investigar através de simulação numérica os limites de linearidade do sistema rotor-mancal ativo com a utilização do modelo matemático proposto, no domínio da frequência.
- Investigar a influência da força eletromagnética de atuação dos eletroímãs e suas características em comparação a uma força de atuação equivalente aplicada diretamente no rotor.

1.3 - Conteúdo do Trabalho

Após este capítulo introdutório, no Capítulo 2, é feita a modelagem matemática do sistema rotor-mancal ativo. Para isso, na Seção 2.1 é apresentado um modelo matemático linearizado para o rotor baseado na

dinâmica de corpos rígidos. Na Seção 2.2 é apresentado um modelo matemático para o mancal segmentado com sapatas móveis magnéticas. Este equacionamento depende das forças hidrodinâmicas oriundas da distribuição de pressão sobre cada sapata, que é obtida através da Equação de Reynolds, apresentada na Seção 2.4, e da função que descreve a espessura do filme de óleo, apresentada na Seção 2.5.

Em seguida, no Capítulo 3, é proposta uma simulação numérica, utilizando os modelos apresentados, para que se possam investigar as Funções Resposta em Frequência (FRF), obtidas com os dados da simulação. Na Seção 3.1, é apresentada uma solução numérica para a Equação de Reynolds baseada no Método das Diferenças Finitas (MDF). Na Seção 3.2 são apresentadas as condições de contorno impostas na solução das equações obtidas com o MDF. Na Seção 3.3 é descrito o sinal *chirp*, de excitação em varredura, que será utilizado para excitar o sistema numa faixa de frequências de interesse. Em seguida, na seção 3.4, descreve-se a rotina implementada para a simulação numérica através de um fluxograma.

Por fim, no Capítulo 4, os dados obtidos com a simulação numérica feita em diferentes condições de operação são analisados.

Capítulo 2

Modelagem Matemática

Neste capítulo, é proposto um modelo matemático para representar a dinâmica do sistema rotor-mancal ativo. Este modelo é baseado na Dinâmica de Corpos Rígidos, aplicada ao sistema rotativo em questão, e na Hidrodinâmica de Mancais, aplicada ao mancal hidrodinâmico.

2.1 - Modelo matemático do rotor

Quando um componente de uma máquina é considerado rígido, isto significa que as amplitudes de vibração oriundas da elasticidade de seu material não são significativas em relação às amplitudes dos movimentos de corpo rígido do mesmo. Desta forma, o eixo da bancada de teste poderá ser considerado rígido na faixa de frequências de estudo se este critério for obedecido (NICOLETTI, 2003).

Um corpo rígido pode sofrer três translações e três rotações no espaço, regidas pelas equações de conservação de quantidade de movimento linear e angular, respectivamente. A equação de conservação da quantidade de movimento linear, descrita no referencial inercial BI e considerando-se massa do corpo constante, é dada por:

$$ma_{cm}^{BI} = \sum f_{cm}^{BI} \quad (2.1)$$

em que m é a massa do corpo; a_{cm} é o vetor de aceleração linear do centro de massa do corpo; e f_{cm} é o vetor de forças aplicadas ao centro de massa do corpo.

Considerando-se um referencial B_n solidário ao corpo com origem no ponto I genérico, a equação de conservação da quantidade de movimento angular pode ser escrita de forma que o tensor de inércia do corpo, descrito

neste referencial, permaneça constante (Tenenbaum, 1997). Assim, esta equação tem a forma:

$$I_l^{B_n} \frac{d}{dt}(\omega^{B_n}) + m \frac{d}{dt}(r_{cm}^{B_n} \times v_l^{B_n}) + \Omega_n^{B_n} \times (I_l^{B_n} \omega^{B_n} + r_{cm}^{B_n} \times v_l^{B_n}) = \sum M_l^{B_n} \quad (2.2)$$

em que I_l é o tensor de inércia do corpo em relação ao ponto l ; ω é o vetor velocidade angular absoluta do corpo; r_{cm} é o vetor posição do centro de massa do corpo em relação ao ponto l ; v_l é o vetor velocidade linear do ponto l ; $\Omega_n^{B_n}$ é o vetor velocidade angular absoluta do referencial B_n , descrito no referencial B_n ; e M_l é o vetor de momentos externos aplicados ao corpo em relação ao ponto l .

Fixando-se o ponto l (origem do sistema de referência) no ponto de pivoteamento do eixo da bancada de testes (mancal de rolamento axial auto-compensador), o qual é considerado um ponto fixo no espaço, a velocidade linear v_l torna-se nula. Assim, pode-se simplificar a equação anterior da forma:

$$I_l^{B_n} \frac{d}{dt}(\omega^{B_n}) + \Omega_n^{B_n} \times (I_l^{B_n} \omega^{B_n}) = \sum M_l^{B_n} \quad (2.3)$$

De forma a facilitar a descrição dos vetores contidos na equação de conservação (Eq. 2.3), três sistemas de referência podem ser utilizados, aplicando-se três rotações consecutivas ao corpo. Seguindo-se os ângulos de Kardan, tem-se: primeira rotação (γ) em torno do eixo Z do referencial inercial BI , formando o referencial auxiliar B_1 ; segunda rotação (β) em torno do eixo Y_1 do referencial auxiliar B_1 , formando o referencial auxiliar B_2 ; e terceira rotação (ϕ) em torno do eixo X_2 do referencial auxiliar B_2 , formando o referencial auxiliar B_3 solidário ao corpo (vide Figura 2.1). Devido ao fato do referencial auxiliar B_3 ser solidário ao corpo, o tensor de inércia do corpo descrito neste referencial é constante.

Entretanto, considerando-se que o eixo é um corpo cilíndrico, e que a última rotação (ϕ) é efetuada em torno de seu eixo de simetria (eixo X_2), o tensor de inércia descrito no referencial B_3 é idêntico ao descrito no referencial B_2 . Por esta razão, não é necessário utilizar o referencial B_3 para descrever os

vetores, bastando o referencial B_2 . Portanto, a equação de conservação (Eq. 2.3) será descrita no referencial B_{2l} (NICOLETTI, 2003).

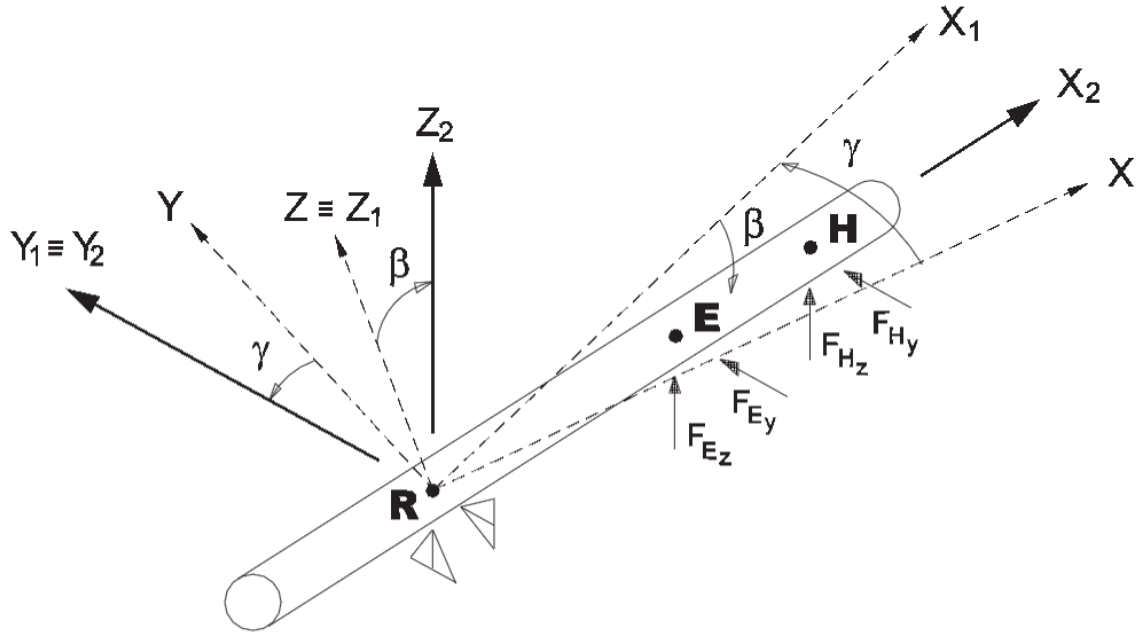


Figura 2.1: Sistemas de referência e pontos de interesse no modelo de eixo da bancada

O vetor de velocidade angular absoluta do referencial B_2 , descrito neste mesmo referencial ($\Omega_2^{B_2}$), é dado pela soma do vetor velocidade angular do referencial B_1 , descrito no referencial B_2 , com o vetor velocidade angular do próprio referencial B_2 , também descrito em B_2 . Assim, tem-se:

$$\Omega_2^{B_2} = T_\beta T_\gamma \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} + T_\beta \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\gamma} \sin \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \cos \beta \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

em que T_γ é a matriz de transformação de coordenadas do referencial inercial para o referencial auxiliar B_1 ; e T_β é a matriz de transformação de coordenadas do referencial auxiliar B_1 para o referencial auxiliar B_2 .

O vetor de velocidade absoluta do rotor, descrito no referencial B_2 ($\Omega_2^{B_2}$), é dado pela soma do vetor velocidade angular absoluta do referencial B_2 com o vetor velocidade angular do rotor (*spin*), todos descritos em B_2 . Portanto:

$$\omega^{B_2} = \Omega_2^{B_2} + \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\gamma} \sin \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \cos \beta \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Para a modelagem do eixo da bancada de testes, são considerados três pontos de interesse no corpo em que atuam forças externas: o ponto em que se situa o mancal de rolamento axial (ponto R – ponto de pivoteamento do eixo e origem dos sistemas de referência); o ponto de excitação externa (ponto E – ponto no qual o atuador eletrodinâmico é acoplado para obter a resposta dinâmica do sistema); e o ponto em que se situa o mancal ativo em estudo (ponto H – ponto onde as forças hidrodinâmicas e eletromagnéticas atuam) – vide Figura 2.1 (NICOLLETTI, 2003). Desta forma, o vetor de momentos externos em relação ao ponto de pivoteamento (ponto R), descrito no referencial B_2 , será dado pela soma dos momentos causados pelas forças atuantes nestes pontos, da forma:

$$\sum M_R^{B_2} = r_E^{B_2} \times f_E^{B_2} + r_H^{B_2} \times f_H^{B_2} \quad (2.6)$$

em que r_i é o vetor posição; f_i é o vetor força atuante no i -ésimo ponto do eixo.

Considerando-se que os vetores força são mais facilmente descritos no referencial inercial (BI), tem-se:

$$f_i^{B_2} = T_\beta T_\gamma f_i^{BI} \quad \text{para } i = O, E, H \quad (2.7)$$

Inserindo-se as expressões (2.4) a (2.7) na equação de conservação (2.3), chega-se ao sistema de equações não-lineares de movimento do rotor da bancada de testes:

$$\begin{cases} I_{xx}^R (\ddot{\phi} - \ddot{\gamma} \sin \beta - \dot{\gamma} \dot{\beta} \cos \beta) + (I_{zz}^R - I_{yy}^R) \dot{\gamma} \dot{\beta} \cos \beta = 0 \\ I_{yy}^R \ddot{\beta} + I_{xx}^R \dot{\phi} \dot{\gamma} \cos \beta + (I_{zz}^R - I_{xx}^R) \dot{\gamma} \sin \beta \cos \beta = -(r_{RE} F_{E_y} + r_{RH} F_{H_y}) \sin \beta \sin \gamma + \\ \quad -(r_{RE} F_{E_z} + r_{RH} F_{H_z}) \cos \beta \\ I_{zz}^R \ddot{\gamma} \cos \beta - I_{xx}^R \dot{\phi} \dot{\beta} + (I_{xx}^R - I_{yy}^R - I_{zz}^R) \dot{\gamma} \dot{\beta} \sin \beta = (r_{RE} F_{E_y} + r_{RH} F_{H_y}) \cos \gamma \end{cases} \quad (2.8)$$

em que I_{xx}^R é o momento de inércia polar do rotor em relação ao ponto R; I_{yy}^R e I_{zz}^R são os momentos de inércia laterais do rotor em relação ao ponto R; r_{mn} é a distância do ponto m ao ponto n ; F_{E_y} e F_{E_z} são as forças de excitação; e F_{H_y} e F_{H_z} são as forças oriundas do filme de óleo do mancal segmentado (forças hidrodinâmicas) e forças eletromagnéticas de atuação.

Devido ao fato da velocidade de rotação do rotor ($\dot{\phi}$) ser considerada constante nas análises deste trabalho, a primeira equação do sistema (2.8) não será utilizada. Considerando-se que o eixo efetua deslocamentos angulares pequenos, pode-se adotar $\cos(\epsilon) \approx 1$ e $\sin(\epsilon) \approx \epsilon$, e desprezar termos quadráticos (hipótese de baixas frequências) e termos não-lineares (NICOLETTI, 2003). Assim, a equação (2.8) toma a forma linearizada:

$$\begin{cases} I_{yy}^R \ddot{\beta} + I_{xx}^R \dot{\phi} \dot{\gamma} = -r_{RE} F_{E_z} - r_{RH} F_{H_z} \\ I_{zz}^R \ddot{\gamma} - I_{xx}^R \dot{\phi} \dot{\beta} = r_{RE} F_{E_y} + r_{RH} F_{H_y} \end{cases}$$

As forças atuantes no ponto H são as forças oriundas do filme de óleo do mancal segmentado, somadas com as forças eletromagnéticas de atuação dos eletroímãs.

2.2 - Modelo matemático do mancal hidrodinâmico segmentado

O mancal segmentado das bancada de testes (mancal ativo) é composto por quatro sapatas móveis pivotadas, as quais possuem liberdade de movimento de rotação. Desta forma, a equação de movimento das sapatas é dada por:

$$I_s \ddot{\alpha}_i = M_{s_i} \quad (2.9)$$

em que α_i é o deslocamento angular da i -ésima sapata; I_s é o momento de inércia da sapata; e M_{s_i} é o momento externo aplicado à i -ésima sapata, causado pelas forças hidrodinâmicas do filme de óleo e pela força magnética do atuador.

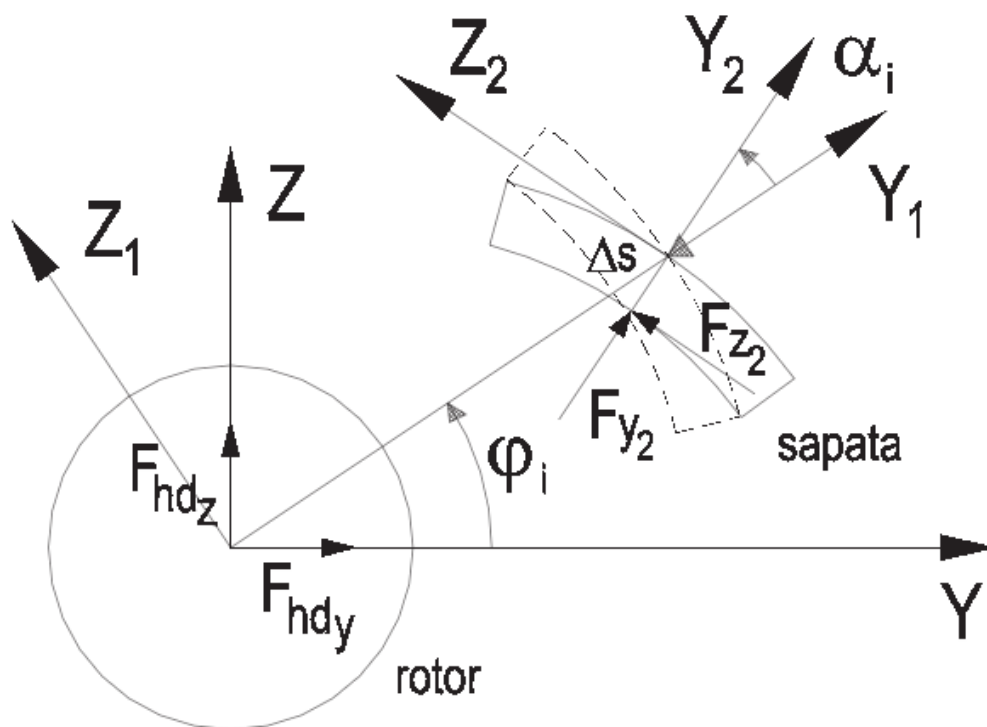


Figura 2.2: Componentes normal e tangencial das forças hidrodinâmicas atuantes na i -ésima sapata e sistemas de referência auxiliares.

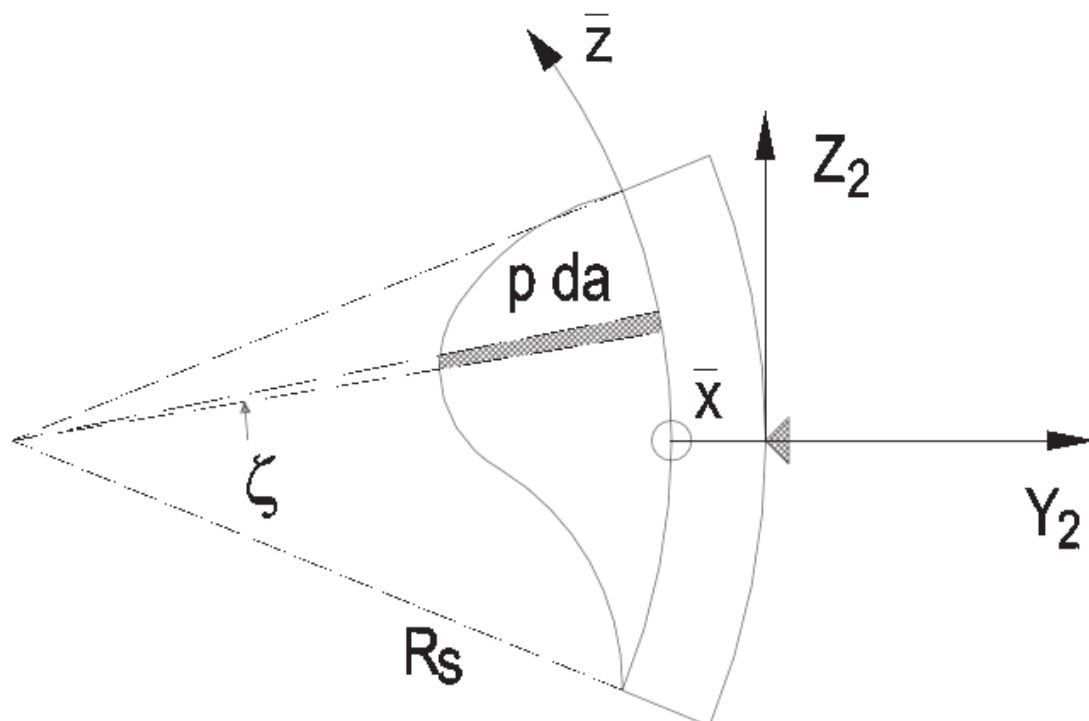


Figura 2.3: Integração da função distribuição de pressão hidrodinâmica sobre a sapata.

As forças hidrodinâmicas que atuam sobre a i -ésima sapata podem ser decompostas em componentes normal ($F_{hd_{Y_2i}}$) e tangencial ($F_{hd_{Z_2i}}$) à superfície da sapata, conforme ilustrado na Figura 2.2. Estas forças são obtidas integrando-se a função distribuição de pressão hidrodinâmica ($p(\bar{x}, \bar{z})$) na área da superfície da sapata (Figura 2.3), da forma:

$$\begin{aligned} F_{hd_{Y_2i}} &= \int_{\bar{x}} \int_{\bar{z}} p_i(\bar{x}, \bar{z}) \cos \zeta \, d\bar{z} \, d\bar{x} \\ F_{hd_{Z_2i}} &= \int_{\bar{x}} \int_{\bar{z}} p_i(\bar{x}, \bar{z}) \sin \zeta \, d\bar{z} \, d\bar{x} \end{aligned} \quad (2.10)$$

em que $(\bar{x}, \bar{z})$ são coordenadas de um sistema de referência fixo à superfície da sapata (Figura 2.3).

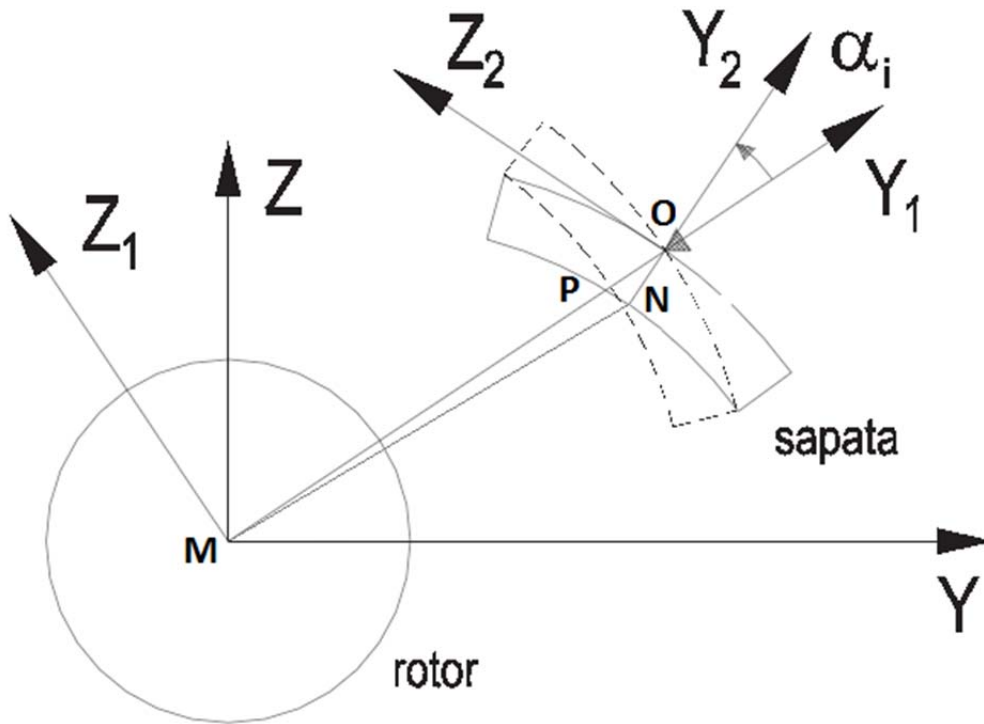


Figura 2.4: Linha de ação da força eletromagnética (direção $\overline{MN}$).

As forças magnéticas que atuam sobre a i -ésima sapata podem ser decompostas em componentes normal ($F_{mag_{Y_2i}}$) e tangencial ($F_{mag_{Z_2i}}$) à superfície da sapata, conforme ilustrado na Figura 2.4.

Aplicando a lei dos cossenos aos triângulos MNO e MNP obtêm-se:

$$\begin{aligned}\overline{MN}^2 &= \overline{MO}^2 + \overline{NO}^2 - \overline{MO} \overline{NO} \cos \alpha \\ \overline{MP}^2 &= \overline{MN}^2 + \overline{NP}^2 - \overline{MN} \overline{NP} \cos \theta \\ \overline{MN}^2 &= \overline{MP}^2 + \overline{NP}^2 - \overline{MP} \overline{NP} \cos M\hat{P}N \\ \overline{MO}^2 &= \overline{MN}^2 + \overline{NO}^2 - \overline{MN} \overline{NO} \cos M\hat{N}O\end{aligned}\quad (2.11 \text{ a } 2.14)$$

em que o segmento $\overline{NP}$ da superfície da sapata foi aproximado por um segmento de reta para ângulos pequenos; o ângulo $M\hat{P}N = 90^\circ + \alpha$; o ângulo $M\hat{N}O = 90^\circ + \theta$. Assim, manipulando as equações 2.11 a 2.14 é possível obter o ângulo que a linha de ação da força magnética faz com a superfície da sapata:

$$\theta = \arccos\left(3 \frac{\Delta s}{R + h_{centro}} \sin \alpha\right) + \alpha \quad (2.15)$$

em que R é o raio do rotor; e h_{centro} é distância do centro da sapata ao rotor dada pela espessura do filme de óleo. A Equação (2.15) descreve a dinâmica da força de excitação exercida pelo atuador eletromagnético da sapata móvel magnética. Portanto:

$$\begin{aligned}F_{mag_{Y_2i}} &= |F_{mag}| \sin \theta \\ F_{mag_{Z_2i}} &= |F_{mag}| \cos \theta\end{aligned}\quad (2.16)$$

O momento aplicado à sapata é causado pela força hidrodinâmica tangencial ($F_{hd_{Z_2i}}$) e pela componente tangencial da força magnética ($F_{mag_{Z_2i}}$).

Desta forma, tem-se:

$$M_{Si} = -\left(F_{hd_{Z_2i}} + F_{mag_{Z_2i}}\right) \Delta s \quad (2.17)$$

em que Δs é a distância entre o ponto de pivoteamento da sapata e a sua superfície deslizante.

2.3 – Forças atuantes no rotor

As forças hidrodinâmicas F_{hdY} e F_{hdZ} , que atuam no ponto H do rotor, são determinadas fazendo-se um balanço das forças $F_{hdY_{2i}}$ e $F_{hdZ_{2i}}$ atuantes em cada sapata. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} F_{hdY} &= - \sum_{i=1}^{ns} \left[F_{hdY_{2i}} \cos(\varphi_i + \alpha_i) - F_{hdZ_{2i}} \sin(\varphi_i + \alpha_i) \right] \\ F_{hdZ} &= - \sum_{i=1}^{ns} \left[F_{hdY_{2i}} \sin(\varphi_i + \alpha_i) + F_{hdZ_{2i}} \cos(\varphi_i + \alpha_i) \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

em que ns é o número de sapatas; e φ_i é o ângulo de posicionamento da i -ésima sapata em relação ao sistema de referência inercial – Figura 2.3.

As forças eletromagnéticas F_{magY} e F_{magZ} , que atuam no ponto H do rotor, são determinadas, utilizando o ângulo (ψ) formado entre a linha de ação da força eletromagnética e a direção Y no sistema inercial, conhecido a priori, e fazendo-se um balanço das forças F_{mag_i} de atuação dos eletroímãs.

Assim, obtém-se:

$$\begin{aligned} F_{magY} &= \sum_{i=1}^{ns} |F_{mag_i}| \cos \psi_i \\ F_{magZ} &= \sum_{i=1}^{ns} |F_{mag_i}| \sin \psi_i \end{aligned} \quad (2.19)$$

em que $\psi_i = \varphi_i + \alpha_i + \theta_i - 90^\circ$; e $|F_{mag_i}|$ é o módulo da força eletromagnética exercida por cada eletroímã.

Portanto, as forças atuantes no ponto H do rotor são dadas por:

$$\begin{aligned} F_{Hy} &= F_{hdY} + F_{magY} \\ F_{Hz} &= F_{hdZ} + F_{magZ} \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.4 – Equação de Reynolds

Para o desenvolvimento analítico da Equação de Reynolds utiliza-se 4 sistemas de referência. O primeiro deles é posicionado no centro do mancal, sendo denominado sistema inercial – $B_I(X, Y, Z)$, como mostrado na Figura 2.5(a). O segundo sistema indica o posicionamento da i -ésima sapata no mancal, denominado sistema auxiliar – $B_1(X_1, Y_1, Z_1)$, e está indicado na Figura 2.5(b). Cada sapata, por sua vez, possui um sistema auxiliar próprio denominado sistema móvel – $B_2(X_2, Y_2, Z_2)$, mostrado na Figura 2.5(c). O quarto, e último sistema, acompanha a superfície interna da sapata sendo chamado de sistema de referência móvel curvilíneo – $\bar{B}(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$, Figura 2.5(d).

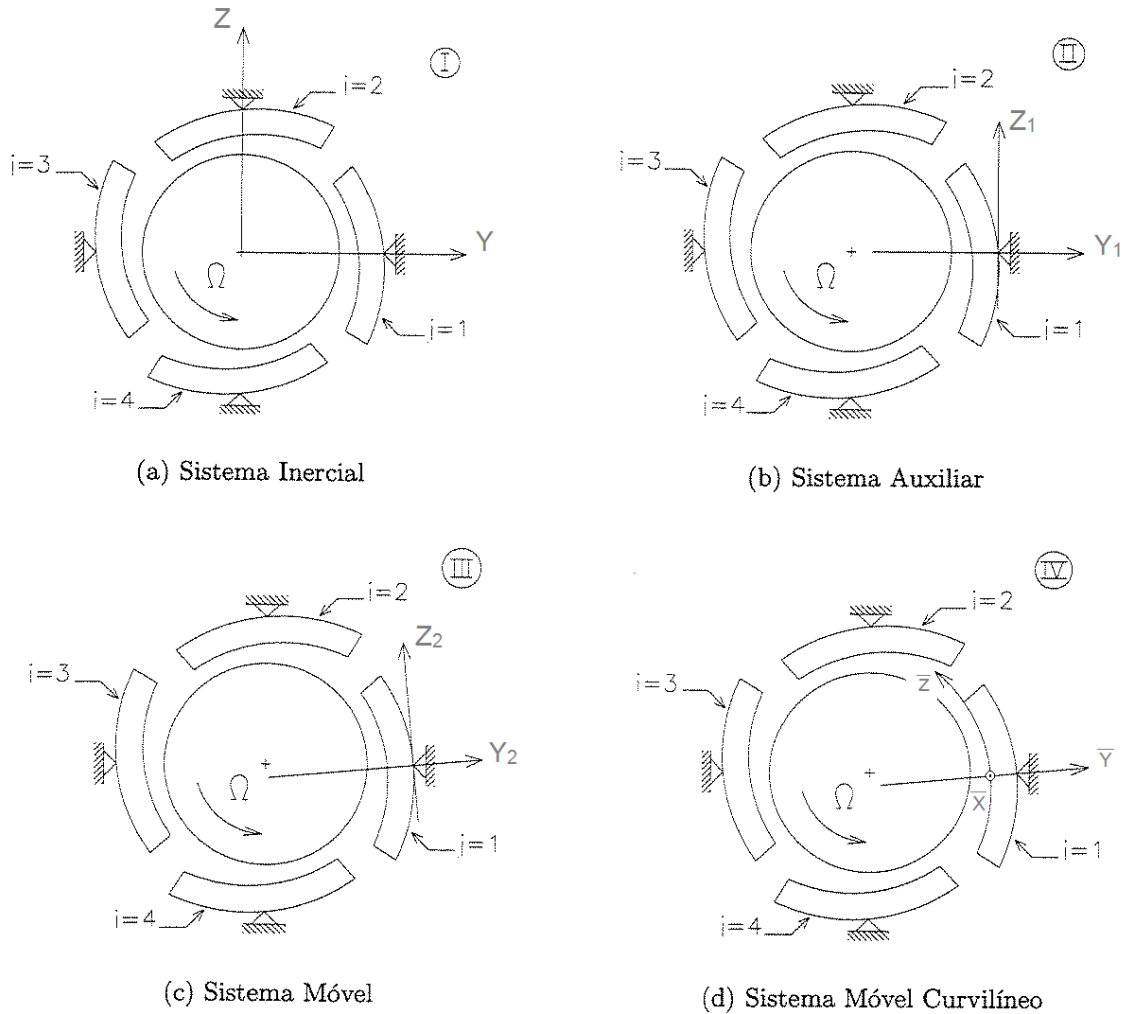


Figura 2.5: Sistemas de referência.

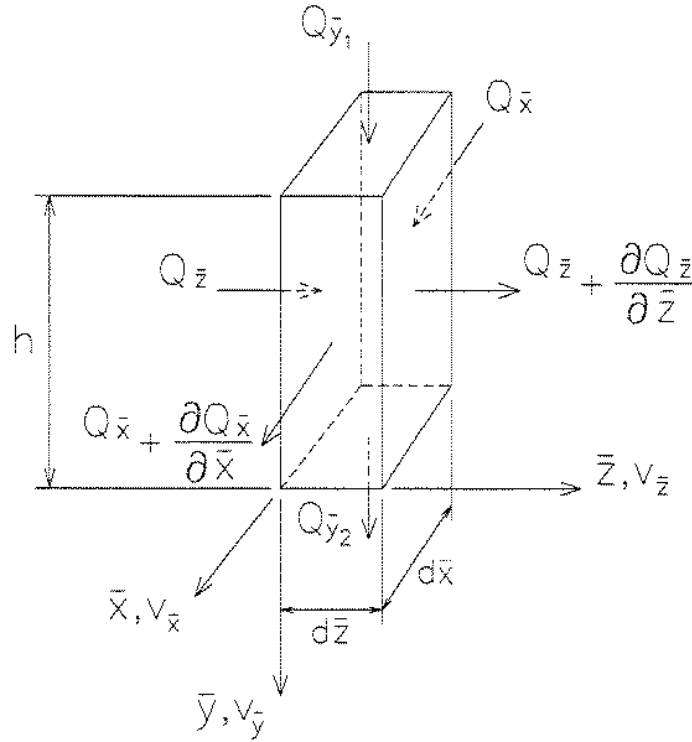


Figura 2.6: Continuidade do escoamento de um fluido numa coluna.

O equacionamento do fluido ao longo da folga radial é realizado através da equação da continuidade. Considerando uma coluna de fluido de altura h , e base $d\bar{y}$, $d\bar{z}$ (Figura 2.6), a vazão de fluido que está entrando à esquerda da coluna (direção $\bar{z}$) é dada por:

$$Q_{\bar{z}} = v_{\bar{z}} \cdot (d\bar{x} \cdot h) \quad (2.21)$$

em que $v_{\bar{z}}$ é a velocidade do fluido na direção $\bar{z}$. Escrevendo a vazão por unidade de comprimento, tem-se:

$$q_{\bar{z}} = \frac{Q_{\bar{z}}}{d\bar{x}} = v_{\bar{z}} \cdot h \quad (2.22)$$

A vazão do fluido na saída da coluna nesta mesma direção é dada por:

$$Q_{\bar{z}} + \frac{\partial Q_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = \left(q_{\bar{z}} + \frac{\partial q_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) d\bar{x} \quad (2.23)$$

Este mesmo equacionamento pode ser feito para a direção $\bar{x}$, onde se obtém na entrada:

$$Q_{\bar{x}} = v_{\bar{x}} \cdot (d\bar{z} \cdot h) = q_{\bar{x}} d\bar{z} \quad (2.24)$$

tendo $v_{\bar{x}}$ como sendo a velocidade do fluido na direção $\bar{z}$. Na saída a vazão do fluido será de:

$$Q_{\bar{x}} + \frac{\partial Q_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}} d\bar{x} = \left(q_{\bar{x}} + \frac{\partial q_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}} d\bar{x} \right) d\bar{z} \quad (2.25)$$

O estudo deste elemento de fluido na direção vertical, direção $\bar{y}$, é um pouco diferente. O escoamento para o interior do elemento nesta direção é resultante dos movimentos do rotor e da sapata. Se o rotor estiver se deslocando para baixo a uma velocidade v_1 , a vazão de entrada será de:

$$(Q_{\bar{y}})_{entrada} = v_{1\bar{y}} d\bar{z} d\bar{x} \quad (2.26)$$

Assumindo que a sapata também está se movimentando para baixo, porém a uma velocidade v_2 , a vazão de fluido na saída do elemento será de:

$$(Q_{\bar{y}})_{saída} = v_{2\bar{y}} d\bar{z} d\bar{x} \quad (2.27)$$

Considerando a continuidade do escoamento em todas as direções, e sabendo que a densidade do mesmo deve ser mantida constante, tem-se que a mesma vazão mássica que está entrando no elemento deve estar saindo. Assim:

$$(Q_{\bar{x}} + Q_{\bar{y}} + Q_{\bar{z}})_{entrada} = (Q_{\bar{x}} + Q_{\bar{y}} + Q_{\bar{z}})_{saída} \quad (2.28)$$

$$v_{1\bar{y}} d\bar{z} d\bar{x} + q_{\bar{z}} d\bar{x} + q_{\bar{x}} d\bar{z} = v_{2\bar{y}} d\bar{z} d\bar{x} + \left(q_{\bar{z}} + \frac{\partial q_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) d\bar{x} + \left(q_{\bar{x}} + \frac{\partial q_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}} d\bar{x} \right) d\bar{z} \quad (2.29)$$

logo, tem-se que:

$$\frac{\partial q_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} d\bar{x} d\bar{z} + \frac{\partial q_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}} d\bar{x} d\bar{z} + (v_{2\bar{y}} - v_{1\bar{y}}) d\bar{x} d\bar{z} = 0 \quad (2.30)$$

Sendo v_1 e v_2 apenas dependentes dos movimentos do rotor e da sapata, pode-se entender que a diferença entre estas velocidades ($V = v_{2\bar{y}} - v_{1\bar{y}}$) é função da variação da folga radial no tempo. Ou seja, da derivada de h em relação ao tempo. Sabendo que a folga radial é medida a partir da sapata, tem-se que valores positivos de V correspondem a derivadas de h , ou seja, $V = -\partial h / \partial t$.

Desta forma, a equação da continuidade do escoamento pode ser escrita como:

$$\frac{\partial q_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial q_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (2.31)$$

Obtida a equação da continuidade realiza-se o balanço das forças que agem sobre um elemento de fluido. Iniciando novamente pela direção $\bar{z}$, observa-se que as forças presentes neste elemento correspondem às que estão indicadas na Figura 2.7.

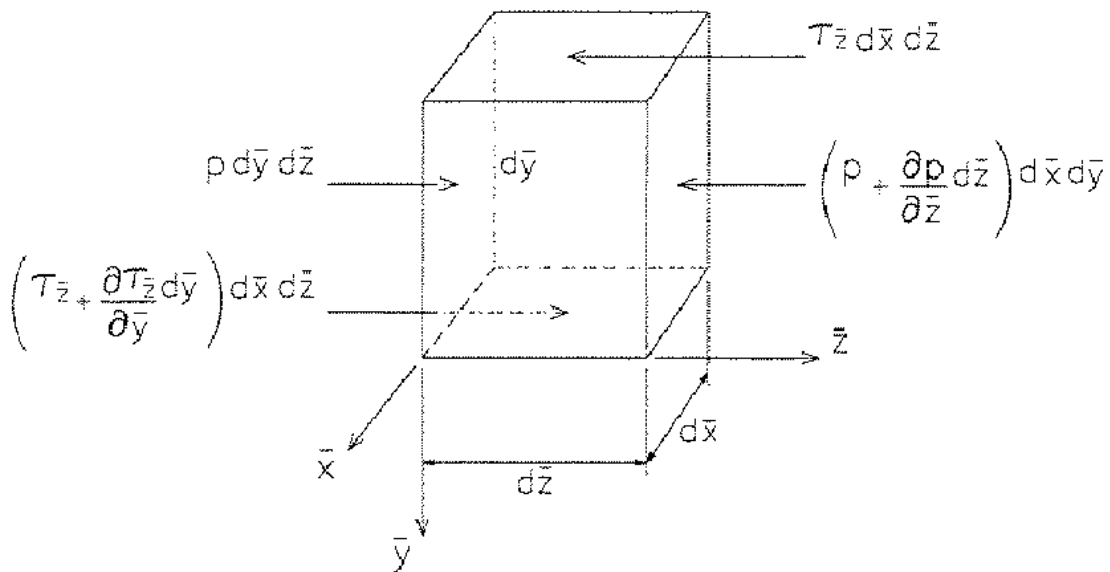


Figura 2.7: Forças atuantes na direção $\bar{z}$ num elemento de fluido.

Estando o elemento em equilíbrio, tem-se:

$$pd\bar{x}d\bar{y} - \left(p + \frac{\partial p}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right)d\bar{x}d\bar{y} - \tau_{\bar{z}}d\bar{x}d\bar{y} + \left(\tau_{\bar{z}} + \frac{\partial \tau_{\bar{z}}}{\partial \bar{y}}d\bar{y}\right)d\bar{x}d\bar{z} = 0 \quad (2.32)$$

Simplificando a equação anterior chega-se a:

$$-\frac{\partial p}{\partial \bar{z}}d\bar{x}d\bar{y}d\bar{z} + \frac{\partial \tau_{\bar{z}}}{\partial \bar{y}}d\bar{x}d\bar{y}d\bar{z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{\bar{z}}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \quad (2.33)$$

Uma das hipóteses adotadas foi considerar o fluido como sendo Newtoniano, ou seja, a tensão de cisalhamento do fluido é proporcional à sua taxa de deformação. Desta forma. Pode-se escrever que:

$$\partial \tau_{\bar{z}} = \mu \frac{\partial v_{\bar{z}}}{\partial \bar{y}} \quad (2.34)$$

em que μ é a viscosidade dinâmica do filme de óleo.

Substituindo a equação (2.34) na equação (2.33) tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\mu \frac{\partial v_{\bar{z}}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \quad (2.35)$$

Integrando a equação (2.35) em relação a $\bar{y}$ chega-se a:

$$\mu \frac{\partial v_{\bar{z}}}{\partial \bar{y}} = C_1 + \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \bar{y} \quad (2.36)$$

Considerando a viscosidade constante, e integrando novamente em relação a $\bar{y}$ tem-se:

$$\mu v_{\bar{z}} = C_2 + C_1 \bar{y} + \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \frac{\bar{y}^2}{2} \quad (2.37)$$

As constantes de integração C_1 e C_2 são determinadas a partir das condições de contorno, dadas pela velocidade do escoamento na direção $\bar{z}$ ao longo da direção $\bar{y}$:

$$\bar{y} = 0 \rightarrow v_{\bar{z}}(\bar{x}, 0, \bar{z}) = 0 \quad (\text{velocidade da superfície da sapata})$$

$$\bar{y} = -h \rightarrow v_{\bar{z}}(\bar{x}, -h, \bar{z}) = U \quad (\text{velocidade da superfície do rotor})$$

Substituindo estas condições na equação (2.37) tem-se:

$$C_2 = 0 \quad (2.38)$$

$$C_1 = -\mu \frac{U}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \quad (2.39)$$

Assim, a velocidade $v_{\bar{z}}$ ao longo da folga radial é dada por:

$$v_{\bar{z}} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} (\bar{y}h + \bar{y}^2) - \frac{U}{h} \bar{y} \quad (2.40)$$

Sendo $q_{\bar{z}}$ igual a $\int_0^{-h} v_{\bar{z}} d\bar{y}$ tem-se:

$$q_{\bar{z}} = \int_0^{-h} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} (\bar{y}h + \bar{y}^2) - \frac{U}{h} \bar{y} \right] d\bar{y} = \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\bar{y}^2}{2} h + \frac{\bar{y}^3}{3} \right) - \frac{U}{h} \frac{\bar{y}^2}{2} \right] \Big|_0^{-h} \quad (2.41)$$

$$q_{\bar{z}} = \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} - U \frac{h}{2} \quad (2.42)$$

Logo $\partial q_{\bar{z}} / \partial \bar{z}$ é dado por:

$$\frac{\partial q_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} - U \frac{h}{2} \right) = \frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{U}{2} \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \quad (2.43)$$

Realizando o mesmo balanço de forças sobre este elemento, agora para a direção $\bar{x}$, chega-se a uma equação similar à equação (2.33):

$$\frac{\partial \tau_{\bar{x}}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \quad (2.44)$$

Novamente, por ser um fluido Newtoniano sabe-se que a tensão de cisalhamento é proporcional à sua taxa de deformação, chegando-se a:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\mu \frac{\partial v_{\bar{x}}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \quad (2.45)$$

Integrando a equação (xx) em relação a $\bar{y}$ tem-se:

$$\mu \frac{\partial v_{\bar{x}}}{\partial \bar{y}} = C_1 + \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \bar{y} \quad (2.46)$$

Tendo a viscosidade constante, e integrando a equação (xx) em relação a $\bar{y}$, obtém-se:

$$\mu v_{\bar{x}} = C_2 + C_1 \bar{y} + \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \frac{\bar{y}^2}{2} \quad (2.47)$$

As condições de contorno na direção $\bar{x}$ são dadas pela variação de $v_{\bar{x}}$ ao longo da direção $\bar{y}$:

$$\begin{aligned} \bar{y} = 0 &\rightarrow v_{\bar{x}}(\bar{x}, 0, \bar{z}) = 0 \\ \bar{y} = -h &\rightarrow v_{\bar{x}}(\bar{x}, -h, \bar{z}) = 0 \end{aligned}$$

Logo, as constantes de integração C_1 e C_2 são iguais a:

$$C_2 = 0 \quad (2.48)$$

$$C_1 = \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \quad (2.49)$$

Assim, a velocidade $v_{\bar{x}}$ ao longo da folga radial é dada por:

$$v_{\bar{x}} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} (\bar{y}h + \bar{y}^2) \quad (2.50)$$

Sendo $q_{\bar{x}}$ igual a $\int_0^{-h} v_{\bar{x}} d\bar{y}$ tem-se:

$$q_{\bar{x}} = \int_0^{-h} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} (\bar{y}h + \bar{y}^2) \right] d\bar{y} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\bar{y}^2}{2} h + \frac{\bar{y}^3}{3} \right) \Big|_0^{-h} \quad (2.51)$$

$$q_{\bar{z}} = \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \quad (2.52)$$

Desta forma, $\partial q_{\bar{x}} / \partial \bar{x}$ é dado por:

$$\frac{\partial q_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \right) = \frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \right) \quad (2.53)$$

Substituindo as equações (2.43) e (2.53) na equação da continuidade (Equação 2.31), chega-se a:

$$\frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{U}{2} \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \right) - \frac{\partial h}{\partial \bar{t}} = 0 \quad (2.54)$$

Rearranjando a equação (2.54) obtém-se, então, a *Equação de Reynolds*:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \right) = 6U \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} + 12 \frac{\partial h}{\partial \bar{t}} \quad (2.55)$$

Trata-se de uma equação diferencial parcial elíptica na forma bidimensional.

2.5 – Modelo matemático do filme de óleo

A determinação da espessura do filme de óleo pode ser feita vetorialmente como é mostrado na Figura 2.8. O ponto A indica uma posição genérica da superfície do segmento onde se deseja determinar a espessura do filme de óleo; o ponto B é o ponto de apoio e de rotação da sapata; e o ponto O é o centro do segmento. Os pontos A' , B' , O' correspondem aos pontos A , B , O em instantes de tempo diferentes.

Ressalta-se que para facilidade dos cálculos considerou-se o deslocamento relativo entre o rotor e sapata como sendo apenas da sapata, estando o rotor parado (RUSSO, 1999).

A partir da Figura 2.8 pode-se escrever a seguinte equação vetorial:

$$B_j \mathbf{r}_{OD} + B_j \mathbf{r}_{DE} + B_j \mathbf{r}_{EO'} + B_j \mathbf{r}_{O'C'} + B_j \mathbf{r}_{C'F} + B_j \mathbf{r}_{FO} = 0 \quad (2.56)$$

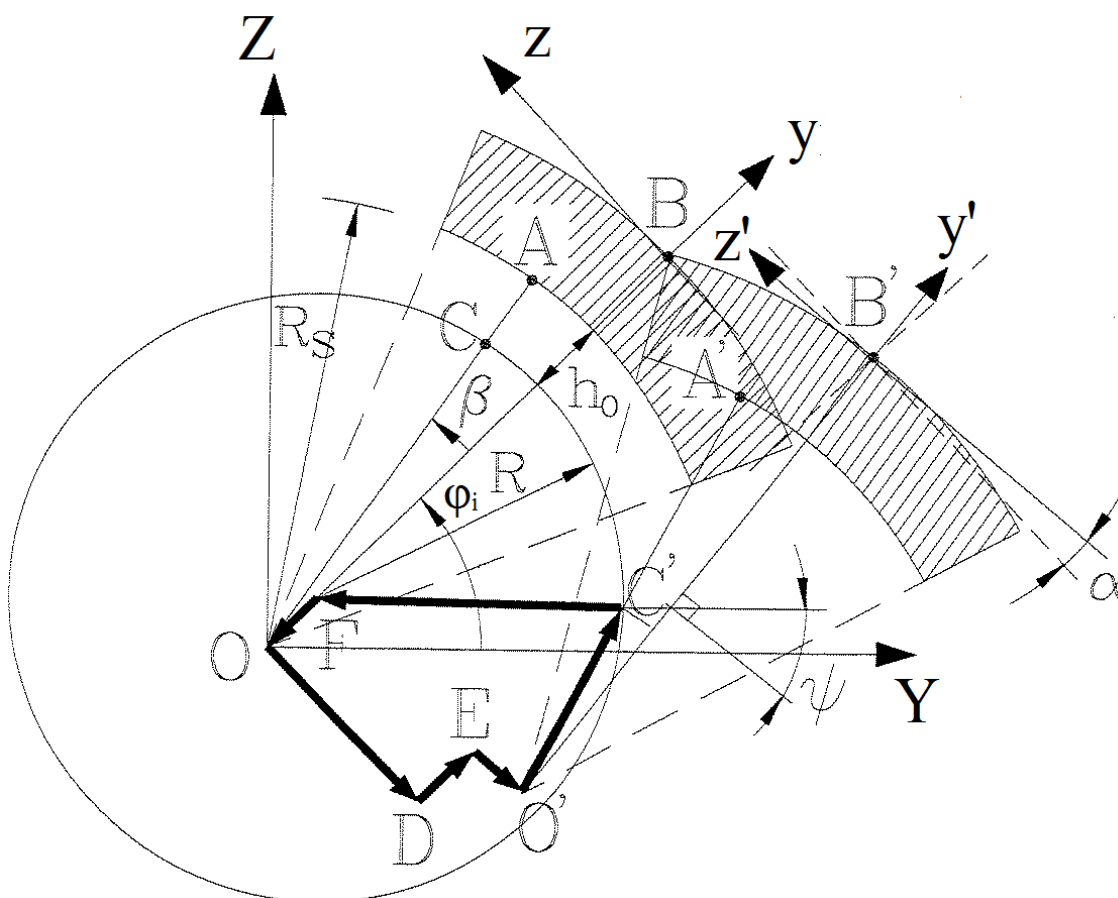


Figura 2.8: Cinemática do subsistema rotor-sapata.

Para poder efetuar a soma dos vetores da Equação (2.56) é necessário que todos estejam representados no mesmo sistema de coordenadas. Adota-se como base para estes vetores a do sistema auxiliar B_j .

O vetor ${}_{B_j}\mathbf{r}_{OD}$ é descrito em função da distância entre a origem do raio do segmento e o deslocamento da sapata na direção z_j . O vetor ${}_{B_j}\mathbf{r}_{DE}$ é função da distância entre o ponto D e E , obtido quando a sapata é transladada na direção y_j . A soma destes dois vetores é dada por:

$${}_{B_j}\mathbf{r}_{OD} + {}_{B_j}\mathbf{r}_{DE} = {}_{B_j}\mathbf{r}_{OE} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_R \\ -z_R \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

Além da translação, existe a rotação da sapata em torno do ponto B . O ângulo de rotação α é pequeno e o segmento de arco percorrido pelo ponto O pode ser aproximado por uma reta. Então, pode-se escrever:

$${}_{B_j}\mathbf{r}_{EO'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(R_s + h_s)\alpha_j \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

Já o vetor ${}_{B_j}\mathbf{r}_{O'C'}$, descrito em função da distância entre o ponto O' e o ponto de intersecção formado pela linha $O'A'$ com a superfície do rotor, é dado por:

$${}_{B_j}\mathbf{r}_{O'C'} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_{O'C'} * \cos\beta \\ r_{O'C'} * \sin\beta \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

sendo o mesmo descrito na base móvel B_j' .

Passando-o para a base B_j , através de uma matriz de transformação, tem-se:

$${}_{B_j}\mathbf{r}_{O'C'} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_{O'C'} * \cos\beta - \alpha_j * r_{O'C'} * \sin\beta \\ \alpha_j * r_{O'C'} * \cos\beta + r_{O'C'} * \sin\beta \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

O vetor ${}_{B_j}\mathbf{r}_{C'F}$ descrito em função da distância entre o ponto C' , encontrado anteriormente, e o centro do rotor, é dado por:

$${}_{B_j}\mathbf{r}_{C'F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R * \text{sen}\psi \\ R * \text{cos}\psi \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

Passando para a base B_j , tem-se:

$${}_{B_j}\mathbf{r}_{C'F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R * \text{sen}\psi - R * \alpha_j * \text{cos}\psi \\ -R * \alpha_j * \text{sen}\psi + R * \text{cos}\psi \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

O vetor ${}_{B_j}\mathbf{r}_{FO}$ é descrito em função da diferença dos raios do rotor e do segmento, e da espessura inicial do filme de óleo dado pela folga radial de montagem h_N , medido na direção y :

$${}_{B_j}\mathbf{r}_{FO} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(R_s - R - h_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Delta r \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

Substituindo as equações de (2.57) à (2.63) na equação (2.56), chega-se a duas equações:

$$R(\text{sen}\psi + \alpha_j * \text{cos}\psi) = y_R + r_{O'C'}(\text{cos}\beta - \alpha_j * \text{sen}\beta) - \Delta r \quad (2.64)$$

e

$$R(\alpha_j * \text{sen}\psi - \text{cos}\psi) = -z_R - (R_s + \Delta s)\alpha_j + r_{O'C'}(\alpha_j * \text{cos}\beta + \text{sen}\beta) \quad (2.65)$$

Fazendo a subtração dos quadrados das equações (2.64) e (2.65), e desprezando-se os termos de segunda ordem, chega-se em:

$$r_{O'C'} = \text{sen}\beta[z_R + \alpha_j * (R_s + \Delta s)] + \text{cos}\beta(y_R - \Delta r) + R \quad (2.66)$$

Então, a espessura do filme de óleo, medida no sistema de referência móvel fixo à sapata, é dada por:

$$h(\beta) = R_s - r_{o'c'} \quad (2.67)$$

ou seja,

$$h(\beta) = R_s - R - \{ \text{sen}\beta [z_R + \alpha_j * (R_s + \Delta s)] + \text{cos}\beta (y_R + R_s - R - h_0) \} \quad (2.68)$$

dado que $\beta = (\bar{z}/R_s)$, obtém-se:

$$h(\bar{z}, t) = R_s - R - (y_R + R_s - R - h_0) \cos\left(\frac{\bar{z}}{R_s}\right) - [z_R + \alpha_j * (R_s + \Delta s)] \text{sen}\left(\frac{\bar{z}}{R_s}\right) \quad (2.69)$$

Com isso, fazendo a transformação de coordenadas para o referencial inercial BI (no ponto H), dada pela relação:

$$y_R = y_H \cos \varphi_i + z_H \text{sen} \varphi_i \quad (2.70)$$

$$z_R = -y_H \text{sen} \varphi_i + z_H \cos \varphi_i \quad (2.71)$$

Portanto, substituindo as Equações (2.70) e (2.71) na Equação (2.69), obtém-se:

$$\begin{aligned} h(\bar{z}, t) = R_s - R - (y_H \cos \varphi_i + z_H \text{sen} \varphi_i + R_s - R - h_0) \cos\left(\frac{\bar{z}}{R_s}\right) \\ - [-y_H \text{sen} \varphi_i + z_H \cos \varphi_i + \alpha_j * (R_s + \Delta s)] \text{sen}\left(\frac{\bar{z}}{R_s}\right) \end{aligned} \quad (2.72)$$

Desta forma, para uma determinada condição de operação (μ , U , α_i , y_H e z_H conhecidos), pode-se determinar a folga radial resultante, resolver a equação de Reynolds em cada sapata (neste caso, a equação de Reynolds é resolvida numericamente), integrar as distribuições de pressão sobre as sapatas, e determinar as forças hidrodinâmicas resultantes sobre o rotor.

Capítulo 3

Simulação Numérica

3.1 – Solução da Equação de Reynolds

A distribuição de pressão ao longo das superfícies das sapatas do mancal é obtida através da resolução da Equação de Reynolds (2.55). Esta equação não possui solução analítica exata sendo necessária a utilização de um método numérico. O método apresentado neste trabalho é o das Diferenças Finitas.

Alternativamente, existe o Método dos Volumes Finitos, ele se baseia na aplicação de volumes de controle ao domínio de estudo, ao contrário dos demais métodos (como o MDF), que se baseiam em pontos de discretização (Maliska, 1995). Muitos autores aconselham o uso deste método para a resolução de equações que governam o comportamento de fluidos devido à sua maior proximidade com a física do problema. Entretanto, a aplicação do método MVF para a integração da equação de Reynolds de um mancal segmentado ativo não apresentou diferenças significativas nos resultados de distribuição de pressão hidrodinâmica em relação aos resultados obtidos com o método MDF (RUSSO, 1999).

O MDF transforma um sistema de equações diferenciais em um sistema de equações algébricas onde o número de equações depende do refinamento da malha utilizada na análise. Existem várias maneiras de se resolver o mesmo problema utilizando-se o MDF. No método utilizado neste trabalho, conhecido como modelo não conservativo, o cálculo do gradiente de uma variável qualquer E , numa superfície discretizada pelos incrementos finitos $\Delta\bar{y}$ e $\Delta\bar{x}$ (Figura 3.1), pode ser aproximado por:

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \bar{x}} \right|_{m+\frac{1}{2},n} \cong \frac{E_{m+1,n} - E_{m,n}}{\Delta\bar{x}} \quad \left. \frac{\partial E}{\partial \bar{x}} \right|_{m-\frac{1}{2},n} \cong \frac{E_{m,n} - E_{m-1,n}}{\Delta\bar{x}} \quad (3.1)$$

$$\left. \frac{\partial^2 E}{\partial \bar{x}^2} \right|_{m,n} \cong \frac{E_{m+1,n} + E_{m-1,n} - 2E_{m,n}}{\Delta\bar{x}^2} \quad (3.2)$$

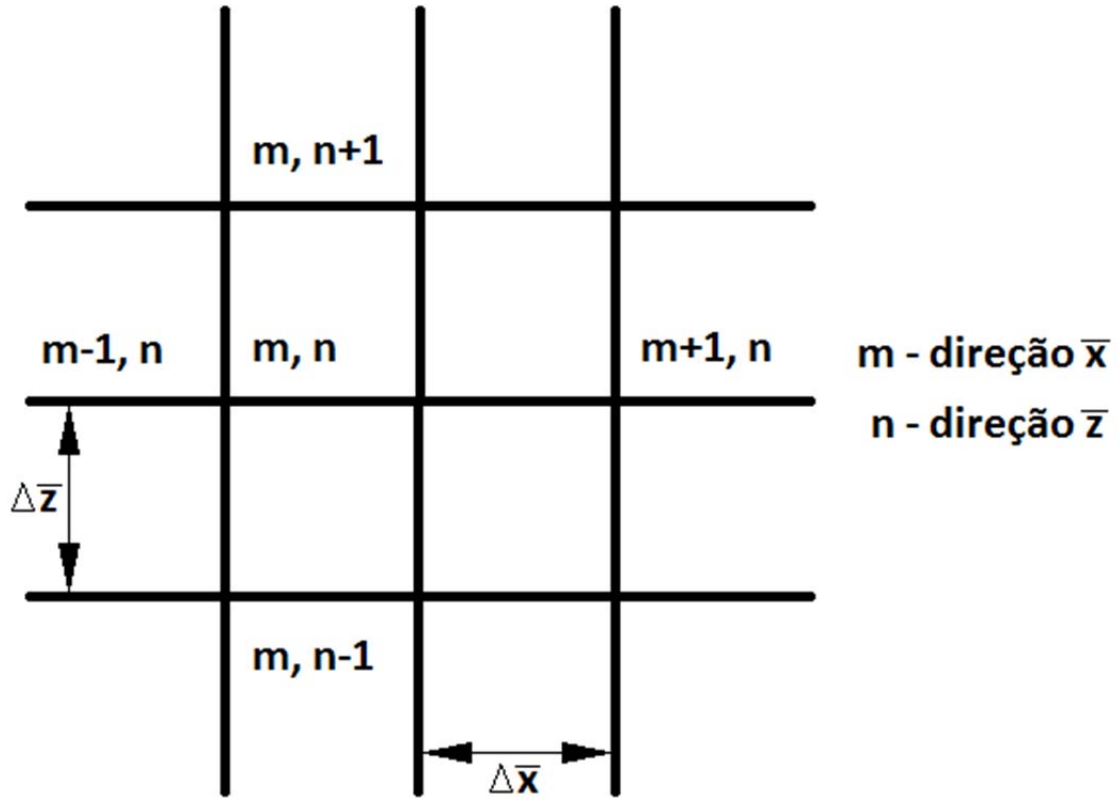


Figura 3.1: Malha com incrementos finitos de $\Delta\bar{x}$ e $\Delta\bar{z}$.

Utilizando esta técnica para resolver a Equação de Reynolds, pode-se determinar a distribuição de pressão ao longo dos segmentos do mancal. O método apresentado a seguir refere-se apenas a solução da equação de Reynolds, utilizada em mancais com lubrificação tradicional:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{h_i^3}{\mu} \frac{\partial p_i}{\partial \bar{x}} \right)}_{\text{Termo 1}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{h_i^3}{\mu} \frac{\partial p_i}{\partial \bar{z}} \right)}_{\text{Termo 2}} = \underbrace{6U \frac{\partial h_i}{\partial \bar{z}} + 12 \frac{\partial h_i}{\partial t}}_{\text{Termo 3}} \quad (3.3)$$

Desenvolvendo cada um dos termos separadamente, chega-se às seguintes expressões:

- Termo 1 (3.4)

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(h_{m,n}^3 \frac{dp}{d\bar{x}} \right) = 3 \frac{h_{m,n}^2}{\mu} \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} \bigg|_{m,n} \left(\frac{p_{m+1,n} - p_{m-1,n}}{2\Delta\bar{x}} \right) + \frac{h_{m,n}^3}{\mu} \left(\frac{p_{m+1,n} + p_{m-1,n} - 2p_{m,n}}{\Delta\bar{x}^2} \right)$$

- Termo 2 (3.5)

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h_{m,n}^3 \frac{dp}{d\bar{z}} \right) = 3 \frac{h_{m,n}^2}{\mu} \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \bigg|_{m,n} \left(\frac{p_{m,n+1} - p_{m,n-1}}{2\Delta \bar{z}} \right) + \frac{h_{m,n}^3}{\mu} \left(\frac{p_{m,n+1} + p_{m,n-1} - 2p_{m,n}}{\Delta \bar{z}^2} \right)$$

Logo, a expressão para a pressão em qualquer ponto nodal da malha será:

$$\begin{aligned} & \left[3 \frac{h_{m,n}^2}{\mu} \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} \bigg|_{m,n} \left(\frac{1}{2\Delta \bar{x}} \right) + \frac{h_{m,n}^3}{\mu \Delta \bar{x}^2} \right] p_{m+1,n} + \left[-3 \frac{h_{m,n}^2}{\mu} \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} \bigg|_{m,n} \left(\frac{1}{2\Delta \bar{x}} \right) + \frac{h_{m,n}^3}{\mu \Delta \bar{x}^2} \right] p_{m-1,n} + \\ & \left[3 \frac{h_{m,n}^2}{\mu} \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \bigg|_{m,n} \left(\frac{1}{2\Delta \bar{z}} \right) + \frac{h_{m,n}^3}{\mu \Delta \bar{z}^2} \right] p_{m,n+1} + \left[-3 \frac{h_{m,n}^2}{\mu} \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \bigg|_{m,n} \left(\frac{1}{2\Delta \bar{z}} \right) + \frac{h_{m,n}^3}{\mu \Delta \bar{z}^2} \right] p_{m,n-1} - \\ & \left[2 \frac{h_{m,n}^3}{\mu \Delta \bar{x}^2} + 2 \frac{h_{m,n}^3}{\mu \Delta \bar{z}^2} \right] p_{m,n} = 6U \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \bigg|_{m,n} + 12 \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Desenvolvendo este equacionamento para todos os pontos da malha pode-se definir uma matriz **A**, dada pelos coeficientes da Equação (3.6) que multiplicam os termos das pressões; um vetor **b** correspondente ao termo 3 da equação (3.3); e um vetor **P** constituído pelas pressões em cada um dos nós da malha

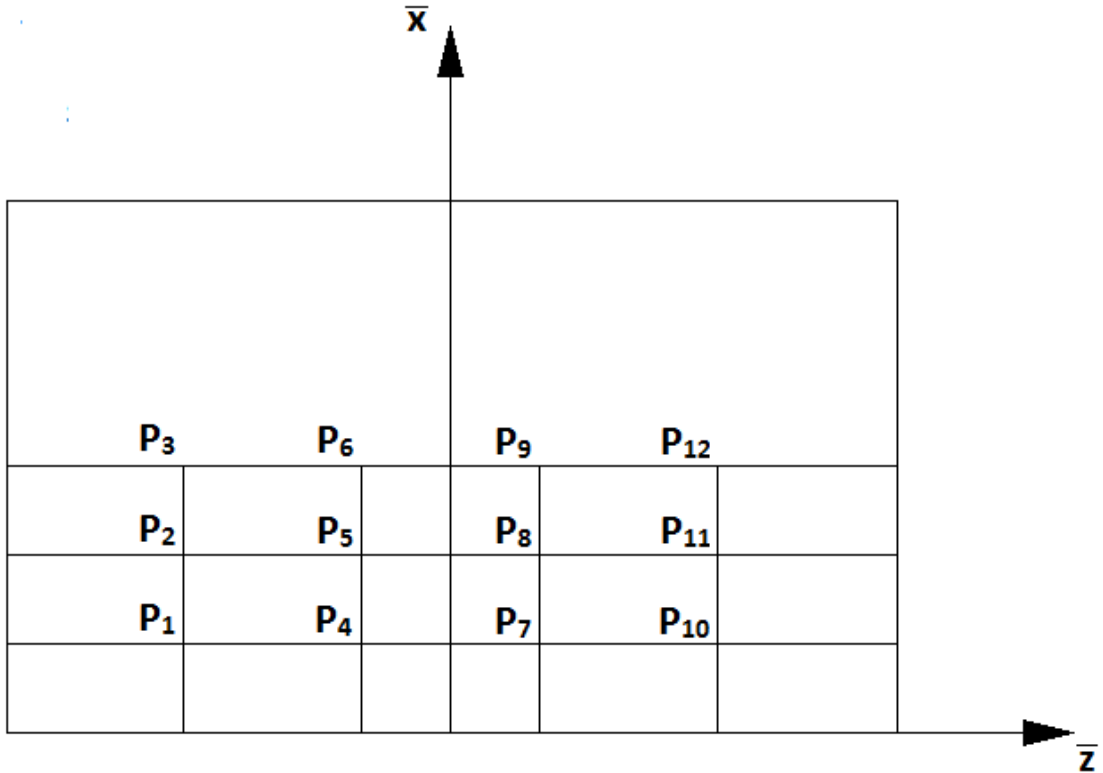


Figura 3.2: Malha de discretização de uma das sapatas do mancal.

de discretização da superfície, as quais devem ser determinadas. Assim, o sistema de equações a ser resolvido é representado por:

$$A \cdot P = b \quad (3.7)$$

Observa-se que a matriz **A** depende dos parâmetros $\Delta\bar{x}$, $\Delta\bar{z}$, $\frac{\partial h}{\partial \bar{x}}$ e $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}$, e o vetor **b** da velocidade da superfície do rotor *U*, e das derivadas $\frac{\partial h}{\partial t}$ e $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}$.

Para ilustrar a principal característica da matriz **A**, que é a forma com que esta é construída, define-se a seguir uma malha de discretização sobre a superfície da sapata com 4 pontos na direção $\bar{x}$, e 6 pontos em $\bar{z}$. Devido à simetria da sapata na direção $\bar{x}$, apenas metade desta é discretizada, como é apresentado na Figura 3.2.

Adotando-se:

$$\begin{aligned} a &= \left[-3 \frac{h_{m,n}^2}{\mu} \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} \Big|_{m,n} \left(\frac{1}{2\Delta\bar{x}} \right) + \frac{h_{m,n}^3}{\mu\Delta\bar{x}^2} \right] && \text{termo que multiplica } p_{m-1,n} \\ b &= \left[-3 \frac{h_{m,n}^2}{\mu} \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \Big|_{m,n} \left(\frac{1}{2\Delta\bar{z}} \right) + \frac{h_{m,n}^3}{\mu\Delta\bar{z}^2} \right] && \text{termo que multiplica } p_{m,n-1} \\ c &= \left[-2 \frac{h_{m,n}^3}{\mu\Delta\bar{x}^2} - 2 \frac{h_{m,n}^3}{\mu\Delta\bar{z}^2} \right] && \text{termo que multiplica } p_{m,n} \\ d &= \left[3 \frac{h_{m,n}^2}{\mu} \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \Big|_{m,n} \left(\frac{1}{2\Delta\bar{z}} \right) + \frac{h_{m,n}^3}{\mu\Delta\bar{z}^2} \right] && \text{termo que multiplica } p_{m,n+1} \\ e &= \left[3 \frac{h_{m,n}^2}{\mu} \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} \Big|_{m,n} \left(\frac{1}{2\Delta\bar{x}} \right) + \frac{h_{m,n}^3}{\mu\Delta\bar{x}^2} \right] && \text{termo que multiplica } p_{m+1,n} \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} c & d & 0 & e & & & & & & \\ b & c & d & 0 & e & & & & & \\ 0 & b & c & d & 0 & e & & & & 0 \\ a & 0 & b & c & d & 0 & e & & & \\ & a & 0 & b & c & d & 0 & e & & \\ & & a & 0 & b & c & d & 0 & e & \\ & & & a & 0 & b & c & d & 0 & e \\ & & & & a & 0 & b & c & d & 0 \\ & & & & & a & 0 & b & c & d \\ & & & & & & a & 0 & b & c \end{bmatrix}$$

Figura 3.3: Matriz em banda dos coeficientes que multiplicam os termos das pressões.

A matriz resultante será como mostra a Figura 3.3. Tem-se que esta matriz é em banda e, neste caso, de dimensão 12×12 uma vez que estão sendo analisados 12 pontos na malha. Cada linha da matriz **A** corresponde à análise de um ponto nodal.

Uma vez resolvida a equação (3.7) encontra-se a distribuição de pressão ao longo de toda a superfície da sapata. A partir destes resultados pode-se, então, encontrar a força que está sendo realizada sobre cada uma delas.

3.2 - Condições de contorno para a distribuição de pressão no filme de óleo

Para encontrar uma solução para a equação de Reynolds é necessário conhecer as condições de contorno do problema que está sendo modelado. Nas extremidades dos mancais, a pressão no filme de óleo é igual à pressão atmosférica, ou seja, seu valor é bem definido. Já em outros pontos, a distribuição de pressão ao longo da superfície do mancal é resultante da variação da espessura do filme de óleo. Se no sentido do escoamento do fluido esta espessura for decrescente, tem-se a formação de uma distribuição de pressão positiva. Caso contrário esta se torna negativa.

Este é o caso da condição de contorno de *Sommerfield*. Ela aplica-se nos casos em que a pressão no filme de óleo é baixa e não se observa o efeito da ruptura do filme de óleo.

Porém fluidos lubrificantes não suportam pressões muito inferiores à atmosférica, ocorrendo sua cavitação. Estes casos são facilmente encontrados em mancais circulares completos, e mancais segmentados que apresentam grandes rotações das sapatas (mancais com grande folga radial). Desta forma, devem-se encontrar meios de descrever este comportamento no modelo matemático do mancal.

Uma maneira simples de contornar este problema é desprezar todas as pressões negativas, assumindo valor igual à atmosférica. Esta condição é conhecida como condição de *Gümbel*, ou *Metade de Sommerfield* (Figura 3.4). Esta condição é aplicada nos casos em que a pressão no filme de óleo é suficientemente alta. Sua aplicação não é fisicamente possível, pois não satisfaz as equações da continuidade (2.31), mas assim mesmo é amplamente

utilizada devido a sua simplicidade, sendo esta a que foi utilizada neste trabalho (RUSSO, 1999).

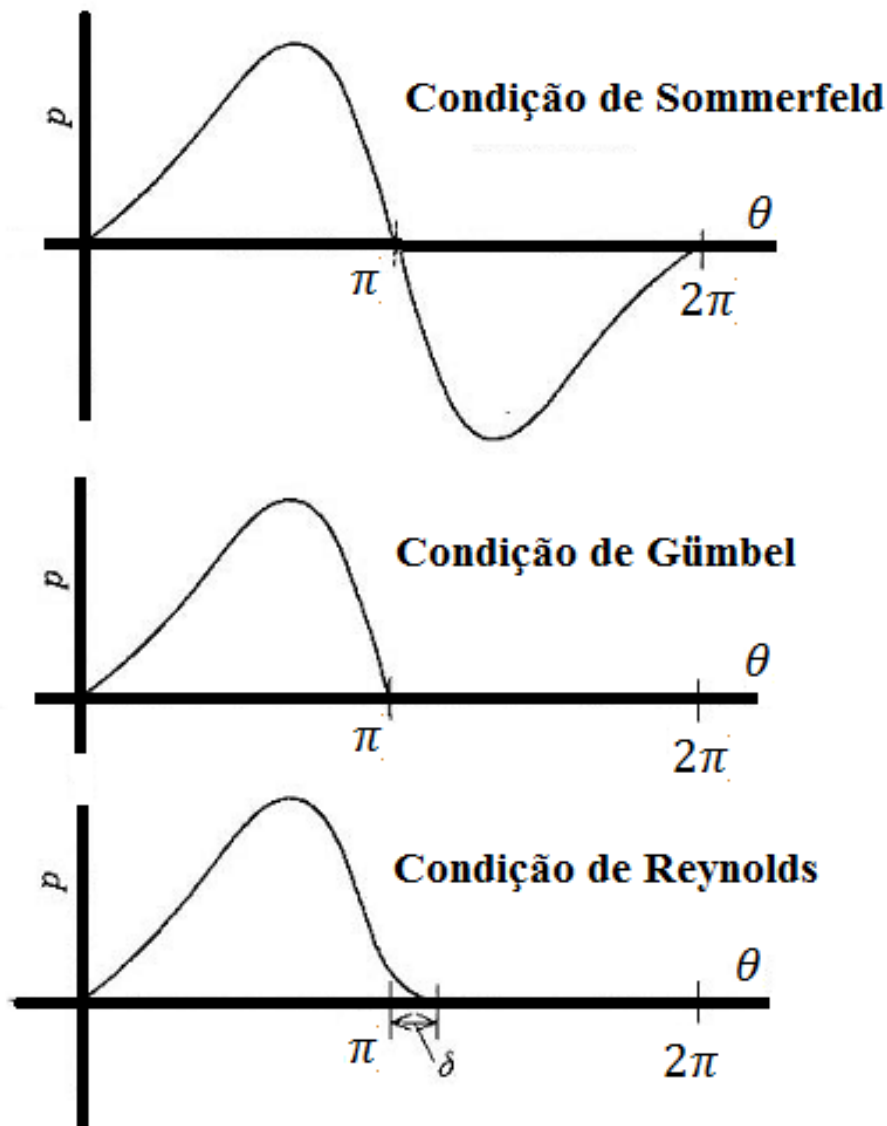


Figura 3.4: Condições de contorno para a equação de Reynolds.

A fim de diminuir o problema desta aproximação pode-se utilizar a condição de contorno de *Reynolds*. Neste caso é imposto que o gradiente de pressão deve se igualar a zero no ponto onde a pressão do filme de óleo se anula. Desta forma, ameniza-se a queda da distribuição de pressão até o momento em que esta se torna zero. No entanto, é necessário determinar o ponto em que isto ocorre, esta condição é também conhecida como condição de Swift-Stieber (MELO, 2010).

3.3 – Sinal de excitação de varredura

Existem vários tipos de sinais que podem ser utilizados na excitação de estruturas mecânicas. Dentre estes sinais estão os sinais aleatórios, sinais impulsivos e os periódicos.

O sinal de excitação stepped-sine é sem dúvida o que resulta em respostas mais precisas em amplitude, pois se excita cada frequência separadamente através de um seno simples e a resposta do sistema é analisada após o transiente. A desvantagem deste método é o longo tempo dispendido na coleta dos dados de cada frequência para montar uma FRF completa, pois quanto maior a definição em frequência da FRF, maior será o número de ensaios a serem efetuados (NICOLETTI, 2003).

Os sinais aleatórios têm a vantagem de excitar diferentes frequências do sistema em um mesmo ensaio, devido ao seu espectro em frequência ser aproximadamente constante na faixa de frequências de estudo. Apesar do tratamento do sinal para a obtenção da FRF requerer o uso de técnicas estatísticas, trata-se de um método bastante estabelecido e difundido na literatura, pois a obtenção da FRF torna-se bem mais rápida em relação ao método stepped-sine. O maior cuidado que se deve ter no uso de sinais de excitação aleatórios é a obrigatória obtenção de diversas FRFs para se efetuar uma média. Devido à natureza não determinística dos sinais, as variações entre diversas FRFs obtidas para uma mesma análise experimental podem ser reduzidas efetuando-se médias entre elas no domínio da frequência (NICOLETTI, 2003).

O método de excitação utilizado neste trabalho é o chirp periódico (Figura 3.5), o qual envolve o uso de um seno cuja frequência varia ao longo da faixa de interesse, e é repetido diversas vezes. Apesar de ser, assim como o sinal aleatório, um método mais rápido e prático do que o stepped-sine, deve-se assegurar que a variação da frequência é lenta o suficiente para que o sistema atinja a condição de regime e as medições não apresentem distorções. Segundo Ewins (1984), uma maneira de se verificar a eficiência do sinal chirp é efetuar dois ensaios, sendo um com a frequência aumentando do valor mínimo até o valor máximo e outro com a frequência diminuindo do valor máximo ao

valor mínimo. Caso as FRFs resultantes sejam as mesmas, a taxa de variação da frequência está adequada (NICOLETTI, 2003).

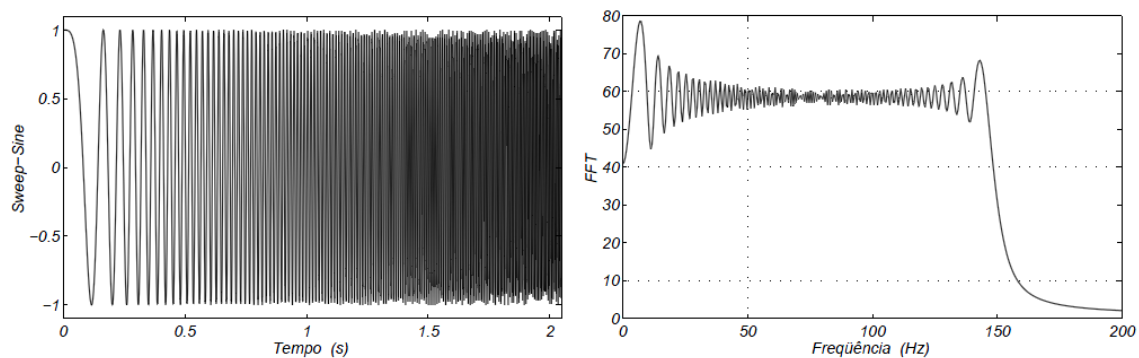


Figura 3.5: Sinal chirp nos domínios do tempo e da frequência – Período de 2,048 s, taxa de amostragem de 1 kHz, frequência máxima de 150 Hz.

Tendo-se $f(t)$ (sinal de entrada aplicado) e $x(t)$ (sinal de saída correspondente), obtidos com a simulação numérica, pode-se calcular os estimadores de FRF $H_1(\omega)$ e $H_2(\omega)$, os quais são calculados com o auxílio do aplicativo matemático MATLAB – comandos <csd> e <psd>. Após isto, as amostras são superpostas durante a análise (overlap) para melhorar a qualidade dos resultados nas extremidades do espectro de frequências.

A qualidade das medições pode ser avaliada através da função de coerência entre os sinais de entrada e saída. A presença de ruído nos sinais de entrada influencia os resultados do estimador $H_1(\omega)$, enquanto a presença de ruído nos sinais de saída influencia os resultados do estimador $H_2(\omega)$. Outros fatores que podem levar a uma baixa coerência entre os sinais de entrada e de saída são a presença de excitações externas além da excitação proveniente do sinal de entrada; a baixa resolução em frequência das FRFs (bias-error); e as eventuais não-linearidades do sistema (BUTTINI, 2011).

3.4 – Implementação do programa de simulação numérica

O fluxograma apresentado na Figura 3.6 mostra as etapas de cálculo do programa de simulação numérica implementado em MATLAB®.

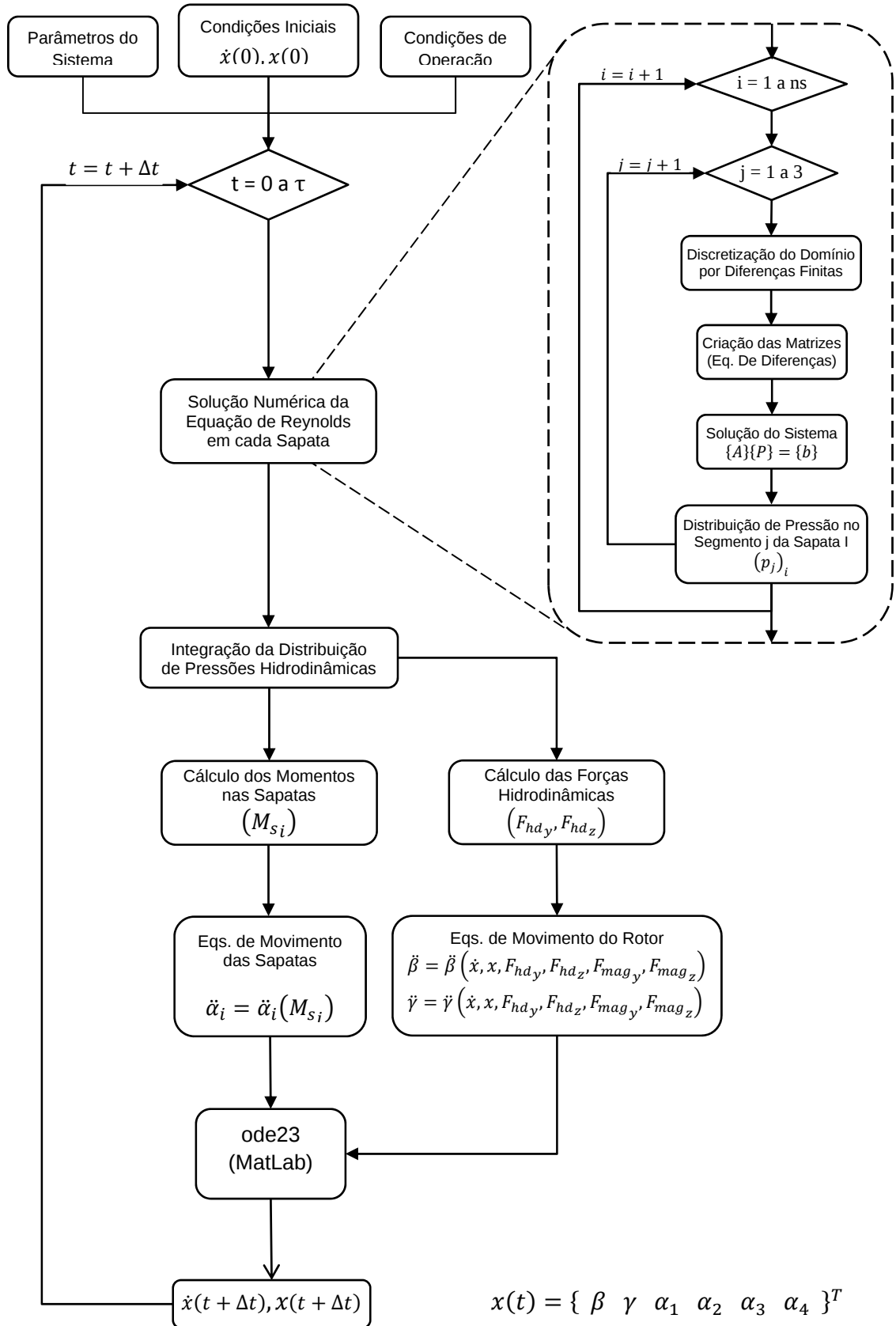


Figura 3.6: Fluxograma do algoritmo usado para a integração numérica das equações de movimento.

Inicialmente, definem-se os valores dos parâmetros de simulação (dados geométricos da bancada, parâmetros do óleo), as condições de operação (velocidade de rotação, carregamento externo, forças de excitação) e as condições iniciais (deslocamentos e velocidades iniciais). As equações de movimento são integradas do instante 0 ao instante τ , com o auxílio da rotina ode23 do aplicativo MATLAB®, a qual utiliza um método de integração de equações diferenciais ordinárias de passo variável.

Em um determinado instante de tempo t , a equação de Reynolds (Eq.(2.56)) é resolvida numericamente para cada i -ésima sapata. A área do filme de óleo sobre a i -ésima sapata é discretizada em 31 pontos na direção axial ($\bar{x}$) e 22 pontos na direção radial ($\bar{z}$). Aplicando-se as aproximações centrais do Método das Diferenças Finitas, monta-se um sistema de equações cuja solução é o vetor de pressões hidrodinâmicas em cada ponto do domínio discretizado.

Condições de contorno clássicas são empregadas: nas bordas das sapatas considera-se a pressão ambiente e nas eventuais regiões de pressão menor que a ambiente, considera-se pressão nula. Com isto, determina-se a distribuição de pressões do óleo ($p_i(\bar{x}, \bar{z})$) sobre a sapata.

Uma vez determinadas as distribuições de pressões sobre as sapatas, efetua-se a integração das distribuições de pressões e respectivo cálculo das forças e momentos hidrodinâmicos e eletromagnéticos sobre o rotor e as sapatas. Com isto, o lado esquerdo das equações de movimento é determinado e a rotina ode23 pode dar prosseguimento na integração, calculando as velocidades e deslocamentos para o instante $t + \Delta t$.

No instante $t + \Delta t$, todo o processo de determinação das forças e momentos hidrodinâmicos e eletromagnéticos se repete.

3.5 – Identificação de não linearidades em sistemas

O modelo matemático apresentado para o mancal hidrodinâmico ativo com sapatas móveis magnéticas neste trabalho é dado por um sistema de equações diferenciais ordinárias não homogêneas e lineares. Assim, uma importante consequência disto é o Princípio da Superposição o qual pode ser formulado como se segue, (WORDEN; TOMLINSON, 2001):

“Se a resposta de um sistema para uma força $f_1(t)$ for $x_1(t)$, e para uma segunda entrada independente $f_2(t)$ for $x_2(t)$, então a resposta do sistema para a superposição $\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$ (com as apropriadas condições de contorno) é $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ para quaisquer valores das constantes α e β .”

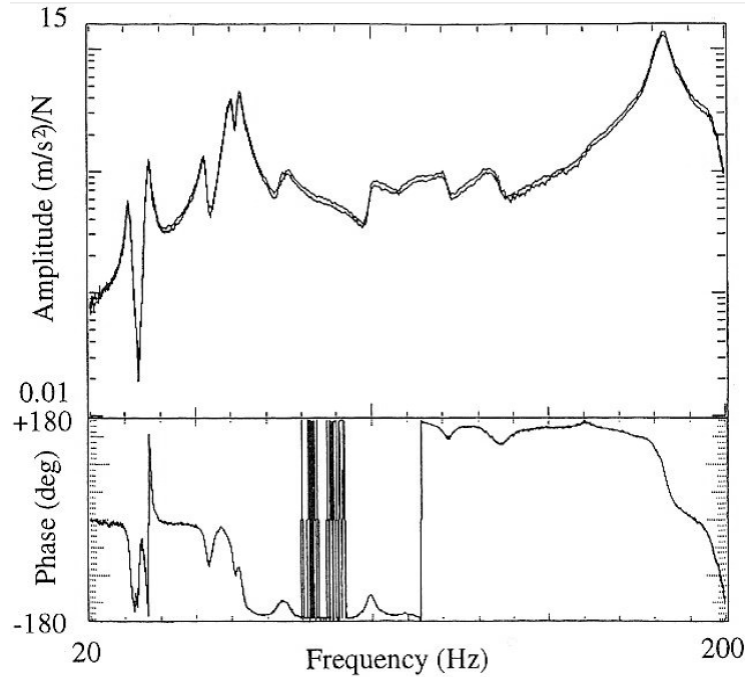


Figura 3.7: Teste de homogeneidade. A superposição das FRFs, dentro de uma certa gama de α , mostra que a estrutura é linear, nesta região, (WORDEN; TOMLINSON, 2001).

O teste de homogeneidade nada mais é do que uma consequência direta do princípio de superposição. Sem dúvida é o método mais comum no que diz respeito a identificação de sistemas não lineares em testes dinâmicos. Em essência, o método pode ser descrito como: supondo que o sistemas seja linear, então de acordo com o princípio de superposição, para um sinal de entrada $\alpha f_1(t)$, é de se esperar que o sistema responda com um sinal de saída $\alpha x_1(t)$. Desta forma, sua função de resposta em frequência, ou seja, sua FRF, deve ser invariante a magnitude de entrada do sinal, uma vez que:

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{\alpha X(\omega)}{\alpha F(\omega)}$$

Assim, uma vez que, as FRFs são invariantes sobre mudanças de α , efetivamente não deve haver mudanças nas mesmas qualquer que seja o nível

de excitação do sistema, para que seja classificado como linear. Um teste de homogeneidade, para um sistema linear, pode ser visto na Figura 2.7, obtida de, (WORDEN; TOMLINSON, 2001), a qual mostra que o sistema é invariante.

No entanto, se o sistema for não linear, o princípio de superposição será ferido, e a consequência implicará em distorções nas FRFs, ou seja, quando sobrepostas para comparar se há invariância, para níveis diferentes de excitação (α), estas apresentam algumas distorções, sobretudo nas regiões próximas a ressonância, (WORDEN; TOMLINSON, 2001).

Assim, o teste de homogeneidade é usualmente aplicado em teste dinâmico para FRFs onde o nível do sinal de entrada é mapeado em um intervalo, no qual o sistema deverá ser operado. Este teste será aplicado devido a sua simplicidade.

Capítulo 4

Resultados

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos com a simulação numérica descrita no Capítulo 3.

Serão analisados dois casos, que são os objetivos de estudo deste trabalho. Primeiro, será analisado o limite de linearidade do sistema rotor-mancal ativo quando sujeito a um carregamento dinâmico aplicado diretamente sobre o eixo no ponto **H**, onde está posicionado o mancal. Em seguida, será analisado o limite de linearidade do sistema rotor-mancal ativo quando sujeito as mesmas condições de carregamento, porém aplicado pela sapata móvel magnética (força de atuação), incluindo sua dinâmica nas equações. Por fim, serão comparados os dois resultados e os efeitos oriundos da força de atuação eletromagnética no modelo matemático serão avaliados.

4.1 – Dados utilizados na simulação numérica

Para os dois casos, serão utilizados as condições de operação e os parâmetros do sistema rotor-mancal ativo dadas pela Tabela 4.1 e Tabela 4.2. Na simulação descrita na Seção 3.4, utiliza-se um sinal chirp de período de 10,0 s e frequência de corte de 50 Hz.

Tabela 4.1: Parâmetros do sistema rotor-mancal ativo.

massa do eixo	m_r	36.113	kg
massa das sapatas	m_s	2.9	kg
momento de inércia polar do eixo em relação ao ponto R	I_{xx}^R	1.6	$kg.m^2$
momento de inércia lateral do eixo em relação ao ponto R	$I_{yy}^R = I_{zz}^R$	57.0	$kg.m^2$
distância entre a origem do sistema de referência e o C.G. do eixo	r_{RO}	0.395	m
distância entre a origem do sistema de referência e a posição do mancal ativo	r_{RH}	0.659	m
distância entre a origem do sistema de referência e o ponto de excitação	r_{RE}	0.877	m

Tabela 4.1: Condições de operação e dados geométricos do mancal segmentado.

raio do rotor	R	0.04	m
raio das sapatas	R_s	0.042	m
ângulo de abrangência das sapatas	α_s	69.7	$^\circ$
largura das sapatas (3 segmentos)	W_s	0.024 / 0.029 / 0.024	m
distância da superfície da sapata ao ponto de pivoteamento	Δs	0.0568	m
momento de inércia das sapatas	I_s	0.00408	$kg.m^2$
folga radial de montagem	h_N	200	μm
posições das sapatas no mancal ¹	φ	0 / 90 / 180 / 270	$^\circ$
velocidade de rotação do rotor	ϕ	10	Hz
magnitude da força de excitação	F	1 / 10 / 100 / 1000	N
viscosidade dinâmica do óleo (ISO VG32)	μ	0.0277@40°C	$N.s/m^2$
carregamento estático	W	nulo	N

¹ posições foram alteradas em relação ao projeto para que a força de atuação da sapata ficasse na mesma direção da força aplicada diretamente no eixo (direção Z) na condição sem carregamento estático.

4.2 – Força de excitação aplicada diretamente no eixo

A Figura 4.1 mostra, no mesmo gráfico, as FRFs obtidas utilizando as condições de operação apresentadas na Seção 4.1 para diferentes magnitudes da força de excitação aplicadas diretamente sobre eixo e para uma velocidade de rotação do rotor $\phi = 10 Hz$. A frequência de ressonância obtida para o sistema rotor mancal ativo foi de 27,8 Hz.

Para $F=1N$ e $F=10N$ as curvas não possuem diferenças perceptíveis, já para $F=100N$ pode-se notar uma redução da amplitude do pico de ressonância do sistema e um pequeno deslocamento da curva para frequências maiores, próximas de 30 Hz. Aumentando a magnitude da força de excitação para $F=1000N$ as não linearidades se tornam mais evidentes e o curva começa a apresentar distorções consideráveis, a amplitude do pico de ressonância diminui ainda mais e ainda há um deslocamento do pico para frequências ainda maiores, em torno de 33 Hz. Este fato pode ser explicado pelo aumento da rigidez do filme de óleo com o aumento da magnitude da força de excitação, já o aumento do amortecimento pode ser explicado pela baixa rotação do rotor.

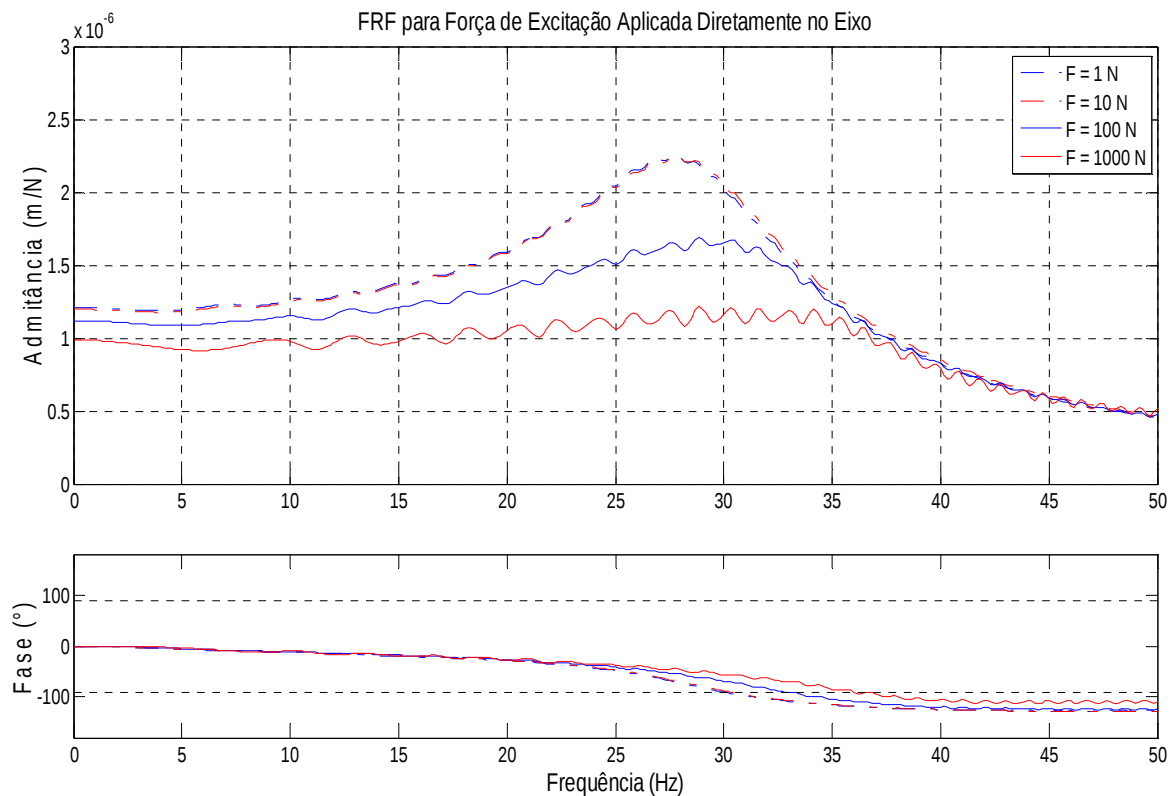


Figura 4.1: Comparação entre diferentes magnitudes da força de excitação aplicada diretamente no rotor.

O gráfico de fase das FRFs confirma este aumento do amortecimento e da rigidez pois com o aumento da magnitude da força de excitação as curvas cruzam a linha de -90° com mais suavidade e em frequências maiores.

Deve-se ressaltar que os atuadores eletromagnéticos das sapatas móveis possuem capacidade de atuação de até 100N, ou seja, eles podem atuar em condições em que as não linearidades são bastante significativas.

4.3 – Força de excitação aplicada pelo atuador da sapata

A Figura 4.2 mostra, no mesmo gráfico, as FRFs obtidas utilizando as condições de operação apresentadas na Seção 4.1 para diferentes magnitudes da força de excitação aplicada pelo atuador eletromagnético das sapatas e para uma velocidade de rotação do rotor de $\phi = 10 \text{ Hz}$. A frequência de ressonância obtida para o sistema rotor mancal ativo, para este caso, foi de $28,9 \text{ Hz}$.

Para $F=1\text{N}$ e $F=10\text{N}$ as curvas possuem diferenças pouco perceptíveis quanto à forma, mas com uma redução na amplitude da curva. Para $F=100\text{N}$ e para $F=1000\text{N}$ pode-se notar uma grande distorção da curva próximo à ressonância bem como uma grande redução da amplitude do pico. Este fato pode ser explicado pelo aumento das não linearidades do sistema com a introdução da dinâmica da força de atuação na simulação. Isto pode ter aumentado o acoplamento das direções principais do mancal segmentado aumentando a dependência, principalmente, dos termos não lineares cruzados.

Entretanto, não se pode afirmar quanto a variação da frequência de ressonância, devido às grandes distorções, apesar de as curvas de $F=100\text{N}$ e $F=1000\text{N}$ indicarem um aumento. Este fato pode ser explicado pelo aumento da rigidez do filme de óleo com o aumento da magnitude da força de excitação, já o aumento do amortecimento pode ser explicado pela baixa rotação do rotor, tal como ocorreu no caso anterior, indicando um aumento das não linearidades devido à adoção das hipóteses simplificadoras no modelo matemático.

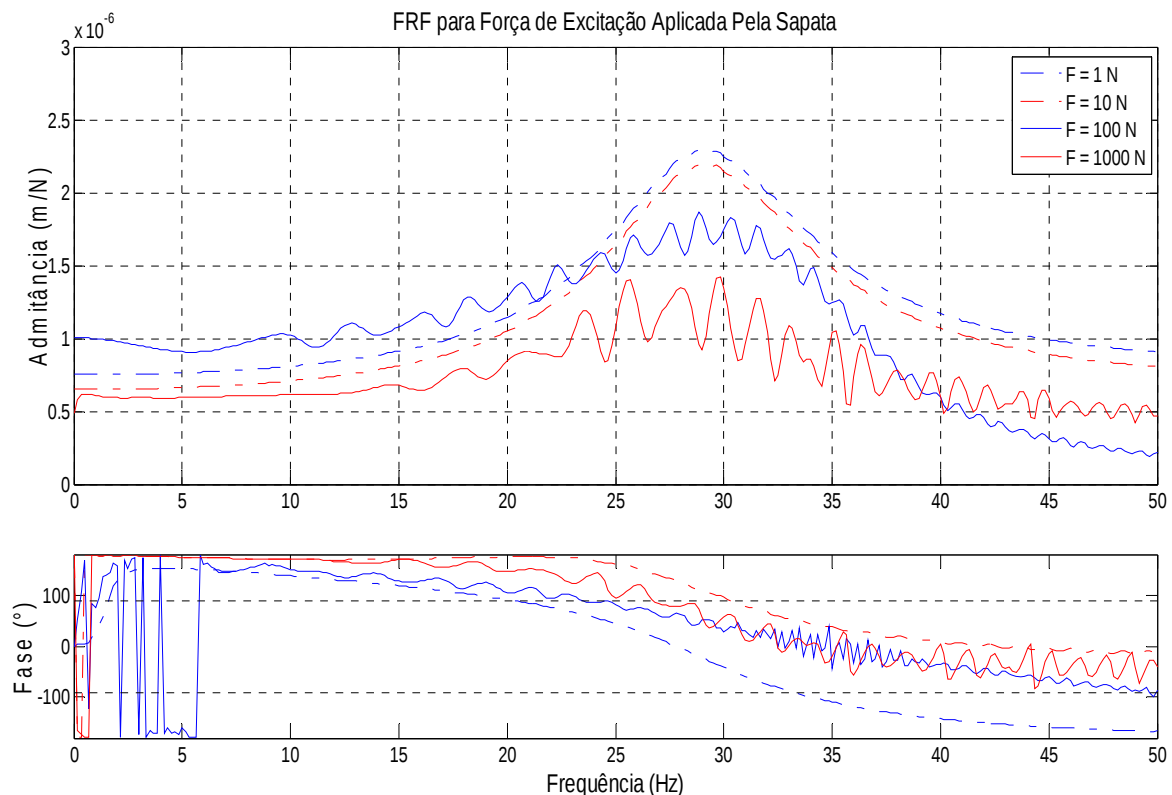


Figura 4.2: Comparação entre diferentes magnitudes da força de excitação aplicada pelo atuador eletromagnético da sapata.

4.4 – Comparação entre as condições de carregamento

A Figura 4.3 mostra os resultados obtidos para as duas condições de carregamento analisadas neste trabalho: força de excitação aplicada diretamente no rotor e pelo atuador eletromagnético da sapata, comparando as FRFs obtidas para a mesma magnitude da força de excitação. Para os dois casos a variação brusca na frequência da força de excitação pode ter contribuído para o aparecimento de *leakage* nas curvas devido à descontinuidade (da derivada) do sinal de excitação.

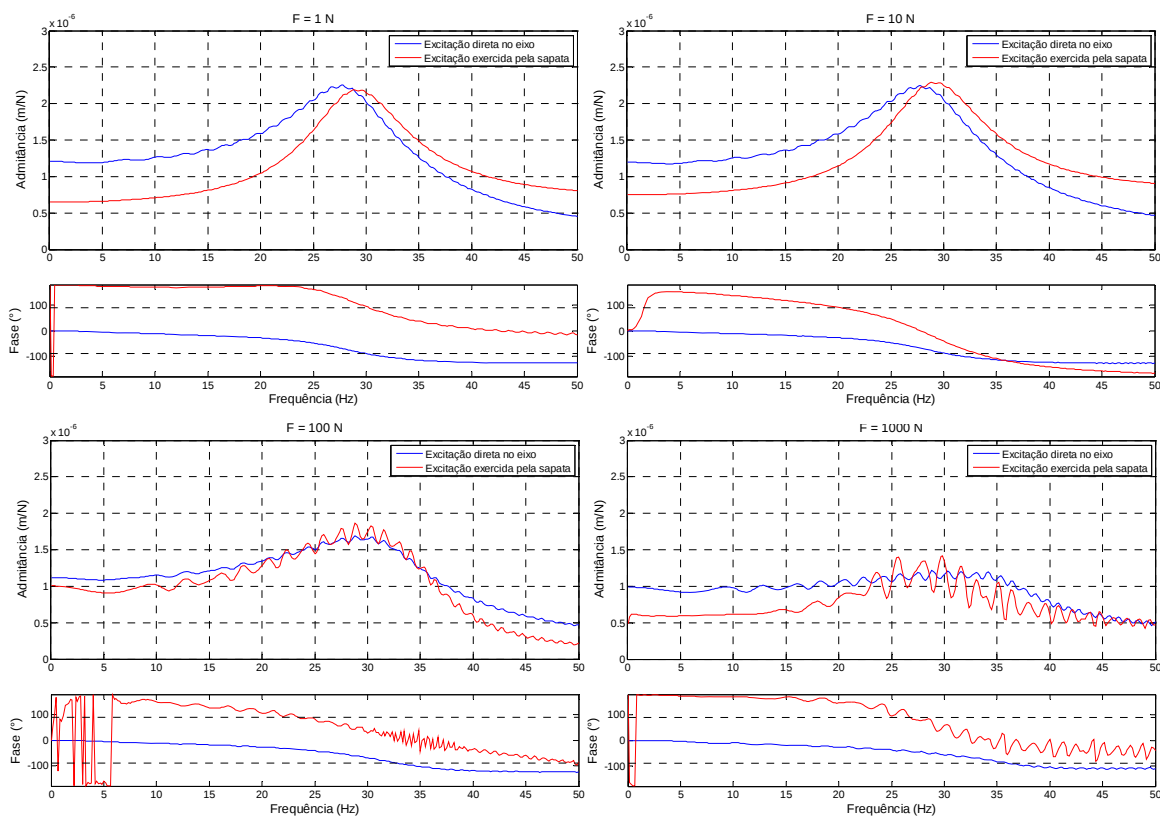


Figura 4.3: Comparação entre as diferentes magnitudes da força de excitação para os dois tipos de carregamento.

Analisando a Figura 4.3 podemos perceber que para as duas condições de carregamento, há uma tendência similar de comportamento das FRFs. Em ambos os casos há um aumento do amortecimento e um aumento da frequência de ressonância. Essa característica pode estar associada às não

linearidades comuns aos dois modelos, devido às hipóteses simplificadoras adotadas.

Entretanto, para o caso da força de excitação aplicada pelo atuador, as distorções nas FRFs foram bem maiores, principalmente próximo à frequência de ressonância.

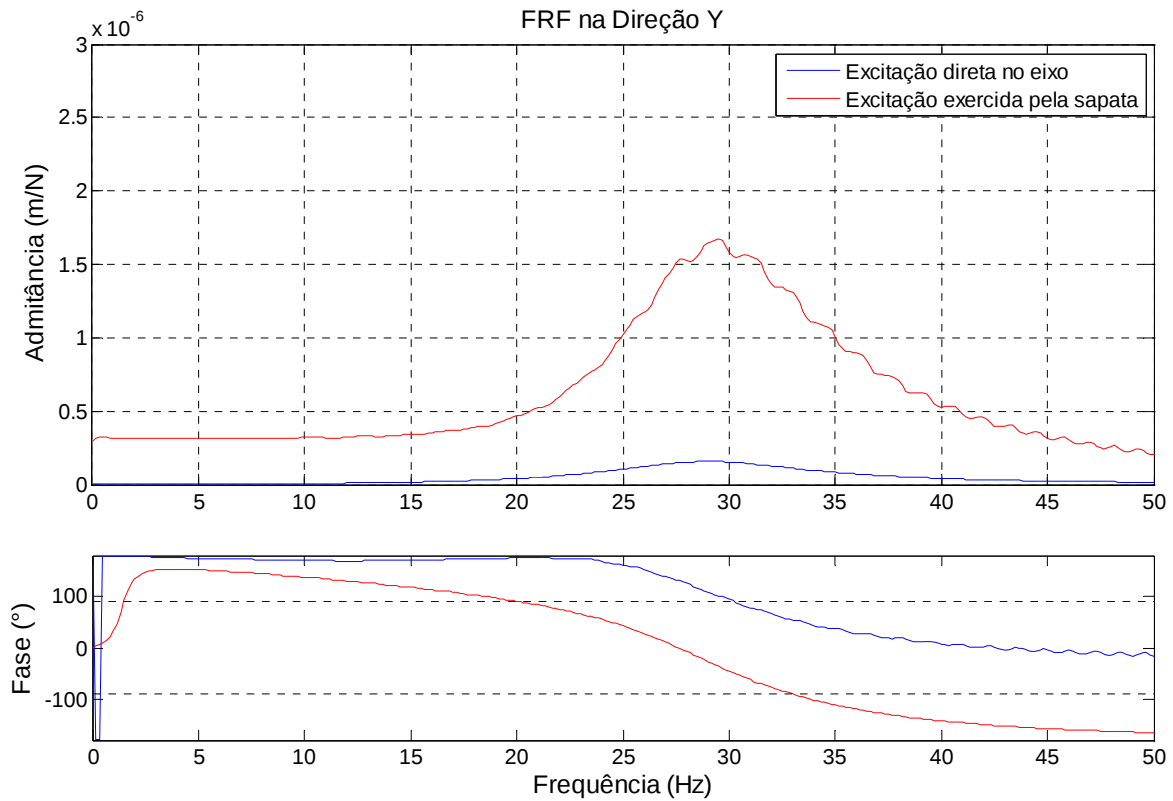


Figura 4.4: Comparação entre as FRFs obtidas para a direção Y ($F = 1\text{N}$).

Como já foi dito, com a introdução da dinâmica da força de excitação nas equações do sistema, houve um aumento do acoplamento entre as direções principais do rotor. Este fato pode ser observado comparando-se as FRFs obtidas para a direção ortogonal, neste caso a direção Y, apresentadas na Figura 4.4. Nela é possível observar que para o caso da força de excitação aplicada no eixo, a FRF na direção Y não apresenta picos significativos. Já para o caso da força de excitação aplicada pelo atuador eletromagnético da sapata, a FRF apresenta um pico de ressonância também na direção Y. Isto mostra que o desacoplamento, resultante da liberdade de rotação das sapatas, é afetado pelo momento “alinhante” gerado pela dinâmica da força de excitação.

Capítulo 5

Conclusão

A partir das simulações numéricas obtidas com o modelo matemático do sistema rotor-mancal ativo conclui-se que, apesar dos baixos níveis de acoplamento entre as direções principais, que são características dos mancais segmentados com sapatas móveis, as hipóteses simplificadoras adotadas para o modelo matemático são válidas para baixos valores de magnitude da força de excitação, porém para valores maiores as não linearidades começam a se sobressair e distorcer as FRFs.

Para o caso da força eletromagnética de excitação aplicada pelo atuador da sapata móvel, as não linearidades introduzidas pela dinâmica da força de atuação são consideráveis, porém, em relação às outras não linearidades que foram desconsideradas no modelo, ou ainda, em relação à Equação de Reynolds, seus efeitos são bem menores, visto que, para as duas condições de carregamento, as não linearidades desconsideradas pelas hipóteses simplificadoras e o MDF aplicado na solução da Equação de Reynolds “dominaram” as características das FRFs em ambos os casos. Isto porque, das forças que causam momento nas sapatas, as forças eletromagnéticas do atuador são muito menores que as forças hidrodinâmicas geradas pelo filme de óleo, devido aos ângulos de desalinhamento da linha de ação da força eletromagnética ($\theta = M\hat{N}O$) serem muito pequenos. Porém, a inclusão da dinâmica desta força nas equações aumenta o acoplamento entre as direções principais do rotor, aumentando as não linearidades do sistema.

Nesse sentido, dadas as não linearidade intrínsecas do sistema, torna-se necessária a adoção de controladores que consigam estabilizar o sistema de tal forma que o modelo linearizado seja satisfatório, ou ainda, utilizar controladores que independam do modelo matemático adotado, dado que a Equação de Reynolds é altamente não-linear. Sendo assim, neste trabalho foi possível avaliar e discutir os efeitos da dinâmica da força de excitação exercida pelo atuador eletromagnético das sapatas móveis do sistema rotor-mancal ativo no modelo matemático linear adotado.

Referências Bibliográficas

1. Buttini, T. M. (2011). *Algoritmo de autoidentificação para o controle autônomo de vibrações em sistemas rotativos*. Tese de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos.
2. Harnoy, A. (2003). *Bearing design in machinery*. USA: Marcell Dekker.
3. Hori, Y. (2006). *Hydrodynamic lubrication*. Tokyo: Springer.
4. Nicoletti, R. (2003). *Mancais segmentados com lubrificação ativa – teoria, experimento e aplicação*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
5. Nicoletti, R. (2006). *The proposed concept of active magnetic-pad journal bearing*. In *Proc. 5th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications*, Guaratinguetá, Brasil, pp. 1-4.
6. Russo, F. H. (1999). *Identificação das propriedades dinâmicas de mancais segmentados híbridos – teoria e experimento*. Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
7. Scalabrin, A. (1999). *Utilização de mancais segmentados com injeção eletrônica para controle de rotores – teoria e experimento*. Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
8. Schweitzer, G., Maslen, E. H. (2009). *Magnetic bearings: theory, design and application to rotating machinery*. Springer-Verlag, Heidelberg.
9. Souza, M. G. (2008). *Identificação e caracterização de não-linearidades em dinâmica estrutural*. Tese de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos.

10. Watanabe, F. Y. (2003). *Lubrificação ativa aplicada a mancais híbridos radiais*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
11. Worden, K.; Tomlinson, G. R. (2001). *Nonlinearity in structural dynamics detection, identification and modelling*. IOP Publishing Ltd.