

RENAN RODRIGUES DUARTE

**Análise do modelo Black e Scholes, ajustado para assimetria e curtose, para
precificação de opções no mercado brasileiro**

Monografia apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para a obtenção do
certificado de conclusão do curso MBA em
Engenharia Financeira.

Área de Concentração:
Engenharia Financeira

Orientador:
Professor Dr. João Luiz Chela

São Paulo

2017

AGRADECIMENTOS

Gostaria de ressaltar todas experiências e conhecimento obtido no decorrer deste MBA. Definitivamente, este foi um grande desafio e de grande importância para minha formação. Agradeço aos professores e colegas de curso pelos momentos compartilhados. Agradeço também aos meus colegas de trabalho e, por último, a minha esposa e família por todo suporte e apoio transmitido. Sem eles não teria chegado a esse resultado.

RESUMO

O trabalho realiza uma breve análise e comparação entre os modelos propostos por Black-Scholes e Merton (1973) e Corrado-Su (1997) para precificação de opções. O estudo envolveu análise das cotações e negociações por instrumentos financeiros referentes à empresa Petróleo Brasileiro S.A. (Petrobras), ocorridas na bolsa de valores do Brasil (B3) durante o período de Agosto a Novembro de 2017.

Palavras-chave: Engenharia financeira. Opções Financeiras. Modelo Black-Scholes. Comparação de Volatilidades.

ABSTRACT

This work performs a brief analysis and comparison between the models proposed by Black-Scholes and Merton (1973) and Corrado-Su (1997) for options pricing. This study involved the analysis of quotes and negotiations for financial instruments related to Petróleo Brasileiro S.A. (Petrobras), held on the Brazilian stock exchange (B3) during the period from August to November 2017.

Keywords: Financial engineering. Financial Options. Black-Scholes Model. Volatility Comparison.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2-1 – Comparaçao de diferentes distribuições quanto à assimetria.....	17
Figura 2-2 – Comparaçao de diferentes distribuições quanto à curtose.....	18
Figura 3-1 – Quantidade de opções analisadas com vencimento em novembro/2017.....	27
Figura 3-2 – Quantidade de opções analisadas com vencimento em Janeiro/2018.....	27
Figura 3-3 – Distribuição de retornos de PETR4 comparada com uma distribuição Normal.....	28
Figura 3-4 – Volatilidade implícita das opções de compra de PETR4 para o dia 14-11-2017 e vencimento em janeiro 2018 traçada contra moneyness.....	30
Figura 3-5 – Volatilidade implícita das opções de compra de PETR4 para o dia 14-11-2017 e vencimento em janeiro 2018 traçada contra preços de exercício.....	30
Figura 3-6 – Gráfico que descreve a metodologia e iterações do método Newton-Raphson.....	32
Figura 3-7 – Gráfico mostra um caso em que o método pode não convergir para a raiz, com pontos em que a derivada $f'x$ é próxima de zero.....	33
Figura 3-8 – Gráfico que descreve a metodologia e iterações do método da bisseção.....	33
Figura 3-9 – Desvio de preços absoluto em relação ao Mid-Price ao considerar o modelo com volatilidade única para 25/09/17 e vencimento Novembro/2017	36
Figura 3-10 – Fluxograma de um algoritmo genético	37
Figura 3-11 – Termos de ajuste Q3 e Q4 versus Moneyness para o modelo de Corrado-Su.....	40
Figura 3-12 – Termos de ajuste Q3 e Q4 versus Moneyness para o modelo de Corrado-Su Modificado.....	41
Figura 3-13 – Valores de volatilidade advindos da estimação de parâmetros para Corrado-Su, Corrado-Su modificado e Volatilidade Única (BSM) ...	44

Figura 3-14 – Valores de Assimetria advindos da estimação de parâmetros para Corrado-Su e Corrado-Su modificado	44
Figura 3-15 – Valores de Curtose advindos da estimação de parâmetros para Corrado-Su e Corrado-Su modificado	45
Figura 3-16 – Gráfico que exemplifica uma distribuição normal com média $\mu = 0.3$ e desvio padrão $\sigma = 2.0$	46
Figura 3-17 – Desvios de preços em relação ao preço médio (<i>Mid_Price</i>) para os modelos de Volatilidade constante, Corrado-Su e Corrado-Su Modificado para o dia 25/09/17 e vencimento em novembro/2017 .	47
Figura 3-18 – Desvios de preços absolutos em relação ao <i>Mid_Price</i> acumulados para os modelos de Volatilidade constante, Corrado-Su e Corrado-Su Modificado	48
Figura 3-19 – Gráfico que mostra o sorriso de volatilidade equivalente para uma volatilidade constante de 35%, assimetria com valor 1.0 e curtose 2.0.	49
Figura 3-20 – Sistema desenvolvido e utilizado para análises e cálculos deste estudo	51
Figura 3-21 – Após download de dados, possibilidade para escolha de um dos dias com dados disponíveis para análise.....	51
Figura 3-22 – Após todos cálculos realizados (Volatilidade implícita extraída e parâmetros dos modelos de Corrado Su e Corrado Su modificado já estimados).....	52

LISTA DE TABELAS

Tabela 3-1 – Volatilidade única encontrada por minimização de erro quadrático	35
Tabela 3-2 – Demais parâmetros de precificação para comparação e Q3 e Q4	40
Tabela 3-3 – Comparativo percentual entre termos de ajuste propostos por Corrado-Su e pelo modelo modificado	41
Tabela 3-4 – Valores obtidos ao calibrar os modelos BSM e Corrado-Su para as amostras objeto de estudo	43
Tabela 3-5 – Restrições utilizadas para execução do método numérico.	46

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
1.1 Objetivo.....	11
1.2 Mercado e Aplicações.....	12
2 MODELAGEM E BASE TEÓRICA	13
2.1 O Modelo de Black, Scholes e Merton.....	13
2.2 Limitações do Modelo	14
2.3 Modelos ajustados por Assimetria e Curtose.....	16
2.3.1 Momentos de uma distribuição.....	16
2.3.2 Modelo de Assimetria e Curtose de Jarrow e Rudd.....	18
2.3.3 Modelo de Assimetria e Curtose de Corrado e Su.....	20
2.3.3.1 Expansão de Gram-Charlier	20
2.3.3.2 Preço de Call ajustada para assimetria e curtose	21
2.3.3.3 Super-simetria Put-Call para modelos de Assimetria e Curtose... ..	22
2.3.4 Modelo de Assimetria e Curtose de Corrado e Su modificado.....	22
2.3.5 Volatilidade de BSM equivalente para ajustes de Assimetria e Curtose	23
3 IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS.....	24
3.1 Descrição geral do procedimento	24
3.2 Amostra de dados utilizada.....	24
3.2.1 Distribuição de retornos não Normal.....	27
3.3 Volatilidade Implícita	28
3.3.1 Sorriso de Volatilidade	29
3.3.1.1 Métodos para calcular a volatilidade implícita	31
3.3.2 Volatilidade Implícita de BSM com menor erro quadrático	34
3.3.2.1 Método numérico para cálculo do menor erro quadrático	36
3.4 Análise do modelo de Corrado e Su	39
3.4.1 Fatores adicionado do modelo de BSM.....	39
3.4.2 Valores de Assimetria, Curtose e Volatilidade enquadrados dia a dia ...	42
3.4.2.1 Método numérico para cálculo dos termos a serem calibrados	45
3.4.2.2 Resultados e comparação de modelos.....	47
3.5 Volatilidade equivalente resultante	49
4 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	50
4.1 Linguagem de programação e bibliotecas utilizadas	50
4.2 Funcionalidades do Sistema.....	51
4.3 Melhorias a serem implementadas	52
5 CONCLUSÃO	53
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	54

APÊNDICE A - IMPLEMENTAÇÃO 56

1 INTRODUÇÃO

1.1 Objetivo

A modelagem de aspectos descobertos no mundo real geralmente é iniciada por simplificações dos comportamentos encontrados e, ao ser difundida, passa a ser aperfeiçoada para melhor explicar alguns de seus detalhes.

O modelo de precificação de opções de Black e Scholes¹ é empregado até os dias atuais na precificação de uma grande gama de contratos de opções por uma diversidade de fatores, dentre eles a simplicidade de implementação e extração analítica das chamadas gregas. Além disso, a base teórica e grande parte das hipóteses utilizadas para se chegar à famosa fórmula de Black e Scholes disseminam ampla influência nos modelos atuais. Os resultados encontrados ao apreçar-se opções que se afastam muito do *At-the-money* (*ATM*), no entanto, acabam sendo inconsistentes com os valores praticados pelo mercado – dando origem ao famigerado efeito conhecido por “sorriso de volatilidade”.

Diversas hipóteses originalmente utilizadas por Black-Scholes e Merton, em 1973, foram revistas e ajustadas no decorrer dos anos de forma a abordar problemas encontrados no cotidiano e, posteriormente, nas principais crises que assolararam os mercados globais nas últimas décadas (*Garman-Kohlhagen*, 1983; *Roll-Geske-Whaley*, 1977-1981; *McDonald and Siegel*, 1986).

É neste contexto que se insere o ajuste proposto por Corrado e Su² e a correção do mesmo por Brown e Robinson³. O ajuste relaxa a hipótese de

¹ BLACK, F.; SCHOLES, M. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, 1973.

² CORRADO, C.J.; SU, T. *Implied volatility skews and stock return Skewness and Kurtosis implied by stock option prices*, 1997.

³ BROWN, C. A.; ROBINSON, D. M. *Skewness and Kurtosis implied by options prices: a correction*, 2002.

normalidade dos retornos ao levar em conta os efeitos do terceiro e quarto momentos da distribuição, também conhecidos como assimetria e curtose.

O objetivo desta dissertação é analisar e comparar resultados ao utilizar os modelos de Black-Scholes e Corrado-Su para o mercado de opções brasileiro, utilizando dados reais extraídos das negociações ocorridas na bolsa brasileira de valores B3⁴.

1.2 Mercado e Aplicações

No que se refere ao mercado local brasileiro, poucos são os ativos de referência aos quais há considerável liquidez de opções para diferentes vencimentos e preços de exercício. A tendência, entretanto, é que seja um mercado cada vez mais presente no dia a dia brasileiro, dada à maior difusão da tecnologia, facilidade de acesso à informação e à prática de níveis de taxas de juros menores pelo Banco Central.

O conteúdo aqui abordado é de relevante importância para estes negócios e pode ser empregado tanto para o mercado internacional como para o nacional com relativa precisão, como veremos no desenrolar deste trabalho.

⁴ B3 (Brasil, Bolsa, Balcão): Bolsa de valores oficial do Brasil, sediada em São Paulo.

2 MODELAGEM E BASE TEÓRICA

2.1 O Modelo de Black, Scholes e Merton

O objetivo deste trabalho não é realizar um estudo profundo sobre o modelo de Black-Scholes e Merton, aqui referido simplesmente por modelo BSM. No entanto, faz-se necessário mencionar aspectos e hipóteses relevantes deste modelo e, posteriormente, suas limitações.

As conhecidas fórmulas aqui apresentadas são originadas a partir da hipótese de o ativo obedecer um movimento browniano geométrico. Segundo Hull⁵ esse é o modelo mais amplamente utilizado para descrever comportamento do preço da ação.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

Onde μ representa a taxa instantânea de retorno do ativo objeto, σ a volatilidade instantânea de sua taxa de retorno e dz o processo de Wiener associado ao modelo.

Existem diversas maneiras para se alcançar as fórmulas de precificação de opções de Black e Scholes. Entretanto a maneira pela qual Black e Scholes chegaram a tais resultados e que, consequentemente, provocou grande impacto nos fundamentos de modelagem financeira como conhecemos hoje, baseia-se em dois blocos fundamentais – *delta hedging* e condição de não arbitragem.

Basicamente, considera-se que a opção é função de algumas varáveis, sendo elas o valor do ativo S e tempo t , e parâmetros, dos quais pode-se mencionar: o preço de exercício, também conhecido na língua inglesa por *strike* X ; vencimento T ; taxa de juros r ; μ e σ constantes – o que será de fundamental discussão no decorrer desta dissertação. Considera-se também que é possível neutralizar o risco desta opção via a criação de um portfólio Π em que exista uma dinâmica de delta hedge contínuo, via compra e venda do ativo.

⁵ HULL, J.C. Options, Futures and Other Derivatives, 2002.

$$\Pi = V(S, t) - \Delta S$$

Outra consideração pertinente é que não haja arbitragem entre um portfólio neutro de risco e uma aplicação financeira convencional.

$$d\Pi = r\Pi dt$$

Utilizando-se destas equações, bem como das considerações acerca do movimento browniano geométrico do ativo, é possível encontrar a seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Finalmente, pelo fato de estar-se especificando uma opção europeia, tomam-se as seguintes condições de contorno, no vencimento da opção. Para opção de compra europeia $V(S, T) = \max(S - E, 0)$, já para opção de venda europeia $V(S, T) = \max(E - S, 0)$.

Chega-se ao seguinte conjunto de fórmulas que descrevem o preço de opções do tipo europeia – com c representando o preço da opção de compra (*Call*), enquanto p representa o preço da opção de venda (*Put*).

$$c = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$$

$$p = Xe^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

Onde

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

2.2 Limitações do Modelo

Antes de apontar as limitações do modelo e de suas hipóteses, faz-se necessário enfatizar o sucesso e empregabilidade do modelo para o mercado financeiro. As ideias utilizadas em seu desenvolvimento são extremamente muito difundidas e tornaram-se base de fundamentação teórica para muitos estudiosos

e profissionais do mercado; especialmente aquelas de delta-hedging de um portfólio teórico, bem como a precificação neutra de risco.

Há, entretanto, espaço para aprimoramento, podendo ser consideravelmente relevante para ativos ilíquidos. Dentre as hipóteses que costumam ser revistas em outros modelos estão:

- Hedge contínuo
- Não há custos de transação
- Volatilidade é uma constante conhecida / Os log-retornos do ativo são normais / não há auto correlação de retornos
- Taxa de juros e dividendos são constantes conhecidas
- A trajetória do ativo é contínua
- O ativo não sofre influência da negociação da opção

Dentre estas hipóteses, aquelas que tratam da volatilidade dos retornos são as mais estudadas e ajustadas, dado o fato de a volatilidade ser considerada parâmetro mais importante na precificação de opções e a observação de diferentes volatilidades implícitas para preços de exercício distintos – o efeito conhecido como sorriso de volatilidade.

Alguns exemplos de modelos alternativos que levam em conta a não normalidade da distribuição de retornos são: Modelos de elasticidade constante da variância – Cox (1985), Cox e Ross (1976); Modelos de salto-difusão – Merton (1976), Bates (1976); Modelos de volatilidade estocástica como Hull-White (1987 e 1988) e modelo SABR (2001); modelos que levam em conta o excesso de assimetria e curtose da distribuição – Jarrow e Rudd (1982) e Corrado e Su (1997).

Neste trabalho focaremos em modelos que ajustam o modelo BSM para excesso de assimetria e curtose, mais especificamente um estudo comparativo entre BSM e a metodologia desenvolvida por Corrado e Su, aplicado aqui para o mercado brasileiro de opções sobre ações.

2.3 Modelos ajustados por Assimetria e Curtose

Como mencionado anteriormente, o foco deste trabalho dá-se quanto à análise de modelos que desconsideram a hipótese log-normalidade de preços. Sobretudo quanto aos modelos que levam em conta o terceiro e quarto momentos da distribuição de preços ou retornos – dependendo do caso, como será visto nos próximos tópicos. Para tanto, faz-se necessário definição dos momentos a serem utilizados.

2.3.1 Momentos de uma distribuição

Definem-se como momentos da distribuição os seguintes termos:

1. Média: Trata-se da média estatística amplamente utilizada no dia a dia

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

2. Variância: Trata-se da medida estatística de dispersão da amostra em relação à média e largamente utilizada em finanças.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}$$

3. Assimetria: Mede a assimetria da distribuição em relação à média, sendo que a distribuição Normal tem assimetria igual a zero. Enquanto valores negativos indicam mediana superior à média (e inferiores à moda), valores positivos apresentam comportamento oposto ao descrito anteriormente. Estes tipos de distribuição são ilustrados na Figura 2-1.

$$S = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^3}{N\sigma^3}$$

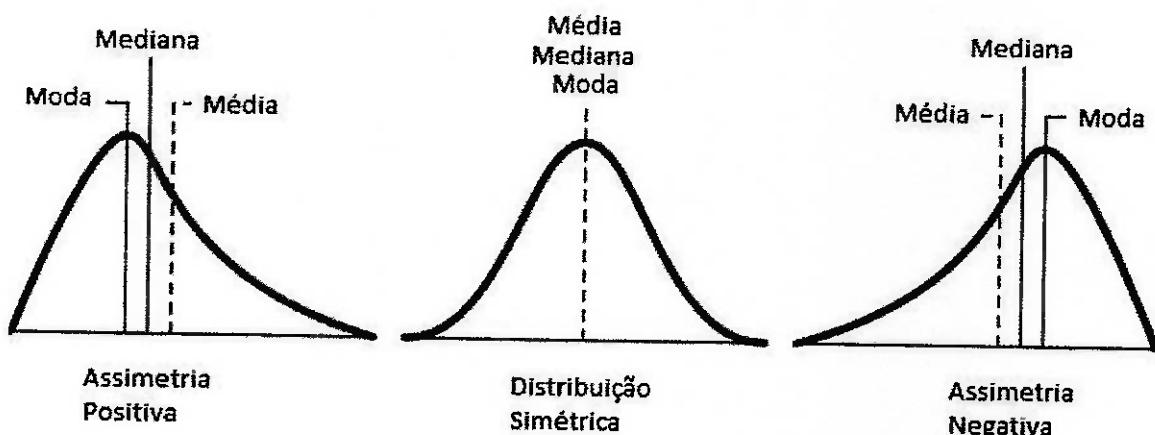


Figura 2-1. Comparação de diferentes distribuições quanto à assimetria.

4. Curtose: É uma medida estatística para determinar o achatamento / relativo “apontamento” da distribuição. Por Curtose, pode-se referir a Curtose de Fisher ou Curtose de Pearson, onde a Curtose de Fisher é dada pela simples subtração de 3 do valor encontrado para Curtose de Pearson.

A distribuição Normal tem $K_p = 3$ e é chamada de mesocúrtica. Enquanto isso, distribuições com $K_p > 3$ são chamadas de leptocúrticas, indicando a presença de picos e caudas mais pronunciados que a distribuição Normal. Já as distribuições com $K_p < 3$ são chamadas de platicúrticas, sendo distribuições de forma mais achatada que a distribuição Normal.

As distribuições leptocúrticas, também referidas pelo excesso de curtose, são de grande relevância nos estudos relativos ao mercado financeiro, pois geralmente subestima-se o risco de ocorrência de eventos extremos ao utilizar-se a distribuição Normal.

$$K_p = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^4}{N\sigma^4}$$

$$K_f = K_p - 3$$

Onde N é o número de amostras na distribuição analisada, K_f é a Curtose de Fisher e K_p é a Curtose de Pearson. A Figura 2-2 ilustra os diferentes tipos de distribuição e suas respectivas classificações quanto à curtose.

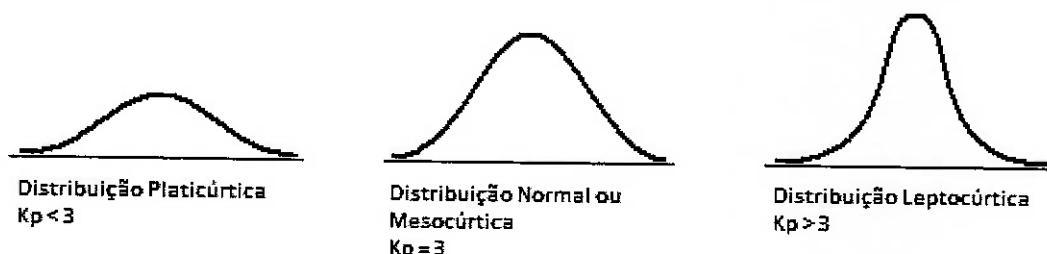


Figura 2-2. Comparação de diferentes distribuições quanto à curtose.

2.3.2 Modelo de Assimetria e Curtose de Jarrow e Rudd

O modelo de Jarrow e Rudd (1982) ajusta o modelo BSM para assimetria e curtose diferentes daquelas encontradas na distribuição log-normal. O modelo é utilizado, portanto, no ajuste de assimetria e curtose do preço do ativo.

Esses parâmetros variam de acordo com a volatilidade e horizonte de tempo para distribuições log-normais e são calculados pelas seguintes expressões.

$$S = 3y + y^3$$

$$K_f = 16y^2 + 15y^4 + 6y^6 + y^8$$

Sendo $y = \sqrt{e^{\sigma^2 T} - 1}$, σ é a volatilidade anualizada e T o horizonte de tempo da análise, tipicamente o vencimento do contrato de opção. Destas equações é possível inferir facilmente que todas as distribuições log-normais possuem assimetria positiva, ou seja, são distribuições em que a assimetria desloca a distribuição para a direita.

Em posse disto, Jarrow e Rudd propuseram um modelo em que são utilizadas a assimetria e curtose da distribuição log-normal e os valores para os

quais se deseja aproximar para compor termos a serem adicionados à formula de Black e Scholes para uma opção de compra europeia.

$$c \approx c_{BSM} + \lambda_1 Q_3 + \lambda_2 Q_4$$

Onde c_{BSM} é o preço de uma opção de compra europeia calculada pela fórmula de Black e Scholes e os demais termos são dados por:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$Q_3 = -(Se^{-rT})^3(e^{\sigma^2 T})^{\frac{3}{2}} \frac{e^{-rT}}{6} \frac{da(X)}{dS}$$

$$Q_4 = (Se^{-rT})^4(e^{\sigma^2 T})^2 \frac{e^{-rT}}{24} \frac{d^2 a(X)}{dS^2}$$

$$\lambda_1 = \gamma_1(F) - \gamma_1(A)$$

$$\lambda_2 = \gamma_2(F) - \gamma_2(A)$$

Onde $\gamma_1(F)$ e $\gamma_2(F)$ representam a assimetria e curtose da distribuição a ser aproximada e $\gamma_1(A)$ e $\gamma_2(A)$ seus respectivos pares para a distribuição log-normal, ou seja, λ_1 e λ_2 podem ser lidos como o excesso de assimetria e curtose a serem ajustados. No mais, $a(X)$ e suas derivadas em relação a S são apresentadas a seguir.

$$a(X) = \frac{1}{X\sigma\sqrt{T}2\pi} e^{-d_2^2/2}$$

$$\frac{da(X)}{dS} = \frac{a(X)(d_2 - \sigma\sqrt{T})}{X\sigma\sqrt{T}}$$

$$\frac{d^2 a(X)}{dS^2} = \frac{a(X)}{X^2\sigma^2 T} [(d_2 - \sigma\sqrt{T})^2 - \sigma\sqrt{T}(d_2 - \sigma\sqrt{T}) - 1]$$

Os valores para opção de venda europeia podem ser encontrados via paridade entre opções de compra e venda ou via método de super-simetria, conforme discriminado no capítulo 2.3.3.3.

2.3.3 Modelo de Assimetria e Curtose de Corrado e Su

Em 1997, Corrado e Su publicaram seu modelo estendendo as considerações de BSM quanto à distribuição de retornos do ativo e ajustá-lo para terceiro e quarto momentos não normais. Para tanto, ainda que partindo de uma ideia similar àquela utilizada por Jarrow e Rudd, lançaram mão de um ajuste de assimetria e curtose para a distribuição de retorno de preços – ao invés da distribuição de preços. Esta sutil mudança tem a vantagem de utilizar-se do fato de os parâmetros serem independentes do fator tempo quando analisados retornos, o que não é verdade para uma análise de preços.

Utiliza-se de um artifício matemático para inclusão desses momentos à distribuição de retornos e, posteriormente, impactar a fórmula de BSM. A ideia parte de se reescrever a função densidade de probabilidade normal, leia-se $n(x)$, em forma de uma expansão em série de Gram-Charlier e modificá-la para introduzir tais termos.

2.3.3.1 Expansão de Gram-Charlier

Uma expansão em série de Gram-Charlier de uma função densidade de probabilidade $f(x)$ é definida como um somatório infinito de funções densidade de probabilidade normais $\varphi(x)$ ponderadas por polinômios Hermite de grau n – representados por H_n – juntamente com coeficientes determinados pelos n momentos da distribuição $F(x)$ a ser aproximada – c_n .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x) \varphi(x)$$

Ao levar em consideração apenas os termos suficientes para realizar uma aproximação sem perda de generalidade financeira, pode-se modificar a função densidade de probabilidade normal, $n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$, para levar em consideração

assimetria e curtose de uma distribuição não normal. Chega-se à densidade de Gram-Charlier.

$$n'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \left(1 + \frac{\mu_3}{6} (x^3 - 3x) + \frac{\mu_4 - 3}{24} (x^4 - 6x^2 + 3) \right)$$

Onde μ_3 e μ_4 representam a assimetria e a curtose de Pearson da distribuição a ser a aproximada

2.3.3.2 Preço de Call ajustada para assimetria e curtose

Partindo-se da expansão de Gram-Charlier de forma a adicionar os efeitos do terceiro e quarto momentos à distribuição normal, é possível chegar a uma expressão para cálculo do preço da opção de compra europeia ajustado por assimetria e curtose da série de retornos. Para tanto, faz-se necessário truncar os termos de grau superior a 5.

$$c \approx c_{BSM} + \mu_3 Q_3 + (\mu_4 - 3) Q_4$$

Onde μ_3 e μ_4 representam a assimetria e a curtose de Pearson, respectivamente, $N(x)$ é a função distribuição de probabilidade acumulada, $n(x)$ a função densidade de probabilidade e

$$Q_3 = \frac{1}{6} S \sigma \sqrt{T} [(2\sigma\sqrt{T} - d_1)n(d_1) + \sigma^2 T N(d_1)]$$

$$Q_4 = \frac{1}{24} S \sigma \sqrt{T} [(d_1^2 - 1 - 3\sigma\sqrt{T}d_2)n(d_1) + \sigma^3 T^{\frac{3}{2}} N(d_1)]$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Na seção 3.4.1 é realizado um estudo de sensibilidade quanto ao impacto financeiro dos parâmetros adicionados à formula de BSM.

2.3.3.3 Super-simetria Put-Call para modelos de Assimetria e Curtose

Para se encontrar o preço da opção de venda a partir da opção de compra e vice e versa, é possível empregar a paridade *put-call* ou aproveitar a simetria encontrada no comportamento destes ativos. O efeito pode ser verificado não apenas para a fórmula de BSM, mas também para expansões de Gram-Charlier da fórmula de BSM – dentre muitas outras implementações discretas.

$$c(S, X, T, r, b, \sigma, \mu_3, \mu_4) = -p(S, X, T, r, b, -\sigma, -\mu_3, \mu_4)$$

$$p(S, X, T, r, b, \sigma, \mu_3, \mu_4) = -c(S, X, T, r, b, -\sigma, -\mu_3, \mu_4)$$

2.3.4 Modelo de Assimetria e Curtose de Corrado e Su modificado

Em 2002, Brown e Robinson propuseram uma correção ao modelo de Corrado e Su, assim como Jurczenko, Maillet e Negrea, em 2004, mostraram que a fórmula de Corrado-Su originalmente não satisfaz uma das restrições dos martingales e, portanto, o modelo proporciona oportunidades de arbitragem. Portanto, a modificação do modelo para contemplar tais correções é dada a seguir.

$$c \approx c_{BSM} + \mu_3 Q_3 + (\mu_4 - 3) Q_4$$

Onde μ_3 e μ_4 representam assimetria e curtose de Pearson, respectivamente, e:

$$Q_3 = \frac{1}{6(1+w)} S\sigma\sqrt{T}(2\sigma\sqrt{T} - d)n(d)$$

$$Q_4 = \frac{1}{24(1+w)} S\sigma\sqrt{T}(d^2 - 3d\sigma\sqrt{T} + 3\sigma^2T - 1)n(d)$$

$$d = \frac{\ln(S/X) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T - \ln(1+w)}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$w = \frac{\mu_3}{6} \sigma^3 T^{3/2} + \frac{\mu_4}{24} \sigma^4 T^2$$

De forma análoga à solução dada anteriormente, o preço da opção de venda pode ser encontrado via paridade *put-call* ou pela condição de supersimetria apresentada na seção 2.3.3.3.

2.3.5 Volatilidade de BSM equivalente para ajustes de Assimetria e Curtose

É possível imaginar o problema inverso ao que foi discutido nas seções anteriores. Ao invés de modificar a fórmula de BSM modifica-se a volatilidade empregada na especificação das opções de forma a adicionar o ajuste de assimetria e curtose. Esse ajuste é dado pela seguinte fórmula.

$$\hat{\sigma} \approx \sigma \left[1 - \frac{\mu_3 d_1}{6} - \frac{\mu_4 - 3}{24} (1 - d_1^2) \right]$$

Este tipo de ajuste seria uma solução muito elegante ao problema proposto, já que não haveria necessidade de modificar uma fórmula extremamente difundida. Infelizmente, esta última aproximação tende a produzir resultados consistentes apenas para opções no dinheiro (*at-the-money*)⁶ ou próximas a esta região, perdendo considerável precisão para opções fora do dinheiro (*out-of-the-money*).⁷

⁶ At-the-money (ATM): Opção no dinheiro. Ocorre quando preço de exercício (*strike*) se encontra com igual valor ao preço do ativo-objeto.

⁷ Out-of-the-money: Opção fora do dinheiro. Ocorre quando, dado certo preço do ativo-objeto, o ato de exercer a opção não compensaria a execução da opção.

3 IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS

3.1 Descrição geral do procedimento

Conforme discutido no capítulo 2, o modelo BSM prevê a utilização da volatilidade como um parâmetro constante no modelo, independentemente de outros parâmetros ou variáveis – como o preço de exercício, por exemplo. O objetivo deste trabalho é realizar um estudo comparativo entre o modelo BSM e o modelo de Corrado-Su, ou BSM ajustado para levar em conta a assimetria e curtose da distribuição de retornos do ativo.

Para tanto, após obtidos os dados descritos na seção 3.2, é extraída uma volatilidade implícita única por dia e vencimento de opção – de acordo com as premissas do modelo BSM. Além disso, é utilizado o modelo de Corrado-Su, bem como sua correção, para modelar volatilidade, assimetria e curtose para determinado dia. Os resultados da precificação ao utilizar-se destes modelos são comparados em termos de exatidão quanto aos dados de mercado obtidos.

Nos próximos tópicos discorre-se acerca dos métodos e principais pontos a serem levados em conta no estudo em questão.

3.2 Amostra de dados utilizada

O mercado de opções sobre ações brasileiro, com negociação na BM&F Bovespa (B3), é relativamente pequeno quando comparado a mercados desenvolvidos. A negociação pode ocorrer via plataforma eletrônica ou balcão, sendo que é possível observar liquidez para um conjunto pequeno de ativos subjacentes e relativa concentração para vencimentos curtos. Fatos que dificultam a análise de dados para este estudo, pois os impactos da volatilidade sobre a precificação de opções diminuem ao aproximar-se do vencimento da

opção e, portanto, os erros percebidos e futuras correções são menos eficazes do que o observado em estudos em mercados desenvolvidos.

Para realização deste estudo, tomou-se por base o provedor de informações de mercado *Thomson Reuters*. Foi escolhido o ativo subjacente Petróleo Brasileiro SA, com código PETR4, e suas respectivas opções de compra. O período de coleta de preços da ação PETR4 foi de 01/agosto/2017 a 20/novembro/2017. Foram escolhidas as opções de compra de PETR4 com vencimentos em 21/novembro/2017 e 15/janeiro/2018, também durante os períodos de 01/agosto/2017 e 20/novembro/2017, respectivamente – descartado preços de opções com prazo para vencimento inferior a um mês da data observada.

Foram criados intervalos (barras de negociação) com duração de 5 minutos durante o dia de negociação e para todos os intervalos em questão foram definidos "*Last Bid*"⁸ e "*Last Ask*"⁹ - para todos os dias a serem analisados. Em cada um desses intervalos, foi observado também o último preço negociado da ação PETR4 para o mesmo horário correspondente, o que possibilita a extração de parâmetros como a volatilidade implícita sem contaminar a amostra com relevantes diferenças de Δ - ou utilização de diferentes preços de referência para realização destes cálculos.

A ação escolhida é uma das mais negociadas da bolsa e, portanto, poucos foram os casos que não haviam valores de *spot* negociados para a barra de negociação correspondente. Nos raros casos em que isso ocorreu, foi utilizado o último preço de negociação (*Last_Price*) do horário anterior mais próximo ao horário observado. Outro importante ajuste realizado foi o cálculo da banda de compra e venda média (*bid-ask spread* médio) poia a partir deste valor foi possível calcular o valor de compra ou de venda quando ambos não foram encontrados simultaneamente, excluindo-se valores negativos resultantes desta metodologia empregada.

⁸ *Last Bid* – Último preço de oferta, mostrado por compradores.

⁹ *Last Ask* – Último preço de demanda, mostrado por vendedores.

$$spread = \frac{\sum_{i=1}^n (ask_i - bid_i)}{n}$$

$$bid\ sintético = ask - \frac{spread}{2}, \ ask\ sintético = bid + \frac{spread}{2}$$

No mais, foram excluídas todas as observações ocorridas antes das 10:00 e posteriores às 17:55, principalmente devido à publicação de preços indicativos de abertura e por efeitos de decaimento de tempo (*theta*) incluídos na volatilidade nos últimos negócios do dia. Em adição, são eliminados os preços para os quais a volatilidade implícita não pode ser calculada ou valores superiores a 100%, como será discutido na seção 3.3. Para que não se perdesse a relevância estatística do estudo, também foram excluídos os dias com menos de 400 observações para o mesmo vencimento.

Os estudos aqui apresentados referem-se a diferentes preços de exercícios e, para facilitá-los, define-se uma medida de posição relativa a seguir. Utiliza-se a taxa de desconto r e o tempo até o vencimento T para se calcular a posição relativa do Spot S , ou preço à vista da ação, em relação ao preço de exercício X descontado.

$$Moneyness = \ln(S/(Xe^{-rT}))$$

As Figura 3-1 e 3-2 mostram o número de amostras em cada dia do estudo, assim como os valores mínimos e máximos de *moneyness* observadas para o dia.

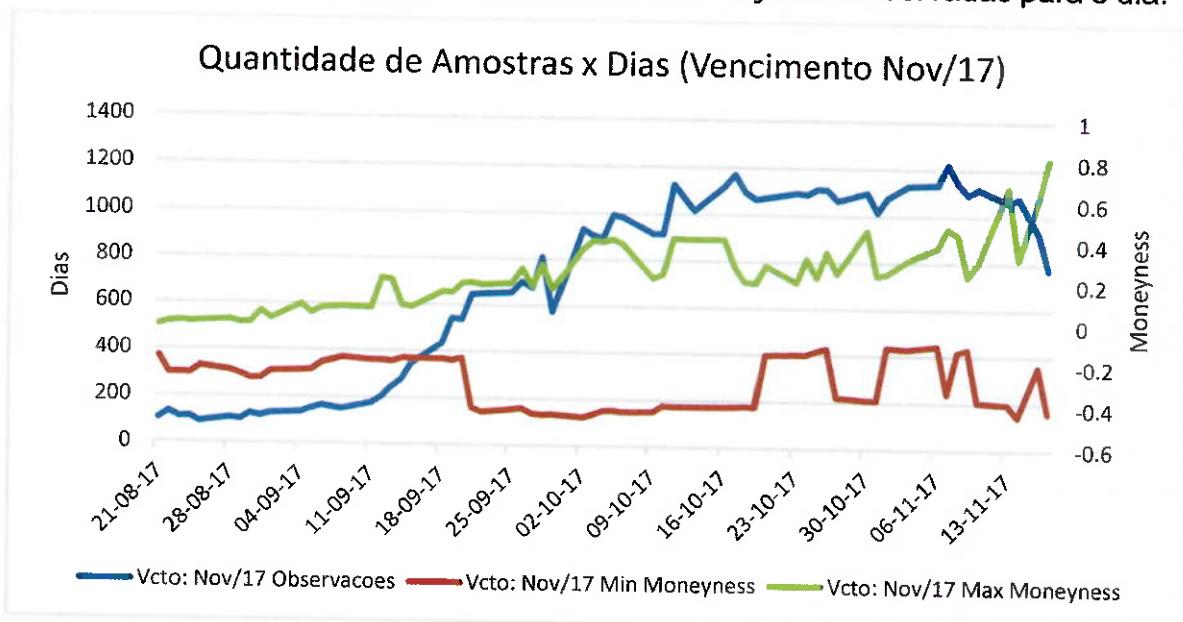


Figura 3-1. Quantidade de opções analisadas com vencimento em novembro/2017.

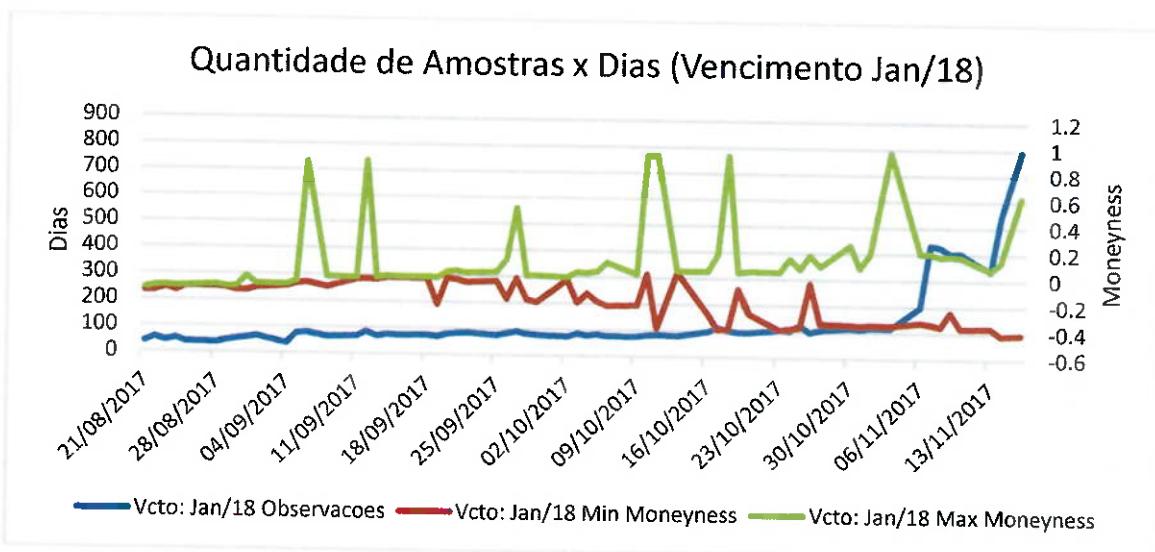


Figura 3-2. Quantidade de opções analisadas com vencimento em Janeiro/2018.

3.2.1 Distribuição de retornos não Normal

O modelo construído por Black e Scholes lança mão da volatilidade como um parâmetro constante, conforme descrito no capítulo 2, sendo a distribuição de retornos normalmente distribuída. A implicação direta desta afirmação é que a assimetria da distribuição é igual a zero e sua curtose de Pearson igual a 3.

Antes de prosseguir com o estudo, é necessário realizar um teste empírico para que esta hipótese seja contestada apropriadamente. A Figura 3-3 apresenta o histograma da série de retornos de PETR4 quando comparada à uma distribuição normal de mesma média e variância. O gráfico foi aproximado e apresenta maior peso nas caudas, bem como um pico central bem mais acentuado – o detalhe foi omitido para melhor visualização gráfico, mas apresenta 2388 observações na parte central do gráfico. Este comportamento é

característica de distribuições leptocúrticas e, portanto, tal resultado empírico está de acordo com as hipóteses iniciais deste trabalho.

Distribuição de Retornos PETR4 x Distribuição Normal - Gráfico aproximado

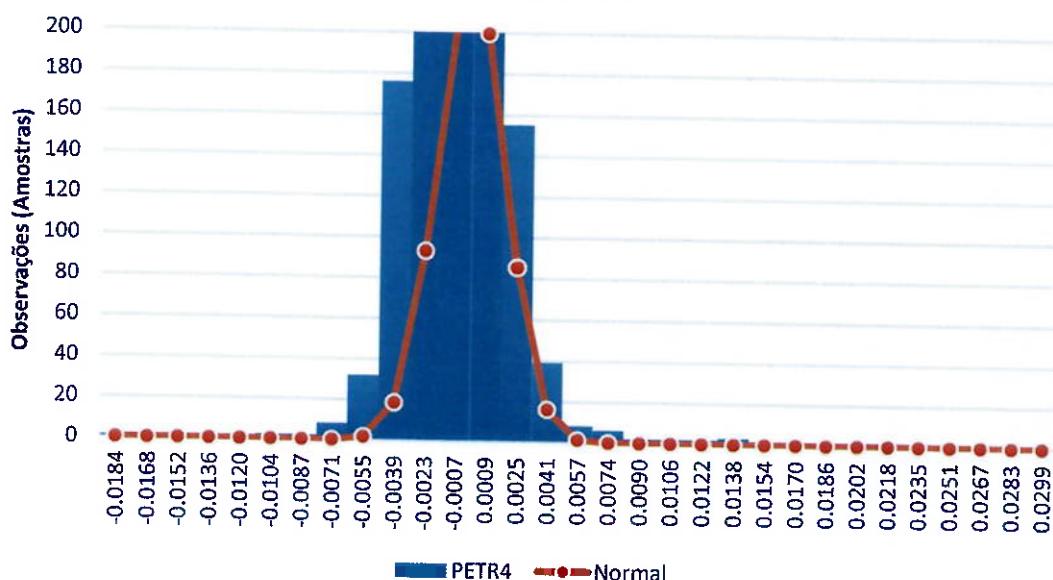


Figura 3-3. Distribuição de retornos de PETR4 comparada com uma distribuição Normal.

3.3 Volatilidade Implícita

O cálculo dos parâmetros utilizados na precificação de opções é um assunto de grande importância para o mercado financeiro, sobretudo quanto à definição da volatilidade a ser utilizada no modelo de Black e Scholes. Dentre os diversos tipos de soluções para o problema, este trabalho analisará os efeitos de manter a volatilidade como um parâmetro constante (como modelado inicialmente no modelo BSM) e um ajuste no modelo para incluir a assimetria e curtose da distribuição.

Ainda assim, é importante observar o efeito chamado sorriso de volatilidade e a possibilidade de extrair volatilidades implícitas equivalentes para os preços ajustados que forem encontrados na seção 3.5

A maneira de se calcular a volatilidade implícita dado o preço de uma opção observado no mercado, em adição às demais variáveis e parâmetros, não tem solução analítica. Consequentemente, deve-se resolver a seguinte equação numericamente, o método utilizado para resolver este problema é discutido na seção 3.3.2.

$$C_{obs} - C(S, X, r, T, \sigma_{imp}) = 0$$

É necessário comentar que existem casos em que valores de mercado *injustos* ou errados acabam por gerar valores de volatilidade muito altos ou é possível obter casos em que a equação não tenha solução – um exemplo ocorre quando o valor da opção de compra é inferior ao valor intrínseco da opção. Neste estudo são eliminados os preços para os quais a volatilidade implícita não pode ser calculada ou valores muito superiores aos demais.

3.3.1 Sorriso de Volatilidade

Faz-se necessário comentar que a hipótese de volatilidade constante para cada vencimento de opção é comumente refutada no mercado financeiro. Além disso, ao extrair a volatilidade implícita para cada opção é comum observar o efeito chamado sorriso de volatilidade; as volatilidades implícitas apresentam assimetria de forma que as opções *out-of-the-money* e *in-the-money* mostram volatilidades superiores ou inferiores dependendo do tipo da distribuição.

Este comportamento também é observado nas amostras obtidas para a confecção deste estudo. As Figura 3-4 e 3-5 retratam exatamente o que foi descrito nesta seção, as opções com *moneyness* mais positivas são aquelas com valores mais pronunciados – o comportamento se repete ao plotarem-se as volatilidades por *strike* ou *moneyness*. A título de ilustração, os gráficos também

apresentam algumas disparidades mencionadas na seção 3.3 e que deveriam ser eliminadas do estudo.

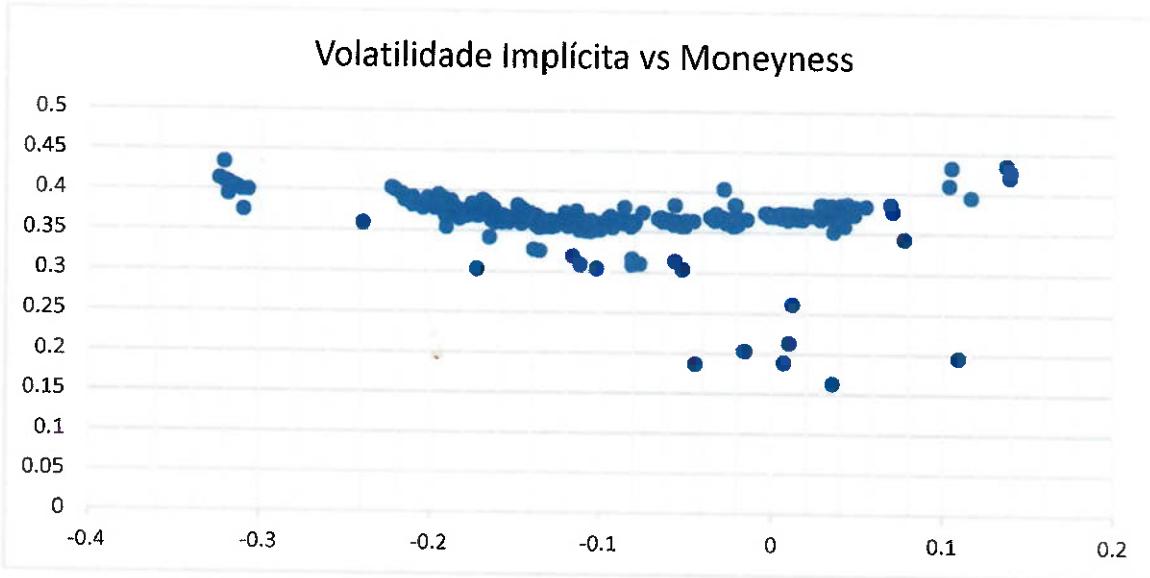


Figura 3-4 Volatilidade implícita das opções de compra de PETR4 para o dia 14-11-2017 e vencimento em janeiro 2018 traçada contra *moneyness*.

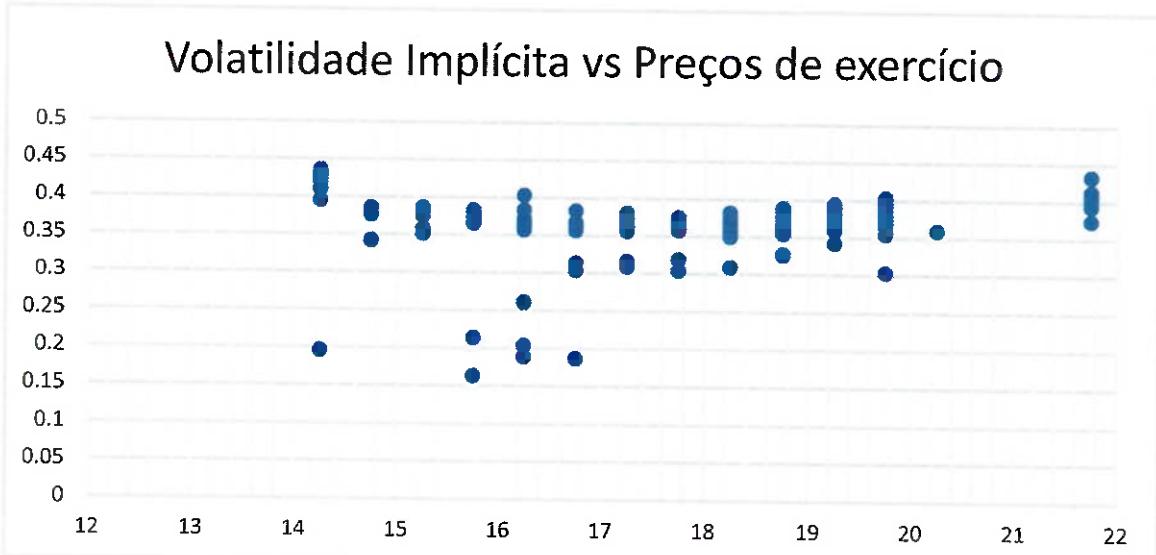


Figura 3-5 Volatilidade implícita das opções de compra de PETR4 para o dia 14-11-2017 e vencimento em janeiro 2018 traçada contra preços de exercício.

Uma das formas de se contornar o problema de precificação mencionado seria a abordagem via ajuste de assimetria e curtose, assunto abordado na seção 3.4.

3.3.1.1 Métodos para calcular a volatilidade implícita

Quando ocorre a necessidade de encontrar a raiz de uma função $f(x)$ em um intervalo definido, temos à disposição métodos incrementais que, com passos (*steps*) bem pequenos, nos permitiriam iterar sobre os valores da função e assim, por consequência, buscar empiricamente o resultado desejado. Alguns métodos foram construídos para facilitar essa tarefa, diminuindo assim a quantidade total de iterações necessárias. Dois métodos bem difundidos, e facilmente implantáveis, serão alvo deste estudo: são os métodos conhecidos como Newton-Raphson (desenvolvido por Isaac Newton e Joseph Raphson) e o método da bisseção.

O método de Newton-Raphson estima as raízes de uma função a partir de um ponto aleatório (*guess*) inicial. Com esse ponto calculamos a derivada da função e a interseção dela com o eixo das abcissas. Através de um método iterativo, repetimos o processo até encontrarmos a raiz da função. Demonstrado graficamente na Figura 3-6, podemos descrevê-lo com a seguinte equação:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \in \mathbb{N}$$

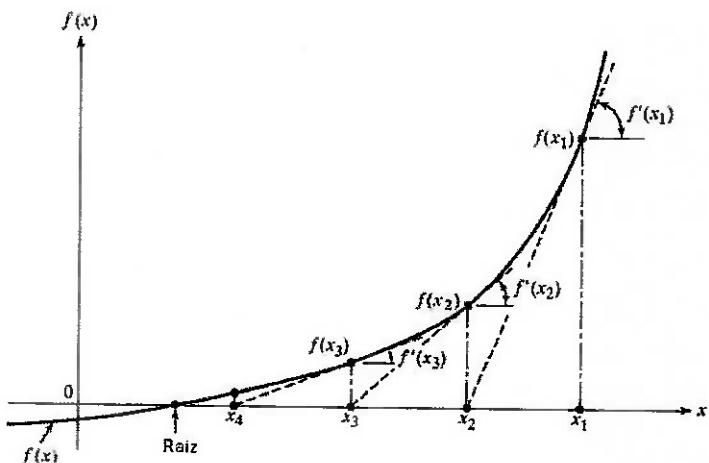


Figura 3-6 Gráfico que descreve a metodologia e iterações do método Newton-Raphson.

Uma das desvantagens conhecidas da utilização do método de Newton-Raphson se dá pela não garantia de convergência do procedimento em encontrar uma raiz. Como exemplo, podemos iniciar o algoritmo em um ponto suficientemente longe da raiz. Uma pequena inclinação pode guiar então o método para pontos cada vez mais longes da raiz que desejamos encontrar. Outro problema comumente encontrado se dá quando a função possui mínimos locais. Por consequência, o algoritmo oscilará nesses pontos, também não convergindo para a raiz desejada.

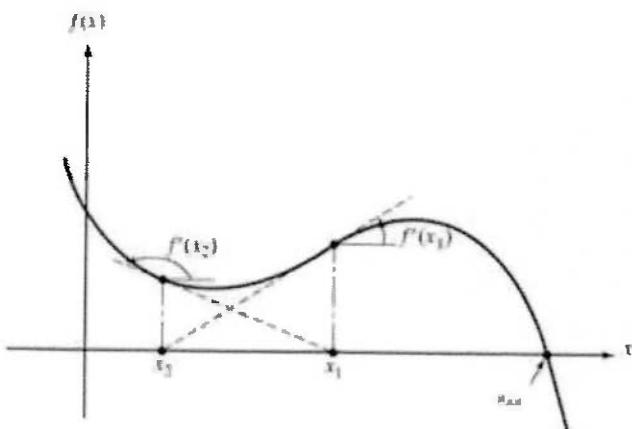


Figura 3-7 Gráfico mostra um caso em que o método pode não convergir para a raiz, com pontos em que a derivada $f'(x)$ é próxima de zero.

Além de Newton-Raphson temos também o método da bisseção que procura dividir a função em menores intervalos, sucessivamente, analisando majoritariamente o sinal de cada um dos pontos selecionados. Caso os sinais entre os pontos escolhidos sejam diferentes entre si, novos intervalos são então criados até que seja possível determinar o ponto exato em que aconteça a inversão de sinal.

O processo consiste em escolher a e b , com sinais diferentes, e definir o ponto $c = \frac{a+b}{2}$. Verificando o sinal dos três pontos será possível descartar um dos intervalos e, sucessivamente, definir novos pontos até que seja possível identificar a raiz da equação. Uma vez que o método descarta 50% de cada intervalo, em cada passo executado, ele converge para a raiz de forma muito mais rápida comparado com um modelo incremental.

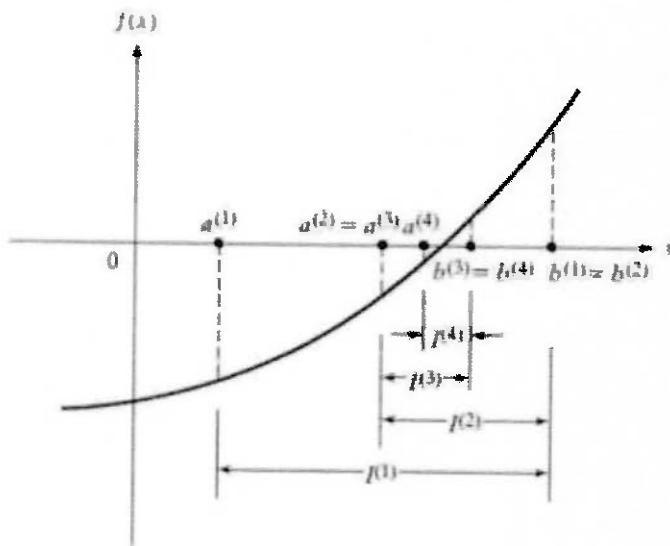


Figura 3-8 Gráfico que descreve a metodologia e iterações do método da bisseção.

Para o cálculo da volatilidade implícita precisaríamos testar, iteradamente, valores diferentes de volatilidade, até que o valor da opção calculada pela fórmula de BSM esteja próximo do valor da opção de compra (*Call*) observado. Por exemplo, sabemos que certa opção de compra é negociada por determinado valor. Conhecemos o preço de exercício (*Strike*), conseguimos obter o valor do ativo à vista (*Spot*) correspondente, sabemos qual é o vencimento da opção, bem como a taxa pré da data observada para este vencimento. Com todos estes dados em mãos poderíamos definir um valor incremental bem pequeno e então testar diferentes valores de volatilidade até que fosse possível minimizar a diferença entre o valor da opção negociada e o valor calculado. Com o uso de métodos computacionais poderíamos tentar minimizar a diferença entre as duas opções. O valor zero, portanto, desta diferença, seria a solução de nossa equação.

O método de Newton-Raphson (NR) é indiscutivelmente rápido e, uma vez que seja conhecido uma boa aproximação de chute inicial para ser utilizado no início das iterações, a probabilidade de sucesso em encontrar o valor esperado é alta. A vantagem do método da bisseção em relação a NR é que não precisamos conhecer e nem estimar numericamente a derivada da função para utilização da metodologia. Apesar da não tão performática iteração perante NR, porém com uma adequada convergência empírica observada, optamos neste estudo pelo método da bisseção para cálculo da volatilidade implícita de forma a validar os resultados obtidos frente à utilização de algoritmos genéticos, metodologia detalhada a seguir.

3.3.2 Volatilidade Implícita de BSM com menor erro quadrático

De forma a obter o parâmetro de volatilidade implícita única e traçar comparativos entre os modelos comentados até então, faz-se necessário realizar ajuste de função de primeira ordem. Por conseguinte, é encontrado um estimador de volatilidade implícita tal que ocorra minimização do erro quadrático em relação

aos dados observados no mercado – o que significa um menor espalhamento em relação a tais valores.

$$\min_{\sigma_{imp}} \sum_{i=1}^N [C_{OBS,i} - C_{BS,i}(\sigma_{imp})]^2$$

Onde minimiza-se a expressão dada ao variar σ_{imp} utilizada para se calcular a fórmula de BSM para o preço da opção de compra e subtrair tal valor da opção de compra observada no mercado, mantendo os demais valores/parâmetros de precificação constantes para cada par de opções.

O processo numérico utilizado neste trabalho é tratado com mais detalhes na próxima seção.

Amostras				
Data Amostras	Vencimento	Utilizadas	Descartadas	Vol. Única
18/09/2017	Nov-17	426	9	38.66%
19/09/2017	Nov-17	463	79	41.93%
25/09/2017	Nov-17	597	57	39.08%
29/09/2017	Nov-17	567	8	39.67%
07/11/2017	Jan-18	422	9	34.07%
08/11/2017	Jan-18	421	4	35.19%
14/11/2017	Jan-18	541	2	36.61%
16/11/2017	Jan-18	787	2	36.53%

Tabela 3-1 Volatilidade única encontrada por minimização de erro quadrático

A Tabela 3-1 apresenta a volatilidade implícita única para cada um dos dias e vencimentos empregados no estudo, ela também aborda a problemática de eliminação de *outliers*¹⁰ e valores racionalmente inválidos. Já o gráfico apresentado na Figura 3-9 mostra os desvios de preços em reais em relação ao preço médio (*Mid-Price*) observado para o dia 25/09/17 e vencimento Novembro/2017. Foram re-precificadas as opções ao tomar a volatilidade única de 39,08%.

¹⁰ Observações com valores atípicos ou inconsistentes.

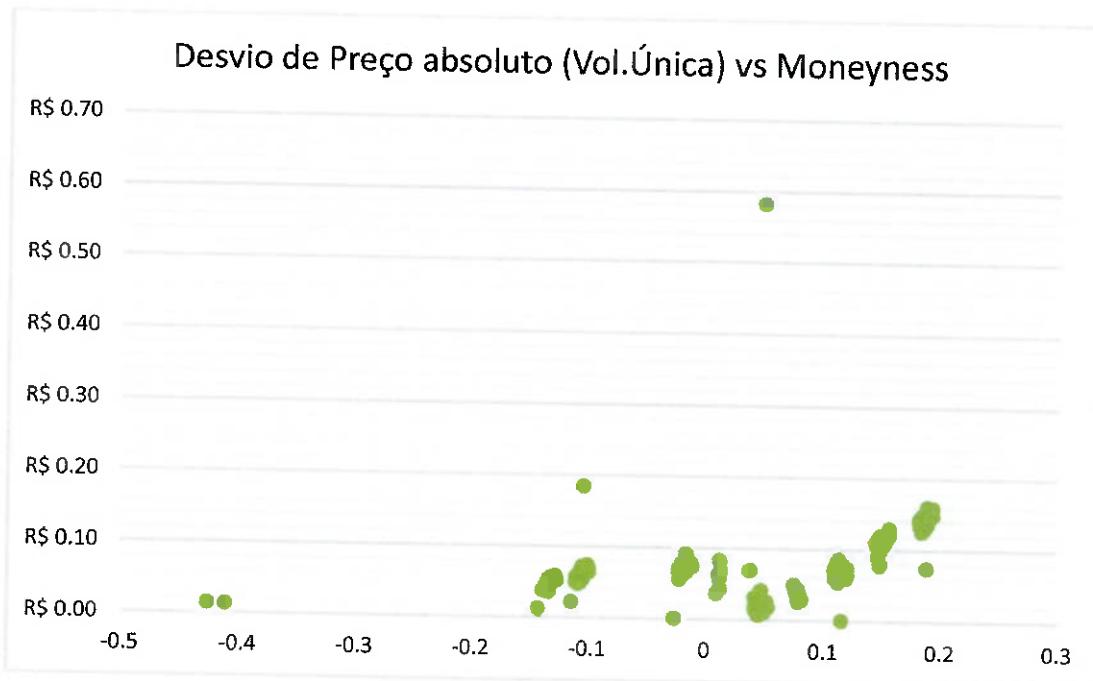


Figura 3-9 Desvio de preços absolutos em relação ao *Mid-Price* ao considerar o modelo com volatilidade única para 25/09/17 e vencimento Novembro/2017

3.3.2.1 Método numérico para cálculo do menor erro quadrático

Em geral algoritmos tradicionais não asseguram que a solução ótima e global seja a solução encontrada. Um mínimo global só pode ser alcançado uma vez que sejam satisfeitas as restrições e condições definidas do problema através de premissas e intervalos específicos. Conhecidas as possibilidades de convergência para mínimos locais, ou mesmo de não convergência da função, foi possível observar através da utilização de algoritmo genético que houve melhora quanta à eficácia e eficiência perante a estimação dos parâmetros desejados.

Algoritmos genéticos (AG) são definidos por Mitchell¹¹ como programas de computadores que imitam processos de evolução biológica com objetivo de resolver problemas e modelar sistemas evolutivos. Inicialmente descritos por John

¹¹ MITCHELL, M. Genetic Algorithms: An Overview, 1995.

Holland¹² em 1960, os algoritmos evolutivos hoje se destacam pela capacidade tecnológica e computacional, agora disponíveis, com baixo custo e fácil acesso. Ao observar fenômenos naturais para entender mecanismos que realizassem seleção e adaptação natural, Holland conseguiu desenvolver metodologias que seriam abstrações da biologia evolutiva ao montar um framework teórico para adaptação destas técnicas para dentro de algoritmos genéticos.

O método consiste em mover uma parcela de cromossomos de uma população para outra através de operadores biológicos genéticos já conhecidos como seleção, cross-over, mutação e inversão – cada um desses cromossomos é composto por genes que podem ser representados por bits (0 ou 1). Definimos então uma métrica da proximidade de cada cromossomo quanto ao objetivo desejado, auxiliando assim o algoritmo a categorizar as soluções com relação à sua qualidade (*fitness*). A ideia principal de Holland foi, portanto, tratar as soluções como cromossomos e permitir que estas mesmas soluções evoluíssem de forma a se obter melhores soluções, processo semelhante à evolução natural dos seres vivos tão estudada pela biologia.

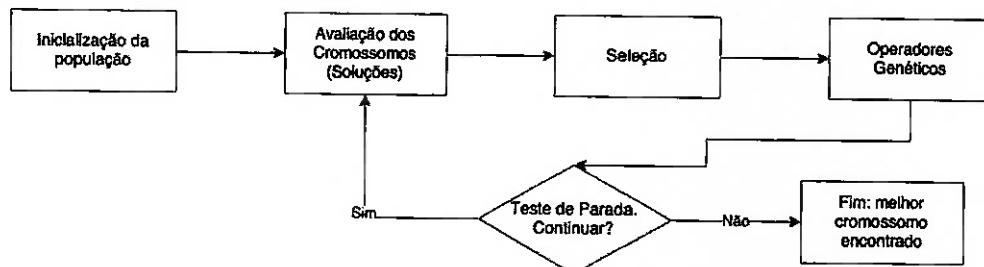


Figura 3-10 Fluxograma de um algoritmo genético

Dada a complexidade das fórmulas de BSM e Corrado Su para resolução e minimização das somas do erro quadrático, optamos neste estudo pelo algoritmo genético para extrair a volatilidade implícita das opções, observadas durante negociação, e também encontrar parâmetros necessários para utilização das fórmulas propostas por Corrado Su. Definimos algumas condições e

¹² Professor John Holland (1975) - Universidade de Michigan.

restrições para minimização de nosso erro e, por consequência, obtenção da melhor solução com maior eficiência.

Para o cálculo da volatilidade implícita, tornamos como condição os valores possíveis serem números positivos entre zero e um ($0 < \sigma < 1$). O critério de parada foi estabelecido de modo a observar mudanças nas últimas gerações de cromossomos: a iteração do algoritmo é finalizada quando o melhor cromossomo (solução) não teve melhora quanto à sua qualidade (menor erro quadrático) nas últimas 500 gerações anteriores. A solução ideal seria encontrar um valor que anulasse o erro quadrático definido pela diferença entre preço da opção negociada e preço da opção calculada, logo, o valor que procuramos para a soma total destes erros é zero. Os genes foram gerados a partir de uma amostra com distribuição normal com média $\mu = 0.3$ e desvio padrão $\sigma = 2.0$.

Comparando os resultados dos métodos de NR, bisseção e algoritmo genético, foi possível obter deste último excelentes resultados, com erros menores aos encontrados pelos algoritmos tradicionais, de forma rápida e eficaz.

3.4 Análise do modelo de Corrado e Su

Nas próximas seções será tratada uma extensiva análise dos principais fatores presentes na modelagem via Corrado-Su e de seu ajuste mencionado na seção 2.3.4. Os objetos de análise serão os termos de ajuste financeiro, métodos numéricos para calibrar o modelo e um comparativo em relação ao modelo BSM.

3.4.1 Fatores adicionados do modelo de BSM

Conforme menção no capítulo 2, o modelo de Corrado-Su recorre a ajustes na expansão em série da distribuição normal para incluir os efeitos de assimetria e curtose na especificação de opções. Estes termos, Q3 e Q4, comportam-se de forma mais ou menos pronunciada de acordo com a *moneyness* da opção.

Foram simuladas opções de compra hipotéticas e comparados os termos de ajuste financeiros entre o modelo de Corrado-Su e o modelo de Corrado-Su modificado para não permitir arbitragem. As variáveis e parâmetros utilizados podem ser encontrados na tabela 3-2.

Parâmetro/Variável	Valor
Assimetria	0
Curtose	3
R	7.70%
T (dias úteis)	40
Spot	9.00
Volatilidade	30.0%

Tabela 3-2 Demais parâmetros de precificação para comparação e Q3 e Q4

Ademais, nas Figuras 3-11 e 3-12 foram traçados os gráficos dos termos de ajuste resultantes em cada modelo ao se variar o *moneyness* da opção hipotética. Claramente, por se tratar de um pequeno ajuste para evitar arbitragem gerada no modelo original, o formato da curva é muito semelhante em ambos os casos e há dificuldade em identificar as nuances de cada modelo. Portanto, os termos foram mostrados na Tabela 3-3, na qual identifica-se a variação percentual de Q3 e Q4 para os diferentes preços de exercício.

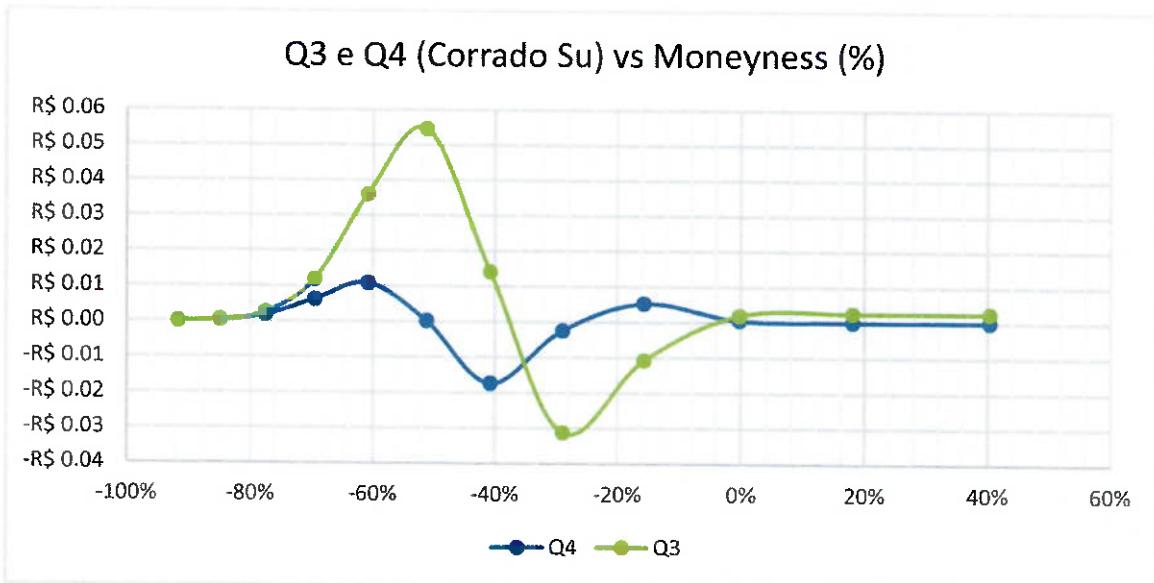


Figura 3-11 Termos de ajuste Q3 e Q4 versus *Moneyness* para o modelo de Corrado-Su.

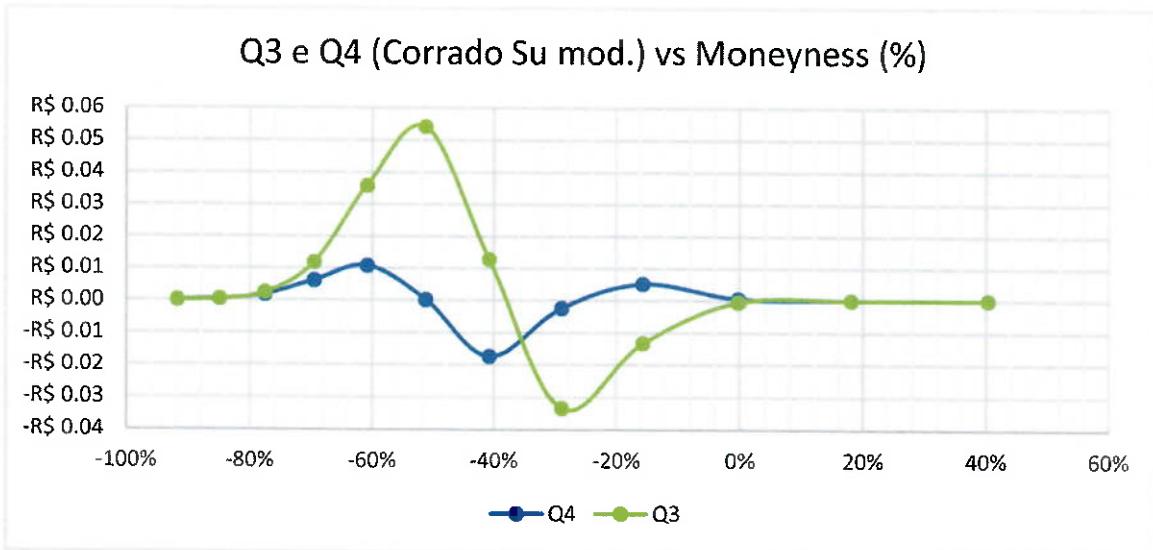


Figura 3-12 Termos de ajuste Q3 e Q4 versus *Moneyness* para o modelo de Corrado-Su Modificado.

Strike	Moneyness	Corrado-Su		Corrado-Su modificado		Ajuste Percentual	
		Q3	Q4	Q3	Q4	Q3	Q4
4	40.4%	2.56E-03	7.65E-05	-3.18E-11	5.23E-11	-100.0%	-100.0%
5	18.1%	2.56E-03	7.82E-05	-1.41E-06	1.64E-06	-100.1%	-97.9%
6	-0.2%	1.97E-03	5.26E-04	-5.94E-04	4.49E-04	-130.2%	-14.5%
7	-15.6%	-1.08E-02	5.16E-03	-1.33E-02	5.08E-03	23.5%	-1.4%
8	-28.9%	-3.12E-02	-2.41E-03	-3.34E-02	-2.48E-03	7.0%	2.9%
9	-40.7%	1.41E-02	-1.74E-02	1.28E-02	-1.74E-02	-9.4%	0.2%
10	-51.2%	5.47E-02	1.79E-04	5.41E-02	1.68E-04	-1.0%	-5.8%
11	-60.8%	3.60E-02	1.08E-02	3.58E-02	1.08E-02	-0.4%	0.0%
12	-69.5%	1.18E-02	6.14E-03	1.18E-02	6.14E-03	-0.2%	0.0%
13	-77.5%	2.46E-03	1.74E-03	2.46E-03	1.74E-03	-0.2%	-0.1%
14	-84.9%	3.72E-04	3.26E-04	3.72E-04	3.26E-04	-0.2%	-0.1%
15	-91.8%	4.44E-05	4.56E-05	4.43E-05	4.56E-05	-0.2%	-0.1%

Tabela 3-3 Comparativo percentual entre termos de ajuste propostos por Corrado-Su e pelo modelo modificado

Ao avaliar os dados presentes na Tabela 3-3, fica claro que a correção ao modelo descarta os termos Q3 e Q4 para moneyness mais positivas e torna Q3

mais presente na região próxima ao *At-the-moneyess (ATM)*. Cabe ressaltar, contudo, que os dados obtidos nesta simulação são mutáveis e dependentes dos dados iniciais propostos na Tabela 3-2.

3.4.2 Valores de Assimetria, Curtose e Volatilidade enquadrados dia a dia

Para realização de um estudo comparativo acerca do modelo discutido, é realizado o segundo processo de estimativa de parâmetros desta dissertação. Dados uma data de amostragem específica e um vencimento único, são obtidos os preços de opções descritos na seção 3.2.

Em posse destes dados e tendo em mãos o modelo proposto por Corrado e Su faz-se a estimativa de valores que melhor calibram o modelo quanto aos dados observados. Uma das formas de realizar a calibragem proposta é semelhante à solução discutida na seção 3.3.2 e consiste em reduzir o erro quadrático observado na expressão apresentada a seguir.

$$\min_{\sigma, \mu_3, \mu_4} \sum_{i=1}^N [C_{OBS,i} - (C_{BS,i}(\sigma) + \mu_3 Q_3 + (\mu_4 - 3)Q_4)]^2$$

Os valores obtidos ao resolver a expressão apresentada representam os estimadores de máxima verossimilhança que calibram o modelo aos dados observados no mercado. Eles são únicos para cada data de referência objeto de estudo. Onde $C_{BS,i}$ é a i-ésima opção de compra ao ser recalculada empregando-se volatilidade σ ; μ_3 e μ_4 são os momentos objetivo; e $C_{OBS,i}$ é a i-ésima opção de compra da amostra analisada.

A expressão é válida não apenas para o modelo de Corrado-Su, mas também para sua fórmula modificada – uma vez que basta aplicar os termos Q3 e Q4 correspondentes a cada uma das fórmulas já apresentadas no capítulo 2. Dada a complexidade da solução, o método numérico aqui empregado é discutido com brevidade na seção 3.4.2.1.

A Tabela 3-4, bem como as Figuras 3-13, 3-14 e 3-15 mostram o comportamento dos estimadores para cada um dos dias do estudo; destacam-se alguns detalhes específicos e não intuitivos advindos deste estudo:

- O estimador de volatilidade encontrado para o modelo de volatilidade única é menor do que aqueles encontrados para os modelos de Corrado-Su e Corrado-Su Modificado, sendo os últimos relativamente próximos para a maior parte dos dias.
- As datas analisadas não são consecutivas, contudo é de se notar uma variabilidade de estimadores de Assimetria e Curtose em um curto espaço de tempo. Este fato, por si só, representa um grande problema ao utilizar o modelo no dia a dia, já que o peso das observações mais recentes deve implicar em grande peso no cálculo desses parâmetros e, portanto, o terceiro e quarto momentos da distribuição devem ser tratados como processos estocásticos independentes.

Data Amostra	Vcto	BSM	Corrado Su			Corrado Su Mod.		
		Vol. Única	(Vol.)	(Skew)	(Kurt)	(Vol.)	(Skew)	(Kurt)
18-Sep-17	Nov-17	38.66%	45.57%	-1.2502	5.8458	45.09%	-1.2165	5.9753
19-Sep-17	Nov-17	41.93%	49.70%	-1.5332	5.4673	46.67%	-1.3981	4.7510
25-Sep-17	Nov-17	39.08%	44.79%	-1.0328	5.9818	44.24%	-0.9942	5.9703
29-Sep-17	Nov-17	39.67%	45.04%	-0.9642	5.9384	44.70%	-0.9407	5.9909
07-Nov-17	Jan-18	34.07%	40.10%	-0.9041	5.5758	40.17%	-0.9180	5.7502
08-Nov-17	Jan-18	35.19%	42.82%	-0.9991	5.9884	39.52%	-0.7237	4.7766
14-Nov-17	Jan-18	36.61%	37.25%	-0.1179	3.4603	39.57%	-0.4399	4.4928
16-Nov-17	Jan-18	36.53%	38.37%	-0.3241	3.7355	42.64%	-0.8169	5.5111

Tabela 3-4 Valores obtidos ao calibrar os modelos BSM e Corrado-Su para as amostras objeto de estudo

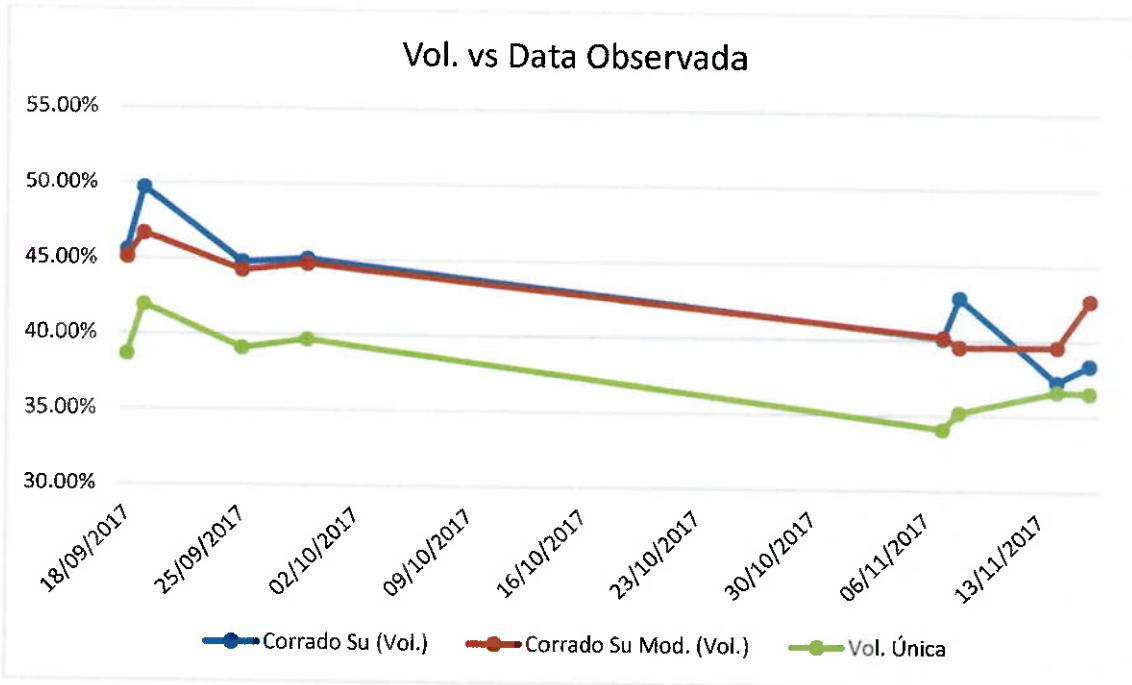


Figura 3-13 Valores de volatilidade advindos da estimação de parâmetros para Corrado-Su, Corrado-Su modificado e Volatilidade Única (BSM)

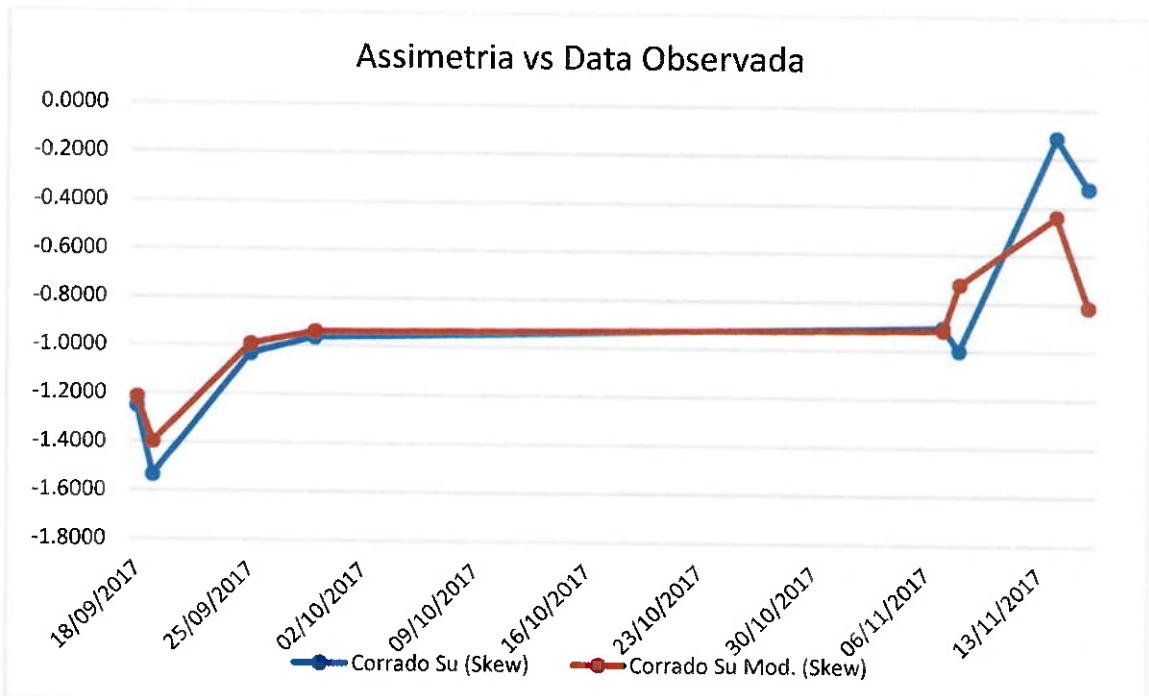


Figura 3-14 Valores de Assimetria advindos da estimação de parâmetros para Corrado-Su e Corrado-Su modificado

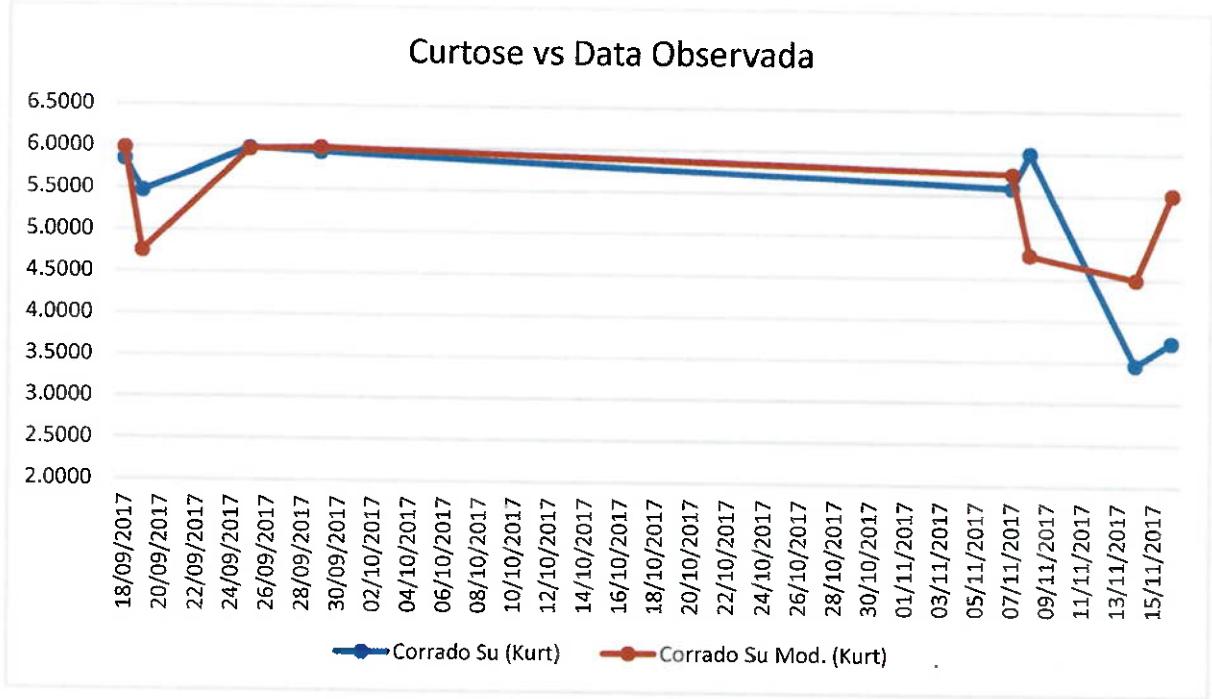


Figura 3-15 Valores de Curtose advindos da estimativa de parâmetros para Corrado-Su e Corrado-Su modificado

3.4.2.1 Método numérico para cálculo dos termos a serem calibrados

Uma vez já definido o conceito de algoritmo genético, vamos agora detalhar as condições e restrições estabelecidas para solução computacional dos modelos Corrado e Su e Corrado e Su modificado. A ideia inicial foi estabelecer uma população com valores que se encaixam nas premissas de valores de nosso problema. Para este estudo o tamanho da população foi definido para um tamanho mínimo de 200 e um tamanho máximo de 500. Para os valores possíveis de serem adotados como solução, foram impostas algumas restrições:

Parâmetro/Variável	Restrições
Volatilidade	$0 < \sigma < 1$
Assimetria (Skewness)	$-5 < x < 5$
Curtose (Kurtosis)	$0 < x < 6$

Tabela 3-5 Restrições utilizadas para execução do método numérico.

Para criação e geração dos números aleatórios foi utilizado uma amostra de dados aleatórios obtidos seguindo distribuição normal com média $\mu = 0.3$ e desvio padrão $\sigma = 2.0$.

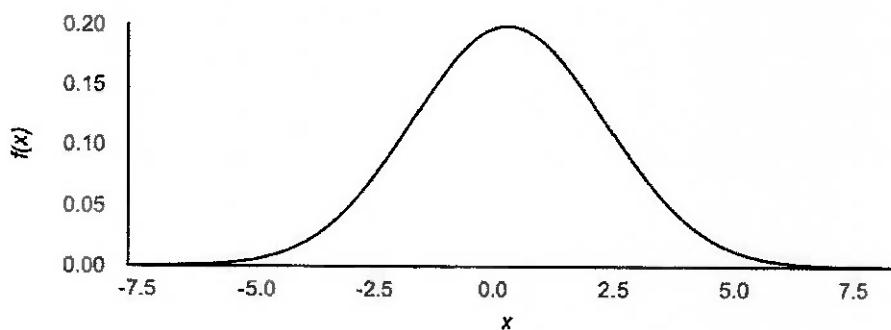


Figura 3-16 Gráfico que exemplifica uma distribuição normal com média $\mu = 0.3$ e desvio padrão $\sigma = 2.0$.

Foram empregados os operadores genéticos de seleção, cross-over e mutação. A condição de término pela busca da melhor solução foi definida para seguir uma parada por estagnação, que ocorre após 500 gerações sem nenhuma melhora na melhor solução, ou seja, nenhum menor resultado alcançado na soma de todos erros quadráticos.

3.4.2.2 Resultados e comparação de modelos

Ao calibrar e confrontar os preços gerados por cada um dos modelos aqui estudados - e definir como melhor aproximação aquele que mais se aproxima do preço médio (*Mid_Price*) observado no mercado – foi possível obter resultados condizentes com as premissas apresentadas anteriormente.

Conforme disponibilizado na Figura 3-17, onde são recomputados os preços das opções para o dia 25/09/2017 e vencimento Novembro/2017, os desvios de preços absolutos em relação ao preço médio (*Mid_Price*) observado é mais pronunciado ao lançar mão do modelo que emprega volatilidade única. Há significativa melhora de precificação ao ajustar o modelo para considerar os outros momentos da distribuição, segundo a métrica aqui empregada.

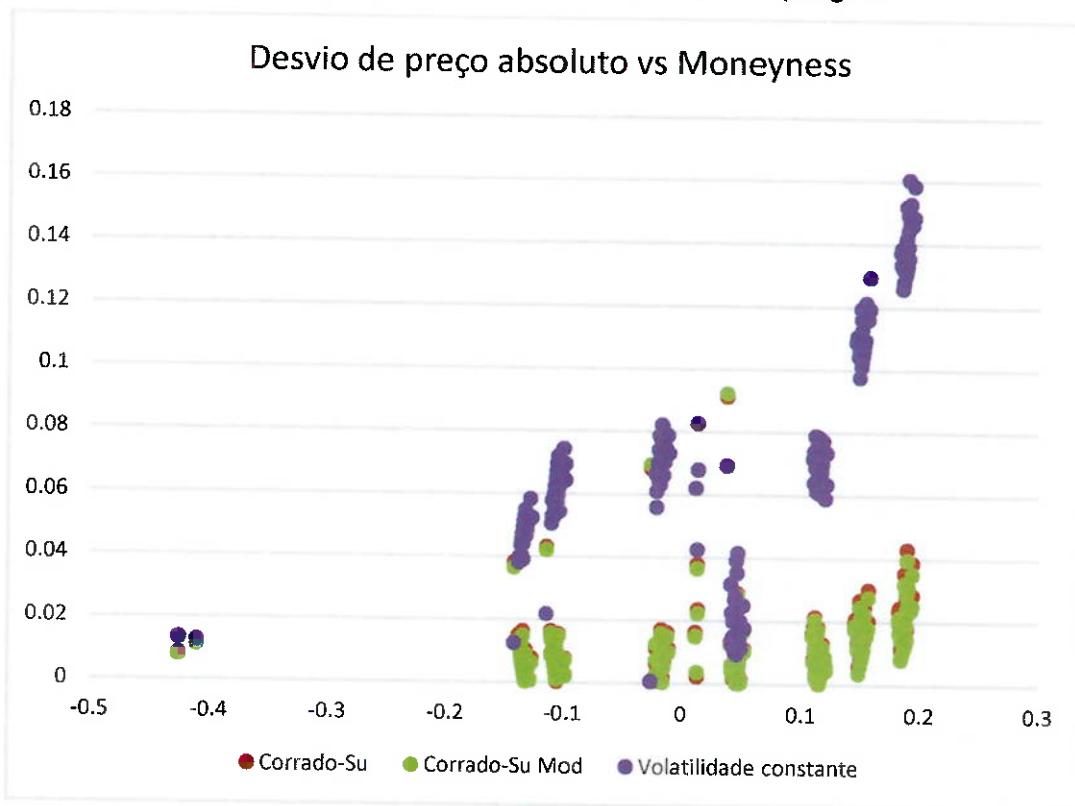


Figura 3-17 Desvios de preços em relação ao preço médio (*Mid_Price*) para os modelos de Volatilidade constante, Corrado-Su e Corrado-Su Modificado para o dia 25/09/17 e vencimento em novembro/2017

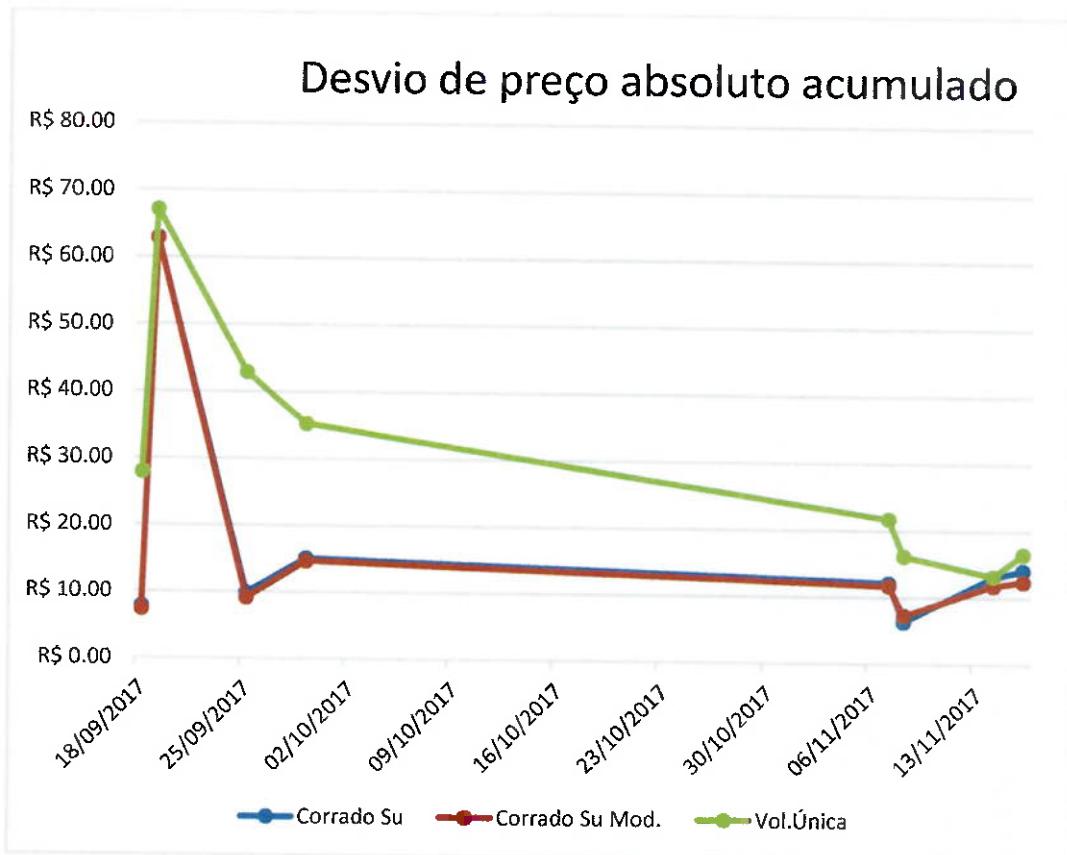


Figura 3-18 Desvios de preços absolutos em relação ao Mid_Price acumulados para os modelos de Volatilidade constante, Corrado-Su e Corrado-Su Modificado

Confrontar os desvios de preços absolutos acumulados em cada um dos dias do estudo o efeito pode ser visto de forma mais abrupta, como apresentado na Figura 3-18. Ainda que o modelo de Corrado-Su seja capaz de gerar resultados muito semelhantes ao modelo de Corrado-Su modificado, o primeiro não deve ser utilizado por razões motivos de não arbitragem – conforme discutido anteriormente.

3.5 Volatilidade equivalente resultante

De forma prática, é concebível a implementação de um sorriso de volatilidade (a ser utilizado em conjunto com a fórmula de Black e Scholes) resultante do emprego do modelo de Corrado-Su. Para tanto, a volatilidade implícita de Black e Scholes equivalente aos parâmetros utilizados na precificação por Corrado e Su pode ser encontrada ao igualar as fórmulas de precificação de ambos os modelos.

$$c_{BSM}(\sigma') = c_{BSM}(\sigma) + \mu_3 Q_3 + (\mu_4 - 3) Q_4$$

O processo exige resolução da expressão de forma a encontrar o valor de σ' para cada um dos preços de exercício já especificados por Corrado-Su. A Figura 3-19 mostra o sorriso de volatilidade advindo da utilização deste método ao se considerar os seguintes valores hipotéticos: Preço à vista da ação de R\$15, Volatilidade constante de 35% a.a., Vencimento em 252 dias úteis e Taxa de juros livre de risco de 10% a.a. Como parâmetros do modelo de Corrado-Su: Assimetria 1.0 e Curtose 2.0.

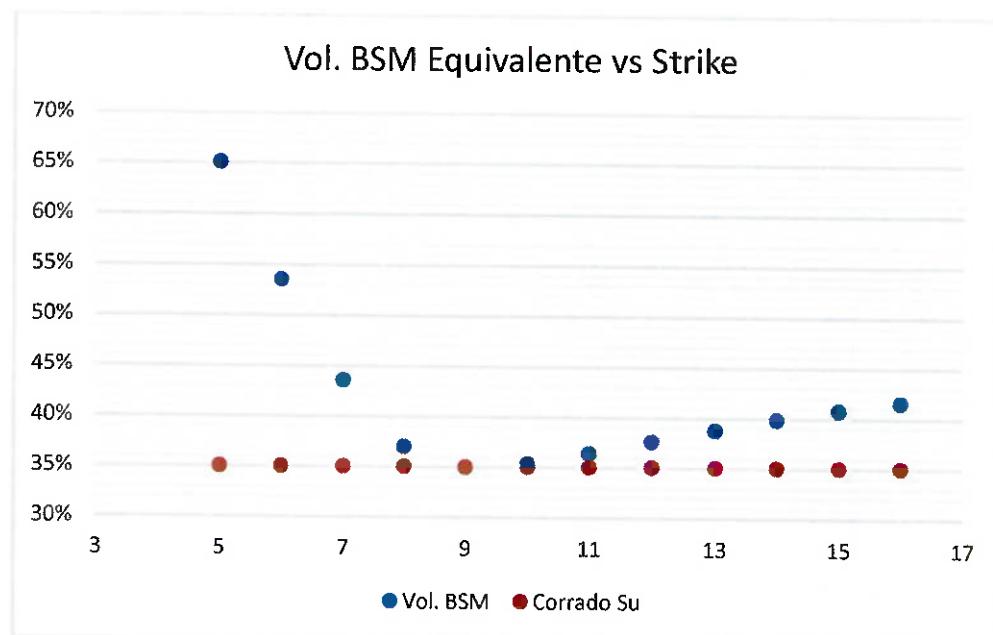


Figura 3-19 Gráfico que mostra o sorriso de volatilidade equivalente para uma volatilidade constante de 35%, assimetria com valor 1.0 e curtose 2.0.

4 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

4.1 Linguagem de programação e bibliotecas utilizadas

Para desenvolvimento do software que forneceu os dados, análises e resultados, objetos deste estudo, a linguagem de programação escolhida foi determinada principalmente pela orientação à objeto e facilidade de integração com provedores de dados de mercado. Em nossa necessidade, a adaptação constante de regras, premissas e filtros tornou mandatária a escolha por uma linguagem que fosse possível realizar modificações e otimizações de forma rápida e flexível, não onerando o estudo e minimizando possíveis erros operacionais na manipulação das amostras. A linguagem C# foi escolhida por ser elegante e fortemente tipada, ou seja, utiliza variáveis com tipos específicos. A camada de visualização (interface de usuário) escolhida foi *Windows Forms*, ou seja, dependente do sistema operacional *Microsoft Windows*. A sintaxe desta linguagem é facilmente reconhecida por uma pessoa com conhecimentos de programação e familiarizado com C, C++ ou Java. Além disso o C# possui uma grande flexibilidade frente às outras linguagens, dado a presença das expressões LINQ (*Language Integration Query*) que torna possível a execução de consultas e seleção de dados em tempo real, integrada à linguagem, sem a necessidade de se utilizar uma base de dados.

Para integração e download dos dados dos instrumentos analisados foi utilizado o SDK (*Software Development Kit*) disponibilizado pela provedora *Thomson Reuters*.

Como este não era o objetivo deste estudo, para resolução de problemas e minimização dos erros através de algoritmo genético foi utilizada a biblioteca *GeneticSharp*, licenciada sob código livre através da licença MIT e disponível na plataforma de hospedagem de código fonte GitHub. Foram realizadas pequenas

adaptações na biblioteca para tornar possível a utilização frente à necessidade de minimização de erros quadráticos

Para tabelas e visualização dos dados, componentes da empresa *DevExpress* foram incorporados ao projeto para melhor apresentação gráfica.

4.2 Funcionalidades do Sistema

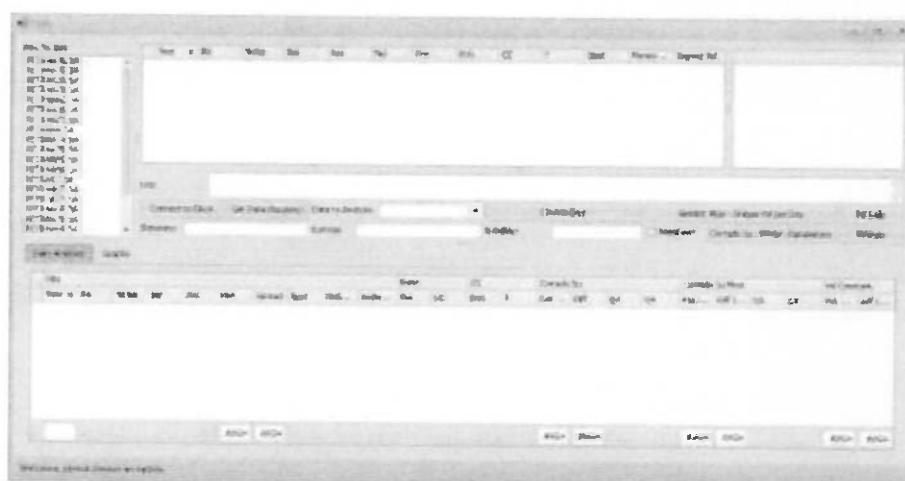


Figura 3-20 Sistema desenvolvido e utilizado para análises e cálculos deste estudo.

Figura 3-21 Após download de dados, possibilidade para escolha de um dos dias com dados disponíveis para análise.

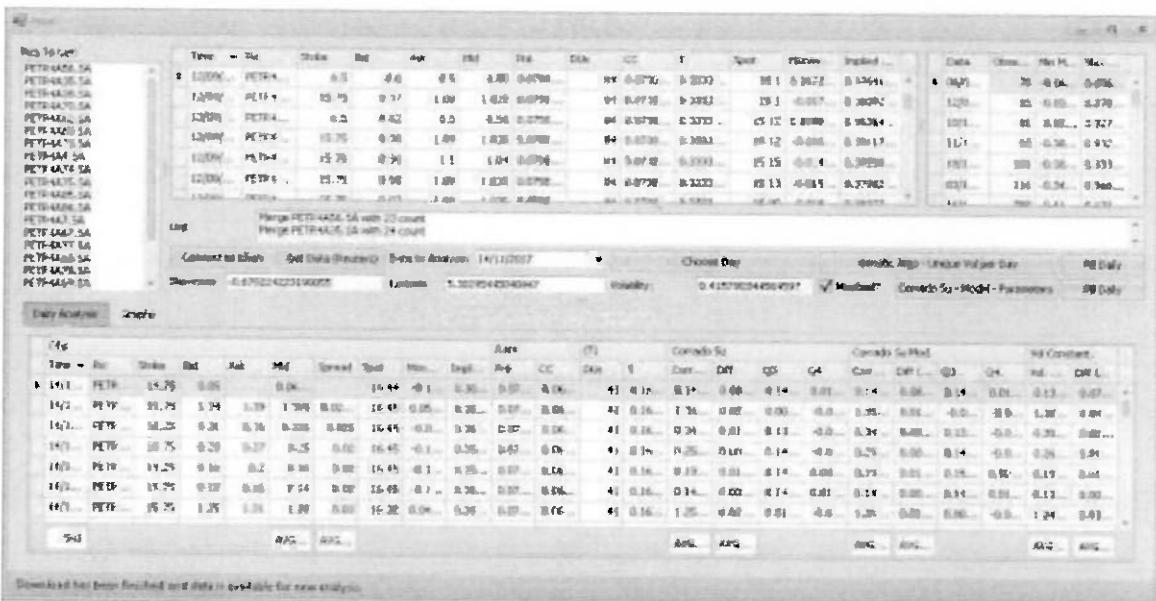


Figura 3-22 Após todos cálculos realizados (Volatilidade implícita extraída e parâmetros dos modelos de Corrado Su e Corrado Su modificado já estimados)

4.3 Melhorias a serem implementadas

Uma vez que não era o objetivo deste estudo e que o fato não causou impactos relevantes frente ao andamento do trabalho, pode ser levado em consideração, para futuros estudos, uma otimização no algoritmo genético, para definição dos parâmetros (Volatilidade, Assimetria e Curtose) dos modelos de Corrado Su e Corrado Su modificado, quanto ao tempo total necessário para execução das iterações. A média de tempo total de execução para 30 análises executadas ficou entre 2 a 4 minutos, por modelo. Para encontrar a volatilidade única, para o dia, com o mesmo algoritmo, o tempo de execução nunca ultrapassou o total de 5 segundos.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram analisados os modelos de Corrado-Su e Corrado-Su Modificado em contraponto ao modelo de Black e Scholes, mais especificamente quanto às hipóteses de normalidade da série de retornos; bem como a utilização da volatilidade como parâmetro constante na precificação de opções. Foi possível observar melhor performance do modelo de Corrado-Su em critérios de desvios de preços aqui definidos, conforme esperado.

Contudo, a implementação deste modelo e sua utilização no dia a dia não são tão simples quanto se espera. O motivo recai no fato de não ser possível aplicar o mesmo tipo de estimador estatístico, aqui utilizado, no decorrer de um dia de negociação. Além disso, os estimadores encontrados mostraram grande variabilidade de valores em um pequeno espaço de tempo e, portanto, carecem de um tratamento estocástico para que este comportamento seja modelado adequadamente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALEXANDER, C.; NARAYANAN, S. **Option Pricing with Normal Mixture Returns.** ISMA Centre, 2001.
- BALIEIRO FILHO; ROSENFIELD. **Aplicações da Expansão de Edgeworth à Precificação de Derivativos Financeiros.** Dissertação de mestrado. Departamento de Economia, FEA-USP, 2002.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. **The Pricing of Options and Corporate Liabilities, University of Chicago,** 1973.
- BERTSEKAS, D. **Nonlinear Programming**, 3rd edition. **Theoretical Solutions Manual.** May 2016.
- BROWN, C. A.; ROBINSON, D. M. **Skewness and Kurtosis Implied by Option Prices: A Correction.** The University of Melbourne, June 2002.
- CORRADO, C.J.; SU, T. **Skewness and Kurtosis in S&P 500 Index Returns Implied by Option Prices.** The Journal of Financial Research, vol. XIX, nº 2, págs. 175-192 – Summer 1996.
- CORRADO, C.J.; SU, T. **Implied volatility skews and stock return skewness and kurtosis implied by stock option prices.** The European Journal of Finance 3, 73-85 (1997).
- DERMAN, R.; KANI, I. **Riding on a Smile.** Risk, nº 7, pp. 32– 39, 1994. DUAN, J. C. **The Garch Option Pricing Model.** Mathematical Finance, nº 5, págs. 13–32, 1995.
- DUPIRE, B. **Pricing with a Smile.** Risk, nº 7, págs. 18–20, 1994.
- HESTON, S.L.; NANDI, S. **A Closed-Form Garch Option Valuation Model. Review of Financial Studies**, nº 13, págs. 585– 625, 2000.
- HESTON, S.L. **A Close-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options.** Review of Financial Studies, nº 6, págs. 327–343, 1993.
- HULL, J.C.; WHITE, A. **The Pricing of Options or Assets with Stochastic Volatilities.** Journal of Finance, nº 42, págs. 281– 300, 1987.

- HULL, J.C. **Options, Futures and Other Derivatives**, 5th Edition, pág 223, 2002.
- JARROW, R.; RUDD, A. **Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes**. Journal of Financial Economics, nº 10, págs. 347–369, 1982.
- MITCHELL, M. **Genetic Algorithms: An Overview**, pág. 1, 1995.
- RUBINSTEIN, M. **Edgeworth Binomial Trees**. Journal of Derivatives, págs. 20–27, 1998.
- RUBINSTEIN, M. **Implied Binomial Trees**. Journal of Finance, nº 49, págs. 771–818, 1994

APÊNDICE A - IMPLEMENTAÇÃO

Neste apêndice são apresentados as principais ferramentas e modelos implementados no decorrer do projeto.

```
public double ND(double X)
{
    return 1.0 / Math.Sqrt(2.0 * Math.PI) * Math.Exp(-Math.Pow(X, 2.0)
/ 2);
}

public double CND(double X)
{
    double Y, Exponential, SumA, SumB;
    double CND;
    Y = Math.Abs(X);
    if (Y > 37)
    {
        CND = 0;
    }
    else
    {
        Exponential = Math.Exp(-Math.Pow(Y, 2.0) / 2);
        if (Y < 7.07106781186547)
        {
            SumA = 3.52624965998911E-02 * Y + 0.700383064443688;
            SumA = SumA * Y + 6.37396220353165;
            SumA = SumA * Y + 33.912866078383;
            SumA = SumA * Y + 112.079291497871;
            SumA = SumA * Y + 221.213596169931;
            SumA = SumA * Y + 220.206867912376;
            SumB = 8.83883476483184E-02 * Y + 1.75566716318264;
        }
    }
}
```

```
    SumB = SumB * Y + 16.064177579207;
    SumB = SumB * Y + 86.7807322029461;
    SumB = SumB * Y + 296.564248779674;
    SumB = SumB * Y + 637.333633378831;
    SumB = SumB * Y + 793.826512519948;
    SumB = SumB * Y + 440.413735824752;
    CND = Exponential * SumA / SumB;
}
else
{
    SumA = Y + 0.65;
    SumA = Y + 4 / SumA;
    SumA = Y + 3 / SumA;
    SumA = Y + 2 / SumA;
    SumA = Y + 1 / SumA;
    CND = Exponential / (SumA * 2.506628274631);
}
}

if (X > 0)
    CND = 1 - CND;

return CND;
}

public double GetBSUsingTheoVol(string CallPutFlag, double Vol)
{
    double d1, d2, b, price;
    b = 0.0;
```

```

d1 = (Math.Log(Spot.Value / Strike) + (b + Math.Pow(Vol, 2.0) / 2)
* Pre.T) / (Vol * Math.Sqrt(Pre.T));
d2 = d1 - Vol * Math.Sqrt(Pre.T);

if (CallPutFlag.Equals("C",
 StringComparison.InvariantCultureIgnoreCase))
{
    price = Spot.Value * Math.Exp((b - Pre.CC) * Pre.T) * CND(d1) -
Strike * Math.Exp(-Pre.CC * Pre.T) * CND(d2);
}
else
{
    price = Strike * Math.Exp(-Pre.CC * Pre.T) * CND(-d2) -
Spot.Value * Math.Exp((b - Pre.CC) * Pre.T) * CND(-d1);
}
return price;
}

public CorradoSuResultPack GetCorradoSuSkewKurt(string CallPutFlag,
double Vol, double Skew, double Kurt)
{
    double SkewKurtCorradoSu;
    double Q3, Q4, d1, d2, CallValue, b;
    b = 0.0;

    d1 = (Math.Log(Spot.Value / Strike) + (b + Math.Pow(Vol, 2.0) /
2.0) * Pre.T) / (Vol * Math.Sqrt(Pre.T));
    d2 = d1 - Vol * Math.Sqrt(Pre.T);
    Q4 = 1.0 / 24.0 * Spot.Value * Vol * Math.Sqrt(Pre.T) *
((Math.Pow(d1, 2.0) - 1 - 3 * Vol * Math.Sqrt(Pre.T) * d2)
 * ND(d1) + Math.Pow(Vol, 3.0) * Math.Pow(Pre.T, 1.5) * CND(d1));
}

```

```

        Q3 = 1.0 / 6.0 * Spot.Value * Vol * Math.Sqrt(Pre.T) * ((2 * Vol *
Math.Sqrt(Pre.T) - d1)
* ND(d1) + Math.Pow(Vol, 2.0) * Pre.T * CND(d1));
        CallValue = GetBSUsingTheoVol("c", Vol) + Skew * Q3 + (Kurt - 3)
* Q4;

        if (CallPutFlag.Equals("C",
StringComparison.InvariantCultureIgnoreCase))
{
    SkewKurtCorradoSu = CallValue;
}
else
{
    SkewKurtCorradoSu = CallValue - Spot.Value * Math.Exp((b -
Pre.CC) * Pre.T) + Strike * Math.Exp(-Pre.CC * Pre.T);
}
return new CorradoSuResultPack()
{
    Price = SkewKurtCorradoSu,
    Q3 = Q3,
    Q4 = Q4
};
}

public CorradoSuResultPack GetCorradoSuSkewKurtModified(string
CallPutFlag, double Vol, double Skew, double Kurt)
{
    double Q3, Q4;
    double d, w;
    double CallValue;
    double SkewKurtCorradoSuModified;
}

```

```

        double b = 0;

        w = Skew / 6.0 * Math.Pow(Vol, 3.0) * Math.Pow(Pre.T, 1.5) + Kurt
        / 24.0 * Math.Pow(Vol, 4.0) * Math.Pow(Pre.T, 2.0);
        d = (Math.Log(Spot.Value / Strike) + (b + Math.Pow(Vol, 2.0) / 2.0)
        * Pre.T - Math.Log(1 + w)) / (Vol * Math.Sqrt(Pre.T));
        Q3 = 1 / (6 * (1 + w)) * Spot.Value * Vol * Math.Sqrt(Pre.T) * (2 *
        Vol * Math.Sqrt(Pre.T) - d) * ND(d);
        Q4 = 1 / (24 * (1 + w)) * Spot.Value * Vol * Math.Sqrt(Pre.T) *
        (Math.Pow(d, 2.0) - 3 * d * Vol * Math.Sqrt(Pre.T) + 3 * Math.Pow(Vol, 2.0) *
        Pre.T - 1) * ND(d);
        //fixed the book
        CallValue = GetBSUsingTheoVol(CallPutFlag, Vol) + Skew * Q3 +
        (Kurt - 3) * Q4;
        if (CallPutFlag.Equals("C",
        StringComparison.InvariantCultureIgnoreCase))
        {
            SkewKurtCorradoSuModified = CallValue;
        }
        else
        {
            // Use put-call parity to find put value
            SkewKurtCorradoSuModified = CallValue - Spot.Value *
            Math.Exp((b - Pre.CC) * Pre.T) + Strike * Math.Exp(-Pre.CC * Pre.T);
        }
        return new CorradoSuResultPack()
        {
            Price = SkewKurtCorradoSuModified,
            Q3 = Q3,
            Q4 = Q4
        }
    }
}

```

```
    };

}

public double? GetImpliedVolUsingBisectionMethod(string CallPutFlag)
{
    double vLow, vHigh, vi;
    double cLow, cHigh, epsilon;
    int counter;

    vLow = 0.005;
    vHigh = 4;
    epsilon = 0.00000001;
    cLow = GetBSUsingTheoVol(CallPutFlag, vLow);
    cHigh = GetBSUsingTheoVol(CallPutFlag, vHigh);
    counter = 0;
    vi = vLow + (Mid.Value - cLow) * (vHigh - vLow) / (cHigh - cLow);

    while (Math.Abs(Mid.Value - GetBSUsingTheoVol(CallPutFlag, vi))
> epsilon)
    {
        counter = counter + 1;
        if (counter == 200)
        {
            return null;
        }
        else
        {
            if (GetBSUsingTheoVol(CallPutFlag, vi) < Mid.Value)
            {
                vLow = vi;
            }
        }
    }
}
```

```
    else
    {
        vHigh = vi;
    }
    cLow = GetBSUsingTheoVol(CallPutFlag, vLow);
    cHigh = GetBSUsingTheoVol(CallPutFlag, vHigh);
    vi = vLow + (Mid.Value - cLow) * (vHigh - vLow) / (cHigh -
cLow);
}
}
return vi;
}
```