

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia
Mecânica

PROJETO MECÂNICO

Projeto Básico de um Perfilômetro para Medição da Camada de
Óxido sobre o substrato de Cintas Magnéticas.

Autor: Armando Augusto Perrin

Orientador: Prof. Dr. Ettore Bresciane Filho

1983

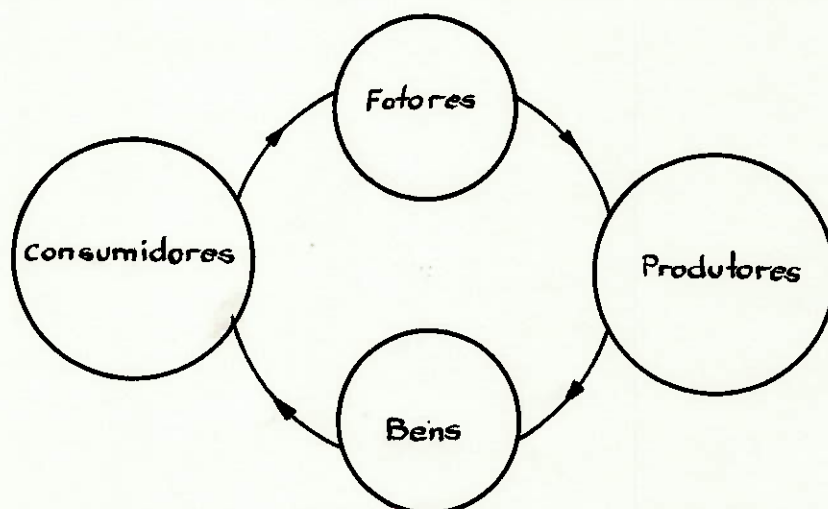
SUMÁRIO

O projeto é a atividade principal da Engenharia, envolvendo fatores tecnológicos, econômicos e humanos.

O projeto é basicamente influenciado pela economia e tecnologia, mas também por fatores culturais, sociais e políticos da sociedade onde se desenvolve.

Toda sociedade econômica compreende duas unidades fundamentais: produtores e consumidores. Os consumidores fornecem os serviços de fatores de produção: terra, trabalho e capital. Também demandam produtos acabados sob a forma de bens e serviços. Os produtores, por sua vez, demandam os serviços dos fatores de produção e fornecem produtos acabados. Assim, em qualquer economia em que os bens são produzidos e consumidos ativamente, os consumidores e produtores estão interligados por um fluxo circular de fatores e bens:

ESQUEMA SIMPLES DA TEORIA ECONÔMICA



Portanto, numa economia dinâmica os fatores fluem constantemente dos consumidores aos produtores, enquanto que os bens movimentam-se no sentido contrário.

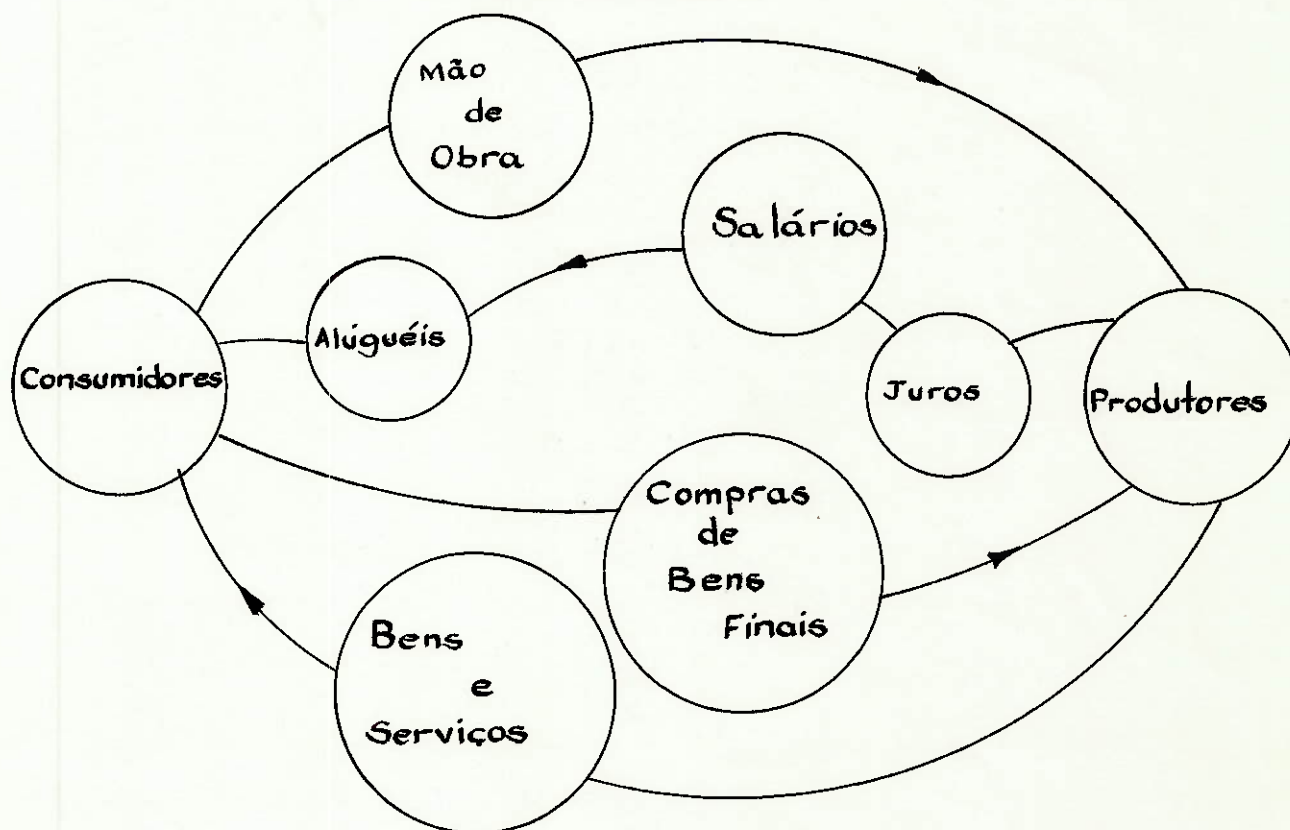
Na vida real, os consumidores possuem desejos ilimitados, enquanto a sociedade dispõe de recursos limitados.

PREÂMBULO

Portanto, a sociedade defronta-se com a difícil questão: como devem ser usados os recursos disponíveis para se satisfazer às ilimitadas necessidades dos cidadãos? Como se devem determinar a composição e a distribuição da produção final?

Numa economia de mercado moderna, os produtores trocam dinheiro por serviços e fatores, e bens finais por dinheiro; os consumidores, por outro lado, trocam serviços de fatores por renda monetária, e renda monetária por bens finais:

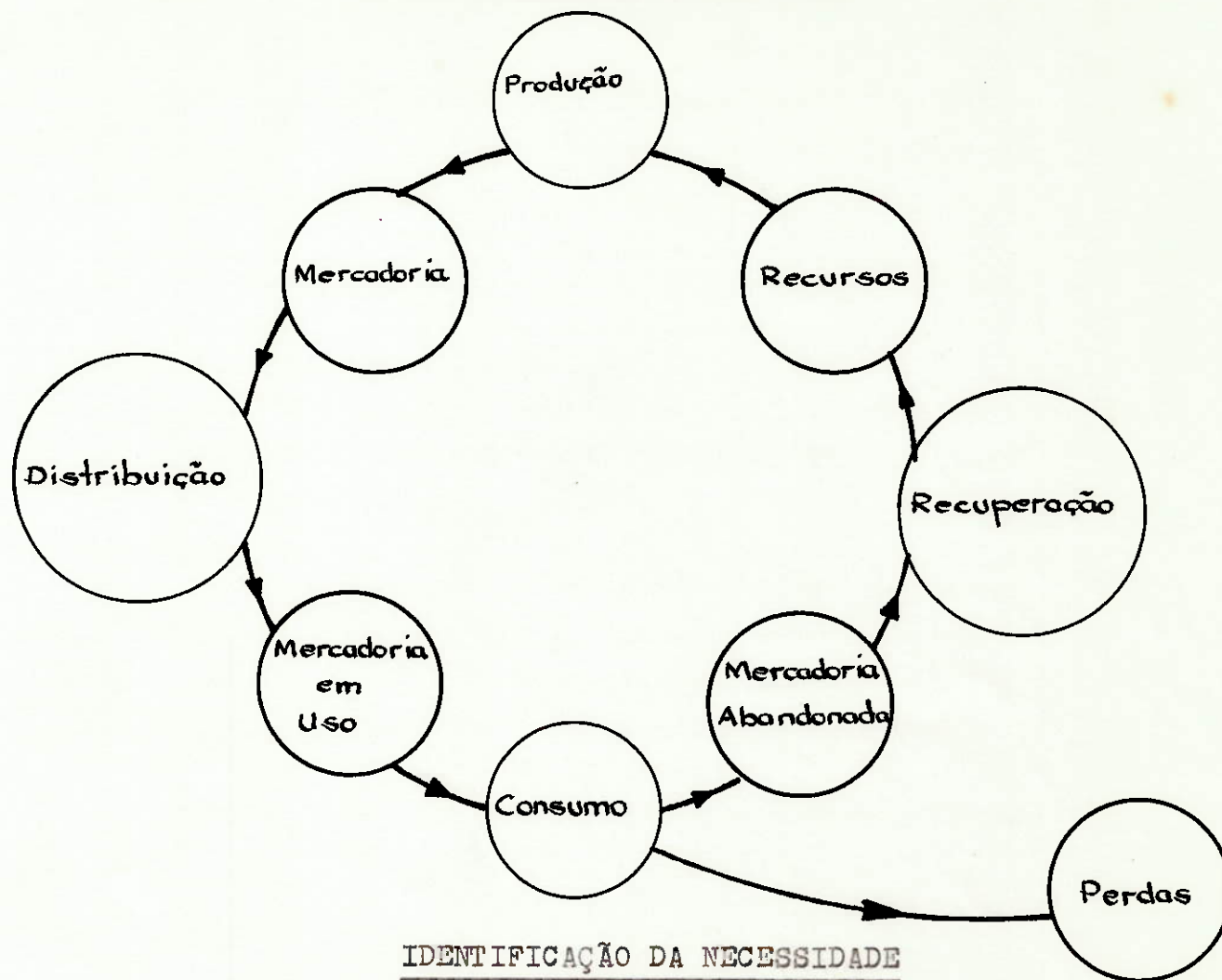
SISTEMA DE TROCAS:



Basicamente, o engenheiro projeta para o consumidor, mas também deverá projetar considerando o fabricante, que é o seu empregador.

O consumidor quer: aparência, funcionalidade, durabilidade, confiabilidade, etc. O fabricante quer facilidade de fabricação, poucas exigências de recursos para fabricação, etc. O distribuidor quer facilidade de transporte, armazenamento, atratividade para a venda, etc. O recuperador quer facilidade para reparar os componentes e materiais reutilizáveis.

CICLO DE PRODUÇÃO E CONSUMO:



A medição da espessura da camada de óxido sobre o substrato de cintas magnéticas é um dos controles mecânicos mais importantes durante a pesquisa, desenvolvimento e produção da indústria eletrônica de gravação para uso de amadores e profissionais.

O mais importante fabricante destes perfilômetros é "The Rank Organisation, Rank Taylor Hobson Division, Leicester, England", fábrica inglesa produtora do rugosímetro de aplicações tipicamente mecânicas: "Talysurf 4" e do perfilômetro "Talystep", com diâmetro de ponta de 250×10^{-6} m e ganho de até 50 000 X. O primeiro modelo tem um raio de ponta de 0,0025 mm e amplificação de até 100 000 X, sendo composto de uma base suporte, caixa de velocidades, apalpador, registrador e uma unidade eletrônica. A E.P.U.S.P. possui os dois modelos, sendo um no Laboratório de Engenharia Mecânica e outro no laboratório de Micro-Eletrônica.

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A intenção é projetar um produto mais barato, porém de construção elementar, tal qual o rádio galena foi concebido.

É necessário um estudo cuidadoso do sistema transdutor e dos acionamentos, tanto da leitora como da impressora. O amplificador será encarado como caixa preta, especificando suas variáveis de entrada e saída, bem como os motores de acionamento automático.

Enfim, o valor econômico deverá ser tal que permita ao consumidor uma satisfação mais significativa que o preço que esteja disposto a pagar, dentro de sua exequibilidade financeira.

CONCEPÇÃO PARA O PROJETO

Tentaremos ser inovadores no projeto do transdutor, sendo que recordaremos o princípio da amplificação por cápsulas de cristais, do tipo fonocaptoras de cerca de $1,5 \text{ M}\Omega$ e 500 mV para tensão de entrada nos "Kits" módulo pré-amplificadores da IBRAPE S.A. (tipos M-201 / M-202), desde estas apresentem para 350 mV de saída uma sensibilidade de 260 mV e uma relação sinal/ruído de 63 dB . Este conjunto acoplado ao amplificador de áudio-frequência de 50 W , a uma carga de 4Ω , tipo módulo M-150, conforme recomendado pela IBRAPE, visto que o M-202 fornece um sinal aproximadamente de 300 mV sobre $100 \text{ k}\Omega$, fornecerá o sistema básico de amplificação, que teremos o cuidado de montar especialmente para este trabalho, que vem sendo preparado desde 1980. Deve-se observar que teremos, no mínimo dois canais independentes para operar o perfilômetro.

A necessidade de termos vários canais de entrada, para tomada de medidas em vários pontos distintos, considerando ainda a evolução dos transdutores, que fatalmente exigirá um sistema compatível com os modelos antigos nos obrigará a termos um sistema pré-amplificador universal, com controles de ganho, equilíbrio e superposição de sinais para monitoria ou mixagem. Para tanto, lançaremos mão do módulo pré-amplificador universal M-204 da IBRAPE.

Como as variações de voltagem poderiam alterar as características de saída do M-204, usaremos para **acioná-lo** a moderna fonte estabilizada da série UNITAC, desenvolvida na cidade de Campinas, para 12 V DC.

Será construído um painel de controles de quatro canais independentes (dois para amplificação e dois para osciloscópios ou variplotters, etc.). A característica primordial desta mesa de controles será a de ter comandos independentes de ganho e todas as possibilidades relativas de equilíbrio e comutação a pleno sinal (instantânea) ou com controle parcial (de forma gradual, podendo estabilizar-se onde se queira). Este aparelho também será apresentado "in loco" e em realidade no dia da exposição do trabalho. Alguns pequenos detalhes operacionais ainda serão abordados, porém não entraremos no mérito de sua construção, bem como dos outros "kits", pois serão a parte prática do trabalho, embora possamos abrí-los para mostrar as blindagens eletromagnéticas que foram especialmente construídas para maximizar as relações sinal / ruído do sistema global.

Assim, nossas únicas preocupações finais serão obter um transdutor universal. Se, eventualmente os circuitos casadores de impedância forem ainda insuficientes, poderemos lançar mão do moderníssimo módulo de amplificação de 1,7 W, M-302, com circuito integrado, que pode até operar com pilhas, para controle rigoroso das flutuações de medida, por operar com o TCA 160 B, integrado de alto ganho e estabilidade, que poderá ser acoplado ao pré-amplificador M-204, com modificações apropriadas, visto que é fornecido basicamente para operar com cápsulas de relutância variável.

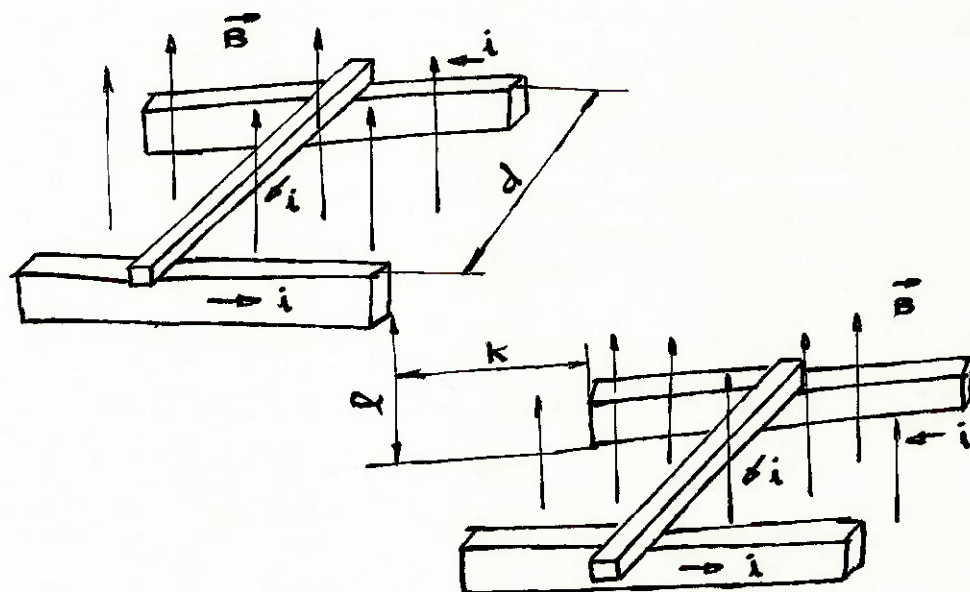
Tentaremos ser inovadores no projeto do transdutor, para o qual engastaremos, através de travas químicas, uma haste mecânica num cristal piezoelétrico, como um apalpador que deslizará relativamente a uma fita animada de M.R.U., tal que se produza uma frequência compatível com os harmônicos naturais do transdutor.

O registrador poderá ser um galvanômetro comum, analógico ou di-

gital, comprado (4 1/2 dígitos, no mínimo) ou improvisado com sistema de mola de torção ou cabelo, conforme alguns princípios teóricos que serão abordados, na sequência do trabalho. O transdutor será de pequena pressão de contacto, ficando numa base suporte plena de tolerâncias de forma e posição, onde a fita correrá com M.U. à várias rotações escalonadas de um motor de corrente contínua, através de um circuito VARIAC.

FORMULAÇÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS

Regulação da pressão de contacto. O carro principal de acionamento terá seus mancais imersos em dois pares de trilhos metálicos, fixos e paralelos, espaçados de d :



O carro será montado sobre estas barras metálicas uniformes (mancais) e o sistema terá massa m , distribuída igualmente nos dois apoios.

O coeficiente de atrito é μ e na região atua um campo de indução uniforme, de valor B , num campo gravitacional g .

Na condição limite, vamos determinar que valor assume i para que as barras deslizem sobre os trilhos. Devido ao campo, atuará sobre o centro da barra uma força horizontal, para a esquerda:

$$F = i d B$$

Esta força deve ser maior que a força de atrito para que haja deslizamento:

$$F_a = \mu P$$

$$\therefore i d B > \mu P$$

$$\therefore i > \frac{\mu P}{B d}$$

$$i > \frac{\mu m g}{2 B d}$$

A haste vibrante será estudada do ponto de vista de sua função de transferência:

Uma grande classe de problemas pode ser representada na forma geral de um sistema de equações diferenciais parciais lineares, de primeira ordem na dimensão espacial e de ordem qualquer em t . As equações para estes sistemas são assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial x} = & \left(f_{11}^0 + f_{11}' \frac{\partial}{\partial t} + \dots + f_{1n}' \frac{\partial^r}{\partial t^r} \right) q_1 + \dots \\ & + \left(f_{1m}^0 + f_{1m}' \frac{\partial}{\partial t} + \dots + f_{1m}^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} + \dots \right) q_m \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_m}{\partial x} = & \left(f_{m1}^0 + f_{m1}' \frac{\partial}{\partial t} + \dots + f_{m1}^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \right) q_1 + \dots \\ & + \left(f_{mm}^0 + f_{mm}' \frac{\partial}{\partial t} + \dots + f_{mm}^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \right) q_m \end{aligned}$$

onde $q_i = q_i(t, x)$

Em forma matricial fica:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = F_0 q + F_1 \frac{\partial q}{\partial t} + F_2 \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \dots + F_r \frac{\partial^r q}{\partial t^r}$$

As matrizes $F_i = [f_{jk}^i]$ podem ser constantes ou, com mais generalidade, funções de x . Daqui por diante, encerraremos a série com o terceiro termo F_2 , pois isto é suficiente para a maioria dos sistemas.

Se supusermos que a solução das equações existe e possui uma transformada de Laplace em relação a t , podemos transformar a última sentença em:

$$\frac{dQ}{dx} = (F_0 + F_1 s + F_2 s^2) Q - F_1 q(0, x) - F_2 [\dot{q}(0, x) - s q(0, x)],$$

onde o ponto indica derivação relativa ao tempo. É possível incluir termos de excitação, isto é:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = F_0 q + F_1 \frac{\partial q}{\partial t} + F_2 \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + u(t, x),$$

sendo a versão transformada:

$$\frac{dQ}{dx} = (F_0 + F_1 s + F_2 s^2) Q + \bar{U}(s, x)$$

onde:

$$\bar{U}(s, x) = U(s, x) - F_1 q(0, x) - F_2 [\dot{q}(0, x) + s q(0, x)]$$

e:

$U(s, x) = \mathcal{L} [u(t, x)]$, com uma solução do tipo:

$$Q(s, x) = H(s, x - x_0) Q(s, x_0) + \int_{x_0}^x H(s, x - \xi) \bar{U}(s, \xi) d\xi$$

(0-0)

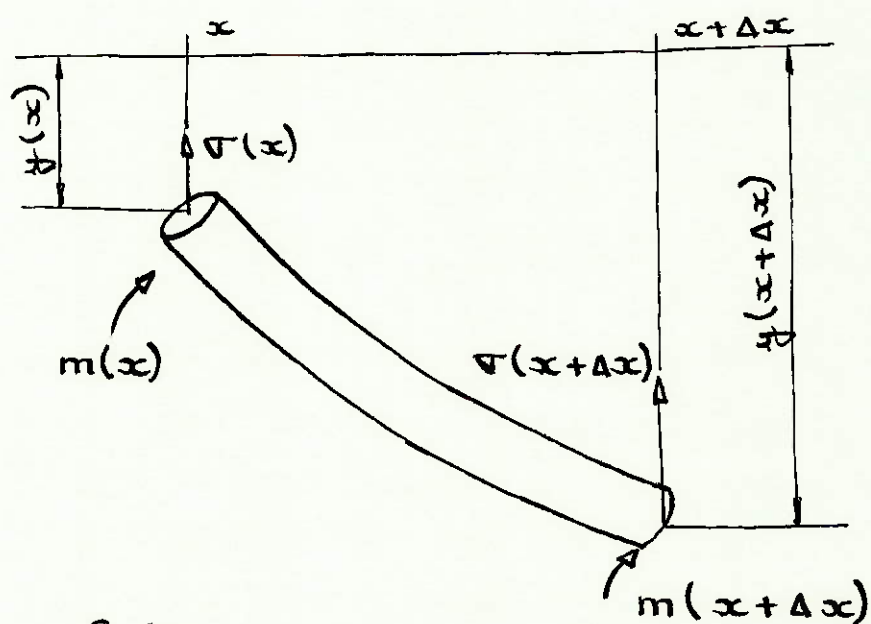
onde $H(s, x)$ é a matriz fundamental para a forma homogênea. Em particular, quando F_0 , F_1 e F_2 são matrizes constantes, a matriz fundamental é:

$$\begin{aligned} H(s, x) &= \exp. [(F_0 + F_1 s + F_2 s^2)x] = \\ &= I + (F_0 + F_1 s + F_2 s^2)x + (F_0 + F_1 s + F_2 s^2)^2 \frac{x^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

- folha 08 -

Desenvolvendo a série de $H(s, x)$, será verificado que cada elemento de $H(s, x)$ é uma série de potências em x cujos coeficientes são polinômios em s . Como a série que define uma exponencial converge para todos os valores finitos de x e para s qualquer número (complexo) finito, é necessário que cada elemento da matriz $H(s, x)$ seja uma função inteira (função analítica para todo valor finito de s) de s para todo valor finito de x .

Considere o movimento de uma haste elástica de seção transversal constante; uma seção de comprimento Δx é mostrada:



Seja:

$y(t, x)$ = deslocamento vertical para baixo, no ponto x , [m];

$\theta(t, x)$ = inclinação da barra no ponto x , [mm];

$m(t, x)$ = momento fletor no ponto x , [N.m];

$\sigma(t, x)$ = tensão de cisalhamento no ponto x , [N/m²];

Então, as equações diferenciais parciais governando o movimento são:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \theta, \text{ definição de inclinação;}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = - \frac{1}{EI} m, \text{ teoria da haste simples;}$$

$$\frac{\partial m}{\partial x} = \tau, \text{ definição de momento fletor};$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - f(x,t), \text{ lei de Newton};$$

onde:

$f(x,t)$ = força externa (para baixo), por unidade de comprimento (se existir), $[N/m]$;

I = momento de inércia da área em torno de seu eixo neutro, $[m^4]$;

E = módulo de elasticidade, $[N/m^2]$,

ρ = densidade linear, $[kg/m = N \cdot s^2/m^2]$;

A primeira equação liga a inclinação à deflexão; a segunda liga a "torção de mola" à variação da inclinação, e a terceira relaciona o momento fletor com a tensão de cisalhamento, e a quarta é a lei de Newton do movimento da aceleração de uma seção de massa $\rho \Delta x$, excitada por uma tensão $\tau(x+\Delta x) - \tau(x)$, quando $\Delta x \rightarrow 0$.

Se a força $f(x,t)$ por unidade de comprimento resulta de amortecimento pelo ar, ela pode ser expressa por:

$$f(x,t) = -k \frac{\partial y}{\partial t}, \text{ e resulta um termo de amortecimento nas equações diferenciais.}$$

Vê-se que as equações acima estão na forma básica. Se o vetor q é definido por:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ m \\ \tau \end{bmatrix}$$

As matrizes F_0 , F_1 , e F_2 são, em ausência de amortecimento viscoso:

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = 0$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Consequentemente:

$$F_0 + F_1 s + F_2 s^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \rho s^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A equação característica para esta matriz é oriunda da matriz característica em frequência, pois a solução geral no domínio do tempo, para o caso de um sistema fixo é determinada como:

$$q(t) = \Phi(t) q(0) + \int_0^t \Phi(t-\lambda) B x(\lambda) d\lambda,$$

onde tomamos $t_0 = 0$ por conveniência. Transformando e usando o teorema da transformada de Laplace de uma convolução, resulta:

$$Q(s) = \hat{\Phi}(s) q(0) + \hat{\Phi}(s) B x(s); (0)$$

Nesta expressão:

$$\hat{\Phi}(s) = \mathcal{L}[\Phi(t)],$$

onde $\Phi(t)$ é a matriz fundamental do sistema.

A transformação de Laplace é um método conveniente de calcular a matriz fundamental de um sistema cujas equações diferenciais estão na forma normal.

Assim, consideremos as equações :

$$\frac{d q(t)}{dt} = A q(t) + B x(t)$$

$$y(t) = C q(t) + D x(t)$$

onde A, B, C e D são matrizes constantes. Tomando a transformada de Laplace de ambos os lados da primeira equação, obtemos:

$$s Q(s) - q(0) = A Q(s) + B X(s) \quad (1)$$

$$Y(s) = C Q(s) + D X(s)$$

onde:

$$Q(s) = \begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \\ \vdots \\ Q_k(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[q_1(t)] \\ \mathcal{L}[q_2(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[q_k(t)] \end{bmatrix}$$

As definições de $X(s)$ e $Y(s)$ são semelhantes e $Q(s), X(s)$ e $Y(s)$ são, assim, as transformadas de Laplace de $q(t), x(t)$ e $y(t)$, respectivamente.

De (1):

$$(sI - A) Q(s) = q(0) + B X(s),$$

onde I é a matriz unidade $k \times k$. Portanto:

$$Q(s) = (sI - A)^{-1} q(0) + (sI - A)^{-1} B \cdot X(s)$$

Comparando este resultado com (0), obtemos a seguinte relação para a matriz fundamental:

$$\hat{\Phi}(s) = (sI - A)^{-1}$$

ou:

$$e^{At} = \Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

Assim, a matriz fundamental é a transformada inversa de Laplace da matriz $\hat{\Phi}(s) = (sI - A)^{-1}$; e chamaremos $\hat{\Phi}(s)$ de matriz característica em frequência.

A forma geral da matriz característica em frequência, $\hat{\Phi}(s) = (sI - A)^{-1}$ torna evidente algumas propriedades importantes de $\hat{\Phi}(s)$ e da matriz fundamental $\hat{\Phi}(t)$.

Observemos, primeiramente, que:

$$\hat{\Phi}(s) = \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|}$$

onde $\text{adj}|sI - A|$ = matriz adjunta de $sI - A$ =
 $= [|sI - A|^{ji}]$, sendo

$|sI - A|^{ji}$ = cofator do i - j -ésimo elemento de $sI - A$

$|sI - A|$ = determinante de $sI - A$

De (2) é claro que o denominador de cada elemento de $\hat{\Phi}(s)$ é, ou $|sI - A|$, ou um fator de lá. Este é o caso em que um cofator de $|sI - A|$ tem um zero em comum com $|sI - A|$.

Num sistema de ordem k , a matriz A é $k \times k$, portanto, o determinante $|sI - A|$ é um polinômio de grau k que pode ser escrito:

$$|sI - A| = s^k + a_1 s^{k-1} + \dots + a_{k-1} s + a_k =$$

$$= (s - \alpha_1)^{m_1} \cdot (s - \alpha_2)^{m_2} \dots (s - \alpha_{k'})^{m_{k'}}$$

(o símbolo k' é usado pois o número k' de raízes distintas é menor que k , se pelo menos uma raiz é repetida).

Este polinômio, que é o denominador de cada elemento de $\hat{\Phi}(s)$, é chamado de polinômio característico do sistema. Os zeros deste polinômio, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k'}$ (isto é, os valores de s para os quais $|sI - A| = 0$) são chamados de auto-valores, ou raízes características do sistema. A equação $|sI - A| = 0$ é chamada de equação característica.

De acordo com esta equação, a equação característica para a matriz da haste elástica é:

$$| \omega I - F_0 - F_1 s - F_2 s^2 | = \begin{vmatrix} \omega & -1 & 0 & 0 \\ 0 &$$

$$= \omega^4 + \frac{\rho s^2}{EI} = 0 \quad (2)$$

Portanto, segue-se os termos da matriz fundamental:

$H(s, x) = \exp[(F_0 + F_1 s + F_2 s^2)x]$ são somas da forma

$$a e^{\lambda x} + b e^{j\lambda x} + c e^{-\lambda x} + d e^{-j\lambda x}, \text{ onde:}$$

$\lambda, -\lambda, j\lambda$ e $-j\lambda$ são as quatro raízes de (2).

Em particular,

$$\lambda = (1+j) \left(\frac{\rho s^2}{4EI} \right)^{1/4}$$

Usando este fato, há um cálculo simples, embora tedioso, para obter a matriz fundamental $H(s, x)$. O resultado é:

$$H(s, x) = \begin{bmatrix} f_1(s, x) & f_2(s, x) & -\frac{f_3(s, x)}{EI} & -\frac{f_4(s, x)}{EI} \\ -\frac{\rho s^2 f_4(s, x)}{EI} & f_1(s, x) & -\frac{f_2(s, x)}{EI} & -\frac{f_3(s, x)}{EI} \\ \rho s^2 f_3(s, x) & \rho s^2 f_4(s, x) & f_1(s, x) & f_2(s, x) \\ \rho s^2 f_2(s, x) & \rho s^2 f_3(s, x) & -\frac{\rho s^2 f_4(s, x)}{EI} & f_1(s, x) \end{bmatrix}$$

onde:

$$f_1(s, x) = \frac{1}{2} (\cosh \lambda x + \cos \lambda x) = \cosh \alpha x \cos \alpha x$$

$$f_2(s, x) = \frac{1}{2\lambda} (\sinh \lambda x + \sin \lambda x) = \frac{1}{2\alpha} (\sinh \alpha x \cos \alpha x + \cosh \alpha x \sin \alpha x)$$

$$f_3(s, x) = \frac{1}{2\lambda^2} (\cosh \lambda x - \cos \lambda x) = \frac{1}{2\alpha^2} \sinh \alpha x \sin \alpha x$$

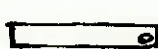
$$f_4(s, x) = \frac{1}{2\lambda^3} (\sinh \lambda x - \sin \lambda x) = \frac{1}{4\alpha^3} (\cosh \alpha x \sin \alpha x - \sinh \alpha x \cos \alpha x)$$

$$\alpha = \left(\frac{\rho s^2}{4EI} \right)^{1/4}$$

Pode-se verificar que f_1, f_2, f_3 e f_4 são todas funções inteiras de s e que não há ponto de ramificação em $s=0$.

Como somente quatro relações são especificadas entre as oito quantidades (quatro em cada terminal), por meio de (oo), quatro condições "iniciais" devem ser dadas para que o problema fique completamente determinado. Condições típicas de "determinação" ou "iniciais" são as seguintes:

a) Terminal engastado  $y(t, x)=0$
 $\theta(t, x)=0$

b) Terminal articulado  $y(t, x)=0$
 $m(t, x)=0$

onde $x=0$ ou L , dependendo do terminal em que a condição é estabelecida.

TEORIA DE SISTEMAS FINITOS

O comportamento dinâmico de um sistema físico distribuído depende não somente da equação diferencial parcial que governa seu comportamento interno, mas também do que acontece nos terminais.

Consideremos o sistema geral:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = F_0 q + F_1 \frac{\partial q}{\partial t} + F_2 \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + u(t, x)$$

com a solução no domínio da frequência dada por (oo):

$$Q(s, x) = H(s, x-x_0) Q(s, x_0) + \int_{x_0}^x H(s, x-\xi) \bar{U}(s, \xi) d\xi$$

Se o sistema é de ordem k no espaço (isto é, q e Q são k vetores), a última equação dá k relações entre as k quantidades num ponto x e as k quantidades num ponto x_0 . Agora, suponhamos que o sistema é de comprimento finito; $0 \leq x \leq L$. Então, em $x=L$,

$$Q(s, L) = H(s, L) Q(s, 0) + \int_0^L H(s, L-\xi) \bar{U}(s, \xi)$$

Estas relações podem ser postas na forma genérica de k equações diferenciais ordinárias independentes:

$$\begin{aligned} m_{11}(D) q_1(t,0) + \dots + m_{1k}(D) q_k(t,0) + \\ + n_{11}(D) q_1(t,L) + \dots + n_{1k}(D) q_k(t,L) = z_1(t) \\ \vdots \\ m_{k1}(D) q_1(t,0) + \dots + m_{kk}(D) q_k(t,0) + \\ + n_{k1}(D) q_1(t,L) + \dots + n_{kk}(D) q_k(t,L) = z_k(t) \end{aligned} \quad (3)$$

onde:

$m_{ij}(D)$ e $n_{ij}(D)$ são operadores diferenciais lineares, e $z_i(t)$ são funções de excitação externas (as entradas físicas ou combinações lineares delas).

Em forma matricial-vetorial (3), fica:

$$M(D)q(t,0) + N(D)q(t,L) = z(t) \quad ; \quad (4)$$

A transformação de Laplace de (4) resulta na expressão seguinte, para as relações terminais no domínio das frequências:

$$M(s)Q(s,0) + N(s)Q(s,L) = \bar{z}(s), \text{ onde:} \quad (5)$$

$\bar{z}(s)$ é a soma da transformada de Laplace de $z(t)$ e de quaisquer termos de condição inicial que surjam na transformação de (4), transpostos para o lado direito. A terminação é dita homogênea se $\bar{z}(s) = 0$.

Observe-se que cada uma das equações diferenciais de (3) pode envolver quantidades em ambos os extremos do sistema distribuído. Este é o tipo de terminação característico de um sistema à realimentação, onde quantidades em um terminal são feitas dependentes de quantidades no outro. Quando não há realimentação, as quantidades em cada terminal são governadas por equações diferenciais que não envolvem quaisquer quantidades do outro. Em particular, no domínio da frequência, tornar-se-ia duas equações separadas.

$$A(s) Q(s, 0) = \bar{Z}_1(s)$$

$$A(s) Q(s, L) = \bar{Z}_2(s)$$

onde a primeira representa k_1 equações independentes e a segunda representa $k-k_1$ equações independentes.

Para obter uma representação completa do sistema governado por (00) e (5), substituímos a primeira na segunda, com $x_0=0$ e $x=L$; o resultado é:

$$\begin{aligned} [M(s) + N(s)H(s, L)] Q(s, 0) &= V(s), \text{ onde:} \\ V(s) &= \bar{Z}_2(s) - N(s) \int_0^L H(s, L-\xi) \bar{U}(s, \xi) d\xi \quad (6) \end{aligned}$$

Se as relações (3) são de fato independentes (o que é um requisito de um sistema completamente especificado); $M(s) + N(s)H(s, L)$ é de posto k e tem um universo. Portanto, podemos escrever

$$Q(s, 0) = [M(s) + N(s)H(s, L)]^{-1} V(s).$$

Assim, a matriz de transferência da "entrada" V até $Q(s, 0)$ é $[M(s) + N(s)H(s, L)]^{-1}$. Com mais generalidade, usando (00) com $x_0=0$:

$$\begin{aligned} Q(s, x) &= H(s, x) [M(s) + N(s)H(s, L)]^{-1} V(s) + \\ &+ \int_0^x H(s, x-\xi) \bar{U}(s, \xi) d\xi \quad (7) \end{aligned}$$

Em muitos casos de interesse prático, é mais simples fazer os cálculos implícitos em (7) sem usar álgebra matricial. A expressão formal é conveniente por razões teóricas e como um método de evitar erros computacionais. O resultado seguinte mostra a utilidade deste formalismo geral.

Se não há termos de excitação e condições iniciais de forma distribuída, (7) pode ser escrita:

$$Q(s, x) = H(s, x) [M(s) + N(s)H(s, L)]^{-1} Z(s),$$

onde $Z(s)$ é a transformada de Laplace dos termos de

excitação externa em (3). Portanto, a matriz de funções de transferência de z a $Q(s, x)$ é dada por $K(s, x) = H(s, x) [M(s) + N(s) H(s, L)]^{-1}$.

Cada termo na matriz $M(s) + N(s) H(s, L)$ é uma soma de produtos de funções inteiras e é assim uma função inteira. Todos os elementos de sua adjunta são também funções inteiras. Analogamente, o determinante

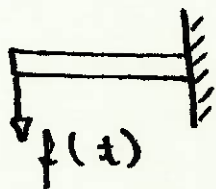
$$|M(s) + N(s) H(s, L)|$$

é uma soma de produtos de funções inteiras e é uma função inteira. Consequentemente, cada termo da matriz $K(s, x)$ é um quociente de funções inteiras de s . Como o quociente de funções inteiras é uma função meromórfica, temos o seguinte teorema:

"A função de transferência de qualquer entrada a qualquer variável dinâmica no sistema distribuído (0,0), cujas funções terminais são dadas por (3), é uma função meromórfica de s ."

Isto significa que são polos as únicas singularidades que qualquer função de transferência pode ter no plano s finito.

Consideremos o movimento transversal de uma haste flexível, engastada numa parede por sua extremidade direita $x=L$ e com uma força $f(t)$ aplicada à sua extremidade esquerda:



As condições terminais no extremo esquerdo são expressas por

$$q_3(t, 0) = m(t, 0) = 0$$

(não há momento fletor)

$$q_4(t,0) = v(t,0) = f(t)$$

As condições terminais na extremidade direita são expressas por:

$$q_1(t,L) = y(t,L) = 0$$

e/ou:

$$(1) q_3(t,L) = m(t,L) = 0 ; \text{ se fixada a eixo;}$$

ou:

$$(2) q_2(t,L) = \theta(t,L) = 0 ; \text{ se engastada}$$

Em forma matricial, as transformadas de Laplace destas condições terminais são expressas como:

$$M(s)Q(s,0) + N(s)Q(s,L) = z(s), \text{ onde:}$$

$$M(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad z(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F(s) \end{bmatrix}$$

$$(1) N(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se fixada ao eixo

ou:

$$(2) N(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se engastada.

Para a extremidade engastada temos:

$$M(s) + N(s) H(s, L) = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & -\frac{f_3}{EI} & -\frac{f_4}{EI} \\ -\frac{\rho s^2 f_4}{EI} & f_1 & -\frac{f_2}{EI} & +\frac{f_3}{EI} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde as expressões para f_1 , f_2 , f_3 e f_4 são as vistas anteriormente, calculadas em $x = L$. Então:

$$\left[M(s) + N(s) H(s, x) \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{f_1}{\Delta} & -\frac{f_2}{\Delta} & \frac{f_1 f_3 - f_2^2}{EI \Delta} & \frac{f_1 f_4 - f_2 f_3}{EI \Delta} \\ \frac{\rho s^2 f_4}{EI \Delta} & \frac{f_1}{\Delta} & \frac{\rho s^2 f_3 f_4}{EI \Delta + f_1 f_2} & \frac{\rho s^2 f_3 f_4}{EI \Delta + f_1 f_3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $\Delta = f_1^2 + \rho s^2 f_2 f_4 / EI$

Após simplificação, acha-se:

$$\Delta = \frac{1}{2} (\cosh^2 \alpha L + \cos^2 \alpha L) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\cosh^2 \left(\frac{\rho s^2}{4EI} \right)^{1/2} L + \cos^2 \left(\frac{\rho s^2}{4EI} \right)^{1/2} L \right]$$

como cálculo mais específico, calculemos a função de transferência da força externa $F(s)$ à deflexão $y(s,0)$:

$$\frac{y(s,0)}{F(s)} = k_{14}(s,0)$$

onde:

$$\begin{aligned} k(s,0) &= [M(s) + N(s)H(s,L)]^{-1} H(s,0) = \\ &= [M(s) + N(s)H(s,L)]^{-1} \text{ pois } H(s,0) = I \end{aligned}$$

Agora:

$$k_{14}(s,0) = \frac{f_1 f_4 - f_2 f_3}{EI \Delta}$$

Após simplificação acha-se:

$$\begin{aligned} f_1 f_4 - f_2 f_3 &= \frac{1}{4\alpha^3} (\sin \alpha L \cos \alpha L - \sinh \alpha L \cosh \alpha L) \\ &= \frac{1}{8\alpha^3} (\sin 2\alpha L - \sinh 2\alpha L) \end{aligned}$$

de forma que:

$$k_{14}(s,0) = \frac{\sin 2\alpha L - \sinh 2\alpha L}{4EI\alpha^3 (\cosh^2 \alpha L + \cos^2 \alpha L)}$$

onde:

$$\alpha = \left(\frac{\rho s^2}{4EI} \right)^{1/4}$$

Observe-se que $k_{14}(s,0)$ é uma função meromórfica de s .

Os cálculos anteriores sugerem os parâmetros de maior sensibilidade.

A compatibilidade se inicia com a adoção dos primeiros valores numéricos.

A estabilidade pode ser avaliada pelo algoritmo de Routh - Hurwitz, ou seja, para um sistema, todas as funções de transferência têm o denominador:

$|M(s) + N(s)H(s,L)|$, cujos zeros são os polos do sistema. Assim, a resposta a impulso de qualquer entrada a qualquer saída pode ser expressa como uma soma de exponenciais:

$$b(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{s_n t}$$
, onde s_n são as raízes da equação característica:

$$|M(s) + N(s)H(s,L)| = 0$$

Assim, segue-se que $b(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ se e somente se, $\text{Re } s_n < 0$, $n=1,2,\dots$ (desde que (E) convirja uniformemente em n quando $t \rightarrow \infty$). Assim, o problema de estabelecer se o sistema é estável é equivalente ao problema de estabelecer se as raízes (em número infinito de (E^*)), todas, estão no semi-plano esquerdo.

A otimização pode assumir a estabilidade como critério.

As projeções futuras se apegam à tecnologia dos materiais e a previsão do comportamento foi amplamente estudada.

A verificação da concepção é feita estabelecendo-se paralelos entre os perfilômetros já existentes induzindo a um projeto simplificado, como faremos a seguir:

Como vimos, as raízes características do sistema são:

$$\lambda_1 = (1+j) \left(\frac{\rho s^2}{4EI} \right)^{1/4}$$

$$\lambda_2 = (1-j) \left(\frac{\rho s^2}{4EI} \right)^{1/4}$$

$$\lambda_3 = (-1+j) \left(\frac{\rho s^2}{4EI} \right)^{1/4}$$

$$\lambda_4 = (-1-j) \left(\frac{\rho s^2}{4EI} \right)^{1/4}$$

As raízes características que devem se anular na haste semi-infinita são assim λ_1 e λ_2 . Prontamente estabelece-se que

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ -EI\lambda_1^2 & -EI\lambda_2^2 & -EI\lambda_3^2 & -EI\lambda_4^2 \\ -EI\lambda_1^3 & -EI\lambda_2^3 & -EI\lambda_3^3 & -EI\lambda_4^3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{1/2}k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2k^2EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2^{3/2}k^3EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{j\pi/4} & e^{-j\pi/4} & e^{j3\pi/4} & e^{-j3\pi/4} \\ e^{j\pi/2} & e^{-j\pi/2} & e^{j3\pi/2} & e^{-j3\pi/2} \\ e^{j3\pi/4} & e^{-j3\pi/4} & e^{j9\pi/4} & e^{-j9\pi/4} \end{bmatrix}$$

onde

$$k = \left(\rho s^2 / 4EI \right)^{1/4}$$

Portanto

$$T^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\pi/4} & e^{-j\pi/2} & e^{-j3\pi/4} \\ 1 & e^{j\pi/4} & e^{j\pi/2} & e^{j3\pi/4} \\ 1 & e^{-j3\pi/4} & e^{-j\pi/2} & e^{-j\pi/4} \\ 1 & e^{j3\pi/4} & e^{j\pi/2} & e^{j\pi/4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^{1/2}k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2k^2EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2^{3/2}k^3EI} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-j}{2k} & -\frac{j}{2k^2EI} & \frac{1+j}{4k^3EI} \\ 1 & \frac{1+j}{2k} & -\frac{j}{2k^2EI} & \frac{1-j}{4k^3EI} \\ 1 & \frac{-1-j}{2k} & -\frac{j}{2k^2EI} & \frac{-1+j}{4k^3EI} \\ 1 & \frac{-1+j}{2k} & -\frac{j}{2k^2EI} & \frac{-1-j}{4k^3EI} \end{bmatrix}$$

Considerando a matriz composta das m primeiras linhas da inversa da matriz $T(s)$, que chamaremos de $W_1(s)$. Como na haste semi-infinita não deve haver onda refletida e observando que as primeiras m colunas correspondem aos m autovalores não permitidos pelo vínculo de terminação característica imposto, chegaremos que, para um sistema físico, é necessário ter:

$$W_1(s) \varphi(s, x) \equiv 0 \text{ em todo } x.$$

Esta é a forma genérica da equação de vínculo característico, que resultam, no

-folha 24-

nosso estudo, nas equações

$$Y + \frac{1-j}{2k} \Theta + \frac{j}{2k^2 EI} M + \frac{1+j}{4k^3 EI} \Sigma = 0$$

$$Y + \frac{1+j}{2k} \Theta - \frac{j}{2k^2 EI} M + \frac{1-j}{4k^3 EI} \Sigma = 0$$

onde Y, Θ, M, Σ são as transformadas de Laplace de $y(t, x), \theta(t, x), m(t, x)$ e $\tau(t, x)$, respectivamente. Adicionando e subtraindo estas equações, achamos:

$$Y + \frac{\Theta}{2k} + \frac{1}{4k^3 EI} \Sigma = 0$$

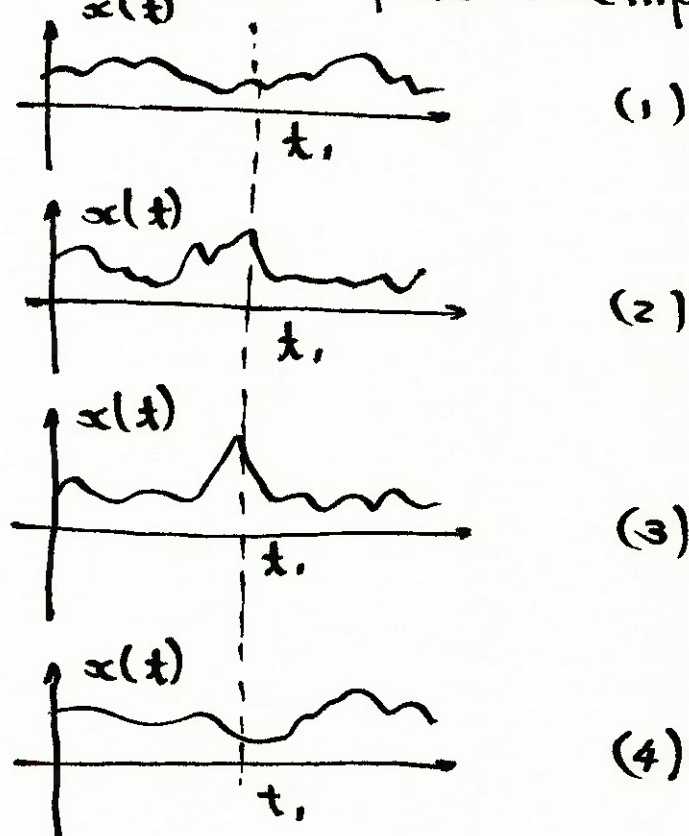
$$\frac{\Theta}{2k} - \frac{M}{2k^2 EI} - \frac{\Sigma}{4k^3 EI} = 0$$

que são duas relações entre transformadas de deslocamento, inclinação, momento fletor, e tensão de cisalhamento, e que devem ser satisfeitas para todo x da haste semi-infinita.

Os sinais de muitos sistemas físicos não são funções do tempo conhecidas, e somente podem receber descrição estatística. Dentre inúmeros exemplos de tais sinais estão a posição das moléculas de um gás, a velocidade dos ventos na superfície terrestre, o número de circuitos ligados a uma central telefônica. Uma descrição estatística dos fenômenos físicos

é, de fato, a única descrição consistente com a física moderna. Muitos fenômenos podem ser descritos pelo comportamento médio de muitos sinais ao acaso, e as médias podem ser descritas por funções do tempo conhecidas (determinísticas). Em muitas situações, porém, o comportamento médio é de relativamente pequeno interesse, e a principal preocupação é com outras propriedades estatísticas. Tais situações aparecem no projeto de sistemas de comunicações, de controle, e em muitas outras áreas de tecnologia. Um estudo dos sinais aleatórios e dos sistemas em que eles ocorrem é um aspecto importante da teoria de sistemas.

A noção de um processo aleatório pode ser ilustrada pelo exemplo do rugosímetro:



Onde os números indicam diferentes amostras e representam uma função amostra

do conjunto. O conjunto de sinais é a aparência física de um processo aleatório; a informação estatística completa necessária para descrever o conjunto define o processo aleatório matematicamente. Se uma função amostra é indicada por $x(t)$, o conjunto é designado por $\{x(t)\}$.

Considerando um instante específico t , As amplitudes das funções aleatórias $x_i = x_i(t)$ cujos valores possíveis são indicados por $x_i = x_i(t)$. O comportamento estatístico da variável aleatória é descrito por uma função de distribuição de probabilidade (de primeira ordem)

$$P_{x_i}(x_i, t_i) = \text{Probabilidade } [x(t_i) \leq x_i]$$

e a correspondente função de densidade de probabilidade (de primeira ordem)

$$p_{x_i}(x_i, t_i) = \frac{\partial P_{x_i}(x_i, t_i)}{\partial x_i}$$

O índice x_i em p indica a variável aleatória da função, e t_i é um parâmetro indicativo do instante para o qual vale a descrição estatística. Assim, a probabilidade de que a variável aleatória x_i fique no pequeno intervalo entre x_i e $x_i + dx_i$ é dada pelo elemento de probabilidade $p_{x_i}(x_i, t_i) dx_i$.

Segue-se que:

$$\text{Prob}[a < x(t_i) \leq b] = \int_a^b p_{x_i}(x_i, t_i) dx_i$$

densidade $p_1, p_2, p_3, \dots$, onde cada p_i ou p_i é uma função de z_i argumentos. Tais funções de ordem mais alta, porém, não serão necessárias em nossa discussão de sistemas lineares.

Consideremos, para a haste do perfilômetro a seguinte função amostra, do processo aleatório $\{x(t)\}$ com funções-amostra

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \theta)$$

onde θ indica valores possíveis de uma variável aleatória e ω_0 é uma constante. Se a distribuição de θ é dada, o comportamento do processo $\{x(t)\}$ está completamente descrito. O conjunto das formas de onda consiste de senóides com fase inicial aleatória; a cada sinal amostra $x(t)$ corresponde alguma defasagem θ . Suponha que θ seja distribuída uniformemente no intervalo 0 a 2π de forma que:

$$p_\theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A função de densidade de probabilidade, de primeira ordem, $p_x(x, t)$, pode ser obtida como segue. Para valores fixos de t tais que $0 \leq \omega_0 t + \theta \leq \pi$,

$$p_\theta(\theta) |d\theta| = p_x(x, t) |dx|$$

ou:

$$p_x(x, t) = \frac{p_\theta(\theta)}{|dx/d\theta|}$$

Como

$$|dx/de| = \sin(\omega_0 t + \theta) = \sqrt{1-x^2},$$

obtemos

$$p_x(x, t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-x^2}} \quad 0 \leq \omega_0 t + \theta \leq \pi$$

sendo $|x| \leq 1$. Como, para valores de θ tais que $\pi \leq \omega_0 t + \theta \leq 2\pi$, a curva de x versus θ é simétrica com sua outra metade, a densidade de probabilidade de x é dobrada, dando:

$$p_x(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

Este resultado pode ser obtido de outra maneira vantajosa quando a distribuição de θ é mais complicada. Primeiro, determine a função de distribuição de x exprimindo-a em função de θ . Para um instante arbitrário t , e para valores de x no intervalo $[-1, 1]$,

$$P_x(x, t) = \text{Prob}[x(t) \leq x] = \text{Prob}[\cos(\omega_0 t + \theta) \leq x]$$

$$= \text{Prob}[\cos^{-1}x \leq \omega_0 t + \theta \leq 2\pi - \cos^{-1}x],$$

limitando-se os valores de $\cos^{-1}x$ ao intervalo $[0, 2\pi]$. Portanto, por causa da simetria e da distribuição uniforme de θ ,

$$P_x(x, t) = 2 \text{Prob}[\cos^{-1}x \leq \omega_0 t + \theta \leq \pi]$$

$$= 2 \text{Prob}[\cos^{-1}x - \omega_0 t \leq \theta \leq \pi - \omega_0 t]$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta = - \frac{P}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - Lx + C_1 \right)$$

$$y = - \frac{P}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2} + C_1x + C_2 \right)$$

$$p/ x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow C_2=0$$

$$p/ x=0 \Rightarrow \theta=0 \Rightarrow C_1=0$$

$$y = - \frac{P}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - Lx^2 \right)$$

$$p/ x=L$$

$$y = - \frac{P}{EI} \left(\frac{L^3}{6} - L^3 \right) = \frac{PL^3}{3EI}$$

Resumindo:

$$y = - \frac{P}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - Lx^2 \right)$$

$$\theta = - \frac{P}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - Lx \right)$$

Consideremos P variando segundo a função amostra $\cos \omega t$:

$$y = - \frac{P \cos \omega t}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - Lx^2 \right)$$

$$\theta = \frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{P \cos \omega t}{EI} (x^2 - 2Lx)$$

$$M = P \cos \omega t (x - L)$$

$$\sigma = \frac{M}{I} y \text{ (flexão simples)}$$

